******نحوه پاسخ به سوالات: یک پوشه به نام خود بسازید؛ دخل آن پوشه برای هر سوال یک پوشه دیگر به صورت SOLAL1,SOAL2,... بسازید. در صورت نیاز پاسخ هر قسمت را به صورت یک فایل مثلا SOAL1_ghesmateB در پوشه مربوط به آن سوال ذخیره کنید و در پایان پاسخ ها را داخل فلش ریخته و تحویل دهید.******

۱- ماتریس و بردار زیر را در نظر بگیرید

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 2 & -11\\ 3 & 8 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

برنامه‌ای بنویسید که

الف) مشخص کند که آیا دستگاه $Ax=b$ دارای جواب است یا نه؟

ب) آیا دستگاه دارای جواب یکتا هست یا نه؟

۲- بیضی زیر را رسم کنید

$$\begin{cases}x=5\cos(t)\\ y=4\sin(t)\end{cases}$$

در یکی از کانون‌های بیضی به مختصات $F=(-3,0)$ یک دایره زرد رنگ به اندازه ۶ رسم کنید. سپس روی بیضی یک ستاره ۵ پر قرمز رنگ به ابعاد ۴ چنان قرار دهید که با اجرای برنامه این ستاره روی بیضی شروع به چرخش کند. محورها را جوری تنظیم کنید که بیضی بودن شکل معلوم باشد.

۳- فرض کنید $F_0=F_1=1$ و تعریف کنید $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, \forall n\geq 2$

برنامه‌ای بنویسید که ۲۰۰ جمله اول دنباله $a_n=\frac{F_n}{F_{n-1}}$ را تولید و در یک بردار ستونی بنویسید. (دنباله a_n به نسبت طلایی میل می‌کند.)

۴- برنامه ای بنویسید که خروجی آن رسم نمودار زیر در بازه $0\leq t\leq 2\pi$ باشد

$$\begin{cases}x(t)=\sin(10t)\cos(t)\\ y(t)=\sin(10t)\sin(t)\end{cases}$$

به رنگ قرمز و رسم

$$\begin{cases}x(t)=\cos(10t)\cos(t)\\ y(t)=\cos(10t)\sin(t)\end{cases}$$

به رنگ آبی باشد. به علاوه در مبدا مختصات یک دایره زرد به اندازه ۳ قرار دهد.

۵- برنامه‌ای بنویسید که به عنوان ورودی اطلاعات کارمندان یک شرکت را به صورت یک ماتریس با سه ستون را بگیرد که ستون اول در هر سطر شماره کارمند؛ ستون دوم میزان ساعات کار کارمند در طول ماه و ستون سوم میزان اضافه کاری او باشد. فرض کنید دستمزد هر ساعت کار ۷۰۰۰ تومان و هر ساعت اضافه کاری ۱۰۰۰۰ تومان باشد. به علاوه اگر حقوق کارمندی کمتر از یک و نیم میلیون در هر ماه باشد به او مالیاتی تعلق نمی گیرد به ازای حقوق های بیشتر از یک و نیم میلیون تا ۳ میلیون در هر ماه ۱۰ درصد مالیات و به ازای مبالغ بیش از ۳ میلیون در ماه ۲۰ درصد مالیات از کارمندان شرکت کسر می‌شود. خروجی برنامه موارد زیر باشد. (سعی کنید تا حد امکان بدون استفاده از حلقه‌ها به قسمت های الف تا ج پاسخ دهید.)

الف) میزان دریافتی هر کارمند ب) میزان مالیات پرداختی هر کامند ج) میانگین حقوق کارمندان این شرکت د) تعداد کارمندان با حقوق کمتر از یک و نیم میلیون تومان

۶- بسط مکلورن تابع $\arctan(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

الف) یک تابع به نام $my\arctan(n,x)$ بنویسید که تا n جمله اول بسط $\arctan(x)$ را در هر نقطه x حساب کند. یعنی مقدار $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ را حساب کند.

ب) با استفاده از تابع نوشته شده در قسمت الف و دستور subplot و دو نمودار کنار هم ایجاد کنید که در نمودار سمت چپ تابع $\arctan(x)$ را رسم کنید به همراه $my\arctan(2,x)$ به طوریکه نمودار $\arctan(x)$ آبی رنگ و نمودار $my\arctan(2,x)$ به صورت خط تیره خط تیره قرمز رنگ رسم شوند. اسم شکل سمت چپ را

Second approximation of arctanx

نامگذاری کنید و محور ایکس ها را x و محور y ها را y نامگذاری کنید.

در نمودار سمت راست تابع $\arctan(x)$ را رسم کنید به همراه $my\arctan(4,x)$ به طوریکه نمودار $\arctan(x)$ آبی رنگ و نمودار $my\arctan(4,x)$ به صورت خط تیره خط تیره قرمز رنگ رسم شوند. اسم شکل سمت راست را

Fourth approximation of arctanx

نامگذاری کنید و محور ایکس ها را x و محور y ها را y نامگذاری کنید.

ج) به کمک فرمول بسط مکلورن تابع $\arctan(x)$ و استفاده از قضیه آبل؛ داریم:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

اگر تعریف کنیم $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ آنگاه داریم: $\left|\frac{\pi}{4} - S_n\right| \le \frac{1}{2n+3}$

به کمک حلقه while برنامه‌ای بنویسید که یک مقدار خطا به نام Tol را از کاربر بگیرد و n را به گونه‌ای تعیین کند که

$$\left|\frac{\pi}{4} - S_n\right| \le Tol$$

۷- نمودار تابع دو متغیره $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{x\sin(y)}{e^{(\sin(x)y)}}$ را در بازه $0 \le x \le 1, 0 \le \mathrm{y} \le 2$ رسم کنید.

۸- روش وتری برای پیدا کردن ریشه معادله $f(x) = 0,$ دارای فرم زیر است.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

برنامه‌ای بنویسید که به کمک روش وتری ریشه‌ای از معادله‌ی $2x + 3cosx - e^x = 0$ را با دو نقطه شروع $x_0 = 0, x_1 = 1$ پیداکند. شرط توقف برنامه شما زمانی باشد که یک x_n ی پیدا شود که $|f(x_n)| < 0.0001$

۹- تابع چند ضابطه‌ای زیر را در میپل تعریف کنید.

$$f(x) = \begin{cases} e^x \ln(\mathrm{x}) & , \quad x > 0 \\ \sin(\cosh(x)) & , \quad -2 \le x \le 0 \\ \arctan(x) & , \quad x < -2 \end{cases}$$

۱۰- به کمک این نکته که اگر دو ناحیه A,B در فضا داشته باشیم که $A \subseteq B$؛ و یک نقطه از داخل ناحیه B انتخاب کنیم آنگاه احتمال اینکه این نقطه در ناحیه A قرار داشته باشد برابر است با $\frac{V_A}{V_B}$ (حجم ناحیه A به حجم ناحیه B) و نیز می‌دانیم $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$ به مفهوم حجم زیر نمودار تابع $f(x,y)$ است که بالای ناحیه $[a,b]\times[c,d]$ در صفحه xy واقع شده است. (به شرطی که $f(x,y)$ در این ناحیه منفی باشد)به کمک این اطلاعات انتگرال زیر را به صورت تقریبی حساب کنید.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2 y^2)dxdy$$

پروژه: این سوال را بعد از امتحان در مدت حداکثر یک ۷ روز حل کرده و پاسخ آن را میل کنید.

The following equation describes the temperature distribution in a at rectangular metal plate. The temperature on three sides is held constant at T_1, and at T_2 on the fourth side (see Figure P35). The temperature $T(x, y)$ as a function of the xy coordinates shown is given by

$$T(x,y) = (T_2 - T_1)w(x,y) + T_1$$

where

$$w(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n\ \text{odd}}^{\infty} \frac{2}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$

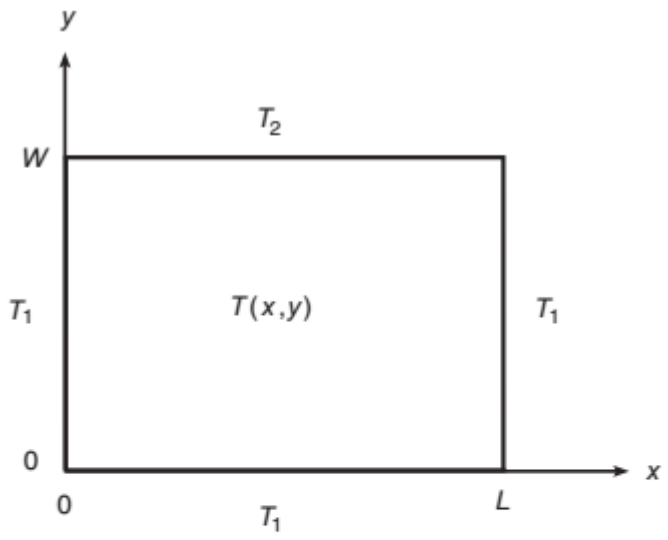

Figure P35

The given data for this problem are $T_1 = 70°F$, $T_2 = 200°F$, and $W = L = 2$ ft.

Using a spacing of 0.2 for both x and y, generate a surface mesh plot and a contour plot of the temperature distribution.