Subject: جلسه اوّل

Date: 26و13و5

Ex: ارزش عبارت منطقی زیر را برابر $x=2$ و $y=10$ را تعیین کنید.

$$(((x=3) \text{ and } (y<9)) \text{ or } (y \geq 4))$$

$$\text{and } (\text{not}((x=3) \text{ and } (y \geq 4)))$$

$F\underbrace{(x=3)}_{p}$, $T\underbrace{(y\geq 4)}_{r}$, $F\underbrace{(y<9)}_{q}$

$$\Rightarrow \overbrace{(\overbrace{(\underset{f}{p}\wedge\underset{f}{q})}^{f}\vee\underset{T}{r})}^{T}$$

$$\underbrace{\wedge(\sim\underbrace{(\underset{f}{p}\wedge\underset{T}{r})}_{f})}_{T}$$

$p\uparrow q \equiv \sim(p\wedge q)$ ↑ NAND عملگر

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$
T	T	T	
T	F	F	
F	T	F	
F	F	F	

$p\downarrow q \equiv \sim(p\vee q)$: ↓ NOR عملگر

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

عملگر XOR

p	q	p xoR q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

راستگو : گزاره‌ای که در تمام حالات منطقی ارزش T دارد راستگو گفته می‌شود

$p \vee \sim p$

p	~p	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

Ex :

1) $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$

2) $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

تناقض : گزاره‌ای که در تمام حالت‌ها F می‌باشد تناقض نامیده می‌شود

$p \wedge \sim p$

p	~p	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

Subject:

Date:

خواص عملگرها :

1. خاصیت جابه‌جایی

$p \wedge \cancel{q} q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

2. خاصیت شرکت‌پذیری

$p \wedge (q \wedge s) \equiv (p \wedge q) \wedge s$

$p \vee (q \vee s) \equiv (p \vee q) \vee s$

3. توزیع‌پذیری

$p \wedge (q \vee s) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge s)$

$p \vee (q \wedge s) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee s)$

4. خاصیت دمورگان

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

5. خاصیت خودتوانی

$p \vee \cancel{q} p \equiv p$

$p \overset{\wedge}{\cancel{\vee}} p \equiv p$

6. خاصیت های

$p \vee F \equiv p \qquad p \vee T \equiv T$

$p \wedge F \equiv F \qquad p \wedge T \equiv p$

7. خاصیت متمم

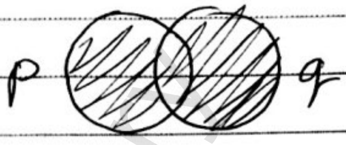
$p \vee \sim p \equiv T$

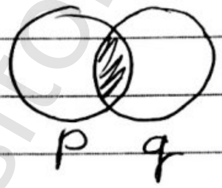
$p \wedge \sim p \equiv F$

8. خاصیت جذبی

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \vee q) \equiv p$





9. خاصیت نقیض دوگانه

$\sim\sim p \equiv p$

$[(p\vee q)\wedge\sim(\sim p\wedge(\sim q\vee\sim r))]\vee(\sim p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge\sim r)\equiv T$

$[(p\vee q)\wedge\sim(\cancel{p}\sim p\wedge\underbrace{(\sim q\vee\sim r)})]\vee[\sim p\wedge\underbrace{(\sim q\vee\sim r)}]$

$[R\wedge\sim S]\vee S$

$(S\vee R)\wedge\overset{T}{\cancel{(S\vee\sim S)}}\equiv S\vee R\equiv[\sim p\wedge(\sim q\vee\sim r)]\vee(p\vee q)$

$[(\sim p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge\sim r)]\vee(p\vee q)$

$\sim(p\vee q)\vee\sim(p\vee r)\vee(p\vee q)\equiv T$

ore

$p\wedge q$

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

and

$p\vee q$

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$\sim p$

~~p~~	~~q~~	~~$\sim p$~~
~~T~~	~~T~~	
~~T~~	~~F~~	
~~F~~	~~T~~	
~~F~~	~~F~~	

p	~~
T	F
F	T

ترکیب شرطی

$p\rightarrow q$

p	q	$p\rightarrow q$
T	T	T
T	F	F → فرض درست نتیجه غلط
F	T	T
F	F	T

Subject: ترکیب دو شرطی Date:

$p \leftrightarrow q$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Subject: (جلسه دوم)   Date:

* به گزاره های شرطی استلزام هم گفته می شود.

گزاره شرطی $p \vee q$ در صورتی که راستگو باشد استلزام منطقی می شود؛ اگر گزاره شرطی $p \rightarrow q$ راستگو باشد می گوییم q به طور منطقی از p نتیجه می شود و برای نشان دادن اینکه گزاره شرطی راستگو است یا خیر کافی است نشان دهیم در صورت درست بودن p (فرض)، q نیز درست است.

استنتاج

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow q$ نوع دیگر $(P, P_2, \dots, P_n \vdash q)$

EX: نشان دهید گزاره زیر یک استلزام منطقی است.

$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

			and		راستگو	
p	q	p	∧	p → q	→	q
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F
F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	F

طرف اول گزاره شرطی (مقدم)   طرف دوم گزاره شرطی (تالی)

* (آیا استنتاج زیر معتبر است = آیا استلزام زیر منطقی است = گزاره شرطی همواره درست است)

قوانین استنتاج:

① قیاس استثنایی: اگر بدونیم p درست است و $p \rightarrow q$ هم درست است پس q هم حتما باید درست باشد! نتیجه می گیریم

$p, p \rightarrow q \vdash q$

② قیاس تعدی: اگر $p \rightarrow q$ درست باشد و $q \rightarrow r$ نیز درست باشد آنگاه $p \rightarrow r$ درست است.

$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$

Subject:

Date: /

③ قیاس عکس

$p \to q \,,\, \sim q \vdash \sim p$

$\star\, p \to q$

$\sim p \to \sim q$ وارون

$q \to p$ عکس

هم ارز

هم ارز

$\sim q \to \sim p$ عکس نقیض

اثبات

$\sim q \to \sim p \,,\, \sim q \vdash \sim p$ شبه قیاس استثنایی

④ قیاس فصلی

اگر p درست است or شده‌ی آن با هر گزاره‌ی دیگری نیز درست است.

$p \vdash p \vee q$

⑤ قیاس تخصیص

$p \wedge q \vdash \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$

اگر $p \wedge q$ درست است حتما p و q درست اند.

(تا هردوشون درست نباشند and درست نیست!)

⑥ قیاس عطفی (عکس فصلی)

$p \,,\, q \vdash p \wedge q$

EX: نشان دهید که استنتاج زیر معتبر است. نشان دهید گزاره زیر راستگو است!

$$[\underbrace{(p \to q)}_{\text{فرض 1}} \wedge \underbrace{(\sim r \to \sim q)}_{\text{فرض 2}} \wedge \underbrace{\sim r}_{\text{فرض 3}}] \to \sim p$$

به شکل دیگر نوشتیم

$p \to q \,,\, \sim r \to \sim q \,,\, \sim r \vdash \sim p$

$\sim r \to \sim q \,,\, \sim r \quad \vdash_{\text{استثنایی}}^{\text{قیاس}} \quad \sim q$

$p \to q \,,\, \sim q \quad \vdash_{\text{عکس}}^{\text{قیاس}} \quad \sim p$

Subject: Date:

Ex: آیا استنتاج زیر معتبر است؟

$p ,\ p \to q ,\ q \to r \ \vdash\ r$

$p \to q ,\ q \to r \ \underset{\text{تعدی}}{\overset{\text{قیاس}}{\vdash}}\ p \to r$

$p ,\ p \to r \ \vdash\ r$

Ex: آیا الزام زیر استوار است؟

$p ,\ q ,\ (p \wedge q) \to r \ \vdash\ r$

$p ,\ q \ \underset{\text{عطف}}{\overset{\text{قیاس}}{\vdash}}\ p \wedge q$

$p \wedge q ,\ p \wedge q \to r \ \vdash\ r$

قدم اول and رو برمی‌داریم (وقتی and آن‌ها درست است هر دو درست اند)

Ex:

$\underbrace{p \wedge \sim q}$, $p \to r ,\ r \to s \vee q \ \vdash\ s$

$p \wedge \sim q \ \underset{\text{تخفیف}}{\overset{\text{قیاس}}{\vdash}}\ p ,\ \sim q$

$p ,\ p \to r \ \underset{\text{استثنای}}{\overset{\text{قیاس}}{\vdash}}\ r$

$r ,\ r \to s \vee q \ \underset{\text{استثنای}}{\overset{\text{قیاس}}{\vdash}}\ s \vee q$

$\sim q ,\ s \vee q \ \vdash\ s$

$s \vee q \equiv \sim q \to s$

هم ارز هستند

$\overset{\text{مقدم}}{p} \to \overset{\text{تالی}}{q}$ شرطی ∗

$\sim p \vee q$ فصلی

هم ارز

(مقدم کامل نقیض می شود شرط or می شود تالی مستقیم میاید)

← عکسش هم صادق است!

:Ex

$p \vee q \;,\; \sim q \vee r \;\vdash\; p \vee r$

$\equiv \qquad \equiv$

$\sim p \to q \qquad q \to r$

$\sim p \to q \;,\; q \to r \;\overset{\text{قیاس}}{\underset{\text{تعدی}}{\vdash}}\; \sim p \to r \equiv p \vee r$

:Ex

$p \vee q \;,\; q \to r \;,\; p \to s \;,\; \sim s \;\vdash\; r \wedge (p \vee q)$

$p \vee q \equiv \sim p \to q$

$p \to s \;,\; \sim s \;\overset{\text{قیاس}}{\underset{\text{عکس}}{\vdash}}\; \sim p$

$\sim p \;,\; \sim p \to q \;\overset{\text{قیاس}}{\underset{\text{استثنای}}{\vdash}}\; q$

$q \;,\; q \to r \;\overset{\text{قیاس}}{\underset{\text{استثنای}}{\vdash}}\; r$

$r \;,\; (p \vee q) \;\overset{\text{قیاس}}{\underset{\text{عطفی}}{\vdash}}\; r \wedge (p \vee q)$

روش های اثبات :

① اثبات به روش غیر مستقیم

② به روش برهان خلف

③ به روش استقرا

① **اثبات به روش غیرمستقیم**: این روش براساس رابطه‌ی هم ارزی زیر که به رابطه‌ی عکس نقیض معروف است، برقرار است.

$$p \to q \equiv \sim q \to \tilde{p}$$

در این روش به جای اینکه به طور مستقیم $p \to q$ را ثابت کنیم ثابت می‌کنیم $\sim q \to \sim p$ را.

EX: فرض کنید که n یک عدد طبیعی باشد ($n \in N$) ثابت کنید اگر n^2 فرد باشد آنگاه n نیز فرد است.

n^2 فرد $\longrightarrow$ n فرد $\equiv$ n زوج $\longrightarrow$ n^2 زوج

$n = 2k$ فرض کردیم زوج را دارد

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k_1}) = \boxed{2k_1}$$

Home EX: فرض کنید n عدد طبیعی باشد ثابت کنید اگر n^2 زوج باشد n نیز زوج است.

n^2 زوج $\longrightarrow$ n زوج $\equiv$ n فرد $\longrightarrow$ n^2 فرد

② **اثبات به روش برهان خلف**: در روش برهان خلف برای اثبات درستی یک استلزام معمولا فرض را در این می‌گیریم که نتیجه به دست آمده درست نیست و با استفاده از دیگر اطلاعات موجود در مسئله به یک تناقض می‌رسیم و از آن نتیجه می‌گیریم که فرض خلف اشتباه بوده.

EX: $p \vee q \,,\, \sim \overset{q}{\cancel{p}} \vee r \vdash \boxed{p \vee r} \xrightarrow{\text{نقیض}} \sim(p \vee r)$

$\sim p \vee \sim r$

$\sim p \,,\, \sim r \to$ فرض خلف

$(\sim p \,,\, \boxed{\sim r})$ فرض خلف

$p \vee q \equiv \sim p \to q$

$\sim p \,,\, \sim p \to q \vdash \dfrac{\text{قیاس}}{\text{استثنای}} \; q$

$\sim q \vee r \equiv q \to r$

$q \to r \,,\, q \vdash \dfrac{\text{قیاس}}{\text{استثنای}} \; \boxed{r}$

دو نتیجه گرفتیم r درست ~r نه درست به تناقض رسیدیم پس فرض خلف غلط و نتیجه درست است

Subject: Date: /

EX : ثابت کنید $\sqrt{2}$ گویا نیست (با برهان خلف)

$(p,q)=1$ ← نسبت به هم اول‌اند

فرض خلف: $\sqrt{2}$ گویا $= \frac{p}{q} \xrightarrow[2]{\text{طرفین به توان}} 2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$

$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} p^2 = 2\underbrace{q^2}_{k_1} \to p^2 = 2k_1 \to p^2$ زوج است

$\to \boxed{p \text{ زوج است}} \to 2q^2 = p^2 \to \cancel{2}q^2 = (2k)^2 = \cancel{4}k^2$

$q^2 = 2\underbrace{k^2}_{k_1} = 2k_1$

$\to q^2 \to$ زوج

$\boxed{q \to \text{زوج}}$

* p و q هم زوج اند

p و q هم نسبت به هم اول‌اند ⇐ تناقض

تعریف گزاره نما: گزاره نما یک عبارت منطقی است که با مقدار دهی متغیرهای به کار رفته در آن به گزاره تبدیل می شود.

x زوج است (گزاره نما) (گزاره نما: $x+y=3$)

↓

2 زوج است (گزاره) → درست

5 زوج است (گزاره) → غلط

* گزاره نماها را از نظر تعداد متغیرهای به کار رفته در آن به چند دسته تقسیم می کنند.

- یک متغیره (یک مکانی)
- دو متغیره (دو مکانی)
- n متغیره (n مکانی)

★ معمولا گزاره نما ها را با حروف بزرگ نمایش می دهند

$P(x)$: x زوج است

$R(x, y)$: $x + y = 3$

★ سورها :

$\forall x \quad P(x)$ — به ازای تمامی x ها $P(x)$ برقرار است

$\exists x \quad P(x)$ — حداقل یک x وجود دارد که $P(x)$ برایش برقرار است

$\forall x \quad \exists y \quad likes(x, y)$ — به ازای تمامی x ها حداقل یک y هست که x، y را دوست دارد!

$\exists y \quad \forall x \quad likes(x, y)$ — حداقل یک نفر در دنیا وجود دارد که بقیه دوستش دارن!

$\sim \forall x \quad P(x)$ — اینطور نیست که به ازای تمامی x ها $P(x)$ برقرار باشد

$\equiv \exists x \quad \sim P(x)$ — حداقل یک x وجود دارد که نقیض $P(x)$ برایش برقرار است.

$\sim \exists y \quad P(x)$ — هیچ x وجود ندارد که $P(x)$ برقرار باشد

$\sim \exists y \quad \sim likes(x, icecream) \equiv \forall x \ likes(x, icecream)$

Subject: Date:

استقرای ریاضی

EX: نشان دهید مجموع اولین n عدد فرد برابر n^2 می باشد.

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

مبنای استقرا $n = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{1} (2i-1) = 1^2 \quad 1 \longrightarrow 1 = 1$ حکم به ازای $n=1$ برقرار است

فرض استقرا $n = k \rightarrow \sum_{i=1}^{k} (2i-1) = k^2$

حکم استقرا $n = k+1 \rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) \overset{?}{=} (k+1)^2$

Subject: Date:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k}(2i-1)} + \sum_{i=k+1}^{k+1}(2i-1)$$

با استفاده از فرض استقرا $\longrightarrow$ $k^2 + \sum_{i=k+1}^{k+1}(2i-1)$

$$k^2 + 2(k+1) - 1$$

$k^2 + 2k + 1 \longrightarrow (k+1)^2$ رسیدیم به طرف دوم!

EX : نشان دهید به ازای $n \geqslant 1$ عبارت زیر برقرار می باشد.

$$43 | (6^{n+2} + 7^{2n+1} ، n \geqslant 1$$

$$6^{n+2} + 7^{2n+1} = 43m$$

مبنای استقرا $n=1 \to 6^{2} + 7^{\overset{3}{\cancel{2+1}}} = 559 = 43\times13 \longrightarrow$ مضربی از 43

فرض استقرا $n=k \to 6^{k+2} + 7^{2k+1} = 43m$

حکم استقرا $\to n=k+1 \to 6^{\overset{k+3}{\cancel{(k+1)+2}}} + 7^{\overset{2k+3}{\cancel{2(k+1)+1}}} \overset{?}{=} 43m$

$\downarrow$

$7^{2k+1}\cdot\cancel{7^2}$

$7^{2k+1}\cdot 49$

$7^{2k+1}\cdot(43+6)$

$$6^{k+3} + (43+6)7^{2k+1}$$

$$\underline{6^{k+3}} + 43\cdot7^{2k+1} + \underline{6.2^{k+1}}$$

$$6(6^{k+2} + 7^{2k+1}) + 43\cdot7^{2k+1}$$

با استفاده از فرض $\longrightarrow$ $6(43m) + 43\cdot7^{2k+1}$

m_1

Subject: Date:

$= 43(6m + 7^{2k+1}) \longrightarrow 43 m_1$ ضریبی از 43

به فرض رسیدیم!

EX : (از روش استقرای ریاضی قوی 😊)

① مبنای استقرا : در مبنای استقرای اعضای است نشان دهید که $P(1), P(2), \dots, P(q)$ جمله درست است.

② فرض استقرا: فرض می‌کنیم حالات $P(i)$ $1 \leq i \leq k, k \geq q$ همگی درست اند.

③ مرحله‌ی استقرا یا حکم استقرا: نشان می‌دهیم که جمله‌ی $P(k+1)$ درست است.

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ ← هر جمله حاصل جمع دو جمله‌ی قبلی

EX : نشان دهید در سری فیبوناچی عبارت زیر برقرار است.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right]$$

① مبنای استقرا

$$\underset{(n=0)}{F_0} = \frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^0\right] = 0$$

$$\underset{(n=1)}{F_1} = \frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^1\right] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt5}\left[\frac{\cancel{1}+\sqrt5 \cancel{-1}+\sqrt5}{2}\right] = 1$$

② فرض استقرا

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1+\sqrt5}{2} = a \\ \frac{1-\sqrt5}{۲} = b\end{array}\right\} \quad F_k = \frac{1}{\sqrt5}\left[a^k - b^k\right]$$

③ حکم

$$f_{k+1} \overset{?}{=} \frac{1}{\sqrt5}\left[a^{k+1} - b^{k+1}\right]$$

می‌دانیم در سری فیبوناچی →

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} = \frac{1}{\sqrt5}\left[a^k - b^k\right] + \frac{1}{\sqrt5}\left[a^{k-1} - b^{k-1}\right]$$

MICRO

Subject: Date:

$$\frac{1}{\sqrt5}\left[\underbrace{a^{k}+a^{k-1}}-b^{k}-b^{k-1}\right]=\frac{1}{\sqrt5}\left(a^{k-1}(a+1)-b^{k-1}(b+1)\right)$$

$$a+1=\boxed{\frac{3+\sqrt5}{2}}$$

$$a^2=\frac{1+2\sqrt5+5}{4}=\frac{6+2\sqrt5}{4}=\boxed{\frac{3+\sqrt5}{2}}$$

$\Big\}$ $a+1=a^2$ این برای b نیز برقرار است

$$\frac{1}{\sqrt5}\left(a^{k+1}-b^{k+1}\right)$$ ثابت شد!

فصل دوم (رابطه ~~[illegible]~~) ← شماره 1، 4، 11، 18، 26، 38

فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند در این صورت حاصلضرب دکارتی مجموعه را با نماد A×B نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$$

$$A\times B\times C=\{(x,y,z)\mid x\in A,\ y\in B,\ z\in C\}$$

$$A_1\times\dots\times A_n=\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_i\in A_i\}$$

$$A^2=A\times A=\{(x,y)\mid x,y\in A\}$$

تعریف رابطه: فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند رابطه‌ی $R:A\to B$ زیر مجموعه‌ای است از حاصلضرب A و B ($R\subseteq A\times B$) اگر زوج A و B عضو رابطه‌ی R باشند می‌گوییم a ~~[illegible]~~ به وسیله‌ی رابطه‌ی R به عضو b مرتبط شده است و می‌توانیم بنویسیم: $(a,b)\in R\to aRb$ و اگر $(a,b)\notin R$ می‌نویسیم $a\not R b$.

Subject: Date:

EX:

$A = \{a, b\}$

$B = \{DM, NC, CG, OS, IP\}$

$A \times B = \{(a,DM),(a,NC),(a,CG),(a,OS),(a,IP),(b,DM),$
$(b,NC),(b,CG),(b,OS),(b,IP)\}$

$R = \{(a,DM),(a,NC),(b,CG),(b,OS)\}$

EX:

$A = B = Z^+$ مجموعه ی اعداد صحیح مثبت

$R : (a,b) \in R$ b بر a بخش پذیر باشد مثل $\longrightarrow$ 2, 4

$a|b$ 6, 12

روش های نمایش یک رابطه :

① براساس مجموعه ها

② براساس ماتریس روابط ← عناصر آن یا ۰ است یا 1

③ براساس گراف جهت دار

می توان رابطه ی R را براساس یک ماتریس $n \times m$ معرفی کرد به طوری که

$$m_R = [m_{ij}] \qquad m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } a_i R b_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$|A| = card(A) = n$ اندازه مجموعه A می گوید تعداد سطرها

$|B| = card(B) = m$

$R \subset A \times B$

Subject: $R = \{(a,PM)(a,NC)(b,CG)(b,OS)\}$ Date:

:EX

$A = \{a, b\}$

$B = \{PM, NC, CG, OS, IP\}$

2×5

$$M_R \begin{array}{c|ccccc} & PM & NC & CG & OS & IP \\ a & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}$$

عملیات هایی بر روی ماتریس انجام می شود:

$C = [C_{ij}] \quad C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{ij} = 1 \text{ or } b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$ join $A \vee B$

and

$C = [C_{ij}] \quad C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{ij} \,\&\&\, b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$ meet $(A \wedge B)$

$C = [C_{ij}] \quad C_{ij} \begin{cases} 1 & \text{if } \exists\, a_{ik} = 1 \,\&\&\, b_{kj} = 1 \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$ ضرب بولی Booli $(A \odot B)$

(دقیقا شبیه ضرب ماتریس هاست

:EX

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

join

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

meet

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

★ برای ضرب باید تعداد ستون اولی با سطر دومی برابر باشد!

:EX

$$\underset{4\times3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{3\times4}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس حاصل 4x4

$$\underset{1}{(1\wedge 1)} \vee \underset{0}{(1\wedge 0)} \vee \underset{0}{(0\wedge 1)} = 1$$

$$(1\wedge 0) \vee (1\wedge 1) \vee (0\wedge 0) = 1$$

$$(1\wedge 0) \vee (1\wedge 1) \vee (0\wedge 1)$$

$(1\wedge 0) \vee (1\wedge 0) \vee ($[illegible]$\wedge 1)$

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$(0\wedge 1) \vee (1\wedge 0) \vee (0\wedge$

Subject: Date:

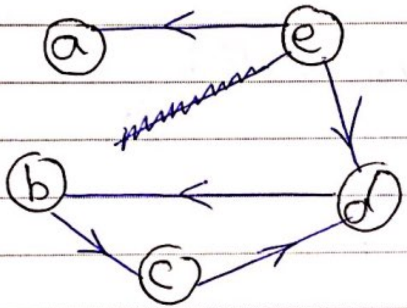
گراف جهت دار :

R

EX : رابطه‌ی $R: A \to A$ (در A) تعریف شده به صورت زیر ؛ مطلوب است گراف جهت دار .

$A = \{a, b, c, d, e\}$

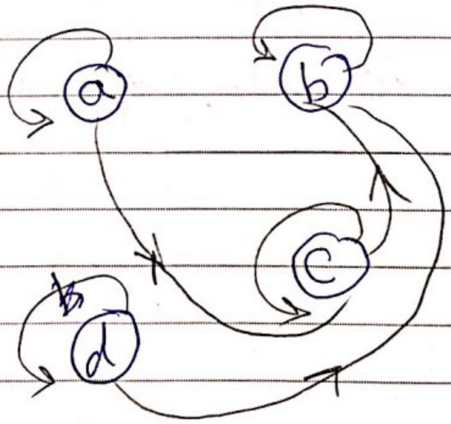
$R = \{(a,b)(c,d)(e,a)(e,d)(d,b)\}$



EX : گراف جهت دار زیر را رسم کنید

$A = \{a, b, c, d\}$

$$M_R = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 1 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$



Subject: Date:

مسیر در رابطه‌ها: فرض کنید R یک رابطه در مجموعه A باشد یک مسیر در R از a به b رشته‌ای متناهی به طول n به فرم

از a شروع و b ختم می‌شود.

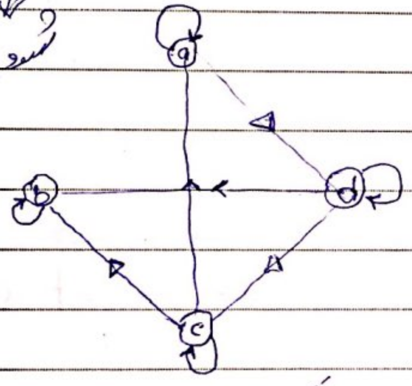
$\pi = a x_1 x_2 \dots b$

از a به b

$aRx_1 , x_1Rx_2 , \dots , x_{n-1}Rb$

شروع

ختم



$\pi_1 = c, b$

$\pi_2 = c, a, d, b$

$\pi_3 = d, c, c, a, a$

مسیری که ابتدا و انتهای آن یکی باشد سیکل یا دور می‌نامیم.

شروع $\boxed{a}, d, c, \boxed{a}$ انتها

Subject: Date:

مجموعه‌ی نسبی :

تعریفِ R^n و R^∞ :

R^n (n‌تا گردش)

xR^ny به این معنی است که مسیری از x به y به طول n در R موجود است

R^∞

$xR^\infty y$ به این معنی است که مسیری از x به y موجود است و این مسیر هر طولی می‌تواند داشته باشد (رابطه‌ی انتقالی)

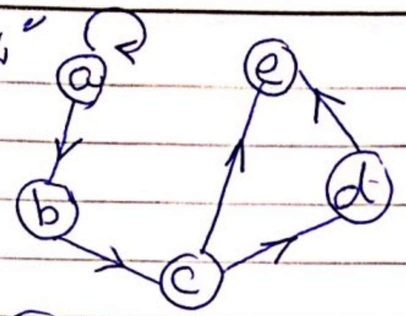
EX : رابطه R در مجموعه‌ی A مفروض است مطلوب است : $A=\{a,b,c,d,e\}$

$R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(c,e),(c,d),(d,e)\}$

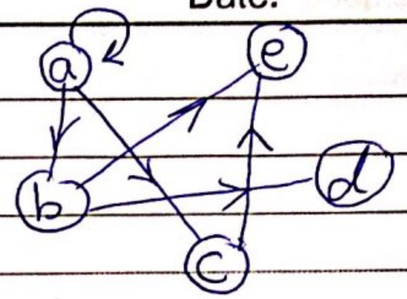
R , R^2 , R^∞ گراف جهت دار

گراف جهت دار

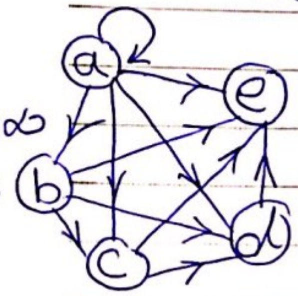
R :



R^2 :



R^∞ :



باید تمام مسیرهای به طول 2 را پیدا کنیم
از a به a مسیری به طول 2 وجود دارد روی حلقه هر چند بار می توانیم برویم
از a به a و از a به b می شه طول 2 پس از a به a داریم

قضیه 1 : اگر R یک رابطه در مجموعه ی A باشد آنگاه ماتریس رابطه ی R^2 می شود ماتریس R در خودش

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ $\quad$ $M_{R^2} = M_R \odot M_R$

قضیه 2 : اگر R یک رابطه در مجموعه ی متناهی A باشد آنگاه :

از ضرب n تا ماتریس به دست می آید

$$M_{R^n} = M_R \odot M_R \odot \dots \odot M_R$$

* نکته 3 :

$x R^\infty y \rightarrow x R y$ یا $x R^2 y$ یا $x R^3 y$ یا ...

$R^\infty = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$ → اجتماع

$M_{R^\infty} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \dots \vee \dots$ → join یا ore

خواص روابط : ① خاصیت بازتابی (reflexive) در مقابل خاصیت ضد بازتابی (irreflexive)

بازتابی: رابطه ی R در مجموعه ی A بازتابی خواهد بود هرگاه به ازای تمامی عناصر A باید $(a,a) \in R$ یا aRa برقرار باشد (هر عضوی با خودش هم مرتبط باشد)

ضد بازتابی: رابطه ی R را در مجموعه ی A ضد بازتابی گوییم هرگاه به ازای تمامی اعضای ~~A~~ $a \not R a$ یا $(a,a) \notin R$

Subject: Date:

EX: آیا R بازتابی هست یا خیر؟

$A = \{1, 2, 3\}$

$R = \{(1,1)(1,2)\}$ بازتابی نیست چون (2,2) و (3,3) وجود ندارد.
ضدبازتابی هم نیست به دلیل وجود (1,1) .

* گراف جهت دار رابطه‌ی بازتابی : همه‌ی رأس ها طوقه دارند ، برای هر عنصر حلقه (السیکل های به طول 1) داریم.

* گراف جهت دار ضدبازتابی : هیچ یک از رأس ها نباید طوقه داشته باشد .

* ماتریس رابطه‌ی بازتابی : تمام عناصر روی قطر اصلی باید 1 باشد .

* ضدبازتابی : تمام عناصر روی قطر اصلی باید 0 باشد.

② خاصیت متقارن ، نامتقارن ، پادمتقارن (ضدمتقارن)

(Symmetric)

متقارن : رابطه‌ی R در مجموعه‌ی A متقارن است اگر $\text{if } aRb \overset{\text{آنگاه}}{\Rightarrow} bRa$

نامتقارن: $\text{if } aRb \Rightarrow b \not R a$

پادمتقارن: $\text{if } aRb , bRa \Rightarrow a = b$

← فقط وقتی a,b برابرند می توانیم رابطه‌ی متقارن داشته باشیم

* در نامتقارن نمی شود یک عضو با خودش مرتبط باشد اما پادمتقارن می شود یعنی تنها تفاوت پاد و نا همین است

EX: چک کنید که کدام خصوصیت را دارد و کدام را ندارد ؟

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1,2)(2,2)(3,4)(4,1)\}$

~~متقارن~~ (1,2) هست (2,1) نیست ~~نامتقارن~~ (2,2) هست پادمتقارن ✓

Subject: Date:

: EX

$A = \mathbb{Z}$

$R = \{(a,b) \mid a < b\}$

$R = \{(2,4)(1,3)(2,10), \dots\}$

متقارن $(2,4) \in R \quad (4,2) \notin R$

نامتقارن

پادمتقارن :

* پادمتقارن رابطه‌ای نامتقارنی است که اجازه می‌دهد اعضا با خودشان هم در ارتباط باشند الزامی وجود ندارد.

* اگر متقارن باشد هیچگاه پادمتقارن نیست

در گراف جهت دار رابطه‌ی متقارن مسیرها 2 طرفه هستند.

در گراف جهت دار رابطه‌ی نا متقارن مسیرها یک طرفه است و حلقه نداریم

در گراف جهت دار رابطه‌ی پاد متقارن مسیرها یک طرفه است و می‌توانیم حلقه هم داشته باشیم

در ماتریس ~~جهت~~ رابطه‌ی متقارن اعضا نسبت به قطر اصلی تقارن دارند.

در ماتریس نامتقارن به هیچ وجه نسبت به قطر اصلی نباید تقارنی وجود داشته باشد و عناصر روی قطر اصلی باید صفر باشد

در ماتریس پادمتقارن مثل متقارن فقط اجازه‌ی 1 بودن را به قطر اصلی می‌دهد

③ خاصیت متعدی رابطه‌ی R در A متعدی است هرگاه

$aRb, bRC \Rightarrow aRC$

$A = \{1,2,3,4\} \quad R = \{(1,2)(1,3)(4,2)\}$: EX

زمانی متعدی نیست که طرف چپ را داشته باشیم و راست را نداشته باشیم

پس رابطه متعدی است چون طرف اول برقرار نشد که طرف دوم را چک کنیم

MICRO®

★ اگر $M_R \geq M_{R^2}$ (ماتریس) می‌گوییم R خاصیت تعدی دارد.

Ex : $A = \{1, 2, 3\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ✓

پس R خاصیت تعدی دارد.

← برای حل کردن تو حالت بزرگتر، ماتریس‌ها تک تک اعضا را مقایسه می‌کنیم.

EX:

$A = Z^+$

$R = \{(a,b) \mid a|b\}$ عاد کردن

$R = \{(2,4)(2,8)(3,12)\dots\}$

$2|4 , 4|16 \Longrightarrow 2|16$ ✓ (عاد کردن) رابطه تعدی می‌باشد.

رابطه‌ی هم ارزی: رابطه‌ی R در مجموعه‌ی A هم ارزی است اگر بازتابی، متعدی و متقارن باشد!

EX: هم ارزی هستند یا خیر؟

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)(3,4)(4,3)(3,3)(4,4)\}$

بازتابی ✓ متقارن ✓ متعدی ✓ $(1,2), (2,1) \Rightarrow (1,1)$

$(4,3)(3,4) \Rightarrow (4,4)$

قضیه: فرض کنید P یک افراز از مجموعه‌ی A باشد. یادآور می‌شویم که مجموعه‌ها موجود در P را بلاک‌های P می‌گوییم. رابطه‌ی R در A را به طریق زیر تعریف می‌کنیم:

→ ~~AR~~ aRb اگر و تنها اگر a, b در یک بلاک باشند

آنگاه R یک رابطه‌ی هم ارزی است.

Subject: Date: /

EX: فرض کنید مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,4\}$ و افراز $P=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$ و R رابطه‌ی هم بلاکی باشد مطلوب است عناصر PR

بلاک

$R=\{(1,1)(1,2)(1,3)(2,2)(2,1)(2,3)(3,3)(3,1)(3,2),(4,4)\}$

هم بلاکی ← هرچی تو یه بلاک با هم رابطه دارند ⟸ R هم ارزی هم هست

تعریف: فرض کنید R یک رابطه‌ی هم ارزی در مجموعه‌ی A باشد در این صورت R(a) را کلاس های هم ارزی مجموعه‌ی A خواهیم گفت و به شکل زیر نمایش می دهیم

$$R(a)=[a]$$

بنابراین افراز P شامل تمامی کلاس ها هم ارزی رابطه‌ی R است؛ این افراز را به شکل $\bar{P}=A/R$ نمایش می دهیم

EX: مطلوب است کلاس های هم ارزی رابطه‌ی PR

$A=\{1,2,3,4\}$

$R=\{(1,1)(2,2)(2,3)(3,3)(1,2)(1,3)(2,1)(3,1)(3,2)(4,4)\}$

کلاس هم ارزی 1 $R(1)=[1]=\{1,2,3\}$

$R(2)=[2]=\{2,3,1\}$

$R(3)=[3]=\{3,2,1\}$

$R(4)=[4]=\{4\}$

$$P=\{R(1),R(2),R(3),R(4)\}$$

$$P=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$$

Subject: / Date:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ EX : فرض کنید A و R را داریم؛ home

مطلوب است افراز PP؟

$R = \{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)(3,4)(4,3)(3,3)(4,4)\}$

$R(1) = [1] = \{1, 2\}$ $R(2) = [2] = \{2, 1,\}$ $R(3) = \{3, 4\}$

یا در R رابطه داشتند   یا در S

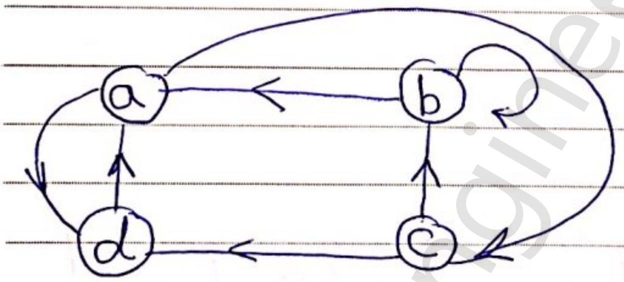
اجتماع : $R \cup S$ $a(R \cup S)b \Rightarrow aRb$ یا aSb

اشتراک : $R \cap S$ $a(R \cap S)b \Rightarrow aRb$ و aSb

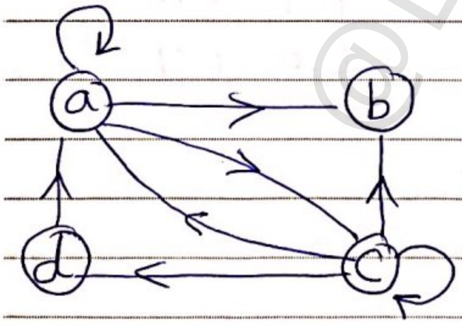
مکمل : $\overline{R}$ $A \times B - R$ R^{c} حاصلضرب دکارتی منهای R

معکوس : R^{-1} $aRb \Rightarrow bR^{-1}a$ جای مولفه ی اول و دوم عوض می شود

EX :

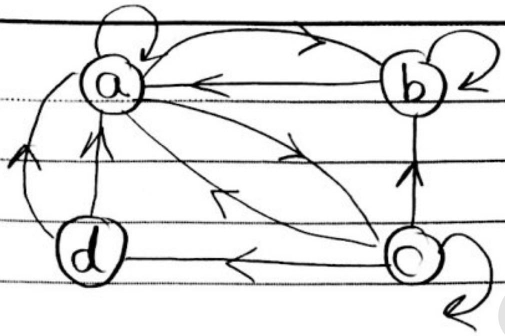


S

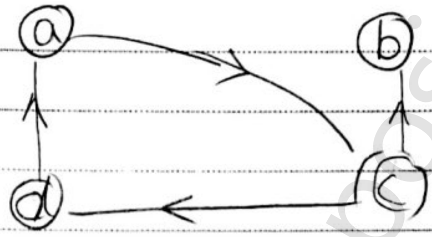


R

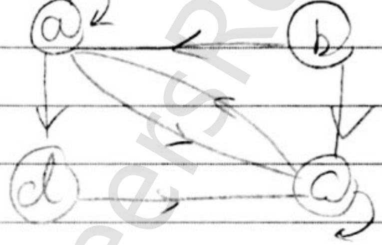
اجتماع :



اشتراک :

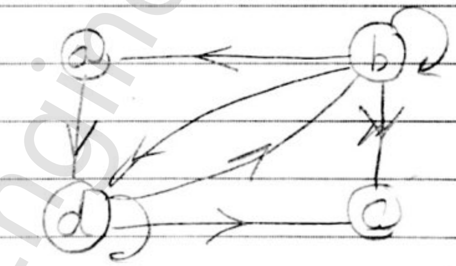


معکوس : R^{-1}



جهت یال ها را
عوض کردیم!

متمم : $\bar{R}$



هرجی یال نداریم
تا اینجا یک طرفه مکمل بود

EX :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{اجتماع} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{اشتراک} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Subject: Date:

$A = \{a, b, c, d\}$: EX

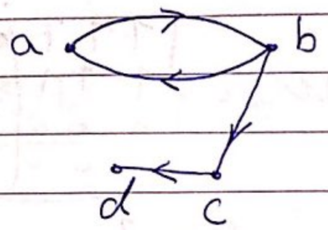
$B = \{NC, DM, CG, DS, \{OR, OS\}$

$R = \{(a, NC)(b, DM)(b, CG)(c, DM)(C, OR)(C, OS)$
$(d, DS)(d, OS\}$

$S = \{(d, OR)(d, OS)(a, NC)(a, RS)(b, DM)(b, OR)(d, DS)\}$

$R \cap S$ $R \cup S$ $R - S$ $R \oplus S = (R - S) \cup (S - R)$

95.12.21



EX : فرض کنید گراف زیر گراف جهت دار رابطه ی R باشد.

$R^{\infty} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(a,d)(b,a)(b,b)(b,c)(b,$
$(c,d)\}$

$M_{R^{\infty}} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \dots$

وجود مسیرهایی به طول 2

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee M_{R3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee$$

$$M_{R^4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \dots = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

الگوریتم وارشال: فرض کنید R یک رابطه در مجموعه ی A باشد اگر $x_1, x_2, \dots$ و x_n مسیری در R باشد در این صورت هر رأس غیر از x_1 و x_n رئوس داخلی مسیر نامیده می شود و ماتریس ها منطقی W_k به صورت زیر تعریف می شود: W_k دارای مقدار 1 در مکان ij است اگر و تنها اگر مسیری از a_i به a_j در R موجود باشد به طوری که کلیه رئوس داخلی آن از مجموعه ی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ آمده باشد. برای به دست آوردن W_k از روی W_{k-1} ابتدا تمام مقادیر W_{k-1} را به W_k منتقل می کنیم سپس فرض کنید مکان های $p_1, p_2, \dots$ در ستون k ام ماتریس W_{k-1} و نیز مکان های $q_1, q_2, \dots$ در سطر k ام ماتریس W_{k-1} دارای مقدار 1 باشند در ماتریس W_k در تمامی مکان های q_j ، p_i مقدار 1 قرار دهید

EX بالا با استفاده از وارشال :

ماتریس R

$$\overset{\uparrow}{W_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مکان هایی که 1 دارند $\xrightarrow{\text{در ستون}}$ $P_1 = \textcircled{2}$ جایش

مکان هایی که 1 دارند $\xrightarrow{\text{در سطر}}$ $q_1 = \textcircled{2}$

در مکان های (P_1, q_1) یعنی $(2,2)$ باید بشه 1

خونه‌ی (2,2) رو اگر 0 بود بگذار 1

خونه (1,1) و (1,2) و (1,3) و (2,1) و (2,2) باید 1 بشود.

(1,4) و (2,4) رو باید update کنیم.

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1\cancel{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} \cancel{0}1 & 1 & \cancel{0}1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cancel{0}1 \\ 1 & 1 & 1 & \cancel{0}1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$p_1 = 1 \quad q_1 = 1$

$p_2 = 2 \quad q_2 = 2$

$q_3 = 3$

$p_1 = 1 \quad q_1 = 4$

$p_2 = 2$

$p_1 = 1$

$p_2 = 2$

$p_3 = 3$

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون p داریم q نداریم هیچ تغییری رخ نمی‌دهد.

EX: از الگوریتم وارشال حل کنید.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R = \{(1,1)(2,1)(2,2)(3,3)(3,4)(4,3)(4,4)(5,5)\}$

فرض کنید رابطه R روی A تعریف شده
مطلوب است کوچکترین رابطه هم‌ارزی با استفاده از R و S P

$S = \{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,4)(4,5)(5,5)\}$

فصل 3 ⟵ 6

* اگر R و S دو رابطه‌ی هم ارزی باشند آنگاه $R \cap S$ نیز هم ارزی است.

اگر R و S دو رابطه‌ی هم ارزی باشند در اینصورت کوچکترین رابطه‌ی هم ارزی شامل R و S برابر خواهد بود با $(R \cup S)^{\infty}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Join دو ماتریس R و S ↙ ↘ ω

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad W_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$p_1 = 1 \qquad q_1 = 1$

$p_2 = 2 \qquad q_2 = 1$

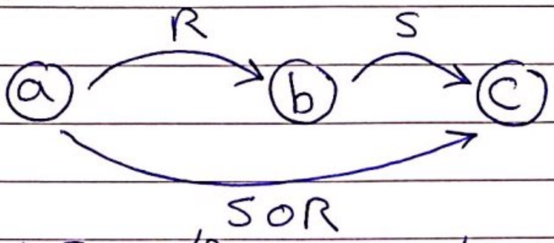
(1,1) (1,2)

(2,1) (2,2)

ترکیب روابط: فرض کنید A و B و C سه مجموعه و R رابطه‌ای از $R: A \to B$ و S رابطه‌ای $S: B \to C$ باشد در این صورت رابطه‌ی جدیدی از $A \to C$ تعریف می‌شود ترکیب S و R نامیده می‌شود و آن را با نماد SOR نمایش می‌دهیم و داریم:

$$a\,(SoR)\,c \Rightarrow aRb \;\&\; bSc$$

a با c مرتبط است اگر a با b از طریق R و b با c از طریق S مرتبط باشد.



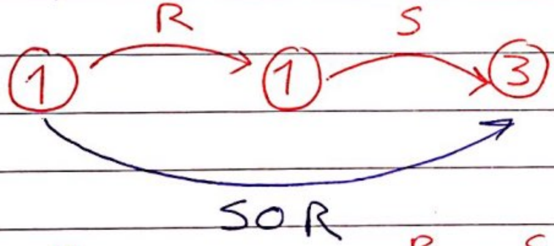
EX: فرض کنید مجموعه‌ی A و B و C و رابطه‌ی R و S به شکل زیر تعریف شده مطلوب است ترکیب S و R.

$A = B = C = \{1, 2, 3, 4\}$

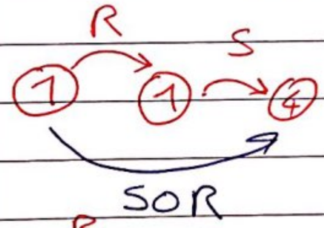
$R = \{(1,1)(1,2)(1,3)(2,4)(3,2)\}$

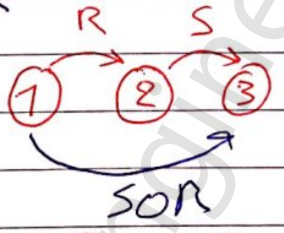
$S = \{(1,3)(1,4)(2,3)(3,1)(4,1)\}$

$SOR = \{(1,3)(1,4)(1,1),(2,1$
$3,3)$

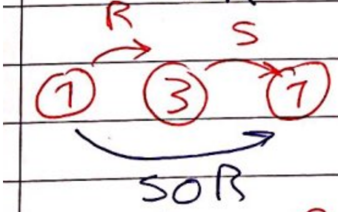


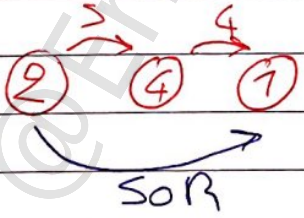
عناصر SOR به این ترتیب تعریف شدند.



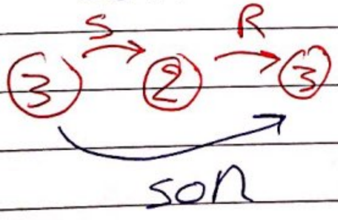


★ ماتریس رابطه‌ی SOR می‌شود $M_S \times M_R$





← یکی دیگه از راه‌ها بدست آوردن ترکیب روابط



خب حالا با ضرب ماتریس ها EX رو حل می کنیم! 

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & \textcircled{1} & \textcircled{1} \\ \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ حل شد!

Home EX ← ROS را بدست آورید!

تعریف تابع: فرض کنید تابع f از A به B تعریف شده باشد $(f : A \longrightarrow B)$ دراینصورت دامنه و برد f به صورت زیر تعریف می شود:

$Dom(f) = \{x \mid (x, y) \in f, f: A \to B\}$

دامنه f

$Ran(f) = \{y \mid (, y) \in f , f: A \to B\}$

برد f

EX: فرض کنید $B = \{x, y, z\}$, $A = \{1, 2, 5\}$

EX: فرض کنید $B = \{a, b, c, d\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

توابع ویژه

* تابع همه جا تعریف شده (everywhere defined)

$f : A \to B$ ، $Dom(f) = A$

تابع f از a به b یک تابع ″ خواهد بود اگر دامنه‌ی f برابر باشد با مجموعه‌ی A

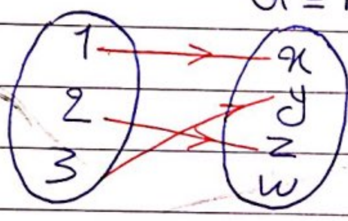
* تابع پوشا (onto)

$f : A \to B$ $Ran(f) = B$

اگر برد f برابر مجموعه‌ی B باشد.

* تابع یک به یک (on to on)

← تابع f یک به یک است اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه $a = b$



(هر عضو از یک سمت تنها به یک عضو از سمت دیگر نگاشت می شود)

* تابع معکوس f^{-1}

← برای پیدا کردن معکوس توابع جای مولفه‌های اول و دوم را عوض می کنیم.

← برای اینکه معکوس تابع نیز تابع باشد باید یک به یک باشد!

قضیه: فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع باشد در این صورت:

الف - (f^{-1}) یک تابع از $B \to A$ می باشد اگر و تنها اگر f یک به یک باشد

ب - (f^{-1}) یک تابع است در این صورت f^{-1} یک به یک نیز هست

ج - (f^{-1}) همه جا تعریف شده است اگر و تنها اگر f پوشا باشد   ~~B~~ $Ran(f^{-1}) = A$

د - f^{-1} پوشاست اگر و تنها اگر f همه جا تعریف شده باشد.

96.1.19

اندازه دامنه

$|Dom|=n$ و $|Ran|=m$

قضیه اصل لانه کبوتری:

① فرض کنید f از A به B تابعی با دامنه و برد متناهی باشد؛ در این صورت الف: اگر f یک به یک باشد آنگاه $n = m$ ب: اگر f یک به یک نباشد $n > m$

② (قضیه اصل لانه کبوتری) اگر n کبوتر به m لانه منسوب شوند و تعداد لانه‌ها از تعداد کبوترها کمتر باشد؛ آنگاه حداقل یک لانه شامل 2 کبوتر یا بیشتر است.

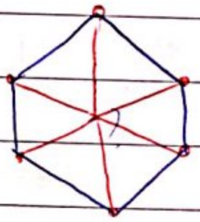
Ex: از هر 8 فرد انتخابی حداقل 2 نفر آن‌ها دارای روز تولد مشابهی از نظر روزهای هفته خواهند بود.

$n \longrightarrow$ تعداد افراد $\longrightarrow 8$

$m \longrightarrow$ تعداد لانه‌ها $\longrightarrow$ تعداد روزهای هفته $\longrightarrow 7$

می‌خواهیم 8 فرد را داخل 7 روز بگذاریم بر اساس قضیه بالا حداقل 2 نفر از افراد متولد یک روز هستند.

Ex: ~~نشان دهید~~ 6 ضلعی منتظم به طول واحد مفروض است نشان دهید که اگر 7 نقطه داخل این 6 ضلعی یا پیرامون آن انتخاب کنیم آنگاه فاصله حداقل 2 تا از نقاط بیشتر از 1 نخواهد بود.



$m = 6$

$n = 7$

n نقطه در m حفره بر اساس اصل بالا حداقل یک لانه وجود دارد که دو نقطه در آن قرار دارد (فاصله نقاط‌ها کمتر از یک خواهد بود)

تعمیم اصل لانه کبوتری (توسعه یافته):

← زمانی استفاده می‌شود که تعداد کبوترها بیشتر از $2m$ است $(n > 2m)$

سقف ← (گرد رو به بالا)

اگر n کبوتر به m لانه منسوب شوند در این صورت یکی از لانه‌ها حداقل شامل $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ کبوتر خواهد بود.

Ex: نشان دهید اگر 30 فرهنگ لغت در کتابخانه‌ای موجود باشند که مجموعاً 61327 صفحه داشته باشند در این صورت یکی از آن‌ها می‌بایست دارای 2045 صفحه باشد.

$m = 30$

$\lceil 61327$

فصل چهارم (مجموعه‌های مرتّب)

۸ اردیبهشت امتحان میان ترم
از دو فصل اول
5 نمره + 2 تمرین
تمرین‌ها رو تا قبل امتحان بیارین!

مجموعه با ترتیب جزئی (ناقص):

رابطه‌ی R در مجموعه‌ی A ترتیب جزئی خواهد بود هرگاه بازتابی، پادمتقارن و متعدی باشد. مجموعه‌ی A را به همراه R مجموعه با ترتیب جزئی نامیده و آن را به صورت (A, R) نمایش می‌دهیم.

EX: کدام ترتیب جزئی است؟

هست $A = Z^+$ $R = " \leq "$ $(2,2)$ $(2,\overset{\leq}{3})$

بازتابی ✓ (هر عضو و خودش) / پادمتقارن ✓ (اگر (3,2) و (2,3) هست (3,2) ندارم) / متعدی ✓

$A = Z^+$ $R = " | "$ بخش پذیری

بازتابی ✓ / پادمتقارن ✓ / متعدی ✓

$A = Z^+$ $R = " > "$

بازتابی ✗ / - - - / - - -

* قرار داد: برای نشان دادن روابط ترتیب جزئی $\boxed{\preceq}$ به عنوان نماد *

← مثلاً فرض کنید $(A, \preceq)$

← اگر 2 عضو داشته باشیم که در رابطه‌ی ترتیب جزئی اند آنها را قابل مقایسه می‌نامیم

$2 \preceq 3$ ← قابل مقایسه

اگر تمامی عناصر مجموعه ی A قابل مقایسه باشند آنگاه R یک ترتیب کامل در مجموعه ی A خواهد بود در این صورت A را زنجیر می گوییم !

Ex: $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ بازتابی $\{a\} \subseteq \{a\}$

$R = "\subseteq"$ → زیرمجموعه بودن

$\{a\} \subseteq \{a,b\}$
$\{a,b\} \subseteq \{a\}$ پادتقارن

$\emptyset \subseteq \{a\}$, $\{a\} \subseteq \{a,b\}$
$\Rightarrow \emptyset \subseteq \{a,b\}$ تعدی

R ترتیب جزئی هست ولی ترتیب کامل نیست زیرا توانستیم دو عضوی را پیدا کنیم که بین آن ها رابطه ای نیست !

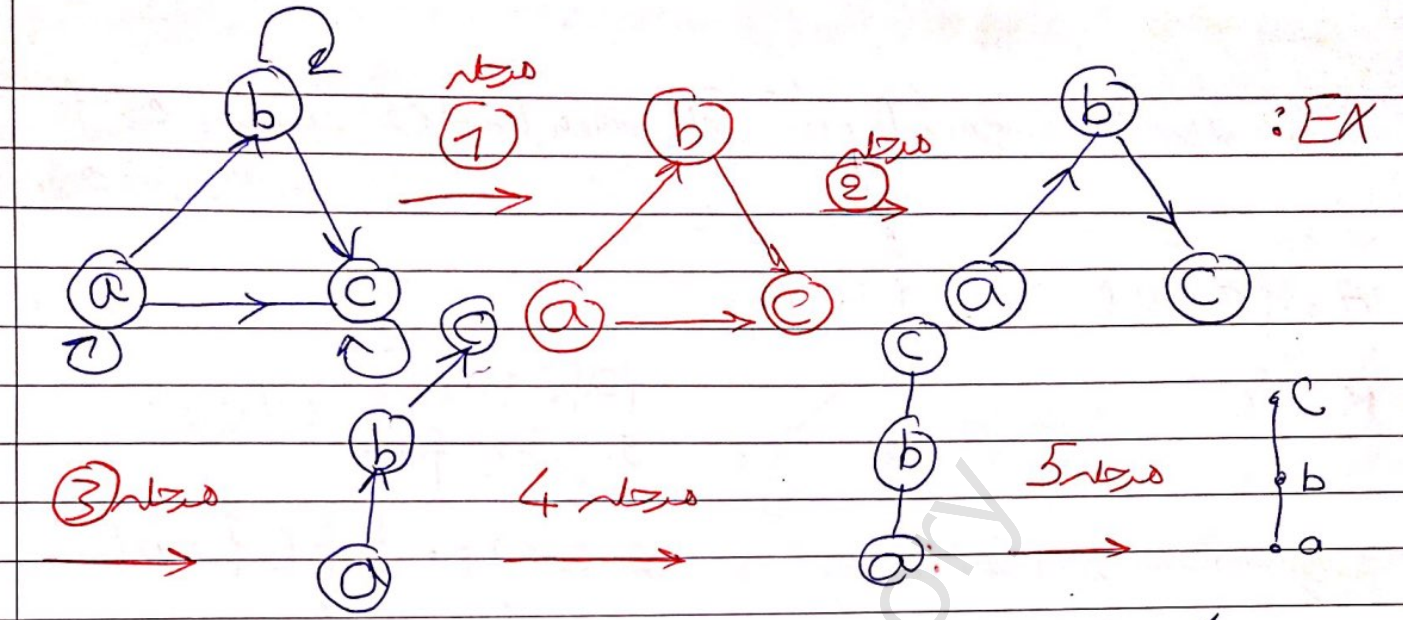
$A = \mathbb{Z}^+$
$R = "\leq"$
→ هر دو عددی که انتخاب کنیم با هم قابل مقایسه اند و داخل رابطه ی R قرار می گیرند پس ترتیب جزئی که بود کامل هم هست
حالا اینجا به A زنجیر می گوییم.

نمودار هاس (Hasse Diagram)

مراحل تبدیل گراف جهت دار یک رابطه ی ترتیب جزئی به نمودار هاس !

① حذف سیکل یا دورهای از طول یک
② حذف یال های مرتبط با خاصیت تعدی
③ با فرض اینکه رسم به گونه ای باشد که جهت تمام فلش ها به سمت بالا است فلش ها را حذف می کنیم
④ تبدیل رئوس از دایره ای به نقطه ای

EX:

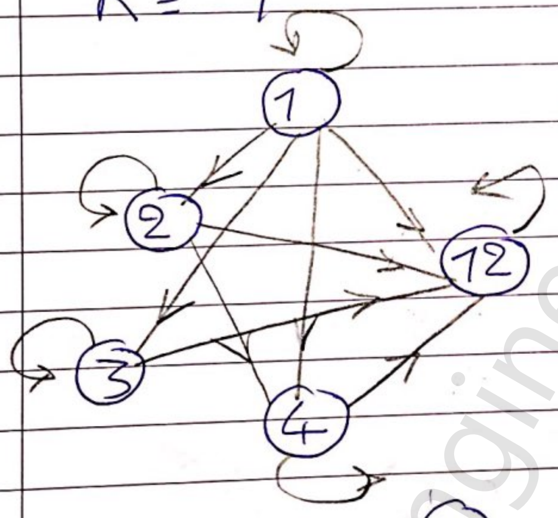


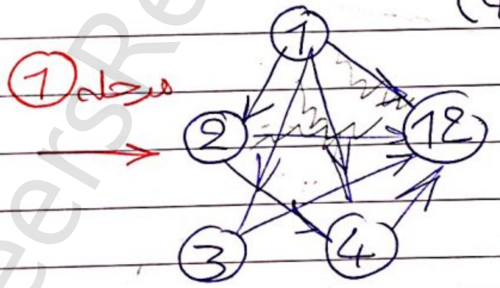
EX: فرض کنید اینا تعریف شده مطلوب است نمودار هاسی؟

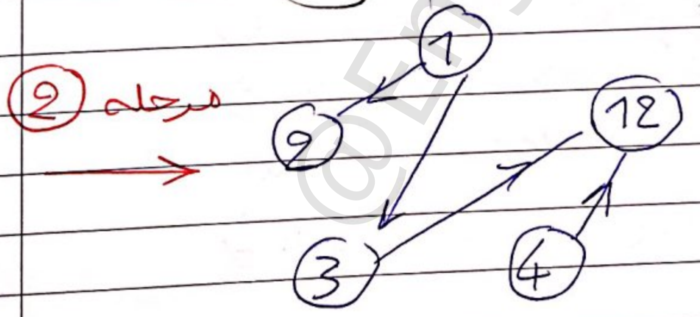
$A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$

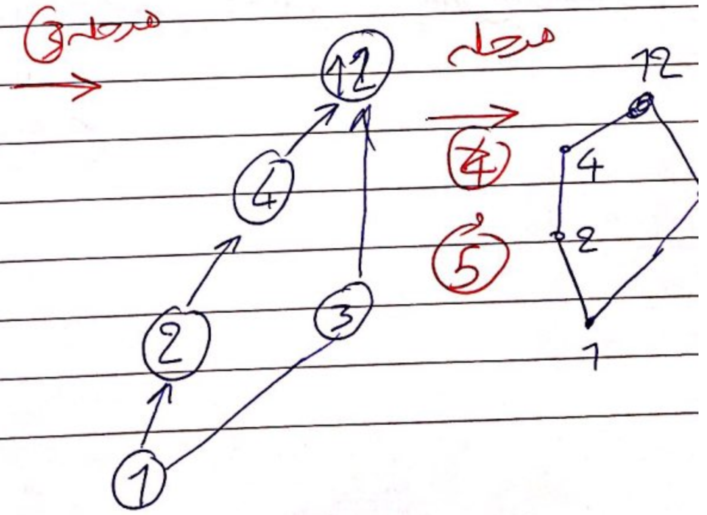
$R = " | "$

$R = \{(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,12)(2,2)$
$(2,4)(2,12)(3,3)(3,12)(4,$
$(4,12)(12,12)\}$









← لوپ ها رو بلدید R رو نمیخواد

اووووه

s.a.m

ایزومورفیسم : (یک ریختی)

فرض کنید A و 'A دو مجموعه (Posets) با ترتیب جزئی باشند و f از 'A → A یک تناظر یک به یک بین A و 'A باشد تابع f را ایزومورفیسم 'A → A خواهیم گفت هنگامی که به ازای هر a و b عضو A داشته باشیم $a \leq b \Longleftrightarrow f(a) \leq' f(b)$ (a با b قابل مقایسه است اگر و تنها اگر f a و b قابل مقایسه باشد.

$$\forall \quad a,b \in A$$

$$a \leq b \Longleftrightarrow f(a) \leq f(b)$$

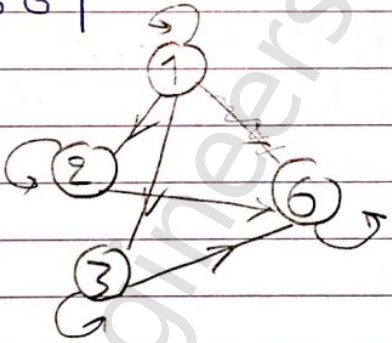
قابل مقایسه

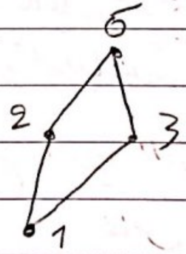
اگر f یک ایزومورفیسم باشد در این صورت خواهیم گفت A و 'A ایزومورف یا یک ریخت هستند.

: Ex

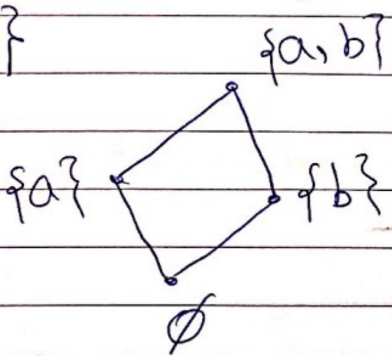
$A = \{1, 2, 3, 6\}$

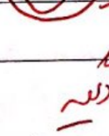
R = "|"





$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

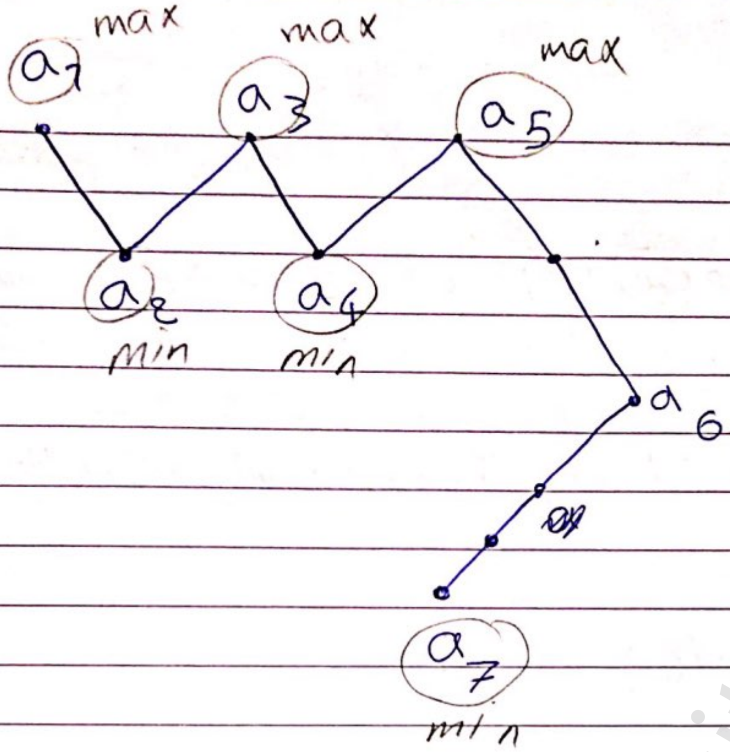




دو مثال ایزومورفیسم یا یک ریخت اند

به ازای هر عضو متناظرش هم هست دیگه

قابل مقایسه بودن بین عضوها هم باید حفظ شه



تعریف : عضو ماکسیمال ← $a \in A$ را یک عضو ماکسیمال خواهیم گفت اگر برای هیچ عضوی مانند $c \in A$ رابطه‌ی $a < c$ برقرار نباشد

یعنی اگر نتوانیم هیچ c رو پیدا کنیم که a و c قابل مقا
باشند و c در نمودار هاس از a بالاتر قرار گیرد.

عضو مینیمال ← $b \in A$ را یک عضو مینیمال خواهیم گفت اگر برای هیچ عضوی مانند $c \in A$ رابطه‌ی $b < c$ برقرار نباشد.

← اگر نتوانیم هیچ عضوی مثل c رو پیدا کنیم که c و b قابل مقایسه و c پایین‌تر از b باش

$(A, \geq)$ $(A, \leq)$

★ نکته: ① اگر (A, R) مجموعه‌ای با ترتیب جزئی باشد آنگاه (A, R^{-1}) نیز مجموعه‌ای با ترتیب جزئی خواهد بود.

② اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد و $(A, \geq)$ دوگان آن باشد آنگاه عضو a یک عضو ماکسیمال برای $(A, \leq)$ اگر و فقط اگر a مینیمال برای ( ) دوگان باشد.

Ex: $(\mathbb{Z}, \leq)$

$R = “\leq”$

نمی‌توان عضوی پیدا کرد که دیگر جلوتر از آن وجود ندارد همین‌طور برای بزرگتر

③ فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه‌ی ترتیب جزئی متناهی باشد در اینصورت $(A, \leq)$ دارای حداقل یک عضو ماکسیمال و مینیمال است

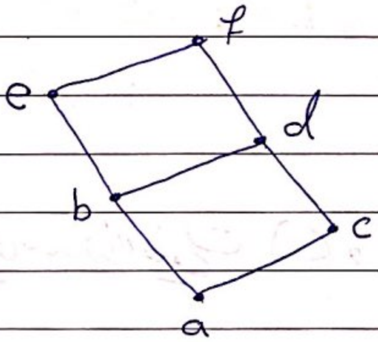
96.1.26

ترتیب توپولوژیکی :

← عناصر را به ترتیب مینیمال بودن sort می کند.

```
i ← 1
S ← A
while ( S ≠ Ø ) {
  - یک عضو مینیمال مانند a برای S پیدا می کنم
  - sort [i] ← a
  - S ← S - {a}
  - S ← i+1
}
```

Ex : عضو مینیمال را پیدا کنید.



a می شه اولین مینیمال و داخل آرایه sort می ریزیم
مینیمال a حذف و یال های آن حذف
دوباره مینیمال بعدی c سپس حذف می شود
همینطور ادامه می دهیم مینیمال بعدی b و بعدی e و بعدی d
و در آخر f می ماند

a	c	b	e	d	f

→ در آخر این آرایه به ترتیب مینیمال بودن sort شده که به آن ترتیب توپولوژیک می گوییم

تعریف بزرگترین عضو و کوچکترین عضو:

عضو a بزرگترین عضو مجموعه A خواهد بود هرگاه به ازای هر x ($\forall x \in A$) $x \leq a$ (x با a قابل مقایسه و از آن کوچکتر است)

کوچکترین عضو a می شود هرگاه به ازای تمامی xها داشته باشیم $a \leq x$ (a با تمامی اعضا مرتبط و از آن ها پایین تر باشد.

96.1.26

Ex : $A=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b,$

$R = $ "$\subseteq$" رابطه‌ی زیرمجموعه بودن

کوچکترین و بزرگترین عضو ؟

$\emptyset$ ← $\{a, b, c\}$ ←

قضیه : یک مجموعه با ترتیب جزئی دارای حداکثر یک بزرگترین عضو و حداکثر یک کوچکترین عضو خواهد بود.

← ممکن است مجموعه‌ای باشد که بزرگترین / کوچکترین نداشته باشد.

کران بالا و کران پایین : (upper b (lower bound)

← مجموعه با ترتیب جزئی A و زیرمجموعه‌ی B آن را در نظر بگیرید یک عضو مانند a را کران بالای B خواهد بود هرگاه به ازای تمامی اعضای زیرمجموعه‌ی B داشته باشیم b با a قابل مقایسه و از آن کوچکتر است

B , A

$a \in A$

$\forall\, b \in B \quad b \leq a$

کران پایین

← مجموعه با ترتیب جزئی A و زیرمجموعه‌ی B آن را در نظر بگیرید یک عضو مانند c کران پایین B خوانده می‌شود هرگاه به ازای تمامی اعضای B داشته باشیم c با B قابل مقایسه و از آن کوچکتر است

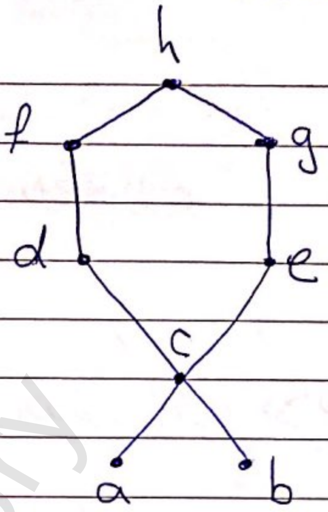
B , A ,

$C \in A$

$\forall\, b \in B \quad c < b$

96.7.26

EX:



① $B = \{a, b\}$

→ کران بالا: $\{c, d, e, f, g, h\}$

→ کران پایین: $\{\ \}$ وجود ندارد

② $B = \{c, d, e\}$

→ کران بالا: $\{f, h, g\}$

→ کران پایین: $\{a, b, c\}$

★ در این مورد گاهی اعضای خود زیرمجموعه نیز می‌توانند عضو کران پایین باشند مثلاً c با خودش قابل مقایسه با e و d نیز قابل مقایسه و از آن کوچکتر است.

کوچکترین کران بالا (LUB): مجموعه با ترتیب جزئی A و زیرمجموعه B آن را در نظر بگیرید عضو a کوچکترین کران بالای B خواهد بود (LUB) هرگاه عضو a یک کران بالای B بوده و اگر عضو a' کران بالای دیگری برای B باشد داشته باشیم a با a' قابل مقایسه و از آن کوچکتر است.

$a \leq a'$

بزرگترین کران پایین (GLB): عضو a بزرگترین کران پایین B خواهد بود هرگاه a یک کران پایین B بوده و اگر a' کران پایین دیگری برای B باشد داشته باشیم a با a' قابل مقایسه و از آن ~~کوچکتر~~ بزرگتر است.

EX: LUB , GLB برای EX بالا ؟

① $GLB = \{\ \}$ نداریم

$LUB = \{c\}$

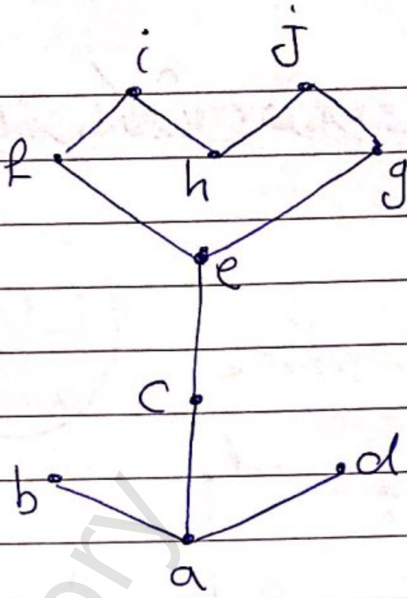
② $GLB = \{c\}$

$LUB =$ ~~$\{c\}$~~ $\emptyset$ نداریم

96.1.26

①

: Ex



B = {c, e}

کران بالا: {e, f, g, h, i, j}

کران پایین: {a, ~~b~~, c, ~~d~~}

LUB: {e}

GLB: {c}

B = {b, i}

کران بالا: ∅

کران پایین: {a ~~b~~}

LUB: ∅

GLB: ~~∅~~ {a}

★ وقتی کران بالا و پایین تک عضوی باشد LUB و GLB می‌شود خودش

(A, ≤) (A', ≤)

قضیه: فرض کنید A و A' دو مجموعه با ترتیب جزئی ایزومورف تحت ایزومورفیسم f : A → A' باشند.

الف: اگر عضو a یک عضو ماکسیمال (یا مینیمال) مجموعه A باشد در این صورت f(a) یک عضو ماکسیمال (یا مینیمال) مجموعه A' خواهد بود.

ب: اگر a کوچکترین عضو (یا بزرگترین) مجموعه A باشد در این صورت f(a) کوچکترین (یا بزرگترین) عضو A' خواهد بود.

ج: اگر a یک کران بالا (یا پایین) (GLB، LUB) زیرمجموعه B از مجموعه A باشد در این صورت f(a) یک کران بالا (یا پایین، LUB، GLB) زیرمجموعه f(B) در مجموعه A' خواهد بود.

شبکه (Lattice) یک مجموعه‌ای است با ترتیب جزئی مانند L که در آن هر زیرمجموعه شامل 2 عضو دارای یک LUB و یک GLB باشد.

LUB
$a \vee b$

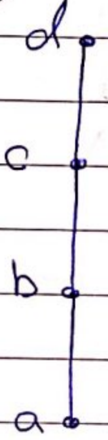
GLB
$a \wedge b$

✶ از این به بعد

هر دو به دو هم GLB و هم
دارد پس شبکه است

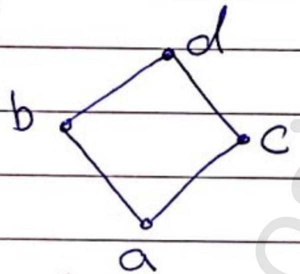
EX :

$\{b, c\}$
$c = c$
$c = b$
$\{a, c\}$
$c = c$
$c = a$



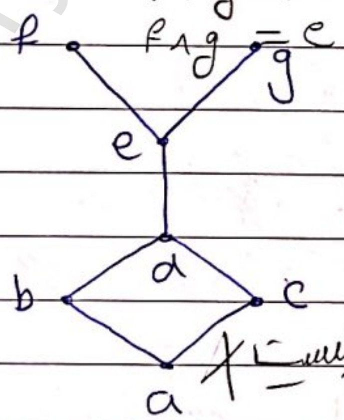
$\{b, c\}$ دلخواه
$b \vee c = d$
$b \wedge c = a$

$\{a, d\}$ دلخواه
$a \vee d = d$
$a \wedge c = a$



شبکه است ✓

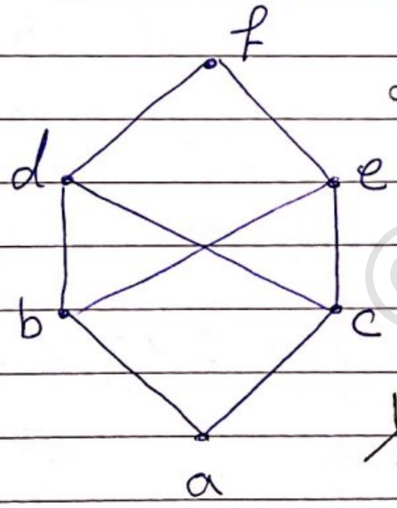
$\{f, g\}$ دلخواه
$f \vee g = ~~\emptyset~~ \emptyset$
$f \wedge g = e$



شبکه نیست ✗

LUB ⇐ از دو به دو (دلخواه) می‌رویم رو به بالا اولین نقطه‌ی مشترک.
GLB ⇐ می‌رویم رو به پایین اولین نقطه‌ی مشترک.

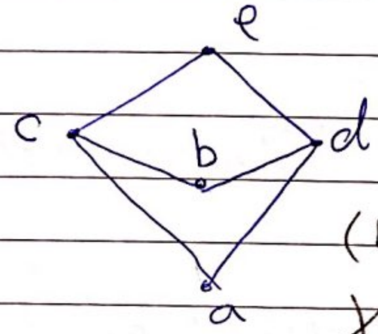
✶ لطفاً 1 مثال نقض برای نشان دادن اینکه شکل شبکه نیست کافی می‌باشد.



$\{a, f\}$ دلخواه
$a \vee f = f$
$a \wedge f = a$

$b \vee c = a$
$b \wedge c = \emptyset$

شبکه نیست ✗



$\{c, d\}$ دلخواه
$c \vee d = ~~b~~ e$
$c \wedge d = \emptyset$
(هم a و هم b مشترکند)

شبکه نیست ✗

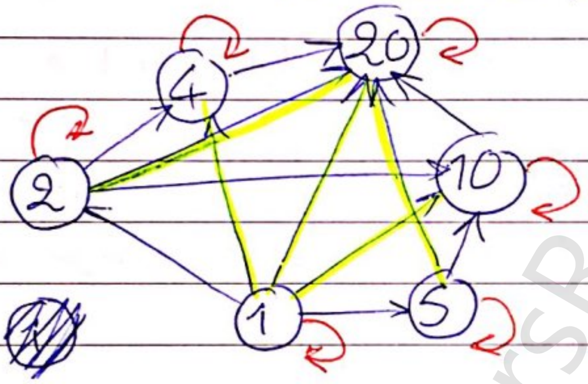
96.1.26

فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد در این صورت D_n برابر است با مجموعه تمام مقسوم علیه‌های عدد n .

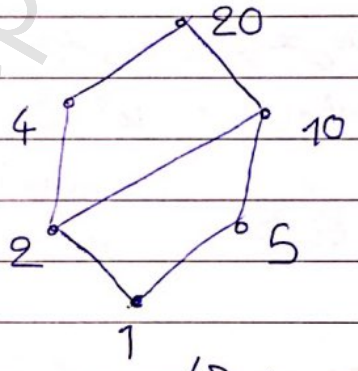
$(D_{20} , |)$

اعدادی که 20 بر آن ها بخش پذیر است $\Rightarrow \{1,2,4 \quad , \quad 5,10,20\}$

اعضای رابطه‌ی عاد کردن $R = \{(1,1)(1,2)(1,4)(1,5)(1,10)(1,20)(2,2)(2,4)(2,10$
$(2,20)(4,4)(4,20)(5,5)(5,10)(5,20)(10,10)$
$(10,20)(20,20)\}$



رسم گراف جهت دار ←



نمودار هاس رابطه‌ی D_2
عاد کردن

میشه ک.م.م

$(4 \vee 5) = 20 \qquad (2 \vee 5) = 10$

$(4 \wedge 5) = 1 \qquad (2 \wedge 5) = 1$

میشه ب.م.م

$(4 \vee 10) = 20$

$(4 \wedge 10) = 2$

حالا می‌خوایم ببینیم شبکه هست یا نه ؟ ←

★ نمودار هاس D_n شبکه است

و حاصل ∧ میشه ب.م.م و

حاصل ∨ میشه ک.م.م

Home EX : D_{30} رابطه‌ی عاد کردن (شکل مطلب)

$D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

~~P(S)~~ ! $P(S)$ می‌شود مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های S ★

★ نکته: $P(S)$ و رابطه‌ی زیرمجموعه بودن تشکیل یک شبکه می‌دهند

$(P(S), \subseteq) \rightarrow$ شبکه

و مانند D_nها جوین و مست آن‌ها قاعده دارد:

$$\begin{cases} a \vee b = a \cup b & \text{اجتماع} \\ a \wedge b = a \cap b & \text{اشتراک} \end{cases}$$

★ نکته: مجموعه‌ی اعداد صحیح + و رابطه‌ی عاد کردن تشکیل شبکه می‌دهند و داریم:

$a \vee b =$ b,a ک.م.م

$a \wedge b =$ b,a ب.م.م

$(Z^+, |) \rightarrow$ شبکه

زیرشبکه: (sub-lattice)

فرض کنید L یک شبکه باشد (L, ≤) یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی مانند S از L یک زیرشبکه خواهد بود اگر به ازای هر a و b عضو S حاصل جوین و مست هم داخل خودش باشد.

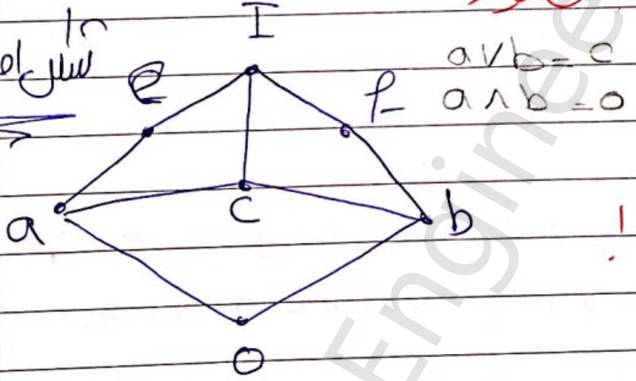
$\forall a, b \in S \quad \begin{matrix} a \vee b \in S \\ a \wedge b \in S \end{matrix}$

★ هر زیرشبکه خودش یک شبکه محسوب می‌شود

EX: کدام یک از شکل‌های زیر زیرشبکه‌اند؟

حاصل جوین و مست باید درش باشد تا شبکه باشد!

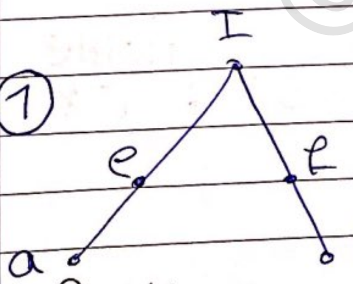
شکل اصلی



$a \vee b = c$

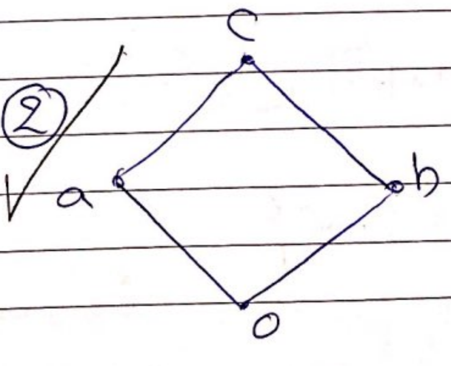
$a \wedge b = 0$

①

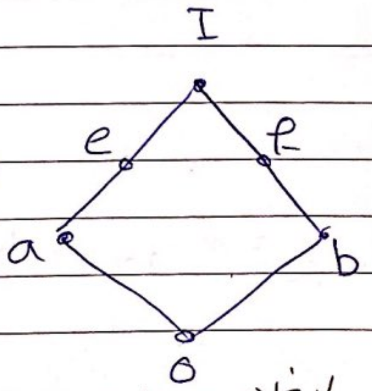


اینجا a و b را داریم اما ce رو ندارم

②



③



اینجا هم c را نداریم

96.1.26

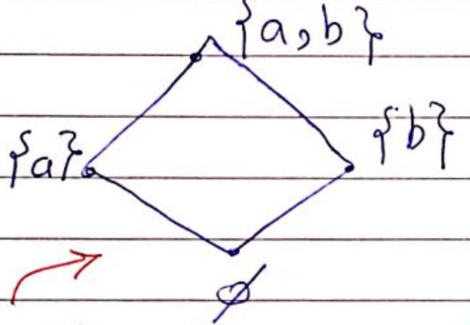
نکته: $(D_n, |)$ زیرمشبکه‌ای است برای $(Z^+, |)$

مشبکه‌های ایزومورف: فرض کنید $f: L_1 \to L_2$ یک ایزومورفیست از $(L_1, \leq_1)$ به $(L_2, \leq_2)$ باشد، L_1 مشبکه است اگر و تنها اگر L_2 مشبکه باشد. در حقیقت اگر a,b عناصر L_1 باشند آنگاه خواهیم داشت

$$f(a\vee b) = f(a)\vee f(b)$$

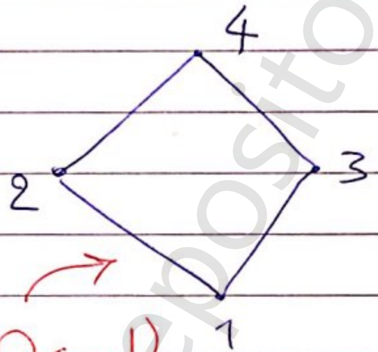
$$f(a\wedge b) = f(a)\wedge f b)$$

Ex:



$(P(S), \subseteq)$

$S=\{a,b\}$



$(D_6, |)$

← دو مشبکه ایزومورف هستند پس داریم:

$$\underbrace{f(\underbrace{\{a\}\vee\{b\}}_{\{a,b\}})}_{4} = \underbrace{\underbrace{f\{a\}}_{2}\vee\underbrace{f\{b\}}_{3}}_{4}$$

درست خواهد شد ✓

$$\underbrace{f(\underbrace{\{a\}\wedge\{b\}}_{\emptyset})}_{1} = \underbrace{\underbrace{f\{a\}}_{2}\wedge\underbrace{f\{b\}}_{3}}_{1}$$

درست خواهد شد ✓

96.2.2

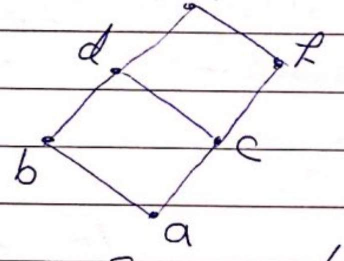
خواص شبکه‌ها:

فرض کنید L یک شبکه باشد آنگاه برای هر a و b عضو L خواهیم داشت:

① $a \vee b = b$ اگر و تنها اگر $a \leqslant b$ → حاصل join عضو بالاتر

② $a \wedge b = a$ اگر و تنها اگر $a \leqslant b$ → حاصل met عضو پایین‌تر

③ $a \vee b = b$ اگر و تنها اگر $a \wedge b = a$



EX: $a \leqslant f$ → a و f قابل مقایسه‌اند

$a \vee f = f$

$a \wedge f = a$

قضیه: فرض کنید L یک شبکه باشد آنگاه خواص زیر را در شبکه خواهیم داشت:

① خاصیت خودتوانی: $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$

② خاصیت جابه‌جایی: $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee^{b}$

③ خاصیت جذبی: $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$

④ خاصیت شرکت‌پذیری: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

شبکه‌های ویژه: ① شبکه‌ی محدود: شبکه‌ی محدود شبکه‌ای است که دارای بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو O باشد.

EX: کدام یک محدود است و کدام یک نیست؟

① $(Z^{+}, |)$ → اعداد مثبت و عاد کردن

شبکه هست ولی محدود نیست

② $(P(S), \subseteq)$ → مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌ها ، زیرمجموعه بودن

$S = \{a, b, c\}$

O

$P(S) = \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}$

$, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b,$

$, \{a, b, c\}$

I

شبکه محدود است زیرا کوچکترین و بزرگترین عضو آن مشخص است.

قضیه: فرض کنید $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک شبکه‌ی متناهی باشد در اینصورت L محدود می‌باشد.

$I = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ بزرگترین عضو L (جوین کل اعضا)

$0 = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ کوچکترین عضو L (میت کل اعضا)

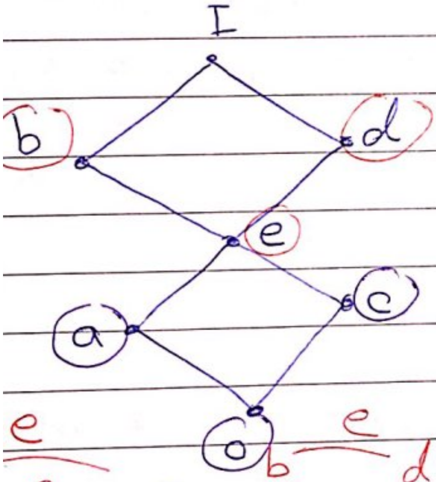
② **شبکه‌ی پخش پذیر یا توزیع پذیر:** شبکه‌ی L را پخش پذیر خواهیم گفت هرگاه به ازای $a, b, c \in L$ خواص پخش پذیری زیر را داشته باشیم:

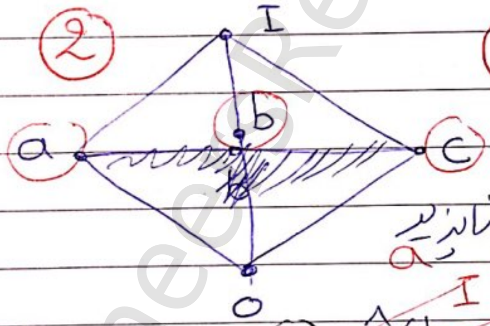
هر 3 عضو دلخواه

$$\begin{cases} a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{cases}$$

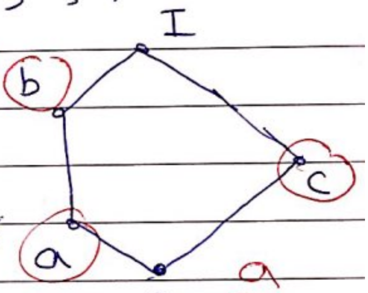
اگر شبکه‌ی L پخش پذیر نباشد پخش ناپذیر می‌باشد!

EX: کدام یک پخش پذیر و کدام یک پخش ناپذیر است؟





پخش ناپذیر



$b \wedge d) \overset{?}{=} (e \vee b) \wedge (e \vee d)$ ✓

$b \vee d) \overset{?}{=} (e \wedge b) \vee (e \wedge d)$ ✓

$\wedge c) = (a \vee 0) \wedge (a \vee c)$ ✓

$\vee c) \neq (a \wedge 0) \vee (a \wedge c)$ ✓

شبکه پخش پذیر می باشد

③ $a \wedge (b \vee c) \overset{?}{=} (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ✓

$a \vee (b \wedge c) \overset{?}{=} (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ✗

② $a \vee (b \wedge c) \overset{?}{=} (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ $a \neq I$ ✗

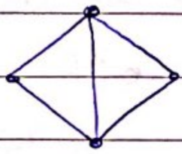
$a \wedge (b \vee c) \overset{?}{=} (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $a \neq 0$ ✗

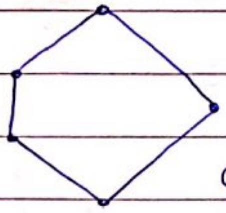
شبکه پخش ناپذیر می باشد

برای هر سه تا 3 عضو دلخواه رو در نظر گرفته و قوانین بالا را بررسی کردیم.

96.2.2

قضیه : شبکه‌ی L را پخش ناپذیر خواهیم گفت اگر و تنها اگر شامل زیرشبکه‌ای ایزومورف با یکی از شبکه‌های زیر باشد :





اگر در داخل شکلی بزرگ شکل‌ها مثل این ۲ شکل را یافتید به این قضیه استناد کرده و می‌گویید شبکه پخش ناپذیر است !

مکمل : فرض کنید L یک شبکه‌ی محدود با بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو 0 باشد در این صورت عضو a' مکمل یا complement عضو a خوانده می‌شود هرگاه حاصل جوین a و a' ، a شود و حاصل میت آن‌ها 0 شود.

$a \vee a' = I$ → بزرگترین (join)

$a \wedge a' = 0$ → کوچکترین (met)

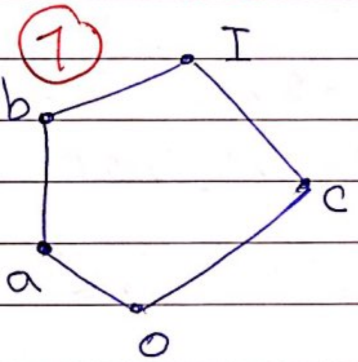
$I' = 0$

$0' = I$

★

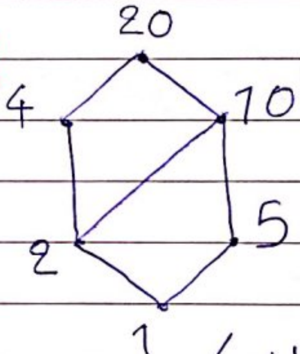
EX :

①



(پیدا کردن مکمل در گسترش‌ها)

②



$a' = c \quad (a \vee c = I), (a \wedge c = 0)$

$b' = c \quad (b \vee c = I), (b \wedge c = 0)$

$c' = a \text{ یا } b \quad (c \vee a = I), (c \wedge a = 0)$

$2' =$! مکمل ندارد

$5' = 4 \quad (5 \vee 4 = 20), (5 \wedge 4 = 1$

$10' =$! مکمل ندارد

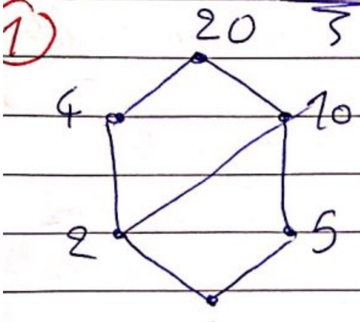
★ ممکن است عضوی در شکل باشد که مکمل نداشته باشد !

قضیه : فرض کنید L یک شبکه‌ی محدود و پخش پذیر باشد اگر یک مکمل برای عضوی وجود داشته باشد آنگاه آن مکمل منحصر به فرد است.

96.2.2

مشبکه‌ی مکمل پذیر: یک مشبکه مکمل پذیر گفته می‌شود هرگاه محدود بوده و هر عضو آن دارای مکمل باشد.

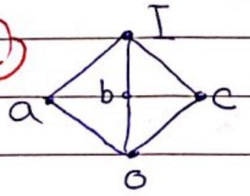
①



$(D_{20}, |)$

مکمل پذیر نیست!

②



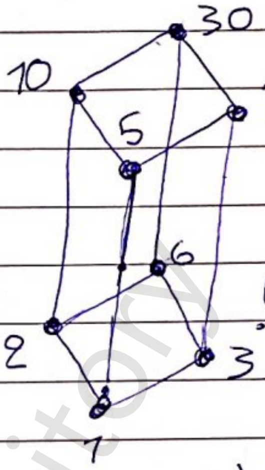
$a' = b$ یا c

$b' = c$ یا a

$c' = a$ یا b

مکمل پذیر است!

③



$(D_{30}, |)$

5,6 مکمل اند

〃 10,3

مکمل پذیر است!

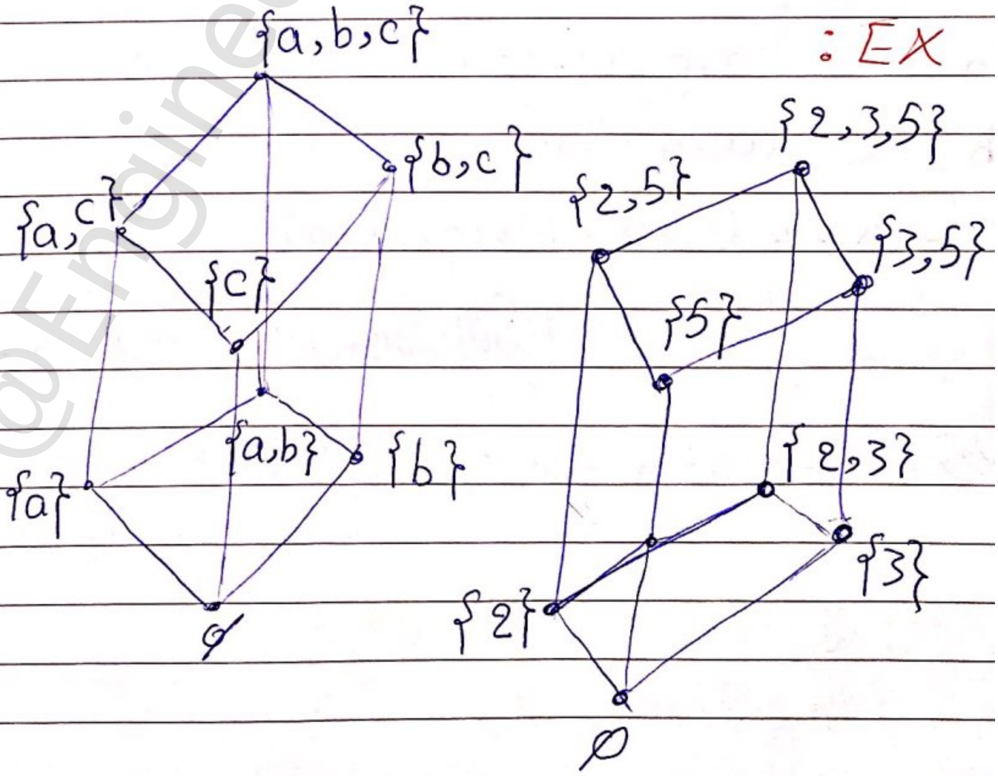
جبر دودویی یا جبر بول:

قضیه: اگر $S_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $S_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ دو مجموعه دلخواه و متناهی با n عضو باشند در اینصورت ~~$P(S_1)$~~ $(P(S_1), \subseteq)$ و $(P(S_2), \subseteq)$ ایزومورف هستند.

EX:

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 \{2, 3, 5\}$



s.a.m

96 . 2 . 2

ادامه قضیه ← اگر نمودار هاس شبکه‌ای مربوط به شبکه‌ای با n عنصر را بوسیله‌ی رشته‌هایی از صفر و یک به طول n برچسب بزنیم شبکه‌ی حاصل را Bn می‌نامیم.

← ویژگی‌های ترتیب جزئی در Bn را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

اگر $x = a_1 a_2 \dots a_n$ و $y = b_1 b_2 \dots b_n$ را داریم اگر این دو عضو Bn باشند در اینصورت:

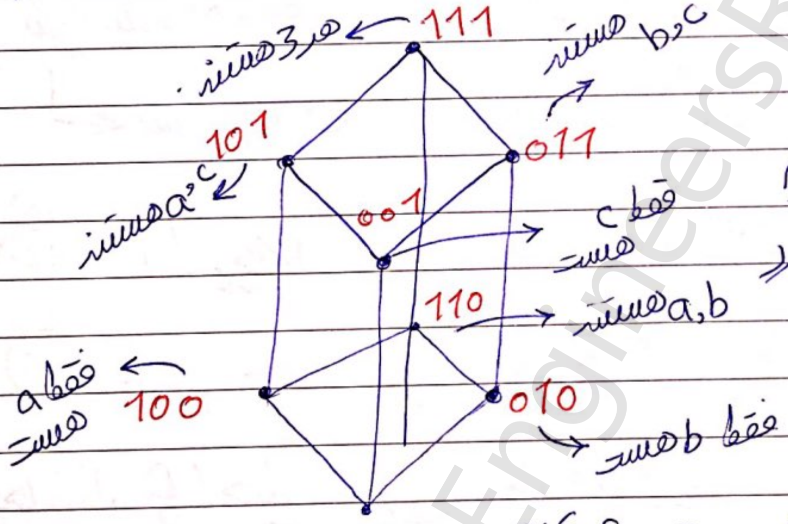
① $x \leq y$ اگر و تنها اگر $a_k \leq b_k$ $(k = 1, \dots, n)$

② اگر $c = x \wedge y$ در اینصورت $c = c_1, c_2 \dots c_n$ که $c_k = \min\{a_k, b_k\}$

③ اگر $c = x \wedge y$ در اینصورت $c = c_1 c_2 \dots c_n$ که $c_k = \max\{a_k, b_k\}$

④ x دارای مکملی مانند x' می‌باشد که در آن $x' = z_1 z_2 \dots z_n$

$$\begin{cases} z_k = 0 & \text{if } a_k = 1 \\ z_k = 1 & \text{if } a_k = 0 \end{cases}$$



نحوه برچسب زدن EX قبلی

اصطلاحاً به شکل B③ می‌گوییم

3 عضو دارد

می‌ریم سراغ حل کردن قضیه بالا:

① اگر دو نقطه x و y باهم قابل مقایسه و کوچکتر باشند رشته‌های آن‌ها هم همانند همان گونه است.

② برای بدست آوردن حاصل meet، x و y می‌توانید min رشته‌ی آن‌ها را بگیرید.

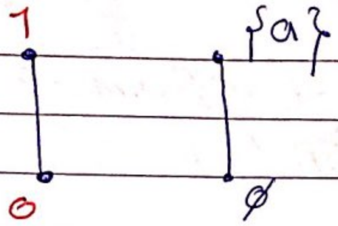
③ برای بدست آوردن حاصل join کافی است max رشته‌های آن‌ها را بگیرید.

④ برای بدست آوردن مکمل یک نقطه کافی است رشته‌ی آن را معکوس کنید.

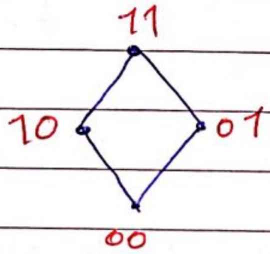
B1

$S_1 = \{a\}$

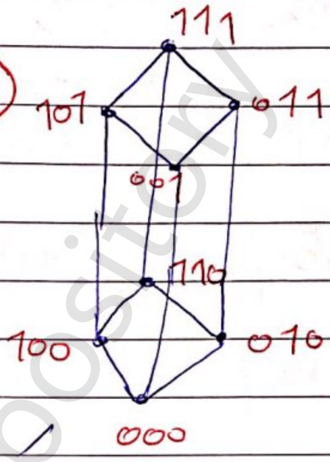
$P(S) = \emptyset , \{a\}$



B2



B3



home EX ← B_4 را رسم کنید.

تعریف جبر بولی یا دودوی :

یک شبکه‌ی متناهی را جبر دودوی گوییم هرگاه ایزومرف با B_n برای یک n صحیح و مثبت باشد

← پس تمام این B ها را جبر دودوی می‌گوییم.

EX : آیا ~~D_{30}~~ (D_{30} , |) معرف جبر دودوی هست یا خیر؟

🙂 نمودار هاس D_{30} با B_3 ایزومرف است پس معرف جبر دودوی هست

حالا (D_{20} , |) چطور؟ 😮 خیر جبر دودوی نیست چون با B ها ایزومرف نیست

خواص جبر دودوی :

① خودتوانی ← $x \wedge x = x$ ، $x \vee x = x$

② جابجایی ← $x \vee y = y \vee x$ ، $x \wedge y = y \wedge x$

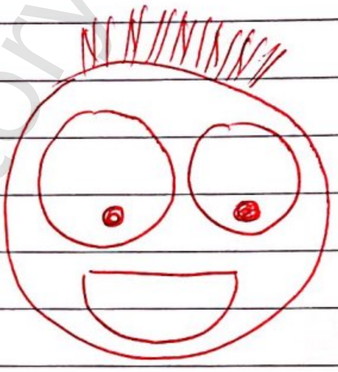
③ شرکت پذیری ← $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ، $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

④ جذبی ← $x \vee (x \wedge y) = x$ ، $x \wedge (x \vee y) = x$

⑤ توزیع پذیری ←

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \wedge z)$

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$



⑥ هر عضو که خواه هم با 0 و هم با I قابل مقایسه است از 0 بزرگتر و از I کوچکتر

$\forall \; x \in L$ $\quad 0 \leqslant x \leqslant I$

⑦ هر عضو مانند x دارای مکمل منحصر به فردی می باشد (x') به طوری که رابطه ی $x \vee x' = I$ برقرار باشد

$x \wedge x' = 0$

⑧

$0' = I$

$I' = 0$

$(x')' = x$ ← دوبار مکمل گیری میشه خودش

⑨ خاصیت دمورگان ←

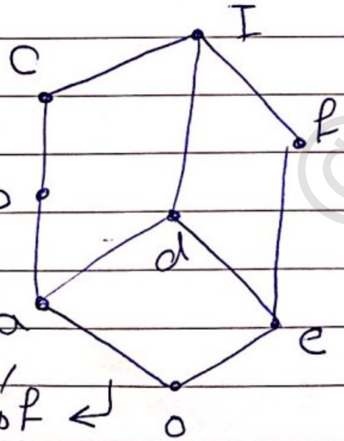
$(x \vee y)' = x' \wedge y'$

$(x \wedge y)' = x' \vee y'$

نکته : (ممکن است شکلی در امتحان داده شود و خواهند اثبات کنید که شکل معرف جبر دودوی نیست)

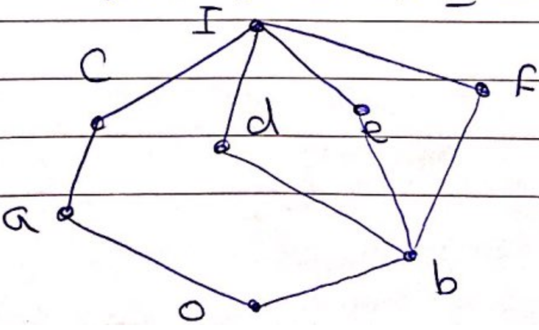
① تعداد عناصر جبر دودوی باید توانی از 2 باشد

② برای اثبات اینکه شکل جبر دودوی نیست کافی است نشان دهید یکی از خواص فوق را ندارد



f ← مکمل منحصر به فرد ندارد

b و c و a مکمل آن می توانند باشند



→ عضو d مکمل های نظیر c و a دارد پس مکمل d منحصر به فرد نیست

96 . ۴ . ۴

۴ .2

* خاصیت مکمل خطی برای اثبات دودویی نبودن استفاده می‌شود!

* نباید داشته باشید در جبر دودویی هر عضو مکمل دارد و مکمل آن منحصر به فرد است

96 . 2 . 9

متغیر دودوی (بولی boolean): متغیری که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی 0 و 1 باشد.

لیترال (term): یک متغیر دودوی و یا مکمل آن است.

جمله‌ی min (min term): روی n متغیر مانند $x_1, x_2, \dots, x_n$ عبارت دودوی به فرم $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n$ است که در آن هر لیترال $\bar{x}_i$ یا برابر متغیر دودوی x_i و یا برابر مکمل آن یعنی x_i' می باشد.

$$\bar{x}_i = \begin{cases} x_i \\ x_i' \end{cases}$$

عبارت متعارف min: (Minterm normal ~~x~~expersion) یا MNE ~~mne~~

یک عبارت دودوی را عبارت متعارف min می نامیم اگر به صورت join های از حالات min روی n متغیر باشد.

EX:

$$\underbrace{(x' \wedge y')}\overset{\text{join}}{\vee}\underbrace{(x \wedge y')}$$

جمله‌ی مینیمم min

توابع روی جبر دودوی: تابع $f: B_n \to B$ که دامنه‌ی آن B_n و برد آن $B = \{0, 1\}$ است تابع دودوی خواهد بود.

Ex:

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

چون 2 متغیر داریم $\to f: B_2 \to B$

$$f(x, y) = (x' \wedge y') \vee (x \wedge y')$$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
1	1	1	1

چون 3 متغیر داریم $\to f: B_3 \to B$

$$f(x, y, z) = (x' \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z)$$

96.2.9

تبدیل یک عبارت دودویی به فرم MNE :

$(x)\wedge(y\vee z') \xrightarrow{\text{توزیع پذیری}} (x\wedge y)\vee(x\wedge z') = (x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge$

$(x\wedge y)$ $\qquad$ $(x\vee z')$

$(x\wedge y)\vee(x\wedge y\wedge 1)$ پرانتز اولی متغیر z دومی متغیر y کم دارد

$(x\wedge y\wedge(z\vee z'))$

$(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')$ توزیع پذیری

$(x\wedge z'\wedge 1) = (x\wedge z'\wedge(y\vee y'))$

$(x\wedge z'\wedge y)\vee(x\wedge z'\wedge y')$

EX : $(x'\wedge y)'\wedge(x\vee z)$

$\xrightarrow{\text{دمورگان}} (x\vee y')\wedge(x\vee z) \xrightarrow[\text{از x فاکتور می گیریم}]{\text{عکس توزیع پذیری}} (x)\vee(y'\wedge z) \longrightarrow$

$(x\wedge 1\wedge 1)\vee(1\wedge y'\wedge z) \longrightarrow \big((x\wedge(y\vee y')\wedge(z\vee z')\big)\vee\big((x\vee x')\wedge y$

پرانتز اولی $\qquad$ پرانتز دومی

$\xrightarrow{\text{توزیع پذیری}} \big((x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee\cancel{(x\wedge y'\wedge z)}\vee(x\wedge y'\wedge z')\big)\big(\vee(x$

$\vee(x'\wedge y'\wedge z)\big)$

مشابه‌ها حذف می گردد

به فرم MNE رسیدیم !

★ ~~ساده سازی~~ دو عبارت دودویی را هم ارز خواهیم گفت اگر و تنها اگر دارای جدول ارزش یکسان باشند (MNE)

ساده سازی عبارات دودویی : (از جدول یا نقشه کارنو استفاده می کنیم)

حالت 2 متغیره

$$\begin{array}{c|c|c} x\backslash y & & \\ \hline x' & x'\wedge y' \;\; 00 & x'\wedge y \;\; 01 \\ \hline x & x\wedge y' \;\; 10 & x\wedge y \;\; 11 \\ \hline & y' & y \end{array}$$

x → سطرها توصیف کننده

اولی خود x

دومی y'

y ↓ ستون‌ها توصیف کننده

اولی خود y

دومی y'

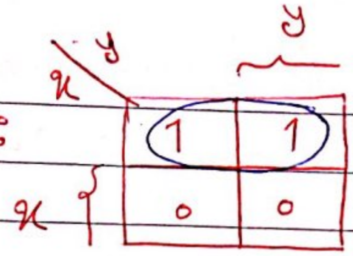
(جدول کارنو دو متغیره)

96.2.9

← برای ساده سازی در جدول کارنو 1 های مجاور با هم (یعنی یا در یک ستون اند یا در یک سطر) را جدا می کنیم باید توجه کنیم تعداد یک های یافت شده باید توانی از 2 باشد.

← ما در گروه ها می توانیم 1 ها مشترک داشته باشیم

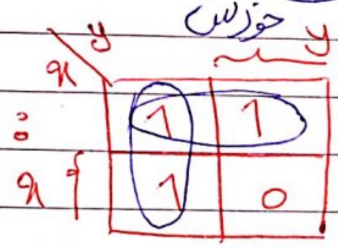
Ex :



$f(x,y) = x'$

$$f(x,y) = (x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \xrightarrow[\text{توزیع پذیری کلاسی}]{\text{فاکتور از } x'} = x' \wedge \underbrace{(y' \vee y)}_{1} = x'$$

Ex :



$f(x,y) = x' \vee y'$

$\text{بالعکس} \rightarrow (f x,y) = (x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')$

کل دسته ی اول در ناحیه x' می باشد ← $\xrightarrow[\text{در حلقه ① و ②}]{\text{فاکتور از } x'}$ $x' \wedge \underbrace{(y' \vee y)}_{1} \cancel{\vee (x \wedge y')}$ $\boxed{x'}$

اما یکیشان در y یکیشان در y' است

که کنار می گذاریم ← x'

کل دسته دوم در ناحیه y' می باشد $\longrightarrow$ ★ ما می توانیم حالات را تکرار کنیم در جبر دودویی

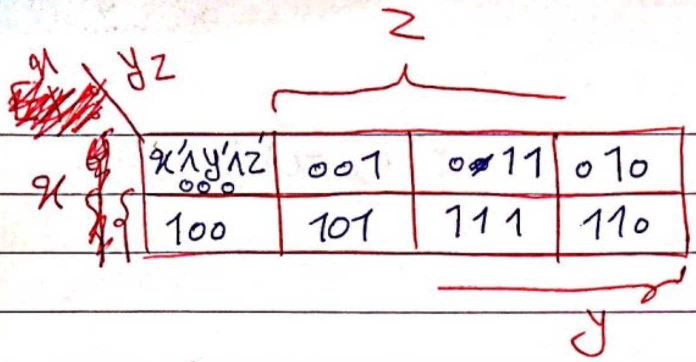
اما یکیشان در x' و x است $\xrightarrow{\text{حلقه ی ① و ③}}$ $y' \wedge \underbrace{(x' \vee x)}_{1}$ $\boxed{y'}$

که کنار می گذاریم ← y'

$\longrightarrow x' \vee y'$

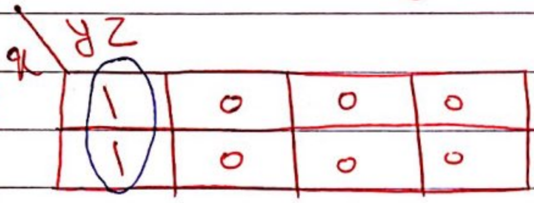
96.2.9

حالت 3 متغیره :



$x' \wedge y' \wedge z'$ 000	001	011	010
100	101	111	110

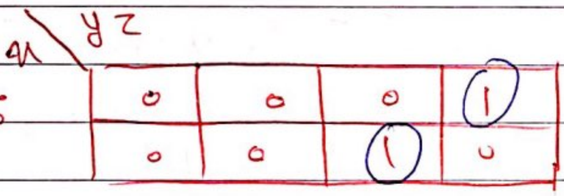
Ex :



1	0	0	0
1	0	0	0

$z' \overset{\wedge}{\cancel{v}} y' = f(x, y, z)$

Ex :

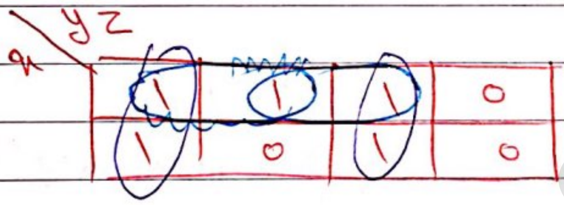


0	0	0	1
0	0	1	0

$f(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z')$

ساده سازی انجام نشد زیرا دسته ای از 1 وجود ندارد

Ex :



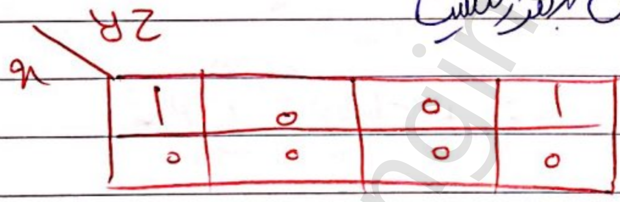
1	1	1	0
1	0	1	0

$(z' \overset{\wedge}{\cancel{v}} y') \vee \cancel{(x' \wedge y')}$

$\vee (z \wedge \overset{x'}{\cancel{y}}) \vee (y \wedge z)$

هر یک یکبار پوشش داده شود کافی است نیازی به تکرار نیست

Ex :



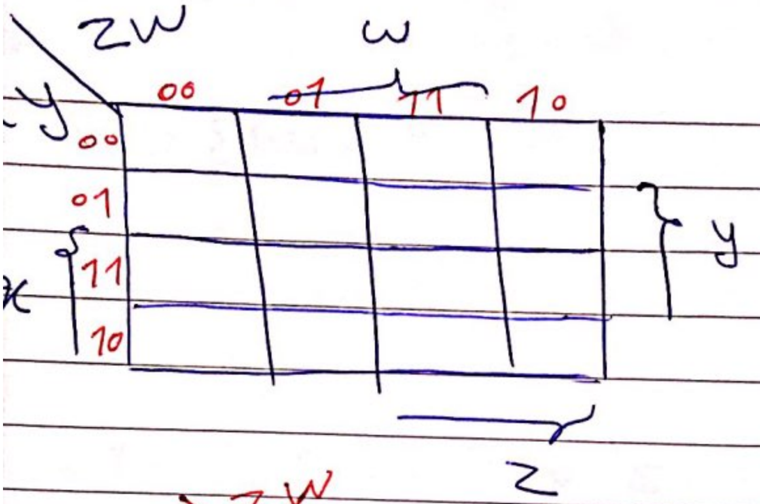
1	0	0	1
0	0	0	0

★ دو لبه ی جدول با هم مجاور محسوب می شوند پس این ۲ تا یک مجاور محسوب می شوند

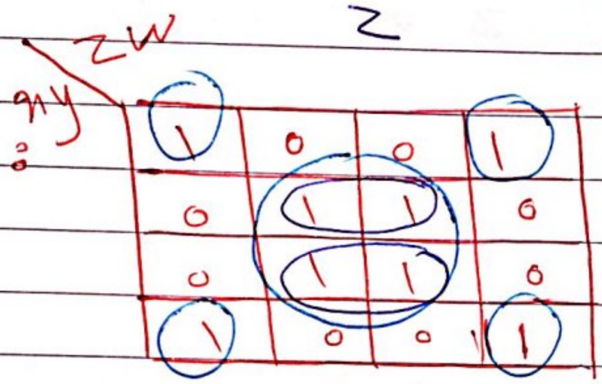
$f(x, y, z) = x' \wedge z'$

96.2.9

حالت 4 متغیره :



EX :



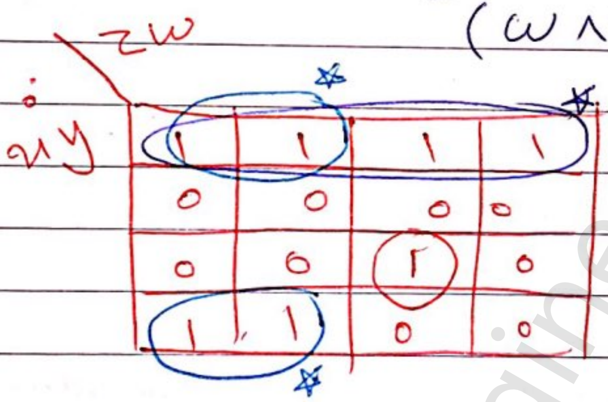
$(x' \wedge y \wedge w) \vee (x \wedge y \wedge w)$

اینطور اشتباه است زیرا باید بزرگترین گروه ممکن را در نظر بگیریم که در اینجا 4 تایی است

* اطراف جدول هم مجاور در نظر گرفته می‌شوند که گروه 4 تایی داریم

$(w \wedge y) \vee (y' \wedge w')$

EX :



$(x^{\star} \wedge y \wedge z' \wedge w)$
$\vee (x' \wedge y') \vee (xy' \wedge z')$

تمرین های فصل 4 :

3, 4, 6, 7, 8, 9, 21, 25
28, 31, 35

96 . 2 . 9

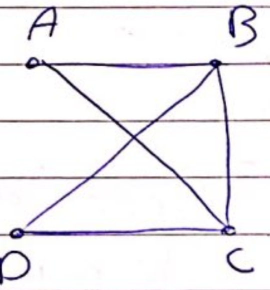
(فصل 6)

تئوری گراف :

گراف ← یک گراف مانند G شامل 2 آیتم است ① مجموعه‌ی V (vertex) که اعضای آن گره یا نقطه یا رأس نامیده می‌شوند. ② مجموعه‌ی E که شامل مجموعه‌های 2 تایی از اعضای مجموعه‌ی V است که به عنوان لبه یا یال شناخته می‌شود. (Edge)

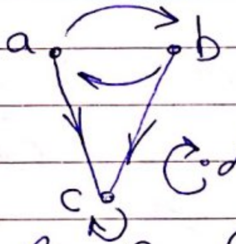
بدین صورت گراف G به صورت زوج مرتب (V, E) توصیف می‌شود. $G=(V,E)$

EX :

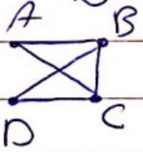


$V = \{A, B, C, d\}$ → گره‌ها

$E = \{(A,B)(A,C)(B,C)(B,D)(C,D)\}$ → یال‌ها

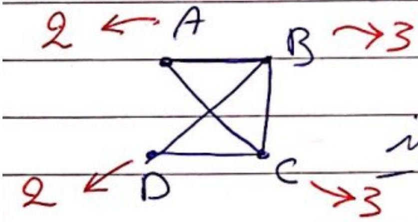


جهت دار (سودار)

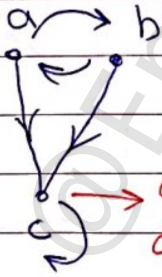


بدون جهت (بی سو)

گراف



درجه (deg) : تعداد یال‌های که به یک رأس (گره) متصل می‌باشد را درجه گویند



$d^+ = 1$

$d^- = 2$

$d^+ = 2$

$d^- = 1$

deg^+ ورودی

deg^- خروجی

برای گراف‌های جهت دار درجه

گره ایزوله (منفرد) گره‌ای که درجه‌ی آن صفر می‌باشد

حلقه : یالی که از رأسی خارج می‌شود به همان وارد می‌شود

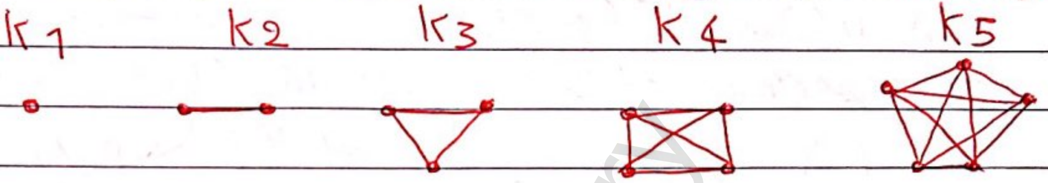
s.a.m

96.2.9

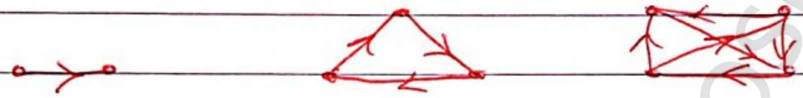
مجاور : دو رأس مجاور یا همسایه می شوند هرگاه به وسیله ی یالی بهم متصل شوند .

گراف کامل : گرافی که بین هر دو رأس دلخواه آن یالی وجود دارد . Cöplete

$K_{(n)}$ ← تعداد رئوس



گراف کامل سودار : با n رأس گرافی است که بین هر دو رأس دلخواه و متمایز آن یک یال موجود باشد



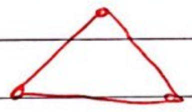
گراف منتظم : گرافی که تمامی رئوس آن هم درجه باشند

k-regular

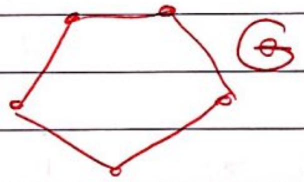
0-regular

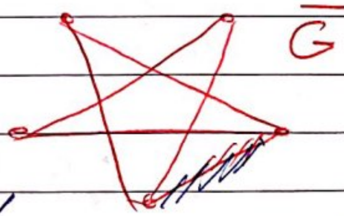
مکمل گراف : مکمل گراف G با n رأس مکمل آن نسبت به Kn می باشد و آن را با $\bar{G}$ نمایش می دهیم

2-regular



این دو شکل روی هم باید گراف کامل تشکیل دهند



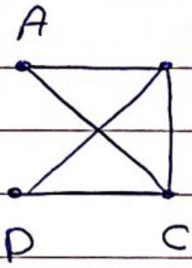


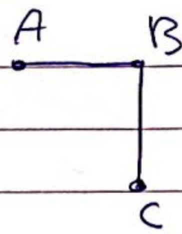
زیرگراف subgraph : فرض کنید $G(V, E)$ یک گراف باشد V' زیر مجموعه ای از V و E' زیرمجموعه ای از E $(V' \subseteq V , E' \subseteq E)$

به طوری که نقاط موجود در E' همگی متعلق به V' باشند بنابراین $G' = (V', E')$ زیرگرافی از G محسوب می شود

گراف G   زیرگراف گراف G   96.2.9

EX:





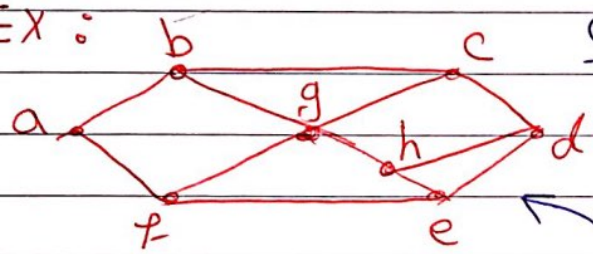
$V = \{A, B, C, D\}$

$E = \{AB, AC, BC, BD, CD\}$

$V' = \{A, B, C\}$

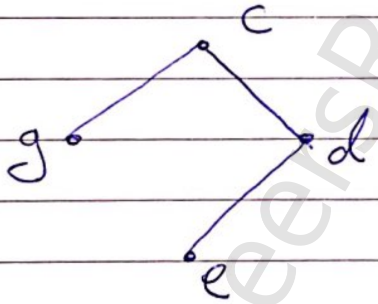
$E' = \{AB, B, C\}$

EX:



زیرگراف القائی: زیرگراف $G_1 = (V_1, E_1)$ زیرگراف القائی خواهیم گفت هرگاه E_1 شامل تمام یال‌های باشد که تمامی رئوس انتهایی آن‌ها در V_1 وجود دارد.

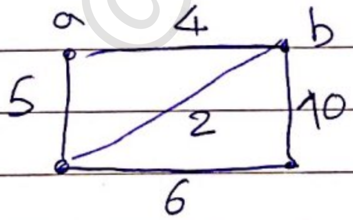
به ازای مجموعه $\{c, d, e, g\}$: V_1 زیرگراف القائی بدست آورید.



گراف چندگانه: گرافی است که هیچ محدودیتی برای تعداد یال‌ها از یک نقطه به نقطه دیگر وجود ندارد

← جهت دار هم موجود است

گراف وزن دار: گرافی است که مجموعه وزن‌ها را به یال‌های آن انتساب خواهیم داد.



مثلا ← هزینه جابه‌جایی از a به b، 4 می‌باشد