

امتحان هفتم - ریاضی تجربی - خارج از کشور - نوبت عصر

ص ۱

تعمیر و محل : کامل

۱/۵

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید

الف) دامنه تابع باغچه $y = -k f\left(\frac{x}{p}\right)$ همان دامنه تابع $y = -k f(x)$ است
 جواب غلط است تغییرات در دامنه انجام شده پس دامنه تغییر کرده است.

تغییرات \times موافق \rightarrow

$$y = -k f\left(\frac{x}{p}\right) \rightarrow y = -k f(x)$$

دامنه $\div 2 \rightarrow D_{y_2} = \left[-\frac{2}{p}, \frac{5}{p}\right]$ $D_{y_1} = [-2, 5]$ متداً است

ب) تابع $y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x^2$ یک تابع چندهمپا است.
 جواب غلط است این تابع چندهمپا است
 اگر x (متغیر) در فرج، زیر رادیکال، در توان، داخل و خارج، زیر رادیکال و ... قرار بگیرد درجه تابع چندهمپا نمی باشد.

ج) منظور از احتمال $P(A|B)$ این است که احتمال وقوع B پیش از آنکه A رخ دهد باشد.
 پیش آمد B رخ داده است. جواب درست

د) اگر $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ و $g(x)$ را بیابید

$$f \circ g(x) = 3x^2 - 6x + 14 \quad , \quad f(x) = 3x - 4$$

$$\Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14$$

$$\Rightarrow 3g(x) = 3x^2 - 6x + 18 \xrightarrow{\div 3} g(x) = x^2 - 2x + 6$$

ه) نشان دهید توابع $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ و $g(x) = \frac{3-2x}{8}$ وارون یکدیگرند.

روش اول

$$f(x) = \frac{-8x+3}{2} \quad \text{یا} \quad y = \frac{-8x+3}{2}$$

$$\Rightarrow 2y = -8x+3 \rightarrow 2y-3 = -8x$$

$$\Rightarrow \frac{2y-3}{-8} = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{-8} = \frac{3-2x}{8}$$

و بیستم $g(x)$ با $f^{-1}(x)$ برابر شد.

روش دوم

$$f \circ g(x) = \frac{-8\left(\frac{3-2x}{8}\right)+3}{2} = \frac{-(3-2x)+3}{2}$$

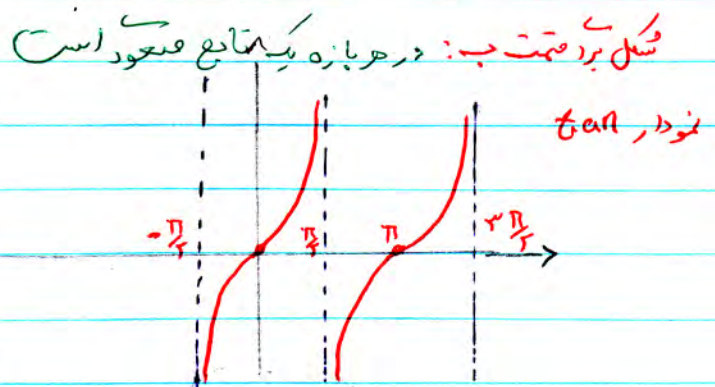
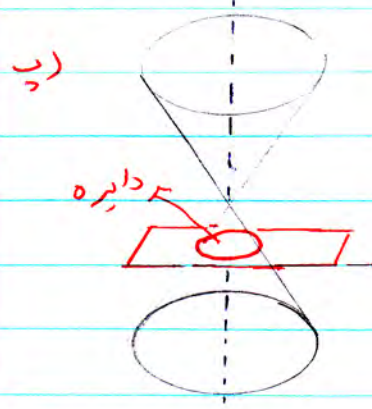
$$\Rightarrow \frac{-3+2x+3}{2} = \frac{2x}{2} = x \quad \text{تابع همانی}$$

ترکیب g و f به تابع همانی رسید پس f و g وارون یکدیگر هستند.

(۴) در جاها خالی عبارت مناسب وارد کنید. ۰/۷۵
 الف) تابعی که در یک بازه هم صعودی و هم نزولی تعریف می شود تابع ثابت گفته می شود

ب) تابع تناز است در هر بازه که در آن تعریف شده باشد صعودی است. البته کلمه اکیداً صعودی نیز درست است.
 چون کف در هر بازه که تعریف شده به سیر عمده صعودی است اگر چه اسی از بازه نیاورده بود تابع نه صعودی و نه نزولی است غیر یکنواختی است.

ج) وقتی یک سطح عمودی مخروطی توسط یک صفحه به طول محدود برش داده می شود سطح مقطع یک ... است.



آنرا مثل بیضه بیضی است

(۵) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع مقابل را بدست آورید. ۱/۲۵

$$y = 3 \sin(2x) - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

برای $\sin(2x)$ مینیمم و ماکزیمم در چه جایی اتفاق می افتد
 مقادیر ۱ و -۱ وارد کنیم و بزرگترین را \max و کمترین را \min انتخاب کنیم.

$$y = 3(1) - 2 = 1 \rightarrow \max$$

$$y = 3(-1) - 2 = -5 \rightarrow \min$$

روش دوم

$$\Rightarrow \begin{cases} \max = |a| + c = |3| + (-2) = 3 - 2 = 1 \\ \min = -|a| + c = -|3| + (-2) = -3 - 2 = -5 \end{cases}$$

1/5

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

انض) جواب های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بدست آورید.

عدا زده تو کلمه طراح.

یادگوری:

$$\sin x = \sin \theta$$

$$\cos x = \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi + \pi - \theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi - \theta \end{array} \right.$$

ب) مقدار $\sin 15^\circ$ را بدست آورید.

$$\sin 15^\circ = ?$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(2 \cdot 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 1 - 2\sin^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow -2\sin^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$\rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار}} \sin 15^\circ = +\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

یادگوری:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{array} \right.$$

7) حد توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{[-\frac{1}{2}]}{|3(-\frac{1}{2})+1|} = \frac{-\frac{1}{2}}{|-\frac{3}{2}+1|} = \frac{-\frac{1}{2}}{|\frac{-1}{2}|} = -1$$

از طرف $x = -\frac{1}{2}$ قدر مطلق را هم صاف می کنند پس باز هم عدد گذاری در فرج.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x-0} = \frac{2(0)}{0-0} = \frac{0}{0} = -\infty \quad (x \rightarrow 0^- \rightarrow 0 - \delta < 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(9 + \frac{1}{x^2} \right) = 9 + \frac{1}{(-\infty)^2} = 9 + 0 = 9$$

۸) اثر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ باشد، $f'(2)$ را بدست آورید و معادله خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطه A به طول ۲ واقع بر آن بنویسید. (۱)

چون سؤال گفته $f'(2)$ را بدست آورید: یعنی از طریق تعریف مشتق باید حساب کنیم

$(f(2) = 12 - 4 + 1 = 9)$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{سیم}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} 3x + 4 = 3(2) + 4 = 10$$

حالتان معادله مماس: $y - y_0 = m(x - x_0)$ و $\left. \begin{array}{l} \text{شیب: } m = f'(2) = 10 \\ \text{نقطه } A: f(2) = 9 \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow y - 9 = 10(x - 2) \xrightarrow{\text{رتب}} y - 9 = 10x - 20 \Rightarrow \boxed{y = 10x - 11}$$

خط مماس

۱/۷۵

۹) مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کرد انزالی نیست)

الف) $f(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5} \right)^n$ نیز: $y = u^n \rightarrow y' = n u' u^{n-1}$

$$f'(x) = n \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2} \right) \left(\frac{-3x-1}{x^2+5} \right)^{n-1}$$

مشتق عبارت داخل پرانتز

ب) $y = \sqrt{5x+3}$

نیز: $y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+3}}$$

۱۱/۲۵) مشتق زیر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x > 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

برای سوال اول این اقدام حتماً بکنید و بررسی کنید سر به سر با مشتق زیر برودید.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2(1) = 2 \\ f(1) = x^2 + 3 \xrightarrow{x=1} 1^2 + 3 = 4 \end{cases}$$

چون فقط حد سمت راست با مقدار تابع برابر شده پس فقط مشتق راست در $x=1$ قابل می باشد است.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1 + 1 = 2$$

$\Rightarrow f'_+(1) = 2$

توانیم فرمول مشتق $x^2 + 3$ بگیریم و در $x=1$ کتاب به روش تعریف مشتق عیب در است را حجاب کرده ما هم رعایت کنیم

۱۱) یک توده با کمترین پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

آهنگ رشد جرم این توده با کمترین در لحظه $t=1$ ساعت چقدر است؟
 کلمه لحظه یعنی آهنگ آنی یا لحظه ای
 یعنی مشتق می بگیریم و در مشتق عدد ۱ می گذاریم.

$$m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$$

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2$$

$$t = 1 \rightarrow m'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} + 6(1)^2 = \frac{1}{2} + 6 = 6\frac{1}{2}$$

12) مقادیر ماکزیم و مینیم مطلق تابع $f(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود بیست آورید؟ (175)

$$f(x) = x^3 + 2x - 5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -2$$

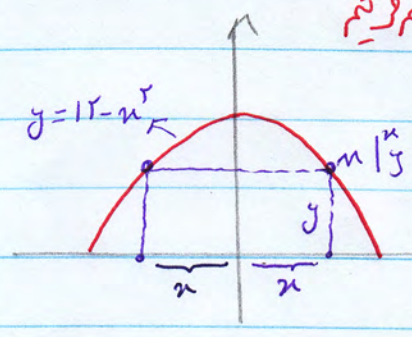
ریشه ندارد.

چون $f'(x) = 0$ ریشه ندارد سرخفا ابتدا و انتهای بازه نقاط بحرانی هستند.

نقاط بحرانی = $\begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = -8 - 4 - 5 = -17 \text{ min (مطلق)} \\ f(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \text{ max (مطلق)} \end{cases}$

13) ابعاد مستطیل با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دور آن روی محور x ها و دور آن در محور y ها ورودی سعی به محاسبه $y = 12 - x^2$ باشند (175)

(بجهت سازی) فقط مساحت بالای محور x را رسم می کنیم



$$S(x) = 2xy = 2x(12 - x^2)$$

$$\rightarrow S(x) = 24x - 2x^3$$

$$\rightarrow S'(x) = 24 - 4x^2 = 0$$

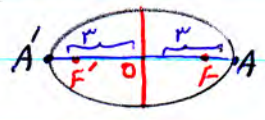
$$\rightarrow S'(x) = 0 \rightarrow 24 = 4x^2 \rightarrow x^2 = 6$$

$$\rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{طول مستطیل} \Rightarrow 2x = 2(\sqrt{6}) = 2\sqrt{6} \\ \text{عرض مستطیل} \Rightarrow y = 12 - x^2 = 12 - (\sqrt{6})^2 = 6 \end{cases}$$

چون ابعاد مستطیل مثبت است در نظر می گیریم

۱۴) در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مختصات مرکز آن $0/5$ باشد. (الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید. (ب) مختصات دوسر قطر بزرگ آن را بنویسید.



$2a = 6 \rightarrow a = 3, 2b = 4 \Rightarrow b = 2$
 (الف) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 9 = 4 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{5}$

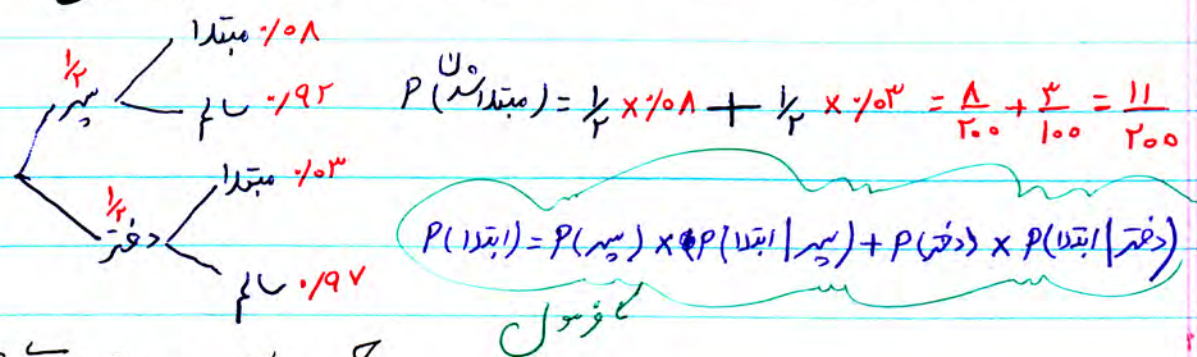
فاصله کانونی $= 2c = 2(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$

(ب) مختصات رأس‌ها A و A' را $A(4+3, 5) \Rightarrow A(7, 5)$ و $A'(4-3, 5) \Rightarrow A'(1, 5)$ را به طول قطر $a=3$ کافی است. $0/5$ مرکز است. $OH = R$ چون بیضی افقی است و فقط اول ۴ اضافه و کم می‌شود.

۱۵) وضعیت دایره به معادله $x^2 + y^2 = 2$ و خط $y = -x - 2$ را نسبت به هم مشخص کنید. (الف) شعاع دایره $R = \sqrt{2}$ و مرکز دایره $0/0$ $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow 0/0$ فاصله مرکز دایره از خط $y = -x - 2 \rightarrow y + x + 2 = 0 \Rightarrow OH = \frac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

چون فاصله مرکز دایره از خط برابر با شعاع دایره شده پس خط بر دایره مماس است $\Rightarrow OH = R$

۱۶) اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد سپهر ۸٪ و به دختر ۳٪ باشد و خانواده‌ای (الف) قصدی دارند راداشته باشند؛ با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری خاص مبتلا خواهد شد.



آرزوی موفقیت برای شما دانش آموز عزیز
 حسین کافلی ۱۳۹۹/۴/۹