

اگر جایگاه، با رابطه $\vec{u} = \vec{N}\tilde{u}$ و کرنش، با رابطه $\vec{\epsilon} = \vec{B}\tilde{u}$ به بردار مقادیر گره‌ی $\tilde{u}$ مربوط باشد خواهیم داشت:

XX

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \int_{V^e} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{B}} \, dV \tilde{\mathbf{u}} &= \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \int_{V^e} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \, dV - \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \int_{V^e} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_0 \, dV + \\ \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \int_{V^e} \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{b}} \, dV &+ \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \int_{\mathbf{S}^e} \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{s}} \, dS + \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \sum \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{f}}_p \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

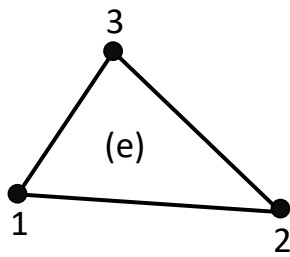
[illegible]

(1-9)

XX

اما اگر شرایط کرنش صفحه‌ای در صفحه XY برقرار باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{zz}=0 \quad , \quad \varepsilon_{xz}=0 \quad , \quad \varepsilon_{zy}=0 \quad (11-9)$$



برای شبکه‌بندی مسأله در دو بعد از المان مثلثی سه گرهی استفاده کرده و فرمولاسیون اجزاء محدود را برای آن بدست می‌آوریم.

نتایج حاصل بر راحتی قابل تعمیم به شبکه حاصل از انواع دیگر المان است.

اما در مسائل برداری دو بعدی در هر گره دو مجهول داشته و در نتیجه در هر المان سه گرهی شش مجهول خواهیم داشت.

$$\tilde{\mathbf{T}} = [T_1 \quad T_2 \quad T_3]^T \quad (12-9)$$

حل آزمون T بصورت زیر از توابع شکل و مقادیر گرهی بدست می‌آید:

(13-9)

بنابراین برای این مسائل ماتریس تابع شکل بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \quad (14-9)$$

اما در مسأله برداری تحلیل تنش دو بعدی در هر گره دو مجهول یکی در جهت x به نام u و دیگری در جهت y به نام v داریم:

(15-9)

حل آزمون $\bar{u}$ بصورت زیر از توابع شکل و مقادیر گرهی بدست می آید:

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum N_i u_i \\ \sum N_i v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{u}} \quad (16-9)$$

[illegible]

بنابراین ماتریس توابع شکل بصورت زیر تعریف می‌گردد:

(17-9)

بردارهای جابجایی و کرنش در حالت دوبعدی عبارتند از:

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^T, \quad \vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (14-9)$$

می‌دانیم رابطه کرنش و جابجایی بصورت زیر است:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (19-9)$$

XX

یا به فرم ماتریسی:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{u}} \quad (20-9)$$

با توجه به رابطه $\vec{u} = \vec{N}\tilde{u}$ خواهیم داشت:

(۲۱-۹)

ماتریس $\vec{B}$ که گرادیان تابع شکل را در خود دارد در مسئله تحلیل تنش ماتریس کرنش-جابجایی گرهی نام دارد.

XX

در نتیجه برای برای مسائل دو بعدی و المان مثلثی سه گرهی:

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (۹-۲۲)$$

xx

چون برای المان مثلثی سه گرهی تابع شکل $\vec{\mathbf{N}}$ خطی است بنابراین ماتریس $\vec{\mathbf{B}}$ ثابت خواهد بود.

برای بدست آوردن فرمولاسیون اجزاء محدود دو بعدی از معادلات (۹-۷) تا (۹-۹) استفاده می‌کنیم.

بردار تنش، بردار کرنش، بردار کرنش اولیه و بردار تنش اولیه در حالت دو بعدی به ترتیب عبارتند از:

$$(۹-۲۳)$$

xx

اگر ضریب الاستیک ماده را با E و ضریب پواسون آن را با μ مشخص کنیم ماتریس خواص ماده در حالت تنش صفحه‌ای برابر است با:

$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (۹-۲۴)$$

تغییر دما مهمترین عامل ایجاد کرنش اولیه است. کرنش اولیه حاصل از تغییر دما برای تنش صفحه‌ای عبارت است از:

$$(۹-۲۵)$$

xx

تحلیل کرنش صفحه‌ای

ماتریس خواص ماده در حالت کرنش صفحه‌ای برابر است با:

$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (۹-۲۶)$$

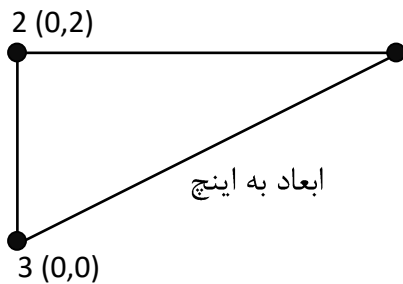
کرنش اولیه حاصل از تغییر دما نیز برای کرنش صفحه‌ای عبارت است از:

(۲۷-۹)

xx

مثال (۹-۱)

در صورتی که ماده مورد بررسی فولاد با مدول الاستیک 30×10^6 و ضریب پواسون 0.3 باشد ماتریس سختی را برای المان زیر محاسبه کنید. ضخامت المان 0.25in بوده و تمام نیروها در صفحه المان وارد می‌شوند طوریکه شرایط تنش صفحه‌ای برقرار است.



حل: به منظور تعیین $\vec{K}^e$ از معادله (۹-۹-الف) استفاده می‌کنیم.

برای المان مثلثی $\vec{B}$ ثابت است بنابراین:

xx

مطابق با معادله (۹-۲۲) و با استفاده از مباحث قبلی براحتی می‌توان نشان داد ماتریس $\vec{B}$ برای این المان مثلثی برابر است با:

چون تنش صفحه‌ای داریم ماتریس خواص ماده بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\vec{D} = \frac{30 \times 10^6}{1 - 0.3^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 0.3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33.0 & 9.89 & 0 \\ 9.89 & 33.0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.5 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ psi}$$

xx

مساحت المان هم مساوی است با:

بنابراین ماتریس سختی المان برابر است با:

$$\vec{\mathbf{K}}^e = \vec{\mathbf{B}}^T \vec{\mathbf{D}} \vec{\mathbf{B}} t A = \begin{bmatrix} 2.06 & 0 & -2.06 & 1.24 & 0 & -1.24 \\ 0 & 0.72 & 1.44 & -0.72 & -1.44 & 0 \\ -2.06 & 1.44 & 4.94 & -2.68 & -2.88 & 1.24 \\ 1.24 & -0.72 & -2.68 & 8.97 & 1.44 & -8.25 \\ 0 & -1.44 & -2.88 & 1.44 & 2.88 & 0 \\ -1.24 & 0 & 1.24 & -8.25 & 0 & 8.25 \end{bmatrix}$$

xx

مثال (۹-۲)

برای المان مثال (۹-۱) بردار نیروی کرنش اولیه را برای افزایش دمای 150°F بیابید. ضریب انبساط دمایی فولاد $6.0 \times 10^{-6} \text{ in/in.}^\circ\text{F}$ است.

حل: برای حالت تنش صفحه‌ای کرنش اولیه از معادله (۹-۲۵) بدست می‌آید:

به منظور تعیین بردار نیروی مربوطه از معادله (۹-۹-ب) استفاده می‌کنیم:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\varepsilon_0}^e = \int_{V^e} \vec{\mathbf{B}}^T \vec{\mathbf{D}} \vec{\varepsilon}_0 dV = \vec{\mathbf{B}}^T \vec{\mathbf{D}} \vec{\varepsilon}_0 \int_{A^e} t dA = \vec{\mathbf{B}}^T \vec{\mathbf{D}} \vec{\varepsilon}_0 t A$$

xx

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\varepsilon_0}^e = \vec{\mathbf{B}}^T \vec{\mathbf{D}} \vec{\varepsilon}_0 t A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \\ -0.25 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33.0 & 9.89 & 0 \\ 9.89 & 33.0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 900 \\ 900 \\ 0 \end{bmatrix} (0.25)(4.0) = \begin{bmatrix} 9.65 \\ 0 \\ -9.65 \\ 19.30 \\ 0 \\ -19.30 \end{bmatrix}$$

xx

مثال (۹-۳)

در مثال قبل اگر $\vec{\mathbf{b}} = [b_x \ b_y]^T$ ثابت باشد بردار نیروی جسمی را بیابید.

حل: بردار نیروی جسمی از معادله (۹-۹-د) بدست می‌آید:

[illegible]

[illegible][illegible]

مثال (۵-۹)

در مثال (۹-۱) یک نیروی متمرکز به نقطه $(0.6, 1.6)$ وارد می‌شود. مؤلفه‌های x و y نیرو به ترتیب 1500 و -2300 پوند-نیرو هستند. بردار نیروی گرهی متناظر را بیابید.

$$\tilde{\mathbf{f}}_p^e = \sum \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{f}}_p = \sum \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{px} \\ f_{py} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x_0, y_0) f_{px} \\ N_1(x_0, y_0) f_{py} \\ N_2(x_0, y_0) f_{px} \\ N_2(x_0, y_0) f_{py} \\ N_3(x_0, y_0) f_{px} \\ N_3(x_0, y_0) f_{py} \end{bmatrix}$$

با استفاده از روابط (۷-۱۵) در نقطه $(0.6, 1.6)$ داریم:

$$\begin{aligned} N_1^e &= 0 + (0.25)(0.6) + (0)(1.6) = 0.15 \\ N_2^e &= 0 + (-0.25)(0.6) + (0.5)(1.6) = 0.65 \\ N_3^e &= 1 + (0)(0.6) + (-0.5)(1.6) = 0.20 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{f}}_p^e = \begin{bmatrix} (0.15)(1500) \\ (0.15)(-2300) \\ (0.65)(1500) \\ (0.65)(-2300) \\ (0.2)(1500) \\ (0.15)(-2300) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 \\ -345 \\ 975 \\ -1495 \\ 300 \\ -460 \end{bmatrix}$$

تحليل تنش سه بعدی

تحلیل تنش سه بعدی برای تمام مسائل عملی قابل استفاده است زیرا هیچ فرض ساده کننده‌ای در اساس خود ندارد.

با وجود این برتری، مدلسازی سه بعدی بدلیل نیاز به حافظه بسیار بالاتر و زمان محاسباتی بسیار زیاد در بسیاری از موارد مقرون به صرفه نیست.

مثلاً اگر در هر جهت از محور مختصات ۳۰ گره داشته باشیم زمان محاسبات در سه بعد تقریباً ۹۰۰۰۰ برابر محاسبات در دو بعد خواهد بود.

بردارهای جابجایی و کرنش در سه بعد عبارتند از:

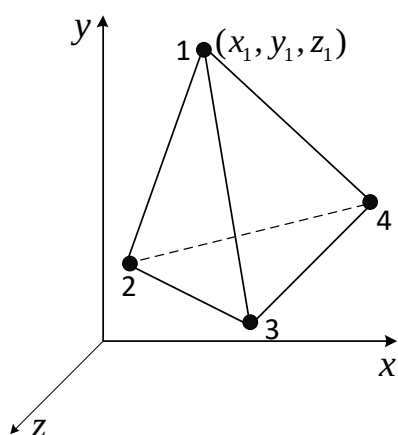
(7A-9)

[illegible]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \Rightarrow \quad \vec{\varepsilon} = \vec{L} \vec{u} \quad \text{where} \quad \vec{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (29-9)$$

XX

برای ایجاد فرمولاسیون اجزاء محدود در سه بعد از المان چهار وجهی چهار گرهی استفاده می‌کنیم.



مانند قبل می‌توان نوشت:

$$\vec{u} \equiv \vec{N}\tilde{u} \quad (30.9)$$

بردار جابجایی، گرهی برای این المان عبارت است از:

(31-9)

[illegible]

به تبع آن ماتریس تابع شکل هم باید بصورت زیر باشد:

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (32-9)$$

ماتریس گرادیان تابع شکل هم از رابطه $\vec{B} = \vec{L}\vec{N}$ حاصل می‌آید.

بردار کرنش اولیه ناشی از تغییر دما برابر است با:

(۳۳-۹)

$$\tilde{\mathbf{D}} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (34-9)$$

Diagram of a rectangular plate with the following specifications:

- Height: 0.7 m
- Material properties: $E = 200\text{ GPa}$, $\nu = 0.3$
- Left boundary: Fixed support (indicated by a hatched vertical line)
- Internal load: A horizontal point load of 15 kN acting to the left at the center of the plate.
- Right boundary: A vertical distributed load of 12 kN/m acting to the right, represented by four arrows.
- Dimensions: The total width of the plate is 2 m , divided into two segments of 1 m each.