educo.ir

دانلود سوالات آزمون‌های مختلف

بسم الله الرحمن الرحیم

سوالات و پاسخ
مرحله دوم
نخستین المپیاد
نجوم و اخترفیزیک

ویرایش و پاسخ: کامبیز خالقی

تذکرات پیش از آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

۱- تعداد سؤالات این آزمون ۸ سؤال و وقت آن ٤ ساعت است.

۲- بر روی هر برگه پیش نویس که به شما داده می‌شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.

۳- در زیر خط چین بالای پاسخنامه غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه‌ای ننویسید.

٤- معرفی نامه و کارنامه‌ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن‌ها را ملاحظه و جمع‌آوری نماید.

٥- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه ریزی نباشد، مجاز است.

٦- استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و آلماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.

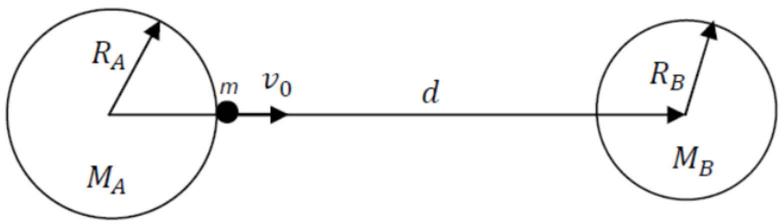
۷- هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش یا روشن) تخلف محسوب می‌شود. لذا آن را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.

۸- نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.

ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱} m^{۳} kg^{-۱} s^{-۲}$
c	سرعت نور	$۳\times ۱۰^{۸} ms^{-۱}$
pc	پارسک	$۳/۰۹\times ۱۰^{۱۶} m$
Au	واحد نجومی	$۱/۵۰\times ۱۰^{۱۱} m$
Ly	سال نوری	$۹/۴۶\times ۱۰^{۱۵} m$
$R_{\odot}$	شعاع خورشید	$۶/۹۶\times ۱۰^{۸} m$
$R_{\oplus}$	شعاع زمین	$۶/۳۸\times ۱۰^{۶} m$
	شعاع ماه	$۱/۷۴\times ۱۰^{۶} m$
	شعاع مداری ماه	$۳/۸۴\times ۱۰^{۸} m$
$M_{\oplus}$	جرم زمین	$۵/۹۷\times ۱۰^{۲۲} kg$
$T_{\odot}$	دمای خورشید	$۵۷۷۷ K$
$L_{\odot}$	درخشندگی خورشید	$۳/۸۵\times ۱۰^{۲۶} W$
	ثابت خورشیدی	$۱/۳۷\times ۱۰^{۳} Wm^{-۲}$
$m_{\odot}$	قدر ظاهری خورشید	$-۲۶/۸$
H	ثابت هابل	$۷۰ km\, s^{-۱} Mpc^{-۱}$

۱) IRYSC.COM دو کره تو پر به جرم‌های M_A, M_B را در نظر بگیرید، که مراکز آن‌ها در فاصله‌ی ثابت d از یکدیگر قرار گرفته‌اند. شعاع دو کره به ترتیب R_A, R_B است و داریم: $M_A = 8M_B$, $d = 8R_B$.



ذره‌ای به جرم m را از سطح کره‌ی A و در جهت خط‌المرکزین دو کره با سرعت اولیه V_0 پرتاب می‌کنیم. حداقل V_0 چقدر باشد تا جرم m به کره‌ی B برسد؟

۲) IRYSC.COM می‌دانیم که حدود ۶۰ درصد از ستارگان آسمان، ستاره‌هایی هستند که در منظومه‌هایی دوتایی یا چندتایی به دور گرانی‌گاه مشترکشان می‌چرخند. اگر صفحه‌ی دوران ستاره تقریباً بر صفحه آسمان عمود باشد، دو ستاره از دید ناظر زمینی از مقابل هم می‌گذرند و چیزی شبیه خورشیدگرفتگی رخ می‌دهد. به این ستارگان، ستاره‌های دوتایی گرفتی می‌گویند. ستاره‌های دوتایی گرفتی ستاره‌هایی هستند با نورانیت متغیر؛ که تغییرات نور آن‌ها از روی زمین قابل اندازه‌گیری است، هر چند که در اکثر موارد دو ستاره از دید تلسکوپ قابل تفکیک نیستند. معروف‌ترین ستاره‌ی متغیر گرفتی که از قدیم مورد توجه اخترشناسان بوده است، ستاره‌ی راس‌الغول در صورت‌فلکی برساووش است که تغییرات نور آن به راحتی با چشم غیرمسلح نیز قابل مشاهده است. اخترشناسان به کمک بررسی نور ستاره‌های دوتایی به خصوصیات فیزیکی ستارگان پی می‌برند و صحت نظریه‌های اخترفیزیکی را تحقیق می‌کنند.

فرض کنید همه ستاره‌های دوتایی در آسمان از دو ستاره به جرم‌های $M_1 = M_2 = M_\odot$ و شعاع‌های $R_1 = R_2 = R_\odot$ تشکیل شده باشند و فاصله متوسط آن‌ها در حدود ۰/۱ واحد نجومی است. با این حساب چند درصد ستارگان دوتایی باید متغیر گرفتی باشند؟

۳) IRYSC.COM بازه زمانی بین غروب خورشید و زمانی که زاویه‌ی سمت‌الراس آن به ۱۰۸ می‌رسد، اصطلاحاً شفق خوانده می‌شود. با توجه به این حساب کنید که در عرض‌جغرافیایی $60^\circ N$ در چه روزهایی از سال آسمان هرگز به طور کامل تاریک نمی‌شود.

٤) IRYSC.COM اگر زاویه تمایل محور زمین $23^\circ 27'$ باشد، در تاریخ ١٦ اردیبهشت سال ١٣٨٤ ، در شهری با طول‌جغرافیایی $48^\circ 30'$ و عرض‌جغرافیایی $34^\circ 48'$، سمت خورشید ($A_\odot$) در هنگام طلوع و مدت زمان ΔT که خورشید بالای افق خواهد بود را حساب کنید. (در این سوال زوایا باید بر حسب دقیقه قوسی محاسبه شود.)

۵) IRYSC.COM فرض کنید خورشید وارد یک سحابی کروی با توزیع چگالی همگن $\rho_\circ$ شود، اگر در فاصله‌ی $R_\circ$ از مرکز سحابی سرعت خورشید v_s و جهت آن عمود بر شعاع سحابی باشد، با فرض اینکه نیروی مقاومت گاز تشکیل دهنده‌ی سحابی در حرکت خورشید تأثیر نداشته باشد (حرکت ابقایی است) ، دوره تناوب مدار خورشید به دور مرکز سحابی (P) را بدست آورده و نیم قطر بزرگ (a) و خروج از مرکز مدار (e) را حساب کنید. دقت کنید در این سیستم مرکز بیضی مدار بر مرکز سحابی منطبق است و قوانین بقا حرکت زاویه‌ای و انرژی برقرار هستند، به‌طوری‌که داریم:

$$L = M_\odot R v_\odot \qquad , \qquad \frac{۱}{۲} M(v_r^۲ + v_\theta^۲) + V(R) = E$$

که در آن‌ها، R فاصله از مرکز سحابی، $V(R)$ انرژی پتانسیل گرانشی، E انرژی مکانیکی کل و L اندازه حرکت زاویه‌ای هستند. v_r, v_θ به ترتیب مولفه‌های مماسی و شعاعی بردار سرعت خورشید، هنگام حرکت آن به دور مرکز سحابی است.

٦) IRYSC.COM نیکلای کپرنیک، ستاره‌شناس لهستانی در قرن پانزدهم و شانزدهم میلادی می‌زیست. او به نظریه‌ی خورشید مرکزی معتقد بود، تفاوت بین دوره‌ی نجومی و دوره‌ی هلالی سیارات را دریافت و توانست فاصله‌ی سیارات از خورشید را حساب کند و مدلی بر مبنای مرکزیت خورشید در عالم بنا کرد. در این مسئله شما خود را جای کپرنیک می‌گذارید و به روش او فاصله‌ی سیارات از خورشید را حساب می‌کنید.

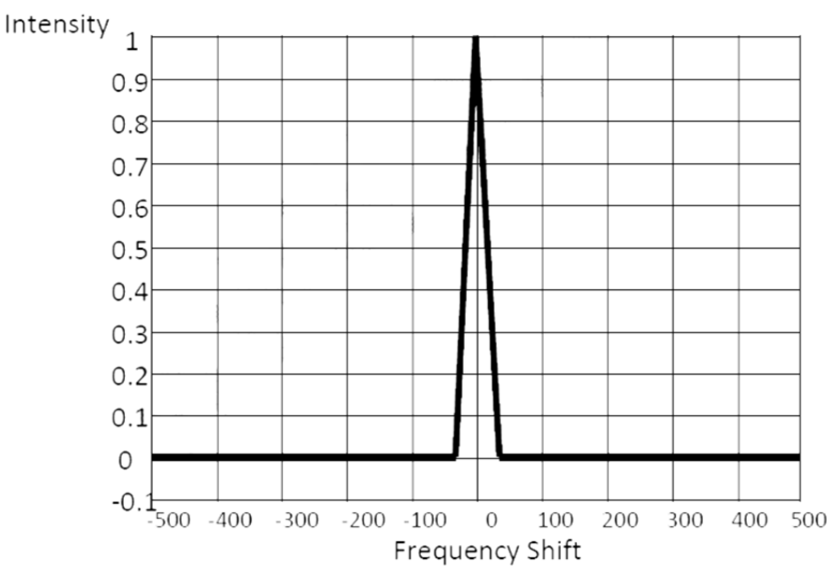
توجه: در این مسئله نباید از قوانین کپلر، مکانیک نیوتنی و جاذبه‌ی عمومی استفاده شود.

فرض کنید شما سیاره‌ای را در آسمان می‌بینید که در اولین شب رشد در حالت مقابله است. ۸۹ روز بعد سیاره در حالت تربیع دیده می‌شود و ٤۸۹ روز بعد، سیاره دوباره به مقابله می‌رسد. منجمان دیگر که معتقد به نظریه‌ی زمین مرکزی بودند می‌گویند که فاصله این سیاره از زمین نباید بیشتر از فاصله زمین از خورشید باشد، زیرا سرعت حرکت خاص آن به دور زمین از خورشید کمتر است. شما برای اثبات نظر خود مبنی بر اینکه خورشید در مرکز عالم است، باید فاصله این سیاره از خورشید و دوره تناوب آن به دور خورشید را حساب کنید. کپرنیک با همین اطلاعات فاصله‌ی سیارات را حساب کرد.

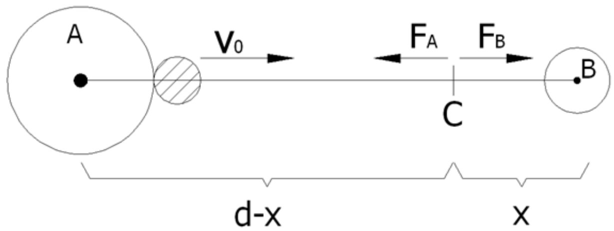
۷) IRYSC.COM معمولاً ستارگان از طریق باد خورشیدی جرم از دست می‌دهند. همچنین فرآیندهای گداخت هسته‌ای همواره بخشی از جرم ستاره را به انرژی تبدیل می‌کند که از طریق تابش از ستاره خارج می‌شود. در نتیجه، از این طریق نیز ستارگان جرم از دست می‌دهند. به ویژه غول‌های سرخ، آهنگ کاهش جرم بالایی دارند. فرض کنید، یک ستاره‌ی غول سرخ با جرم $M = ۵M_\odot$، دارای سیاره باشد که در مداری با فاصله‌ی $a = ۱۰AU$ از ستاره، به دور آن می‌گردد. این ستاره با آهنگ $۱۰^{-۸} M_\odot / year$ جرم خود را به صورت باد ستاره‌ای از دست می‌دهد. اگر تابندگی ستاره $L = ۳/۸۳ \times ۱۰^{۳۹}\, erg/s$ باشد، آهنگ سالانه تغییر اندازه‌ی مدار سیاره $\left(\frac{da}{dt}\right)$ در اثر کاهش جرم چقدر است؟

۸) IRYSC.COM امروزه یکی از روش‌های دقیق بررسی سیارات منظومه‌شمسی ارسال امواج رادار به سیارات نزدیک، همچون عطارد، و بررسی امواج منعکس شده از این سیاره است. با بررسی طیف منعکس شده می‌توان سرعت حرکت وضعی یا سرعت زاویه‌ای سیاره را بدست آورد. فرض کنید توسط راداری متصل به یک ماهواره در مداری دایره‌ای به دور عطارد، یک موج تک فرکانس با فرکانس ۳۰ گیگاهرتز به سمت عطارد ارسال می‌شود. از مشاهدات زمینی بدست آورده‌ایم که قطر این سیاره $d_m \approx ۵۰۰۰km$ و زاویه تمایل محور آن تقریباً صفر است. پس از منعکس شدن امواج رادیویی از سطح سیاره به خاطر پدیده‌ی دوپلر، موج بازگشتی دیگر تک فرکانس نخواهد بود. در نمودار زیر طیف (منحنی شدت بر حسب تغییرات فرکانسی) موج ارسال شده را روی شکل زیر رسم کنید. توجه:

در شکل زیر محور افقی، اختلاف فرکانس موج ارسالی و موج دریافتی را نشان می‌دهد. عدد صفر نشان‌دهنده فرکانس موج ارسال شده یا همان ۳۰ گیگاهرتز است. شدت امواج ارسال شده را $۱Wm^{-۲}$ در نظر بگیرید. از جذب امواج راداری در بین را صرف نظر کنید. ماهواره در صفحه‌ی استوای عطارد حرکت می‌کند و به اندازه‌ی کافی از عطارد دور است.



۱) IRYSC.COM برای آنکه جرم m به کره B برسد باید از نقطه تعادل گرانشی A و B عبور کند. بنابراین حداقل سرعت ، وقتی خواهد بود که جسم m در نقطه‌ی تعادل نیروهای گرانشی به سرعت صفر یا بیشتر از صفر برسد. نیروی گرانش قوی‌تر B ، این جسم را جذب می‌کند. داریم:



در نقطه تعادل گرانشی: $F_A = F_B$

$$\frac{Gm_A m}{(d-x)^2} = \frac{Gm_B m}{x^2} \Rightarrow \frac{x}{d-x} = \sqrt{\frac{m_B}{m_A}}$$

فاصله نقطه تعادل از مرکز B:

$$\Rightarrow \frac{x}{d-x} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{d}{2\sqrt{2}+1}$$

نیروهایی که در حین حرکت جسم m روی آن تأثیر می‌گذارند، نیروهای گرانشی هستند. بنابراین می‌توان از قانون بقای انرژی مکانیکی در حالت پرتاب از سطح A و حالت نقطه تعادل گرانشی C ، استفاده کرد، پس داریم:

$$E_A = E_C$$

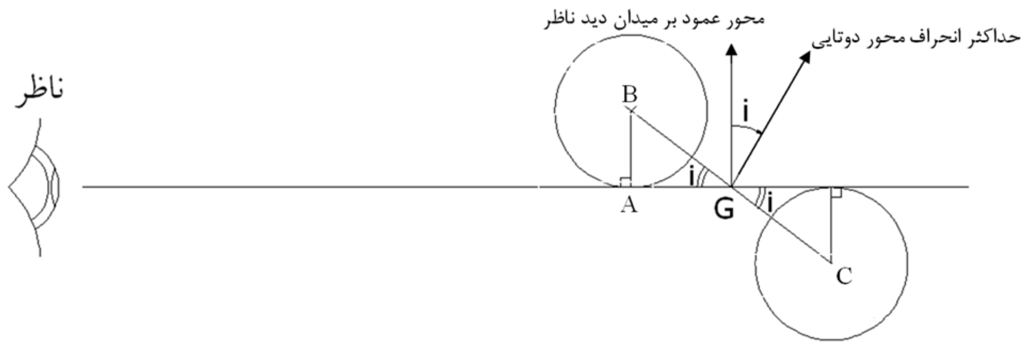
$$\Rightarrow U_A + K_A + U_B = U_c + K_c$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{-Gm_A m}{R_A} + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{Gm_B m}{d-R_A} = \frac{-Gm_A m}{d-x} + \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{Gm_B m}{x} \\ &v_c \approx 0, m_A = 8m_B, d = 8R_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$v_0 \approx \sqrt{2GM_B\left[\frac{8}{R_A} + \frac{1}{8R_B - R_A} - \frac{8}{5.91R_B} - \frac{1}{2.09R_B}\right]}$$

$$\Rightarrow v_0 \approx \sqrt{2GM_B\left(\frac{8}{R_A} + \frac{1}{8R_B - R_A} - \frac{0.875}{R_B}\right)}$$

۲) IRYSC.COM طبق فرض سوال، پراکندگی ستارگان دوتایی یکنواخت است، پس تنها کافیست دوتایی‌هایی را بیابیم که زاویه انحراف مداری آن‌ها به گونه‌ای است که از دید ناظر زمینی از جلوی یکدیگر عبور می‌کنند.



این انحراف که در شکل با i نشان داده شده است با دو زاویه نظیر و متقابل به رأس گرانیگاه، برابر است.

از طرفی طبق فرض سوال مدارها دایره‌ای هستند پس GB با GC برابر است.

$$BC = ۰/۱Au + ۲R_{Sun} \Rightarrow GB = ۰/۰۵Au + R_{Sun} = ۰/۰۵ + ۰/۰۰۴۶۴ = ۰/۰۵۴۶۴Au$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه‌ی GAB چنین می‌نویسیم:

$$\sin i = \frac{AB}{GB} = \frac{۰/۰۰۴۶۴}{۰/۰۵۴۶۴} \;=>\; i = ۴/۸۷$$

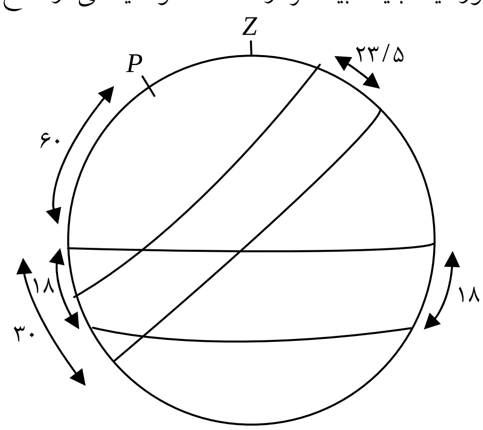
پس زاویه‌های تمایل مداری صفر تا $i = ۴/۸۷$ ، ستارگان دوتایی به شکل متغیر گرفتی دیده می‌شوند. حال داریم:

$$\frac{\text{متغیرهای گرفتی}}{\text{ستارگان دوتایی}} = \frac{۴/۸۷^\circ - ۰^\circ}{۹۰^\circ - ۰^\circ} = \frac{۴/۸۷}{۹۰} = ۵/۴۱\%$$

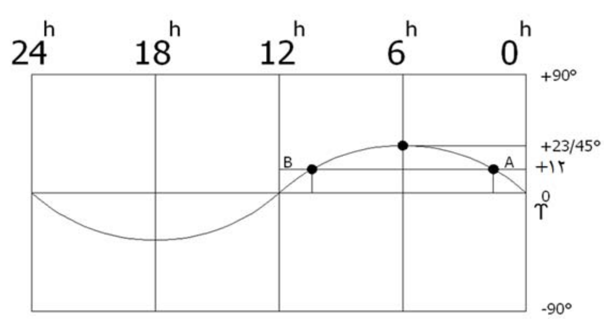
۵/۴۱ ٪ ستارگان دوتایی گرفتی هستند.

۳) IRYSC.COM اگر قرار باشد آسمان کاملاً تاریک شود، فاصله‌ی سمت الرأسی خورشید نباید بیشتر از ۱۰۸° شود. یعنی ارتفاع خورشید در هنگام عبور پایینی نباید کمتر از -۱۸° شود.

در عرض‌جغرافیایی ۶۰ درجه شمالی، نمودار آسمان بدین شکل است:



از این نمودار در می‌یابیم که در مدت زمان روشن بون آسمان، میل خورشید باید بین ۱۲ = ۱۸−۳۰ و ۲۳/۵ شمالی تغییر کند. از طرفی می‌دانیم که نمودار تغییرات بعد و میل خورشید به قرار ذیل است:



پس ابتدا طول دایره‌البروجی خورشید در میل ۱۲ درجه را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\sin\delta_\odot}{\sin\varepsilon}=\frac{\sin\lambda_\odot}{\sin\frac{\pi}{۲}}$$
$$\Rightarrow \sin\delta_\odot=\sin\lambda_\odot\sin\varepsilon$$
$$\Rightarrow \lambda_\odot=۳۱/۴^{o}$$

حال با استفاده از توصیف خورشید میانگین دایره‌البروجی، تاریخ که طول دایره‌البروجی خورشید ۳۱/٤ درجه است را بدست می‌آوریم:

$$\begin{array}{cc} ۳۶۵\,day & ۳۶۰\ \deg \\ x\,day & ۳۱/۴\ \deg \end{array}$$

از اینجا x برابر ۳۲ روز بدست می‌آید. پس نخستین روزی از سال که آسمان کاملاً تاریک نمی‌شود روز ۳۳ سال، برابر ۲ اردیبهشت است. اما خورشید تا تاریخ ۱ تیر همچنان به افزایش میل ادامه می‌دهد و قرینه‌ی همین تعداد روز (۲اردیبهشت تا ۱ تیر و ۱ تیر تا ۳۰ مرداد) صبر می‌کند تا مجدداً آسمان تاریک شود.

٤) IRYSC.COM برای این کار، ابتدا باید طول دایره‌البروجی خورشید را در این تاریخ محاسبه کنیم:

$$\begin{array}{cc} ۳۶۵\,day & ۳۶۰\ \deg \\ ۴۷\,day & \lambda\ \deg \end{array}$$

از این‌جا طول دایره‌البروجی خورشید ٤٦ درجه بدست می‌آید. حال به سراغ استخراج میل خورشید می‌رویم:

$$\frac{\sin\delta_\odot}{\sin\varepsilon}=\frac{\sin\lambda_\odot}{\sin\frac{\pi}{۲}}\Rightarrow \sin\delta_\odot=\sin\lambda_\odot\sin\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \delta_\odot=۱۶/۶^{o}$$

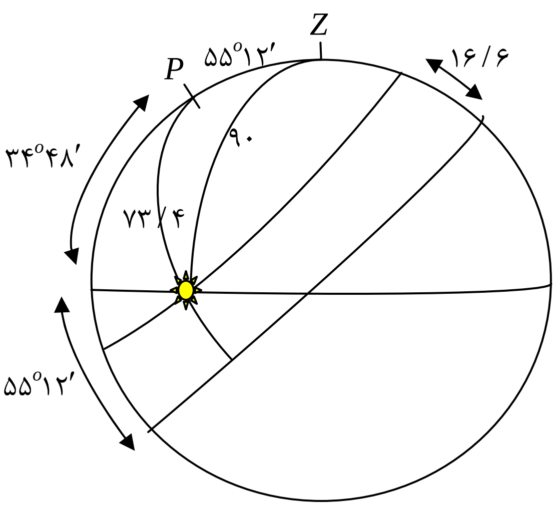
از این پس می‌توانیم با خورشید به عنوان یک ستاره‌ی معمولی برخورد کنیم؛

با نوشتن قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث PZS و برای ضلع PS داریم:

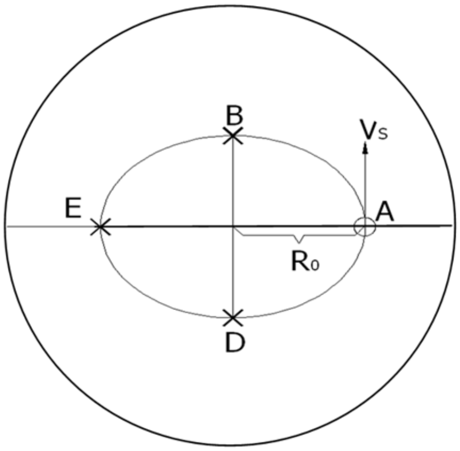
$$\cos ۷۳/۴=\cos۹۰\cos۵۵+\sin۹۰\sin۵۵\cos A =>$$
$$A=۶۹/۶$$

که سمت طلوع و غروب خورشید را بدست می‌دهد. برای محاسبه‌ی مدت زمان حضور خورشید در آسمان، باید دو برابر زاویه ساعتی خورشید هنگام طلوع را نیز بدست آوریم:

$$\cos۹۰=\cos۷۳/۵۴\cos۵۵+\sin۷۳/۵۴\sin۵۵\cos H =>$$
$$H=۱۰۱^{\circ} \;=>\Delta T=۲H=۲۰۲^{\circ} \quad => \quad \Delta T=۱۳h\ \ ۳۰m\ \ ۴۰s$$



۵) IRYSC.COM مرکز بیضی منطبق بر مرکز مدار است. پس شکل کلی حرکت به ترتیب نشان داده شده در شکل زیر است. از آنجا که بردار سرعت بر شعاع سحابی عمود است، پس خورشید روی یکی از دو قطر کوچک یا بزرگ قرار دارد، یعنی یکی از چهار نقطه A ، B، E یا D نقاط B و D نسبت به کانون وضعیت متقارنی دارند.



از طرف دیگر فرض کرده‌ایم مدار پایدار است؛ پس انرژی مدار برابر است با انرژی مکانیکی خورشید، و داریم:

جرمی که بر خورشید اثر می‌کند، طبق قانون گاوس، برابر جرم متمرکز در کره‌ای به مرکز سحابی و شعاع $R_\circ$ است؛ پس داریم:

$$E_\odot = K + U$$

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{۱}{۲} m_\odot V_s^۲ \\ U &= \frac{-GMm_\odot}{R_\circ} \\ M &= \rho_\circ V = \rho_\circ \times \frac{۴}{۳}\pi R_\circ^۳ \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = \frac{۱}{۲} m_\odot V_s^۲ - \frac{۴}{۳}\pi \rho_\circ G R_\circ^۲ m_\odot$$

مدار حرکت خورشید را یک بیضی به نیم قطر بزرگ a و خروج از مرکز e در نظر می‌گیریم، که مرکز سحابی در یکی از کانون‌های آن قرار گرفته است. جرم کانونی را M_G می‌نامیم، حال داریم:

$$E_{\text{مدار}} = -\frac{GM_G m_\odot}{۲a} = E_\odot = m_\odot \left(\frac{۱}{۲} V_s^۲ - \frac{۴}{۳}\rho_\circ G R_\circ^۲ \right) \Rightarrow \frac{M_G}{a} = \frac{۸}{۳}\pi \rho_\circ R_\circ^۲ - \frac{V_s^۲}{G}$$

طبق تعریف، بردار سرعت بر بردار شعاع عمود است. حال اندازه حرکت زاویه‌ای را بدین ترتیب محاسبه می‌کنیم:

$$L = m_\odot R V$$

مسأله را به سه حالت اصلی تفکیک می‌کنیم:

۱) خورشید در نقطه A باشد.

در این حالت، خورشید روی محور اصلی قطر بزرگ بیضی قرار دارد و مطابق شکل، در اوج مداری است.

$$۲a = ۲R_\circ \Rightarrow a = R_\circ$$

$$L = m_\odot R_\circ (۱+e) V_s = m_\odot R_\circ V_s \Rightarrow e = \circ$$ مسیر حرکت یک دایروی است.

از قانون سوم کپلر استفاده کنیم:

$$\frac{a^۳}{T^۲} = \frac{GM_\circ}{۴\pi^۲} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{a}{GM}}\, ۲\pi a = \sqrt{\frac{۱}{\frac{۸}{۳}\pi G \rho_\circ R_\circ^۲ - V_s^۲}}\, ۲\pi R_\circ$$

۲) خورشید در نقطه E باشد. این نقطه نیز روی قطر اطول واقع است، اما این بار روی حضیض مداری؛ حال روابط را همانند بخش الف به دست می‌آوریم:

$$۲a = ۲R_\circ \Rightarrow a = R_\circ \Rightarrow e = \circ \Rightarrow T = ۲\pi R_\circ \sqrt{\frac{۱}{\frac{۸}{۳}\pi G \rho_\circ R_\circ^۲ - V_s^۲}}$$

۳) خورشید روی دو سر قطر کوچک بیضی قرار گرفته باشد.

$$\left.\begin{aligned} &b = R_\circ \\ &\left(\frac{b}{a}\right)^۲ = ۱ - e^۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow a\sqrt{۱-e^۲} = R_\circ$$

$$a_p = a(۱-e) = p$$

فرض می‌کنیم پس از مدتی، خورشید به حضیض مدارِ جدید رسیده باشد. پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\left.\begin{aligned} &E = \frac{-GM_G\, m_\odot}{۲a} = m_\odot\left(\frac{۱}{۲}V_s^۲ - \frac{۴}{۳}\pi\,\rho_o G R_\circ^۲\right) = K_p + U_p \\ &K_p = \frac{۱}{۲}m_\odot V_p^۲ \\ &V_p = \frac{L}{m_\odot a_p} = \frac{L}{m_\odot p} = \frac{R_\circ V_s}{p} \\ &\left.\begin{aligned} &U_p = \frac{-GM' m_\odot}{p} \\ &M' = \rho_\circ \times \frac{۴}{۳}\pi\, p^۳ \end{aligned}\right\} \Rightarrow U = -G\rho_\circ \frac{۴}{۳}\pi\, p^۲ m_\odot \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$E = \frac{۱}{۲}m_\odot \frac{R_\circ^۲ V_s^۲}{p^۲} - \frac{۴}{۳}\pi\,\rho_\circ m_\odot p^۲ \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi\,\rho_\circ p^۴ + \frac{E}{m_\odot}p^۲ - \frac{R_\circ^۲ V_s^۲}{۲} = \circ$$

ریشه‌ی معادله‌های فوق را بدست می‌آوریم:

$$\Rightarrow p = \sqrt{\frac{-\frac{E}{m_\odot} + \sqrt{\left(\frac{E}{m_\odot}\right)^۲ + \frac{۸\pi\,\rho_\circ R_\circ^۲ V_s^۲}{۳}}}{\frac{۸}{۳}\pi\,\rho_\circ}} = a(۱-e)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{۱+e}{۱-e}} = \frac{a\sqrt{۱-e^۲}}{a(۱-e)} = \frac{R_\circ}{p} \quad \Rightarrow \frac{۱-e}{۱+e} = \frac{\frac{۸}{۳}\pi\,\rho_\circ R_\circ}{\sqrt{\left(\frac{E}{m_\odot}\right)^۲ + \frac{۸\pi\,\rho_\circ R_\circ^۲ V_s^۲}{۳}} - \frac{E}{m_\odot}}$$

$$e = \frac{\sqrt{\frac{۸}{۳}\pi\rho_o R_\circ^۲ V_s^۲ + \left(\frac{E}{m_\odot}\right)^۲} - \frac{۸}{۳}\pi\rho_o R_\circ - \frac{E}{m_\odot}}{\sqrt{\frac{۸}{۳}\pi\rho_o R_\circ^۲ V_s^۲ + \left(\frac{E}{m_\odot}\right)^۲} + \frac{۸}{۳}\pi\rho_o R_\circ - \frac{E}{m_\odot}}$$

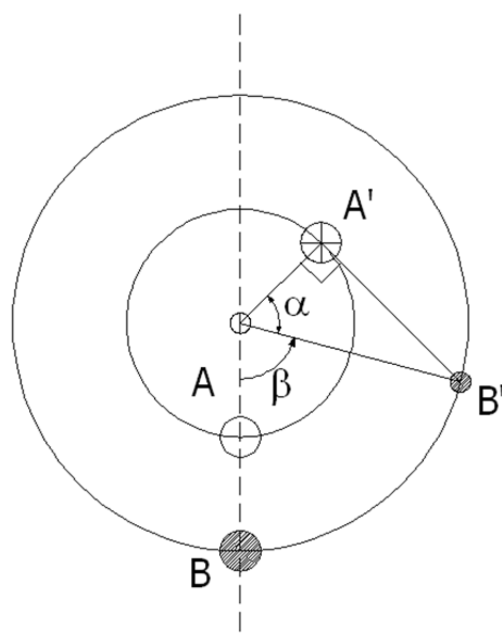
$$a = \frac{R_\circ}{\sqrt{۱-e^۲}} \quad , \quad T = ۲\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}} = \frac{۲\pi R_\circ}{\sqrt{۱-e^۲}}\sqrt{\frac{۱}{\frac{۸}{۳}\pi G P_\circ R_\circ^۲ - V_s^۲}}$$

٦) IRYSC.COM فرض ما بر این بوده‌است که خورشید در مرکز منظومه باشد و زمین و سیاره در فاصله‌های $d_۱$ و $d_۲$ در مدارهای دایروی به دور خورشید بگردند. از طرف دیگر می‌دانیم که زمین در یک سال، یک دور کامل به دور خورشید می‌گردد. در حالت اول سیارات A و B در حالت مقابله قرار دارند. ۸۹ روز بعد، دو سیاره که در یک جهت به دور خورشید می‌گردند، در حالتی قرار می‌گیرند که از دید ناظر روی A'، سیاره B' در حالت تربیع دیده می‌شود. می‌بینیم که در این مدت، سیاره A به اندازه $\theta_A = \alpha + \beta$ دوران کرده است. سیاره B به اندازه $\theta_B = \beta$ به دور خورشید چرخیده است.

در مسیر دایره‌ای سیاره در یک تناوب نجومی یک دور کامل یا ۳۶۰° به دور خود می‌گردد. حال با یک نسبت ساده؛ می‌توان زاویه‌ی حرکت را تعیین کرد.

$۸۹ day$	θ_A
$T\ day$	۲π

$۸۹ day$	θ_B
$T\ day$	۲π



$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \theta_A = \frac{۲\theta}{T_\oplus}۸۹ \\ &\Rightarrow \theta_B = \frac{۲\pi}{T_p}۸۹ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \theta_A - \theta_B = (۲\pi)(۸۹)\left(\frac{۱}{T_\oplus} - \frac{۱}{T_p}\right)$$

با توجه به فرض مسئله، ٤٨٩ روز بعد سیاره دوباره به مقابله می‌رسد. پس در این مدت، زمین یک دور جلو افتاده است. داریم:

$$۲\pi = \theta_A - \theta_B = ۲\pi\ (۴۸۹)\left(\frac{۱}{T_\oplus} - \frac{۱}{T_p}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳۶۵/۲۵} - \frac{۱}{T_p} = \frac{۱}{۴۸۹}$$

$\Rightarrow T_p = ۱۴۴۳/۳$ دوره تناوب نجومی سیاره: روز

دوباره به حالت تربیع باز می‌گردیم:

$$\alpha_{rad} = ۲\pi(۸۹)\left(\frac{۱}{۳۶۵/۲۵} - \frac{۱}{۱۴۴۳/۳}\right) \Rightarrow \alpha = ۱/۱۴ rad$$

با توجه به شکل و در مثلث $SA'B'$ داریم:

$$\cos\alpha = \frac{d_۱}{d_۲} \Rightarrow d_۲ = \frac{d_۱}{\cos\alpha} \Rightarrow d_۲ = ۲/۴۱ d_۱$$

فاصله این سیاره از خورشید، ۲ / ٤۱ برابر فاصله زمین از خورشید است.

۷) IRYSC.COM ابتدا آهنگ کاهش جرم سالیانه این غول سرخ را در اثر تابش انرژی به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} L = ۳/۸۳\times ۱۰^{۹}\, erg/s \\ ۱J = ۱۰^{۷} erg \end{array}\right\} \Rightarrow L = ۳/۸۳\times ۱۰^{۳۲}\, J/s$$

مقدار انرژی با توجه به رابطه نسبیتی $E = mc^۲$ چنین به دست می‌آید:

$$L = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta m\, c^۲}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{۳/۸۳\times ۱۰^{۳۲}\, j/s}{(۳\times ۱۰^{۸}\, m/s)^۲} = ۴/۲۵۵\times ۱۰^{۱۵}\, kg/s = ۴/۲۵۵\times ۱۰^{۱۵}\frac{۳/۱۵\times ۱۰^{۷}}{۱/۹۹\times ۱۰^{۳۰}}\frac{M_\odot}{year}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta m_L}{\Delta t} = ۶/۷۴۷\times ۱۰^{-۸}\, M_\odot/year$$ کاهش جرم در اثر تابش

بنابراین کل کاهش جرم غول سرخ چنین بدست می‌آید:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m_L + \Delta m_w}{\Delta t} = -۷/۷۴۷\times ۱۰^{-۸}\, M_\odot/year$$

اگر مدار سیاره دایروی باشد می‌توانیم با توجه به قانون عمومی گرانش، چنین بنویسیم:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}} \quad و \quad \frac{L}{m} = \sqrt{GMa} \Rightarrow \left(\frac{L}{m}\right)^۲ = GMa$$

که در این رابطه m جرم سیاره است. از آنجایی که هیچ نیرویی به سیاره وارد نمی‌شود، اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای ثابت می‌ماند. جرم سیاره نیز ثابت است، پس برای بدست آوردن نرخ تغییرات، از دو طرف این رابطه بر حسب زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{G(M\Delta a + a\Delta M)}{\Delta t} = ۰ \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta M/\Delta t}{M} = -\frac{\Delta a/\Delta t}{a} \Rightarrow \Delta a/\Delta t = -\frac{\Delta M/\Delta t}{M}a = -\frac{-۷/۷۴۷\times ۱۰^{-۸}\, M_\odot/year}{۵M_\odot}\, ۱۰Au$$

$$\Rightarrow a = \frac{\Delta a}{\Delta t} \approx ۱/۵۵\times ۱۰^{-۷}\, Au/year$$

۸) IRYSC.COM سرعت دوران وضعی عطارد:

$$v = R_{Mercury}\frac{2\pi}{T} = \frac{5}{2}\times 10^{6}\,m\,\frac{2\pi}{59\times 24\times 3600\,s} = 3.08\,{}^{m}\!/_{s}$$

برای ناظر ساکن ماهواره، سرعت شعاعی عامل ایجاد اثر دوپلر است. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{v}{c} = \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_\circ} = \dfrac{\lambda-\lambda_\circ}{\lambda_\circ}\\[2ex] \lambda = \dfrac{c}{\nu}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\dfrac{c}{\nu}-\dfrac{c}{\nu_\circ}}{\dfrac{c}{\nu_\circ}} = \frac{\nu_\circ}{\nu}-1$$

رابطه دوپلر بر اساس بسامد، این چنین است:

$$\Rightarrow \frac{\nu_\circ}{\nu} = \frac{v}{c}+1$$

حداکثر جابه‌جایی بسامد، این چنین بدست می‌آید:

$$\frac{v}{c} = \frac{3.08\,{}^{m}\!/_{s}}{3\times 10^{8}\,{}^{m}\!/_{s}} = 1.027\times 10^{-8}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \dfrac{\nu_\circ}{\nu}-1 = 1.027\times 10^{-8}\\[2ex] \nu_\circ = 30\,GHz = 3\times 10^{10}\,Hz\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\nu = \nu-\nu_\circ = \pm 308.1\,Hz \approx \pm 310\,Hz$$

طیف بازتابیده شده از سطح سیاره، مانند طیف ارسال شده خطی نیست چرا که میزان جابه‌جایی در سطوح بازتابنده‌ی مختلف، متفاوت است.