امید ریاضی

حسین نادری

دانش آموخته‌ی سمپاد
دانشجوی علوم کامپیوتر شریف

hnadri268.blog.ir
hnaderi268@gmail.com

۲۹ بهمن ۱۳۹۴

فهرست مطالب

امید ریاضی

امید ریاضی یک مقدار یا متغیر تصادفی، یک عدد است که اطلاعات زیادی درباره‌ی رفتار آن متغیر می دهد. اگر کمی نادقیق بخواهیم بیان کنیم، امید ریاضی میانگین ارزش هاست؛ به شرطی که وزن هر ارزش با احتمال رخ دادن آن سنجیده می شود. امید ریاضی متغیر R در فضای نمونه S به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{Ex}(R) = \sum_{\omega \in S} R(\omega) Pr(\omega)$$

برای آن که مفهوم امیدریاضی را کمی شهودی تر درک کنید، فرض کنید S مجموعه ای از دانش آموزان یک کلاس است و ما یک دانش آموز را با توزیع یکسان احتمال انتخاب می کنیم. R را نمره ی امتحان دانش آموز انتخاب شده در نظر می گیریم. حال $\mathrm{Ex}(R)$ همان میانگین نمرات کلاس – اولین چیزی که هرکس بعد از پایان امتحان می خواهد بداند – است! به همین طریق امید ریاضی هم اولین چیزی است که یک نفر می خواهد در مورد یک متغیر تصادفی بداند.

با یک مثال ادامه می دهیم. R را عدد برآمده از یک تاس منصف در نظر می گیریم. امید ریاضی R برابر است با:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}(R) &= \sum_{k=۱}^{۶} k(\frac{۱}{۶}) \\
&= \frac{۱}{۶} + \frac{۲}{۶} + \frac{۳}{۶} + \frac{۴}{۶} + \frac{۵}{۶} + \frac{۶}{۶} \\
&= ۳\frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

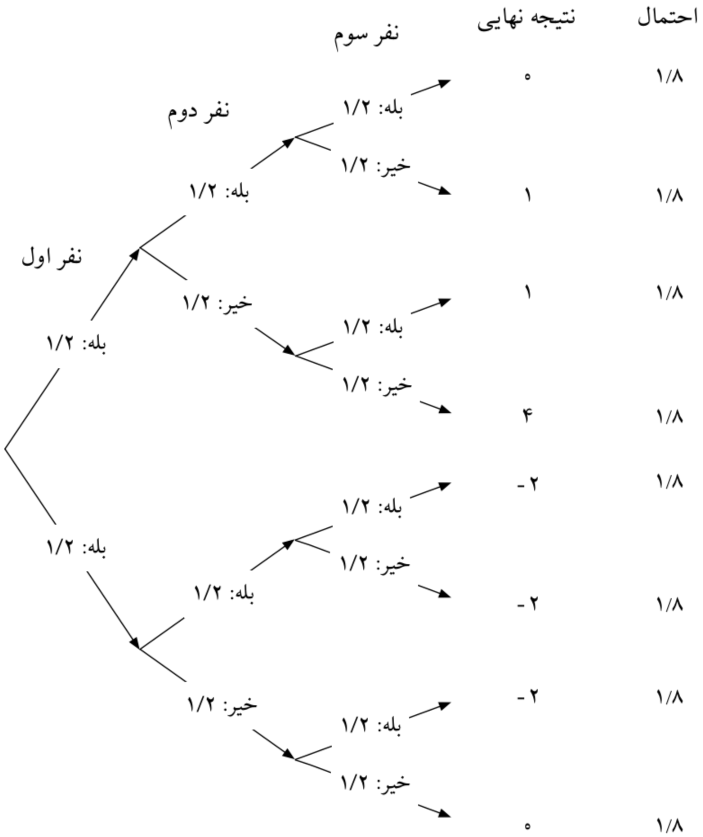
این محاسبه نشان می دهد عبارت "expected value"[۱] می تواند گمراه کننده باشد. چون متغیر تصادفی ممکن است هرگز نتواند برابر مقدار امید ریاضی شود. در حالی که عبارت فارسی امید ریاضی چندان مشکل ساز نیست!

۱ شرط بندی روی سکه ها

در یک بازی سه نفره، هر بازیکن ۲ سکه روی میز می گذارد و به طور مخفیانه روی یک کاغذ «شیر» یا «خط» می نویسد. سپس یکی از آن ها یک سکه منصف را به روی میز می اندازد. ۶ سکه ی روی میز به نسبت مساوی میان کسانی که روی کاغذشان درست پیش بینی کرده بودند، می رسد. اگر همه اشتباه حدس زده بودند، سکه های هرکس به خودش باز می گردد. پس از انجام چندین بازی، نفر اول تعداد زیادی سکه از دست می دهد. آ نقدر زیاد که دیگر نمی توان گفت به خاطر شانس بدش بوده است. به نظر شما چه اتفاقی دارد می افتد؟

شکل ۱ نمودار درختی حالت های مساله با این فرض است که هر نفر به احتمال $\frac{۱}{۲}$ درست و مستقل از دیگران حدس می زند، است.

[۱] امید ریاضی به انگلیسی



شکل ۱: درخت تصمیم با فرضیات اولیه

ستون نتیجه نهایی برای نفر اول با احتساب دو سکه ای که برای شرکت در بازی پرداخت کرده، محاسبه شده است. امید ریاضی سود یا ضرر نفر اول [۲] را با توجه به نمودار حساب می کنیم:

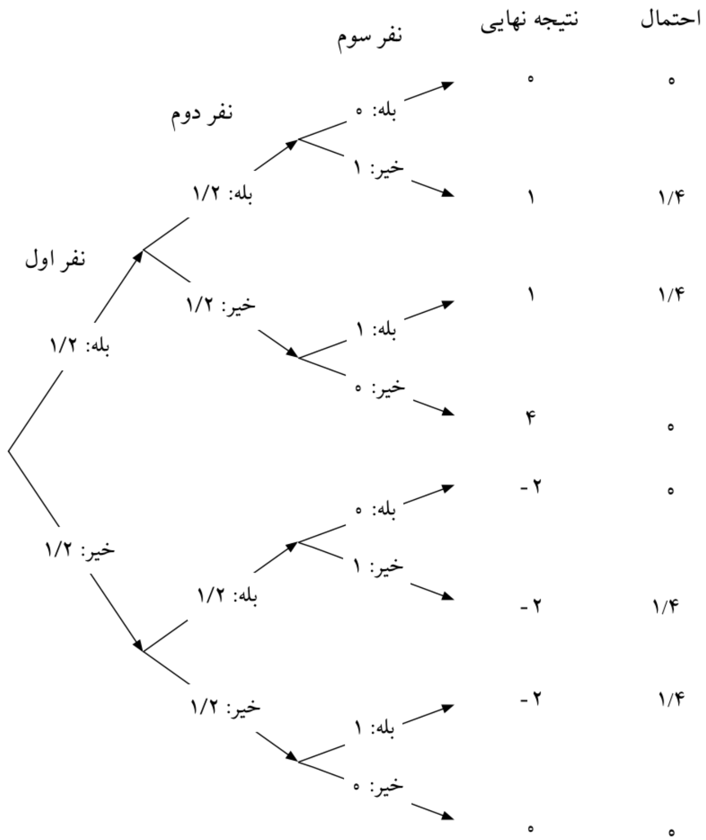
$$\mathrm{Ex}(P) = ۰ \times \frac{۱}{۸} + ۱ \times \frac{۱}{۸} + ۱ \times \frac{۱}{۸} + ۴ \times \frac{۱}{۸} + (-۲) \times \frac{۱}{۸} + (-۲) \times \frac{۱}{۸} + ۰ \times \frac{۱}{۸}$$
$$= ۰$$

پس بازی کاملا منصفانه است و نفر اول پس از تعدادی بازی نه باید چیزی از دست بدهد و نه چیزی به دست آورد.

علت این مغایرت با آن چه در سوال مطرح شد، تبانی نفر دوم و سوم است. این دو نفر همیشه حدس های مخالف هم می زنند. و فرض ما مبنی بر این که هر کس مستقل از دیگران حدس می زند،

[۲] P حرف اول Payoff به معنی نتیجه نهایی است و برای حرف نشان دهنده ی متغیر تصادفی انتخاب شده است.

نادرست است. نفر اول به هیچ وجه نمی تواند همه ی سکه های روی میز را ببرد، چون حتی اگر ببرد، باید سکه های روی میز را با نفر دیگر که او نیز درست حدس زده تقسیم کند. به این ترتیب امید ریاضی او کم می شود و نمودار زیر به دست می آید:



شکل ۲: نمودار با در نظر گرفتن تبانی نفر دوم و سوم

از روی نمودار $\mathrm{Ex}(P)$ را دوباره حساب می کنیم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(P) &= ۰ \times ۰ + ۱ \times \frac{۱}{۴} + ۱ \times \frac{۱}{۴} + ۴ \times ۰ + (-۲) \times \frac{۱}{۴} + (-۲) \times \frac{۱}{۴} + ۰ \times ۰ \\ &= -\frac{۱}{۲}\end{aligned}$$

پس او به طور میانگین در هر بازی نیمی از یک سکه را از دست می دهد!

موقعیت های مشابه برای حقه های زیرکانه در بسیاری از بازی های شرط بندی وجود دارد. این مثال مربوط به Herman Chernoff [۳] می شود. قرعه کشی های دولتی بدترین نوع قمار بازی هستند؛ چون دولت تنها قسمتی از پول وارد بازی شده را به برندگان پرداخت می کند. با این حال Chernoff راهی برای بردن در قرعه کشی های دولتی نیز پیدا کرد. قوانین یک بازی مرسوم به این ترتیب است:

- هر بازیکن باید ۱ دلار بپردازد و ۴ عدد از ۱ تا ۳۶ انتخاب کند.
- دولت نیز ۴ عدد کاملا تصادفی از ۱ تا ۳۶ انتخاب می کند.
- دولت نیمی از پول جمع شده را بین افرادی که درست حدس زده اند، تقسیم می کند و نیمی دیگر را صرف یک پروژه ساخت و ساز می کند.

این قرعه کشی وضعیت بسیار مشابهی با بازی شرط بندی روی سکه ها دارد، جز این که تعداد بازیکن ها و انتخاب ها بسیار بیشتر اند. Chernoff کشف کرد که مجموعه ی اعدادی که سهم بزرگی از جمعیت انتخاب میکنند، بسیار کوچک است[۴] . این واقعیت مانند آن است که این افراد با هم همکاری می کنند که ببازند! حتی اگر یکی از آن ها درست حدس بزنند، آن ها مجبور می شوند پول را میان عده ی زیادی که درست حدس زده اند تقسیم کنند. Chernoff با انتخاب تصادفی اعداد به احتمال کمی یکی از این دنباله های دوست داشتنی مردم را انتخاب می کند. پس اگر او ببرد، به احتمال بالایی کل پول نصیب او می شود! با تحلیل داده های واقعی قرعه کشی های دولتی او حساب کرد که می تواند به صورت میانگین به ازای هر دلار از این طریق ۷ سنت به دست آورد! کسانی که آشنایی با این بازی ها دارند، می دانند ۷ سنت به ازای یک دلار، رقم چندان بدی نیست.

۲ تعریف های معادل برای امید ریاضی

چندین روش برای نوشتن تعریف امید ریاضی وجود دارد. گاهی اوقات استفاده از یکی از صورت ها باعث می شود محاسبه بسیار آسان تر شود. یک روش به این صورت است:

قضیه ۱

$$\mathrm{Ex}(R) = \sum_{x \in range(R)} x \cdot Pr(R = x)$$

---

[۳] استاد سابق آمار MIT

[۴] ظاهرا مردم شبیه به هم فکر می کنند یا به عبارتی حتی اگر افراد اعدادشان را تصادفی انتخاب کنند؛ انسان ها در ساختن اعداد تصادفی بسیار ضعیف عمل می کنند.

اثبات. *سمت چپ را به سمت راست می رسانیم. $[R=x]$ را پیشامدی تعریف می کنیم که در آن $R=x$.*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}(R) &= \sum_{\omega\in S} R(\omega)Pr(\omega) \\
&= \sum_{x\in \mathrm{range}(R)} \sum_{\omega\in[R=x]} R(\omega)Pr(\omega) \\
&= \sum_{x\in \mathrm{range}(R)} \sum_{\omega\in[R=x]} xPr(\omega) \\
&= \sum_{x\in \mathrm{range}(R)} \left(x\cdot \sum_{\omega\in[R=x]} Pr(\omega)\right) \\
&= \sum_{x\in \mathrm{range}(R)} x\cdot Pr(R=x)
\end{aligned}$$

در خط دوم یک جمع بندی را به دو جمع بندی شکستیم. جمع بیرونی تمامی مقدار های ممکن x که متغیر تصادفی می تواند رخ دهد را در بر می‌گیرد و جمع درونی تمامی برآیند هایی‌که آن مقدار را دارند. بنابر این جمع ما هنوز کل فضای نمونه را می پوشاند. در خط آخر، از تعریف احتمال پیشامد $[R=x]$ استفاده کرده ایم.

◇

نتیجه ۲ *اگر R یک متغیر تصادفی با مقدار طبیعی باشد، داریم:*

$$\mathrm{Ex}(R)=\sum_{i=۰}^{\infty} i\cdot Pr(R=i)$$

اگر متغیر تصادفی فقط مقادیر طبیعی داشته باشد، راه دیگری نیز برای نوشتن امید ریاضی وجود دارد:

قضیه ۳ *اگر R یک متغیر تصادفی با مقدار طبیعی باشد، داریم:*

$$\mathrm{Ex}(R)=\sum_{i=۰}^{\infty} Pr(R>i)$$

اثبات. *مجموع زیر را در نظر بگیرید:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
Pr(R=۱) & + & Pr(R=۲) & + & Pr(R=۳) & + & Pr(R=۴) & + & \dots \\
 & + & Pr(R=۲) & + & Pr(R=۳) & + & Pr(R=۴) & + & \dots \\
 & & & + & Pr(R=۳) & + & Pr(R=۴) & + & \dots \\
 & & & & & + & Pr(R=۴) & + & \dots
\end{array}$$

جمع ستون iام برابر $i \cdot Pr(R = i)$ است. بنابراین جمع کل برابر است با:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot Pr(R = i) = \text{Ex}(R)$$

از طرف دیگر سطر i ام برابر $\sum Pr(R > i)$ است. بنابر این جمع کل برابر است با:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot Pr(R = i)$$

$\diamond$

۱.۲ زمان متوسط انتظار قبل از خرابی برنامه

مساله ای که الان مطرح می کنیم با یکی از تعریف های معادل امید ریاضی به آسانی حل می شود. یک برنامه کامپیوتری به احتمال p در پایان هر ساعت از کار می افتد. امید ریاضی زمان از کار افتادن برنامه چیست؟

اگر R تعداد ساعت هایی باشد که طول می کشد تا برنامه از کار بیفتد، جواب مساله $\text{Ex}(R)$ است. چون متغیر تصادفی طبیعی است، از رابطه ی زیر استفاده می کنیم:

$$\text{Ex}(R) = \sum_{i=0}^{\infty} Pr(R > i)$$

$R > i$ در صورتی رخ می دهد که برنامه بعد از i فرصت برای از کار افتادن خراب نشود، که احتمالش برابر $(1 - p)^i$ است. با جای گذاری در رابطه داریم:

$$\begin{aligned} \text{Ex}(R) &= \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^i \\ &= \frac{1}{1 - (1 - p)} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

در خط دوم از حد مجموع استفاده کرده ایم. بنابراین اگر احتمال از کار افتادن برنامه در پایان هر ساعت ۱٪ باشد؛ زمان مورد انتظار برای از کار افتادن دستگاه برابر ۱۰۰ ساعت است.

۲.۲ بچه ی دختر

زوجی می خواهند که یک بچه ی دختر داشته باشند. به احتمال $\frac{۱}{۲}$ بچه ی آن ها مستقل از جنسیت بقیه ی بچه هایشان دختر می شود. اگر این زوج اصرار بر داشتن بچه ی دختر داشته باشند، انتظار چند پسر بچه را باید داشته باشند؟

این مساله حالتی از مساله ی قبل است. سوال «چند ساعت قبل از خرابی؟» با سوال «چند بچه تا بچه ی دختر؟» یکسان است. این جا $p = \frac{۱}{۲}$ است. با تحلیل این احتمال به جواب ۲ بچه می رسیم که چون آخرین بچه دختر است، آن ها باید انتظار یک بچه ی پسر نیز داشته باشند.

۳ رفتار خطی امید ریاضی

امید ریاضی از یک قانون شگفت انگیز خطی بودن پیروی می کند. این قانون می گوید امید ریاضی یک جمع برابر جمع امید ریاضی هاست.

قضیه ۴ (رفتار خطی امید ریاضی) *برای هر جفت متغیر تصادفی $R_۱$ و $R_۲$ داریم:*

$$\mathrm{Ex}(R_۱ + R_۲) = \mathrm{Ex}(R_۱) + \mathrm{Ex}(R_۲)$$

اثبات. اگر S فضای نمونه باشد.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}(R_۱ + R_۲) &= \sum_{\omega \in S} (R_۱(\omega) + R_۲(\omega)) \cdot Pr(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in S} R_۱(\omega) Pr(\omega) + \sum_{\omega \in S} R_۲(\omega) Pr(\omega) \\
&= \mathrm{Ex}(R_۱) + \mathrm{Ex}(R_۲)
\end{aligned}$$

$\diamond$

ویژگی خطی بودن امید ریاضی را به هر مجموعه ی متناهی از متغیر های تصادفی تعمیم می دهیم.

نتیجه ۵ *برای هر متغیر تصادفی $R_۱, R_۲, R_۳ \ldots R_k$ داریم:*

$$\mathrm{Ex}(R_۱ + R_۲ + \cdots + R_k) = \mathrm{Ex}(R_۱) + \mathrm{Ex}(R_۲) + \cdots + \mathrm{Ex}(R_k)$$

نتیجه ی خطی بودن امید ریاضی بسیار شگفت آور است، زیرا برخلاف بسیاری از قضیه های دیگر در احتمال، نیاز نیست متغیر های تصادفی از یک دیگر مستقل باشند و می توان بدون در نظر گرفتن مستقل بودن یا نبودن متغیر های تصادفی از آن استفاده کرد.

۱.۳ امید ریاضی عدد برآمده از دو تاس

امید ریاضی جمع عدد های برآمده از دو تاس منصف چند است؟

متغیر تصادفی $R_۱$ برابر عدد تاس اول و $R_۲$ عدد تاس دوم است. در ابتدای این مقاله گفتیم امید ریاضی یک تاس $۳\frac{۱}{۲}$ است. امید ریاضی جمع دو مقدار را با کمک گرفتن از ویژگی خطی بودن امید ریاضی حساب می کنیم.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(R_۱ + R_۲) &= \mathrm{Ex}(R_۱) + \mathrm{Ex}(R_۲)\\ &= ۳\frac{۱}{۲} + ۳\frac{۱}{۲}\\ &= ۷\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که فرض نکردیم دو تاس از یک دیگر مستقل اند. امید ریاضی جمع دو تاس ۷ است، حتی اگر آن ها به هم چسبیده باشند! در نتیجه از چسباندن دو تاس به هم، یک تاس منصف به دست می آید. حساب کردن این امید ریاضی از طریق رسم نمودار درختی بسیار پیچیده می شود، چون ۳۶ حالت وجود دارد و حتی اگر فرض نمی کردیم که تاس ها مستقل از یک دیگراند، حساب کردنش دیگر یک کابوس می شد!

۲.۳ مساله تحویل کلاه

در یک مهمانی شام n مرد شرکت کرده اند. هر کدام یک کلاه با خود آورده است. کلاه ها در طول شام قاطی می شوند و هر کس پس از شام یک کلاه تصادفی دریافت می کند. هر نفر به احتمال $\frac{۱}{n}$ کلاه خود را دریافت می کند. امید ریاضی تعداد افرادی که کلاه خود را دریافت می کنند، چند است؟

بدون کمک گرفتن از ویژگی خطی امید ریاضی، پاسخ دادن به این سوال بسیار دشوار است. احتمالا تلاش اول برای حل مساله این طور باشد که متغیر تصادفی R برابر تعداد افرادی است که کلاه های خود را دریافت کرده اند. می خواهیم $\mathrm{Ex}(R)$ را حساب کنیم. از تعریف امید ریاضی داریم:

$$\mathrm{Ex}(R) = \sum_{i=۰}^{\infty} i \cdot Pr(R = i)$$

اکنون با مشکل مواجه شدیم، چون حساب کردن $Pr(R = i)$ خودش کار سختی است و بعد از آن ما نیاز داریم که مقدار حساب شده را در جمع بندی جای گذاری کنیم. از این گذشته نیاز داریم که احتمال هر جایگشتی از کلاه ها را ثابت در نظر بگیریم. برای مثال فرض کنیم احتمال وقوع همه ی جایگشت های کلاه ها با یکدیگر برابر اند.

در تلاش دوم سعی می کنیم از ویژگی خطی بودن امید ریاضی استفاده کنیم. R همان متغیر تصادفی ای است که در تلاش اول به کار بردیم. ترفند حل سوال این است که R را به صورت جمع چند متغیر شاخص می نویسیم. $R_i = ۱$ [5] را پیشامدی تعریف می کنیم که در آن مرد iام کلاه خودش را پس می

[5] به این نوع متغیر های تضادفی، شاخص می گویند.

گیرد و $R_i = ۰$ پیشامدی که کلاه فرد دیگری را پس می گیرد. تعداد افرادی که کلاه خودشان را پس می گیرند برابر مجموع زیر است:

$$R = R_۱ + R_۲ + R_۳ + \cdots + R_n$$

این متغیر های شاخص مستقل از یک دیگر نیستند. برای مثال اگر $n - ۱$ مرد کلاه خودشان را پس بگیرند، نفر آخر چاره ای جز گرفتن کلاه خود ندارد. اما از آن جایی که قرار است از ویژگی خطی امید ریاضی استفاده کنیم، لازم نیست در مورد مستقل بودن یا نبودن نگران باشیم!

برای حساب کردن امید ریاضی دو طرف معادله بالا از ویژگی خطی استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}(R) &= \mathrm{Ex}(R_۱ + R_۲ + \cdots + R_n) \\ &= \mathrm{Ex}(R_۱) + \mathrm{Ex}(R_۲) + \cdots + \mathrm{Ex}(R_n) \end{aligned}$$

تنها چیزی که باقی مانده این است که امید ریاضی هر یک از متغیر های کمکی را حساب کنیم.از یک واقعیت ابتدایی که ارزش به خاطر سپردن دارد استفاده می کنیم:

واقعیت ۶ *امید ریاضی یک شاخص برابر احتمالی است که شاخص ۱ باشد. به نمادگذاری ریاضی:*

$$\mathrm{Ex}(I) = Pr(I = ۱)$$

اثبات.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}(I) &= ۱ \cdot Pr(I = ۱) + ۰ \cdot Pr(I = ۰) \\ &= Pr(I = ۱) \end{aligned}$$

$\diamond$

پس ما فقط نیاز داریم که $Pr(R_i = ۱)$ را حساب کنیم که همان احتمال این است که مرد i ام کلاه خودش را پس بگیرد. چون احتمال هر مرد برای گرفتن کلاه خودش $\frac{۱}{n}$ است. داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}(R) &= \mathrm{Ex}(R_۱ + R_۲ + \cdots + R_n) \\ &= Pr(R_۱ = ۱) + Pr(R_۲ = ۱) + \cdots + Pr(R_n = ۱) \\ &= n \cdot \frac{۱}{n} = ۱ \end{aligned}$$

پس ما باید به طور متوسط انتظار داشته باشیم یک نفر کلاه خودش را دریافت کند.

توجه کنید که ما فرض نکردیم که احتمال همه ی جایگشت های کلاه ها یکسان است. فقط نیاز داشتیم بدانیم که هر نفر به احتمال $\frac{۱}{n}$ کلاه خودش را پس می گیرد. به این دلیل راه حل ما بسیار عمومی است، به مثال بعد توجه کنید.

۳.۳ پیش غذای چینی

n نفر در یک رستوران چینی دور یک میز غذای دایره ای نشسته اند. روی میز n نوع پیش غذای متمایز چیده شده است. هر نفر شروع به خوردن پیش غذایی که جلویش است می کند. پس از مدتی کسی میز را می چرخاند، به طوری که پیش غذایی تصادفی جلوی هر نفر قرار می گیرد. امید ریاضی افرادی که پیش غذای قبلی شان دوباره جلویشان قرار بگیرد، چند است؟

این سوال یک حالت خاص از مساله تحویل کلاه است. در مساله تحویل کلاه تنها فرض کردیم که هر نفر به احتمال $\frac{1}{n}$ کلاه خودش را پس می گیرد. فراتر از این چیزی در مورد این که جایگشت ها چگونه اند فرض نکردیم. چون پیش غذا ها شیفت دوری نسبت به جایگاه قبلی شان داشته اند، یا به همه پیش غذای قبلی شان دوباره رسیده است یا به هیچ کس نرسیده. با این حال تحلیل قبلی مان باز هم کاراست و امید ریاضی تعداد افرادی که پیش غذای خودشان به خودشان برمی گردد ۱ است.

۴ بازی حدس عدد

قواعد یک بازی دو نفره در ادامه آمده است که یک ویژگی عجیب امید ریاضی را معلوم می کند.

ابتدا نفر اول یک توزیع احتمال روی اعداد طبیعی در نظر می گیرد. توزیع احتمال هر توزیعی می تواند باشد. برای مثال ممکن است یک توزیع یکسان روی $1, 2, \ldots, 6$ باشد، مانند یک تاس منصف. یا یک توزیع دوجمله ای روی $1, 2, \ldots, n$. یا حتی می توان به هر عدد احتمالی بزرگتر از صفر داد، به شرطی که جمع همه ی احتمال ها یک شود.

پس از این، نفر دوم عدد z را بر حسب توزیع احتمال نفر اول انتخاب می کند. سپس نفر اول نیز به همین منوال عدد y_1 را تصادفی بر حسب توزیع احتمال انتخاب می کند. اگر y_1 بزرگتر از z باشد، بازی تمام می شود. در غیر این صورت اگر $y_1 \geq z$ بود ،بازی با انتخاب $y_2, y_3, y_4, \ldots$ تا جایی ادامه می یابد که یک بزرگتر از z انتخاب شود. امید ریاضی تعداد اعداد انتخاب شده چه مقدار است؟

نفر اول دست کم یک عدد انتخاب می کند، بنابراین امید ریاضی قطعا مقداری بزرگتر از یک است. جوابی حدود ۲ و ۳ معقول به نظر می رسد. اما ممکن است برای فردی سوال شود که آیا امید ریاضی به نحوه ی توزیع وابسته است یا نه؟ در ادامه به درستی یا نادرستی این شهود می پردازیم.

۱.۴ تحلیل بازی

تعداد اعدادی که باید انتخاب شوند تا بازی تمام شود، مقداری طبیعی است. و همان طور که دیدیم رابطه ی مناسبی برای امید ریاضی متغیر تصادفی طبیعی وجود داشت:

$$\text{Ex}(\#\text{اعداد انتخاب شده}) = \sum_{k=0}^{\infty} Pr(\#\text{اعداد عدد انتخاب شده} > k) \qquad (1)$$

اگر نفر اول z و نفر دوم اعداد $y_1, y_2, \ldots, y_k$ را انتخاب کرده باشد. دو حالت ممکن است وجود داشته باشد:

- اگر بزرگترین عدد میان انتخاب ها یکتا باشد، احتمال این که عدد انتخابی نفر دوم باشد، $\frac{1}{k+1}$ است. پس به احتمال $\frac{1}{k+1}$ بازی ادامه می یابد.

• اگر چندین بزرگترین عدد وجود داشته باشد، بازی با احتمالی بزرگتر از $\frac{۱}{k+۱}$ ادامه می یابد و باید نفر اول عدد انتخاب کند.

در هر دو حالت بازی با احتمال بیش از $\frac{۱}{k+۱}$ ادامه می یابد، و نفر اول نیاز دارد بیش از k عدد انتخاب کند. به عبارت دیگر:

$$Pr(\#\text{اعداد انتخاب شده} > k) \geq \frac{۱}{k+۱} \tag{۲}$$

می توان نتیجه گرفت برای این که تعداد انتخاب های نفر اول کم شود، باید احتمال های اعداد بسیار کوچک باشند. برای مثال توزیع برابر روی مجموعه ی $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰^{۱۰۰}\}$. در این حالت به ازای k های بزرگ، احتمال این که نفر اول بیش از k انتخاب برای پایان رساندن بازی داشته باشد بسیار نزدیک به $\frac{۱}{k+۱}$ است. برای مثال احتمال این که بیش از ۹۹ عدد انتخاب شود، تقریبا ۱% است. شهودا به نظر می رسد عدد متوسطی برای تعداد اعداد انتخابی وجود داشته باشد.

متاسفانه بر خلاف شهود، اثبات آسانی وجود دارد که امید ریاضی اعدادی که باید انتخاب شوند مستقل از توزیع بی نهایت است. ۲ را در ۱ جای گذاری می کنیم.

$$\begin{aligned}\text{Ex}(\#\text{اعداد انتخاب شده}) &\geq \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k+۱} \\ &= \infty\end{aligned}$$

این پدیده می تواند آشفتگی بسیاری ایجاد کند! برای مثال فرض کنید که در یک شبکه هر بسته داده با احتمال $\frac{۱}{k}$ بیشتر یا مساوی k مرحله به تاخیر می افتاد. ممکن است به نظر خوب برسد؛ به احتمال ۱% بسته ۱۰۰ مرحله یا بیشتر تاخیر دارد. ولی امید ریاضی زمان تاخیر برای بسته در حقیقت بی نهایت است!

نکته ای ضروری که باید به آن اشاره کرد؛ این است که هر متغیر تصادفی لزوما یک امید ریاضی خوش تعریف ندارد. این ایده ممکن است در ابتدا آزاردهنده باشد ولی به خاطر بسپارید که امید ریاضی فقط یک میانگین وزن دار است. و مجموعه های بسیاری وجود دارند که که میانگین به صورت رسمی ندارند، مانند:

$$\{۱, -۲, ۳, -۴, ۵, -۶, \ldots\}$$

اکیدا باید در همه ی قضیه های مرتبط با امید ریاضی عبارت «...همه ی امکان های امید ریاضی وجود دارد.» مطرح شود. اما ما از بیان این فرض را به طور ضمنی صرف نظر می کنیم. خوش بختانه معمولا متغیر هایی که امید ریاضی ندارند در تمارین و مسائل معمولی نیستند.

۵ تمبر جمع کن

در یک رستوران پس از خرید هر غذای بچه، یک ماشین اسباب بازی به مشتری هدیه داده می شود. n رنگ ماشین اسباب بازی به رنگ های آبی، سبز، قرمز، خاکستری ، ... وجود دارند. رنگ ماشینی که پس از خرید به مشتری تحویل داده می شود، کاملا تصادفی و مستقل از خرید های قبلی او است. یک

مرد هر روز از رستوران غذای بچه می خرد. امید ریاضی تعداد غذایی که باید این مرد بخرد تا از همه رنگ ها، حداقل یک ماشین داشته باشد، چقدر است؟[6]

سوال های ریاضی مشابه ممکن است ظاهر های متفاوت داشته باشند. برای مثال امید ریاضی تعداد افرادی که باید از آن ها آمارگیری شود؛ تا به ازای هر ماه دست کم یک از نفر متولدین آن ماه آمار گیری شده باشد، چقدر است. در ادامه این مقدار را هم حساب می کنیم. مساله کلی عموما با نام تمبر جمع کن شناخته می شود.

۱.۵ راه حل با کمک ویژگی خطی امید ریاضی

ویژگی خطی امید ریاضی چیزی شبیه استقرای ریاضی و اصل لانه کبوتری است. یک ایده ساده که در انواع روش های مبتکرانه به کار می رود. اینجا نیز برای حل مساله تمبر جمع کن، یک روش زیرکانه برای بهره بردن از ویژگی خطی به کار می گیریم. فرض کنید ۵ رنگ وجود دارد و مرد خریدار دنباله ی زیر [7] را دریافت می کند.

خاکستری نارنجی آبی نارنجی آبی قرمز سبز سبز آبی

دنباله را به پنج قطعه افراز می کنیم.

$$\underbrace{\text{آبی}}_{X_0}\quad\underbrace{\text{سبز}}_{X_1}\quad\underbrace{\text{قرمز سبز}}_{X_2}\quad\underbrace{\text{نارنجی آبی}}_{X_3}\quad\underbrace{\text{خاکستری نارنجی آبی}}_{X_4}$$

هر قطعه جایی تمام می شود که یک ماشین جدید برای بار اول به دنباله اضافه می شود. و قطعه ی بعدی از عضو بعد از آن شروع می شود. به این ترتیب می توانیم مساله تمبر جمع کن را به چند قسمت ساده تر بشکنیم و پس از تحلیل هر قسمت از ویژگی خطی برای حساب کردن امید ریاضی کل استفاده کنیم.

به مساله کلی که قصد داریم n نوع ماشین جمع کنیم، باز می گردیم. X_k طول قطعه ی kام است. تعداد کل ماشین هایی که باید گرفته شوند، برابر است با:

$$T = X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}$$

تمرکزمان را معطوف X_k، طول قطعه ی kام می کنیم. ابتدای قطعه ی kام، حداکثر k رنگ مختلف وجود دارد و زمانی قطعه تمام می شود که یک ماشین با رنگ جدید افزوده شود. وقتی k رنگ ماشین انتخاب شده اند، یک ماشین تکراری به احتمال $\frac{k}{n}$ و یک ماشین جدید به احتمال $1 - \frac{k}{n}$ انتخاب می شود. بنابراین امید ریاضی ماشین هایی که باید قبل از یک ماشین جدید گرفته شود طبق مساله «زمان متوسط انتظار قبل از خرابی برنامه» $\frac{n}{n-k}$ به دست می آید. پس داریم:

$$\mathrm{Ex}(X_k) = \frac{n}{n-k}$$

[6] همانطور که مشاهده خواهید کرد، داستان این مساله طبق نامش نیست. ولی به خاطر صورت داستانی مشابه اش با جمع کردن کلکسیون تمبر، به نام تمبر جمع کن معروف شده است.

[7] از سمت چپ بخوانید.

حال از ویژگی خطی استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(T) &= \mathrm{Ex}(X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1})\\ &= \mathrm{Ex}(X_0) + \mathrm{Ex}(X_1) + \cdots + \mathrm{Ex}(X_n - 1)\\ &= \frac{n}{n-0} + \frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{1}\\ &= n\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{1}\Big)\\ &= nH_n\end{aligned}$$

جمع بندی خط یکی مانده به آخر همان سری همساز[8] است. می دانیم که مجموع سری همساز تا عضو nام کمتر از $\ln n$ است. [9]

از این حل کلی برای پاسخ دادن به سوالات گسسته استفاده می کنیم. مانند: امید ریاضی تعداد بار تاس انداختن که همه ی اعداد ۱ تا ۶ ظاهر شوند، چقدر است؟

$$6H_6 = 14.7...$$

یا همان طور که قبلا اشاره کردیم، امید ریاضی تعداد افرادی که باید از آن ها آمار گیری کرد تا دست کم یک نفر به ازای هر ماه در میان نمونه آماری باشد؟

$$365H_{365} = 2364.6...$$

۶ امید ریاضی ضرب چند متغیر تصادفی

تا کنون به اندازه ی کافی به امید ریاضی مجموع پرداخته شده است. حال در مورد امید ریاضی حاصل ضرب چند متغیر تصادفی بحث می کنیم.اگر R_1 و R_2 مستقل باشند، امید ریاضی حاصلضرب آن ها برابر حاصل ضرب امید ریاضی آن هاست.

قضیه ۷ *برای متغیر های تصادفی مستقل R_1 و R_2 داریم:*

$$\mathrm{Ex}(R_1 \cdot R_2) = \mathrm{Ex}(R_1) \cdot \mathrm{Ex}(R_2)$$

اثبات. *سمت راست را به سمت چپ می رسانیم*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(R_1)\cdot\mathrm{Ex}(R_2) &= \Bigg(\sum_{x\in range(R_1)} x\cdot Pr(R_1=x)\Bigg)\cdot\Bigg(\sum_{y\in range(R_2)} y\cdot Pr(R_2=y)\Bigg)\\ &= \sum_{x\in range(R_1)}\sum_{y\in range(R_2)} xyPr(R_1=x)Pr(R_2=y)\\ &= \sum_{x\in range(R_1)}\sum_{y\in range(R_2)} xyPr(R_1=x\cap R_2=y)\end{aligned}$$

[8] سری هارمونیک

[9] در سری دوم سوالات همین وبلاگ به این موضوع پرداخته شده است.

خط دوم حاصلضرب دو مجموع است. چون فرض کرده ایم $R_۱$ و $R_۲$ مستقل اند، مجاز به این کار بوده ایم. بر روی حاصلضرب xy دسته بندی می کنیم:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{z \in range(R_۱ \cdot R_۲)} \sum_{x,y:\ xy=z} xyPr(R_۱ = x \cap R_۲ = y) \\
&= \sum_{z \in range(R_۱ \cdot R_۲)} \left(z \sum_{x,y:\ xy=z} Pr(R_۱ = x \cap R_۲ = y) \right) \\
&= \sum_{z \in range(R_۱ \cdot R_۲)} z \cdot Pr(R_۱ \cdot R_۲ = z) \\
&= \mathrm{Ex}(R_۱) \cdot \mathrm{Ex}(R_۲)
\end{aligned}$$

$\diamond$

۱.۶ حاصلضرب دو تاس مستقل

فرض کنید دو تاس منصف مستقل از هم داریم. امید ریاضی حاصلضرب دو عدد برآمده از آن ها چند است؟

$R_۱$ و $R_۲$عدد های بر آمده از تاس ها اند. امید ریاضی حاصلضرب را به این صورت حساب می کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}(R_۱ \cdot R_۲) &= \mathrm{Ex}(R_۱) \cdot \mathrm{Ex}(R_۲) \\
&= ۳\frac{۱}{۲} \cdot ۳\frac{۱}{۲} \\
&= ۱۲\frac{۱}{۴}
\end{aligned}$$

خط اول از قضیه ۷ کمک گرفتیم و در خط بعد از امید ریاضی عدد برآمده از یک تاس که قبلا آن را حساب کرده بودیم، استفاده کردیم.

۲.۶ حاصلضرب دو تاس وابسته به هم

دو تاس غیر مستقل در نظر بگیرید؛ به طوری که نتیجه ی تاس دوم همواره مانند نتیجه ی تاس اول است. آیا این فرض نتیجه را تغییر می دهد؟ آیا فرض مستقل بودن برای قضیه ۷ لازم است؟

همانند قبل از $R_۱$ و $R_۲$ برای عدد های برآمده از تاس ها استفاده می کنیم.امید ریاضی را مستقیما

به طریق زیر حساب می کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}(R_۱) \cdot \mathrm{Ex}(R_۲) &= \mathrm{Ex}(R_۱^۲) \\
&= \sum_{i=۱}^{۶} i^۲ Pr(R_۱ = i) \\
&= \frac{۱^۲}{۶} + \frac{۲^۲}{۶} + \frac{۳^۲}{۶} + \frac{۴^۲}{۶} + \frac{۵^۲}{۶} + \frac{۶^۲}{۶} \\
&= ۱۵\frac{۱}{۶}
\end{aligned}$$

خط اول از فرض یکسان بودن نتیجه ی دوتاس استفاده کردیم. سپس $R_۱^۲$ را طبق تعریف باز کردیم. مشاهده می کنیم که امید ریاضی تغییر کرده است. پس شرط مستقل بودن برای امید ریاضی ضرب ضروری است.

۳.۶ چند نتیجه

قضیه ۱ را می توان تعمیم داد.

نتیجه ۸ *اگر* $R_۱, R_۲, R_۳ \ldots R_n$ *متغیر های تصادفی مستقل باشند، داریم:*

$$\mathrm{Ex}(R_۱ \cdot R_۲ \cdot \cdots \cdot R_n) = \mathrm{Ex}(R_۱) \cdot \mathrm{Ex}(R_۲) \cdot \cdots \cdot \mathrm{Ex}(R_n)$$

در اثبات این تعمیم از اصل استقرا و تعریف متغیر های مستقل استفاده می شود. از بیان جزئیات صرف نظر می کنیم.

تا کنون درباره ی امید ریاضی حاصل جمع و حاصلضرب می دانیم. اما توصیف کردن امید ریاضی وارون چندان کار راحتی نیست. یک تلاش بی ثمر از این دست را در ادامه می آوریم.

نتیجه نادرست ۹ *اگر* R *متغیر تصادفی باشد، داریم:*

$$\mathrm{Ex}(\frac{۱}{R_۱}) = \frac{۱}{\mathrm{Ex}(R_۱)}$$

مثال نقض می زنیم. اگر R متغیر تصادفی ای باشد که به احتمال $\frac{۱}{۲}$ یک و به احتمال $\frac{۱}{۲}$ دو باشد، داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{۱}{\mathrm{Ex}(R)} &= \frac{۱}{\frac{۱}{۲} \cdot ۱ + \frac{۱}{۲} \cdot ۲} \\
&= \frac{۲}{۳} \\
\mathrm{Ex}(\frac{۱}{R}) &= \frac{۱}{۱} \cdot \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۱}{۲} \\
&= \frac{۳}{۴}
\end{aligned}$$

دو مقدار به دست آمده برابر نیستند، پس نتیجه غلط است. اما در ادامه یک نتیجه غلط دیگر می آوریم که درستی آن را اثبات می کنیم!

نتیجه نادرست ۱۰ *اگر* $\text{Ex}(R/T) > ۱$ *آن‌گاه* $\text{Ex}(R) > \text{Ex}(T)$.

اثبات. از سمت اگر شروع می‌کنیم، هر دو طرف را در $\text{Ex}(T)$ *ضرب می‌کنیم، سپس از قضیه ۱ استفاده می‌کنیم:*

$$\begin{aligned} \text{Ex}(R/T) &> ۱ \\ \text{Ex}(R/T) \cdot \text{Ex}(T) &> \text{Ex}(T) \\ \text{Ex}(R) &> \text{Ex}(T) \end{aligned}$$

◇

این اثبات غلط، چند اشکال دارد! گام اول به شرطی درست است که $\text{Ex}(T) > ۰$. مهم تر این که حق نداشتیم از قضیه ۱ در گام دوم استفاده کنیم. چون لزوما R/T و T مستقل نیستند. متاسفانه با وجود این که نتیجه ۱۰ غلط است، عده ای از آن استفاده می کنند!

۱.۳.۶ پارادوکس RISC

داده های زیر از مقاله ای از چند استاد مشهور گرفته شده است. آن ها می خواستند نشان دهند برنامه ها روی پردازنده های RISC[۱۰] عموما سریع تر از پردازنده های CISC[۱۱] اجرا می شوند. به این خاطر، آن ها جدولی مانند جدول زیر از مدت زمان اجرای برنامه ها تهیه کردند:

برنامه	RISC	CISC	CISC/RISC
جست و جوی رشته	۱۵۰	۱۲۰	۰/۸
آزمون بیتی	۱۲۰	۱۸۰	۱/۵
آکرمن	۱۵۰	۳۰۰	۰/۲
مرتب سازی بازگشتی	۲۸۰۰	۱۴۰۰	۰/۵
میانگین			۱/۲

نویسندگان از میانگین نرخ CISC بر RISC نتیجه گرفتند که در حالت کلی برنامه هایی که روی CISC اجرا می شوند، ۱/۲ برابر کند تر از RISC اند. ولی یک مشکل اساسی وجود دارد، آن هم این که اگر به جای ستون آخر، نرخ RISC بر CISC نوشته شود، به نتیجه ای دیگر می رسیم.

[۱۰] کامپیوتر کم دستور: یک نوع معماری ساخت کامپیوتر یا ریزپردازنده می‌باشد. در این معماری به جای استفاده از دستورالعمل‌های خاص، که در سایر معماری‌ها مرسوم است، سعی می‌شود که از یک مجموعه دستورالعمل حداقلی و فوق‌العاده بهینه‌سازی شده استفاده شود.

[۱۱] کامپیوتر با دستورهای پیچیده: نوعی معماری کامپیوتری است که در آن یک دستورالعمل می‌تواند چندین دستورالعمل سطح پایین دیگر را اجرا کند (مانند خواندن از حافظه، عملیات حسابی و ذخیره در حافظه).

برنامه	RISC	CISC	RISC/CISC
جست و جوی رشته	۱۵۰	۱۲۰	۱/۲۵
آزمون بیتی	۱۲۰	۱۸۰	۰/۶۷
آکرمن	۱۵۰	۳۰۰	۰/۵
مرتب سازی بازگشتی	۲۸۰۰	۱۴۰۰	۲
میانگین			۱/۱

با استدلالی کاملا مشابه آن چه نویسندگان استفاده کردند، می توانیم نتیجه بگیریم که برنامه های RISC به اندازه ٪۱۰ طولانی تر از برنامه های CISC اند! به نظر شما چه اتفاقی افتاده است؟

۲.۳.۶ برداشت مبتنی بر احتمال

برای روشن شدن موضوع، رقابت بین RISC و CISC را با ابزار های احتمال صورت بندی می کنیم.
فضای نمونه، مجموعه ی برنامه های بررسی شده اند. متغیر تصادفی R طول برنامه های RISC و متغیر تصادفی C طول برنامه های CISC اند. می خواهیم میانگین مدت زمان اجرای برنامه های RISC یعنی $\text{Ex}(R)$ را با میانگین مدت زمان اجرای برنامه های CISC یعنی $\text{Ex}(C)$ مقایسه کنیم.
برای مقایسه طول برنامه ها باید برای هر نمونه یک احتمال نسبت دهیم. ممکن است کسی بخواهد بر اساس نرخ استفاده ی برنامه های مشابه به احتمال ها وزن دهد. اما ما از روش نویسنده ها پیروی می کنیم. آن ها وزن های برابر به برنامه ها دادند، پس به طور ضمنی فرض کرده اند که برنامه های مشابه ارزش های یکسان دارند. همین کار را می کنیم و $\text{Ex}(R)$ و $\text{Ex}(C)$ را به این طریق به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
\text{Ex}(R) &= \frac{۱۵۰}{۴} + \frac{۱۲۰}{۴} + \frac{۱۵۰}{۴} + \frac{۲۸۰۰}{۴} \\
&= ۸۰۵ \\
\text{Ex}(C) &= \frac{۱۲۰}{۴} + \frac{۱۸۰}{۴} + \frac{۳۰۰}{۴} + \frac{۱۴۰۰}{۴} \\
&= ۵۰۰
\end{aligned}$$

امید ریاضی طول برنامه های RISC دقیقا ۱/۶۱ برابر طول برنامه CISC است. RISC حتی بدتر از دو پاسخ پیشنهادی قبل عمل می کند!
بر طبق مدل احتمالاتی ما، نویسنده ها C/R را برای هر نمونه حساب کردند و با میانگین گرفتن از آن ها نتیجه گرفتند $\text{Ex}(C/R) = ۱/۲$. تا این جا درست پیش رفتند. اما آن ها این گونه برداشت کردند که برنامه های CISC کندتر از برنامه های RISC اند. از این قرار، کلید نتیجه ی غلط مقاله متکی به نتیجه ۱۰ است[۱۲]، که همه علت غلط بودن آن را می دانیم!

۳.۳.۶ مثال ساده تر

خاستگاه مساله در آن چه در زیر آمده است، روشن تر است. فرض کنید داده ها از این دست باشند:

[۱۲] چون به جای تقسیم امید ریاضی طول برنامه ها، از امید ریاضی تقسیم متغیر های تصادفی بر یک دیگر استفاده کرده بودیم.

معیار	پردازنده A	پردازنده B	A/B	B/A
مساله ۱	۱	۲	۱/۲	۲
مساله ۲	۲	۱	۲	۱/۲
میانگین			۱/۲۵	۱/۲۵

حال آمار و ارقام مربوط به پردازنده A و B متقارن می باشند. با این حال می توان از ستون سوم نتیجه گرفت پردازنده B، ۲۵% کند تر از A است و از ستون چهارم می توان نتیجه گرفت پردازنده A، ۲۵% کند تر از B است. جفت نتیجه گیری ها به وضوح غلط اند. مفهوم میانگین های نرخ ها گمراه کننده است. از این پس هرگاه دارید امید ریاضی یک کسر را حساب کنید، دو بار فکر کنید؛ تا از یک مقدار خام استفاده و برداشت اشتباه نکنید.

۷ قصیه کلی امید ریاضی

همان طور که احتمال شرطی وجود دارد، امید شرطی نیز وجود دارد. برای مثال، امید ریاضی عدد بر آمده از تاس به شرطی که عدد بر آمده زوج باشد را در نظر بگیرید.

همان روش های محاسبه امید ریاضی معمولی برای امید ریاضی شرطی نیز صادق است. با این تفادت که همه ی احتمال ها به احتمال های شرطی تبدیل می شوند. اگر R متغیر تصادفی و E یک پیشامد باشد، امید ریاضی به شرطی که پیشامد E روی دهد با $\text{Ex}(R \mid E)$ نمایش داده می شود و به این صورت تعریف می شود:

$$\begin{aligned}\text{Ex}(R \mid E) &= \sum_{\omega \in S} R(\omega) Pr(\omega \mid E) \\ &= \sum_{x \in \text{range}(R)} x \cdot Pr(R = x \mid E)\end{aligned}$$

به عنوان مثال، اگر R عدد بر آمده تاس و E رویدادی باشد که عدد بر آمده زوج باشد. امید $\text{Ex}(R|E)$ را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned}\text{Ex}(R \mid E) &= \sum_{\omega \in \{۱,\ldots,۶\}} R(\omega) Pr(\omega \mid E) \\ &= ۱ \times ۰ + ۲ \times \frac{۱}{۳} + ۳ \times ۰ + ۴ \times \frac{۱}{۳} + ۵ \times ۰ + ۶ \times \frac{۱}{۳} \\ &= ۴\end{aligned}$$

امید شرطی برای تفکیک محاسبه به چند حالت بسیار کارآمد اشت. تفکیک به وسیله ی قیاس کردن با قضیه کلی امید ریاضی به دست می آید.

قضیه ۱۱ (قضیه کلی امید ریاضی) *$E_۱, E_۲, \ldots, E_n$ رخداد هایی باشند که فضای نمونه را افراز می کنند و احتمال های ناصفر دارند. اگر R متغیر تصادفی باشد، داریم:*

$$\text{Ex}(R) = \text{Ex}(R \mid E_۱) \cdot Pr(E_۱) + \cdots + \text{Ex}(R \mid E_n) \cdot Pr(E_n)$$

به عنوان مثال اگر R عدد برآمده از تاس و E پیشامدی باشد که عدد برآمده زوج و $\overline{E}$ پیشامدی که عدد برآمده فرد باشد، باشند. امید ریاضی کلی برابر است با:

$$\underbrace{\mathrm{Ex}(R)}_{۷/۲} = \underbrace{\mathrm{Ex}(R \mid E)}_{=۴} \cdot \underbrace{Pr(E)}_{=۱/۲} + \underbrace{\mathrm{Ex}(R \mid \overline{E})}_{=?} \cdot \underbrace{Pr(\overline{E}t)}_{=۱/۲}$$

تنها کمیتی که قبلا مقدارش را نمی دانستیم $\mathrm{Ex}(R \mid \overline{E})$ که امید ریاضی با شرط فرد بودن عدد برآمده است. با حل این معادله به $\mathrm{Ex}(R \mid \overline{E}) = ۳$ می رسیم.
برای اثبات قضیه کلی امید ریاضی ابتدا لم زیر را اثبات می کنیم.

لم ۱۲ *اگر R یک متغیر تصادفی، E یک پیشامد با احتمال بزرگتر از صفر و I_E متغیر شاخص برای E باشد. داریم:*

$$\mathrm{Ex}(R \mid E) = \frac{\mathrm{Ex}(R \cdot I_E)}{Pr(E)} \tag{۳}$$

اثبات. دقت داشته باشید که برای هر برآمد s در فضای نمونه :

$$Pr(\{s\} \cap E) = \begin{cases} ۰ & I_E(s) = ۰ \\ Pr(s) & I_E(s) = ۱ \end{cases}$$

و هم چنین:

$$Pr(\{s\} \cap E) = I_E(s) \cdot Pr(s) \tag{۴}$$

حال،

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}(R \mid E) &= \sum_{s\in S} R(s) \cdot Pr(\{s\} \mid E) && \text{(طبق تعریف } \mathrm{Ex}(\cdot \mid E)\text{)} \\
&= \sum_{s\in S} R(s) \cdot \frac{Pr(\{s\} \cap E)}{Pr(E)} && \text{(طبق تعریف } Pr(\cdot \mid E)\text{)} \\
&= \sum_{s\in S} R(s) \cdot \frac{I_E(s) \cdot Pr(s)}{Pr(E)} && \text{(طبق (۴))} \\
&= \frac{\sum_{s\in S}(R(s) \cdot I_E(s)) \cdot Pr(s)}{Pr(E)} \\
&= \frac{\mathrm{Ex}(R \cdot I_E)}{Pr(E)} && \text{(طبق تعریف } \mathrm{Ex}(R \cdot I_E)\text{)}
\end{aligned}$$

◇

اکنون قضیه کلی امید ریاضی را اثبات می کنیم.
اثبات. چون E_i ها فضای نمونه را افراز می کنند،

$$R = \sum_i R \cdot I_{E_i} \tag{۵}$$

برای هر متغیر تصادفی R داریم:

$$\begin{aligned}
\text{Ex}(R) &= \text{Ex}\left(\sum_i R \cdot I_{E_i}\right) && \text{(طبق (۵))} \\
&= \sum_i \text{Ex}(R \cdot I_E) && \text{(ویژگی خطی امید ریاضی)} \\
&= \sum_i \text{Ex}(R \mid I_E) \cdot Pr(E_i) && \text{(طبق (۳))}
\end{aligned}$$

$\diamond$