

# ۲ مثلثات

فصل

تناوب و تابع تانژانت

معادلات مثلثاتی

درس اول

درس دوم

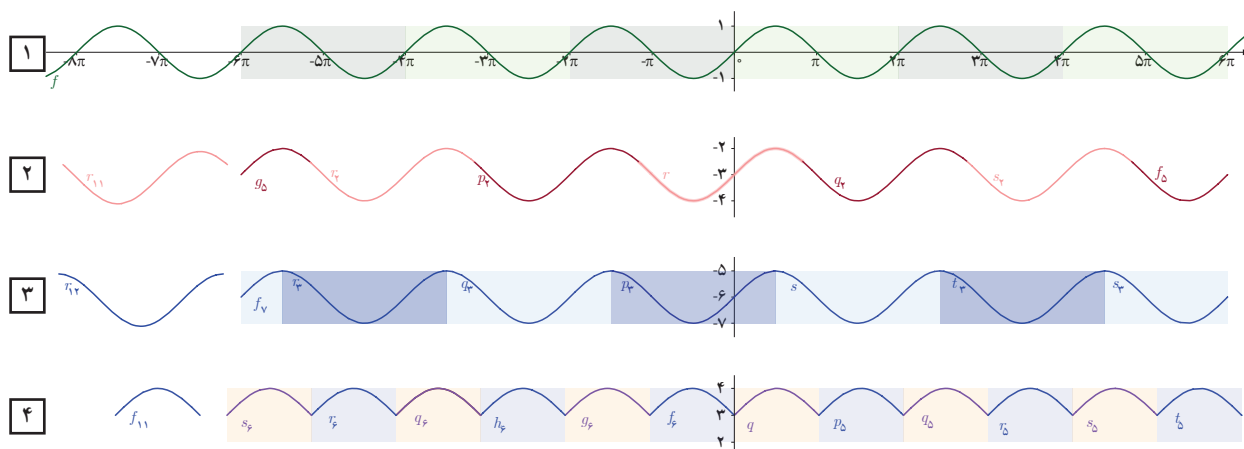
## درس اول

## تناوب و تابع تناوب

درستی رابطه  $\sin(x \pm k\pi) = \sin x$  را در سال گذشته دیدیم (یادآور می‌شویم که رابطه مشابهی برای  $\cos x$  نیز برقرار است). همچنین مشاهده شد که این رابطه باعث تکرار شدن تابع  $y = \sin x$  بر بازه‌های به طول  $2\pi$  باشد. اکنون این خاصیت را برای توابع مثلثاتی  $y = \sin ax$  و  $y = \cos ax$  بررسی می‌کنیم. ابتدا تابع  $y = \sin x$  را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم.

## فعالیت

۱ در شکل زیر نمودار تابع  $y = \sin x$  رسم شده است. همچنین قطعاتی از این نمودار به طول‌های مختلف و در بازه‌های مختلف جدا کرده‌ایم. مثلاً در ردیف ۱ قطعه‌ای به طول  $2\pi$  در بازه  $[0, 2\pi]$  و در ردیف ۲ قطعه‌ای به طول  $2\pi$  اما در بازه  $[-\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  در نظر گرفته‌ایم. سپس در هر ردیف تعدادی کپی از قطعه مربوطه گرفته و در کنار هم به‌طور متوالی قرار داده‌ایم تا نمودار سمت راست آن ردیف ساخته شود. مشاهده می‌شود که مثلاً در ردیف ۱ نمودار  $y = \sin x$  بازسازی شده است. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.



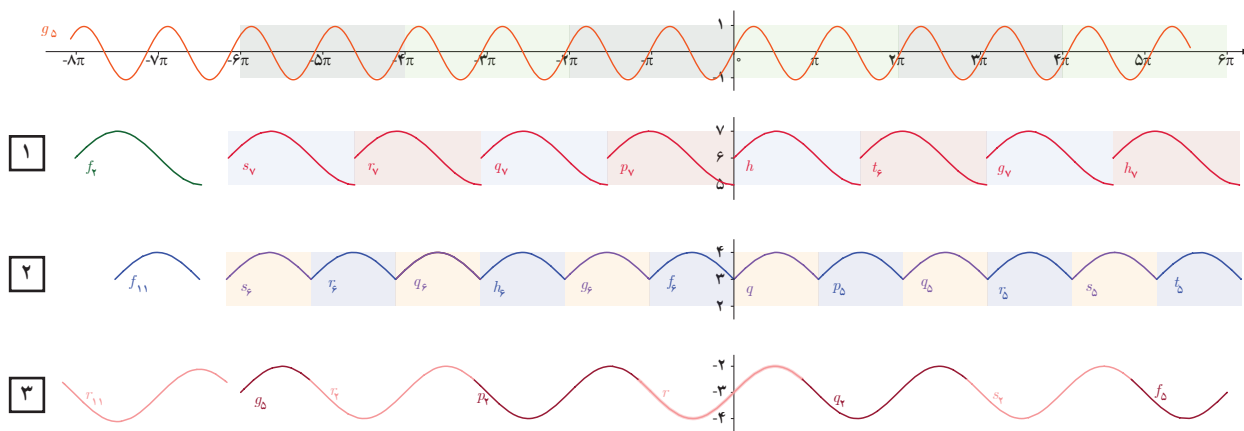
الف) به نظر شما در کدام ردیف‌ها نمودار تابع  $y = \sin x$  بازسازی شده است؟ در این ردیف‌ها طول قطعه مربوطه چقدر است؟ آیا مکان بازه‌های مختلف در بازسازی نمودار تأثیر دارد؟

ب) آیا با قطعه‌ای به طول  $\frac{\pi}{4}$  می‌توان نمودار تابع  $y = \sin x$  را بازسازی کرد؟

پ) آیا با قطعه‌های به طول  $2k\pi$  ( $k$  عددی صحیح مثبت) می‌توان نمودار تابع  $y = \sin x$  را بازسازی کرد؟

ت) در مورد طول کوچک‌ترین قطعه‌ای از نمودار که با آن می‌توان نمودار را بازسازی کرد چه حدسی می‌زنید؟

۲ نمودار تابع  $y = \sin 2x$  همراه با بازسازی‌های به دست آمده از چند قطعه مختلف آن در زیر آمده است.



الف) با کدام قطعات داده شده نمودار  $y = \sin 2x$  بازسازی شده است؟ طول آنها چقدر است؟

ب) طول کوچک‌ترین بازه که با آن می‌توان نمودار تابع  $y = \sin 2x$  را بازسازی کرد؟ چقدر است؟

پ) با توجه به الف و ب در رابطه زیر به جای  $c$  چه مقداری می‌توان قرار داد تا تساوی برقرار شود؟ در مورد کوچک‌ترین مقدار  $c$  چه حدسی می‌زنید؟ (راهنمایی: با رابطه  $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$  مقایسه کنید).

$$\sin 2(x \pm c) = \sin 2x$$

در فعالیت قبل مشاهده شد که توابع  $y = \sin x$  و  $y = \sin 2x$  به ترتیب در بازه‌های به طول  $2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) تکرار می‌شوند. به این گونه توابع «متناوب» گفته می‌شود. کوچک‌ترین عدد مثبتی که طول بازه تکرار است برای تابع  $y = \sin x$  برابر  $2\pi$  می‌باشد. واضح است که تابع  $y = \sin x$  بر بازه‌هایی که طول آنها مضرب صحیحی از  $2\pi$  است نیز تکرار می‌شوند. به این مقدار دوره تناوب تابع  $y = \sin x$  گفته می‌شود و با نماد  $T$  نمایش می‌دهند. بنابراین تابع  $y = \sin x$  یک تابع متناوب با دوره تناوب  $T = 2\pi$  می‌باشد. همچنین تابع  $y = \sin 2x$  نیز یک تابع متناوب با دوره تناوب  $T = \pi$  است.

با توجه به تعریف فوق در ادامه نشان می‌دهیم که به طور کلی توابع  $y = \sin ax$  و  $y = \cos ax$  ( $a \neq 0$ ) متناوب هستند و دوره تناوب آنها  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  می‌باشد زیرا:

$$\sin a(x \pm c) = \sin(ax \pm ac)$$

از طرفی با توجه به رابطه مثلثاتی  $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$  اگر داشته باشیم:

$$ac = 2\pi \rightarrow c = \frac{2\pi}{a}$$

آن‌گاه به دست می‌آید:

$$\sin a(x \pm c) = \sin(ax \pm ac) = \sin ax$$

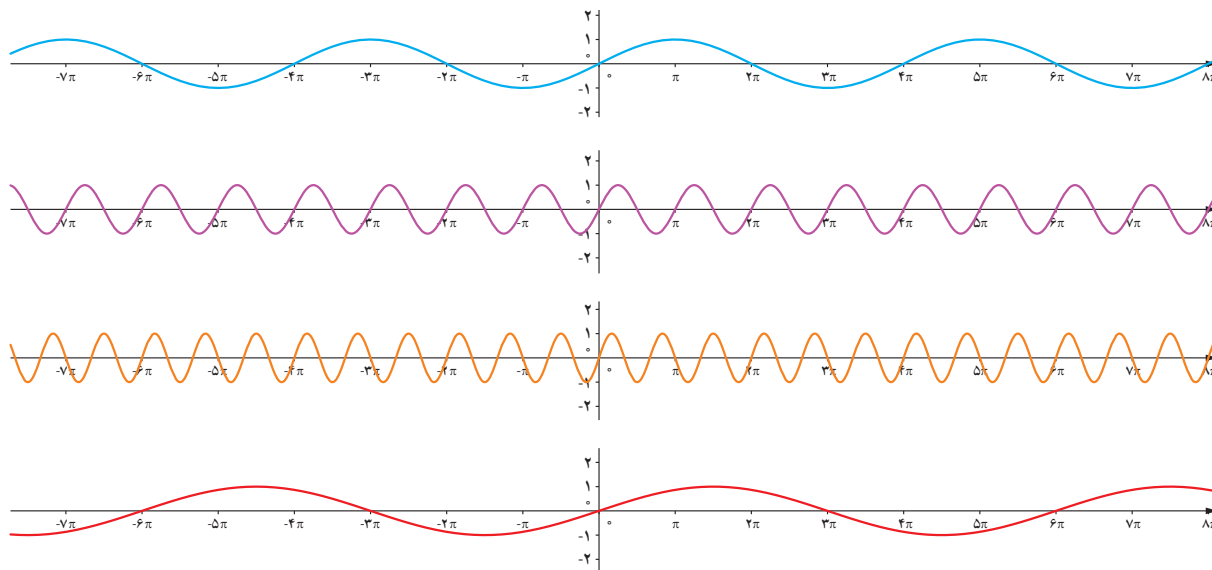
پس بنا به تعریف تابع فوق تابع  $y = \sin ax$  یک تابع متناوب با دوره تناوب  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  می‌باشد. مشابه اثبات فوق را می‌توان برای  $y = \cos ax$  نیز انجام داد.

۳ تابع  $y = \cos 2x$  را مانند فوق بررسی کنید.

۱ دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

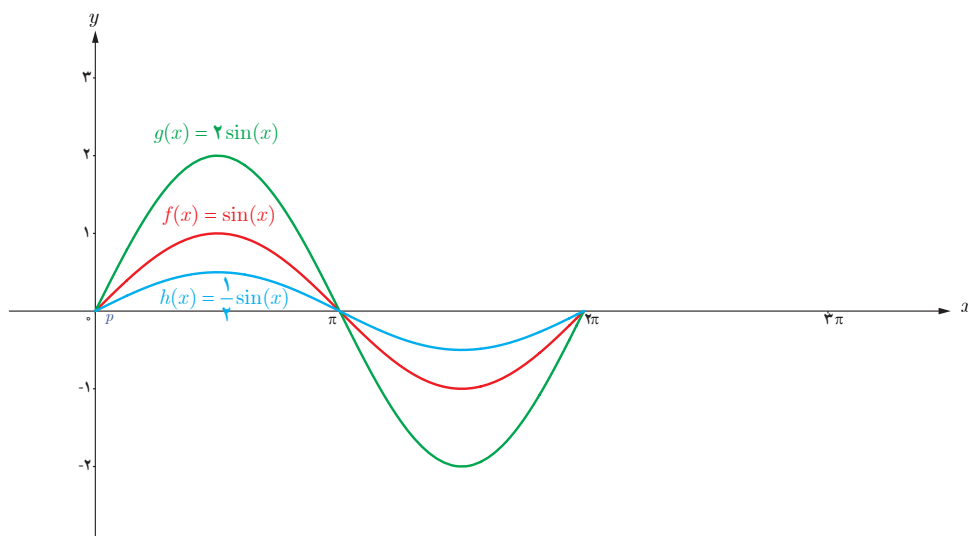
الف)  $f(x) = \sin^3 x$     ب)  $g(x) = \cos \sqrt{2}x$     پ)  $h(x) = \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$     ت)  $s(x) = \sin \pi x$

۲ می‌دانیم ریشه‌های تابع  $y = \sin x$  به صورت  $x = k\pi$  که  $k \in \mathbb{Z}$  می‌باشند. نمودار توابع  $m(x) = \sin^3 x$ ،  $g(x) = \sin^2 x$ ،  $f(x) = \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$  و  $n(x) = -\sin \frac{x}{\sqrt{3}}$  در زیر آمده است. با توجه به ریشه‌های این توابع، در مورد ریشه‌های  $y = \sin ax$  چه حدسی می‌زنید؟



۳ با توجه به دوره تناوب تابع  $y = \sin ax$  در مورد مکان نقاط ماکزیمم این تابع چه حدسی می‌زنید؟ (از نمودارهای سؤال ۲ کمک بگیرید).

۴ توابع  $f(x) = \sin x$ ،  $g(x) = 2\sin x$  و  $h(x) = \frac{1}{2}\sin x$  در شکل زیر رسم شده‌اند. آیا دوره تناوب این توابع متفاوت هستند؟ با انتقال این توابع بر روی محورهای افقی و عمودی آیا دوره تناوب آنها تغییر می‌کند؟



از کار در کلاس صفحه قبل می‌توان دریافت که ضرب یک تابع متناوب در یک عدد و نیز انتقال آن در دوره تناوب تأثیری ندارد اما در برد آن مؤثر است.

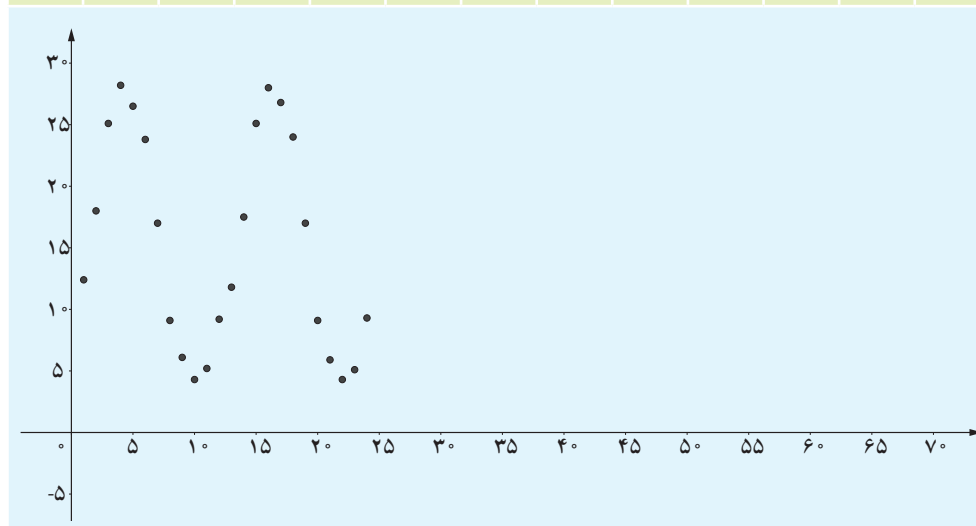
به‌طور کلی توابع مثلثاتی به صورت  $y = a \sin(bx + c) + d$  و  $y = a \cos(bx + c) + d$  که در آنها  $a, b, c, d$  اعداد حقیقی ( $a, b \neq 0$ ) می‌باشند، توابعی متناوب با دوره تناوب  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  هستند.

توابع متناوب<sup>۱</sup> برای مدل سازی پدیده‌هایی که تکرار می‌شوند به کار می‌روند. برای مدل سازی چنین پدیده‌هایی کافی است داده‌های یک دوره تناوب آن را داشت و آن‌گاه می‌توان آن پدیده را برای زمان‌های آتی پیش‌بینی کرد. معمولاً برای اطمینان از درستی یک مدل مثلثاتی داده‌های دو یا چند دوره تناوب یک پدیده را به دست می‌آورند. در ادامه چند مثال در این رابطه آمده است.

**مثال ۱:** داده‌های دمای یک شهر در ماه‌های مختلف برای دو سال پیاپی (۲۴ ماه) به صورت زیر ثبت شده اند (فروردین را با شماره ۱، اردیبهشت را با شماره ۲ و ... نمایش داده‌ایم). نمودار این داده‌ها به صورت زوج مرتب نیز رسم شده است.

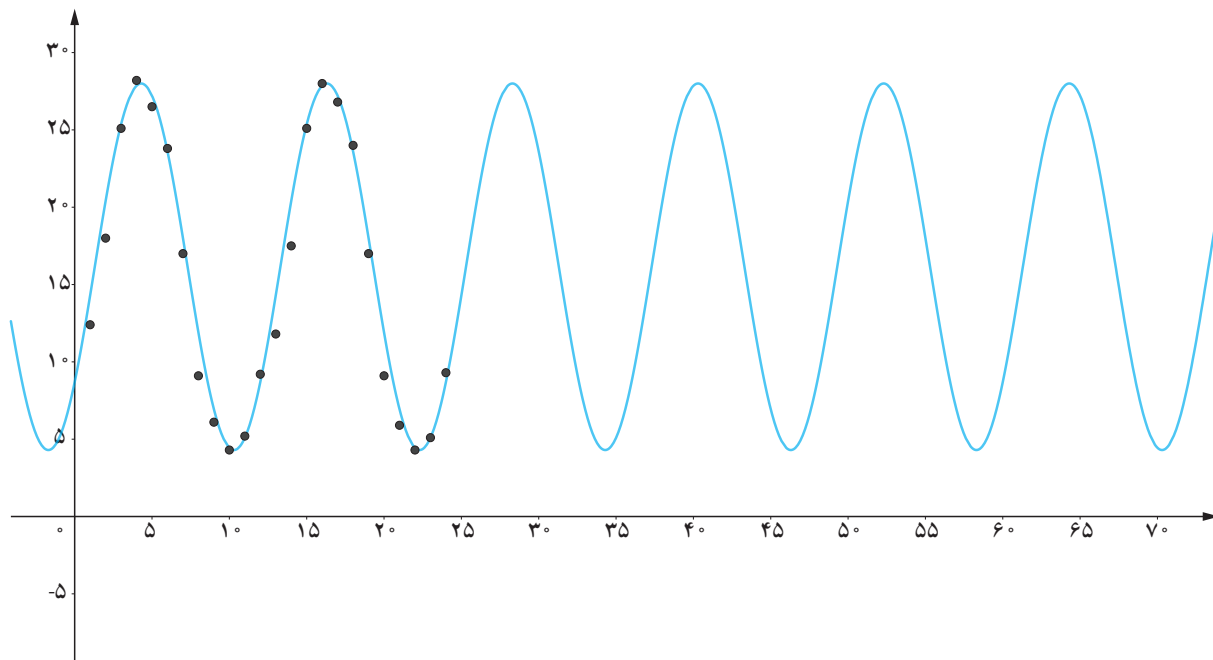
| داده‌های سال اول |      |    |      |    |      |      |    |     |     |     |     |     |
|------------------|------|----|------|----|------|------|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ماه              | ۱    | ۲  | ۳    | ۴  | ۵    | ۶    | ۷  | ۸   | ۹   | ۱۰  | ۱۱  | ۱۲  |
| دما              | ۱۲/۴ | ۱۸ | ۲۵/۱ | ۲۸ | ۲۶/۵ | ۲۳/۸ | ۱۷ | ۹/۱ | ۶/۱ | ۴/۳ | ۵/۲ | ۹/۲ |

| داده‌های سال دوم |      |      |      |    |      |    |    |     |     |     |     |     |
|------------------|------|------|------|----|------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ماه              | ۱۳   | ۱۴   | ۱۵   | ۱۶ | ۱۷   | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰  | ۲۱  | ۲۲  | ۲۳  | ۲۴  |
| دما              | ۱۱/۸ | ۱۷/۵ | ۲۵/۱ | ۲۸ | ۲۶/۸ | ۲۴ | ۱۷ | ۹/۱ | ۵/۹ | ۴/۳ | ۵/۱ | ۹/۳ |



۱- در این کتاب تنها به تناوب توابع مثلثاتی که به صورت گفته شده در کادر فوق می‌باشند می‌پردازیم.

با کمی دقت متوجه می‌شویم که دوره تناوب داده‌های بالا  $T=۱۲$  است زیرا که داده‌ها هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده‌اند. با اندکی محاسبات می‌توان تابعی مثلثاتی که تقریباً متناسب با داده‌های فوق است ارائه داد. تابع  $T(t)=۱۱/۸۵\sin(\frac{\pi}{6}t)+۱۶/۱۵$  را که در آن  $t$  شماره ماه می‌باشد داده‌ها را به خوبی تقریب می‌زند. این تابع در زیر رسم شده است. اکنون از این تابع می‌توان برای پیش بینی دمای ماه‌های آتی استفاده نمود.



برای به دست آوردن این تابع تقریبی ابتدا با توجه به اینکه داده شبیه به یک موج سینوسی هستند حالت کلی یک موج سینوسی به صورت  $T(t)=a\sin(bt)+c$  در نظر می‌گیریم و با توجه به داده‌ها مقادیر مجهول  $a, b, c$  به صورت زیر می‌یابیم. با توجه به اینکه دور تناوب داده‌ها ۱۲ است پس داریم:

$$\frac{2\pi}{b}=12 \rightarrow b=\frac{\pi}{6}$$

برای به دست آوردن  $a$  که معمولاً به آن دامنه موج گفته می‌شود از دامنه تغییرات داده‌ها استفاده می‌شود، یعنی کافی است تفاضل بیشترین و کمترین داده‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم. پس خواهیم داشت:

$$a=\frac{28-4/3}{2}=11/85$$

برای به دست آوردن مقدار  $c$  کافی است میانگین بیشترین و کمترین مقدار را بیابیم، یعنی داریم:

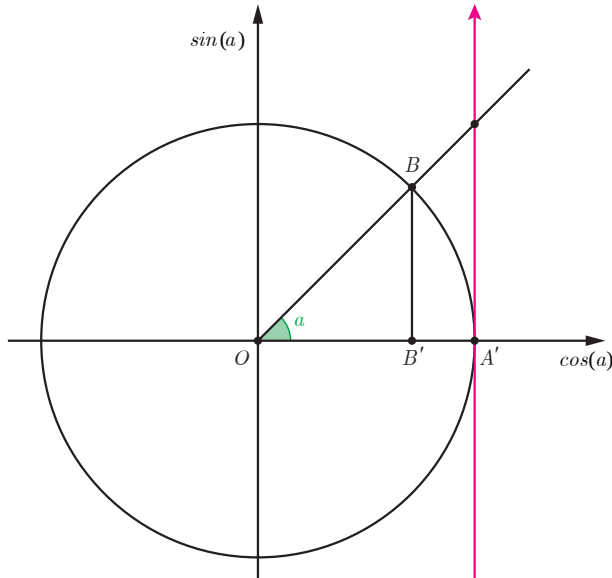
$$c=\frac{28+4/3}{2}=16/15$$

مثال ۲: مجموعه‌ای از داده‌های مربوط به دمای هوای یک شهر داده شده‌اند. اگر داده‌های این شهر هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده باشند و بیشترین و کمترین دما در داده‌ها به ترتیب ۲۸ و ۱۵ درجه سانتی‌گراد باشند، آنگاه با فرض اینکه تابعی کسینوسی به صورت  $y=a\cos(bx)+c$  برای داده مناسب به نظر می‌رسد، این تابع را بیابید.

$$\frac{2\pi}{b} = 12 \rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

$$a = \frac{28-15}{2} = 6/5$$

$$c = \frac{28+15}{2} = 21/5$$

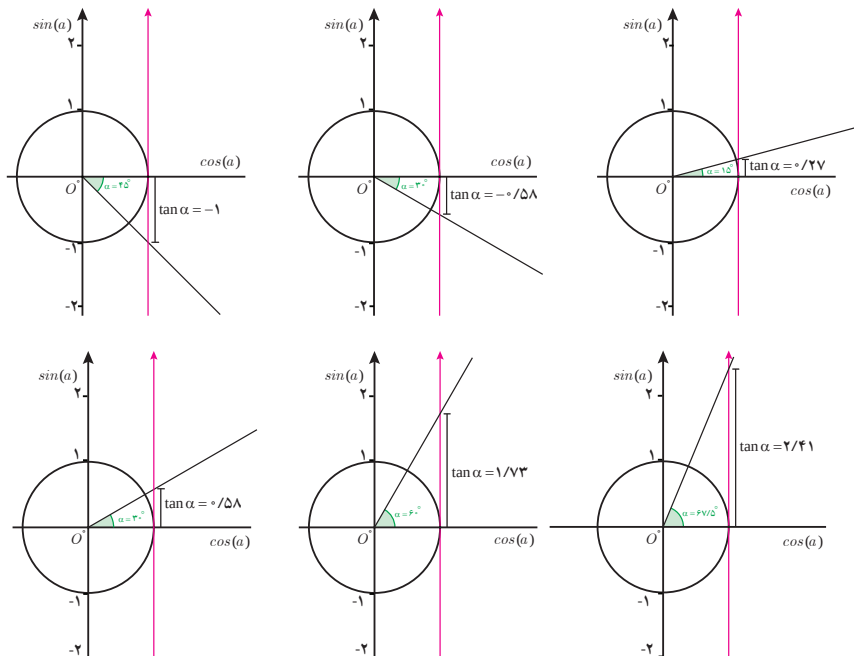


### تابع تانژانت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو زاویه  $a$  و نیز محورهای سینوس‌ها و کسینوس‌ها مشخص شده‌اند. اکنون اگر خط  $x=1$  را که بر دایره مثلثاتی مماس بوده را رسم کنیم تا امتداد  $OB$  را در نقطه  $A$  قطع کند آن‌گاه اندازه پاره خط  $AA'$  برابر تانژانت زاویه  $a$  می‌باشد زیرا که طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'} \rightarrow AA' = \frac{BB'}{OB'} = \tan \alpha.$$

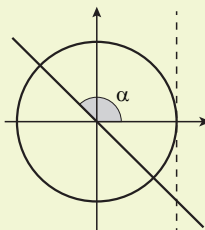
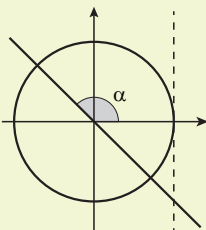
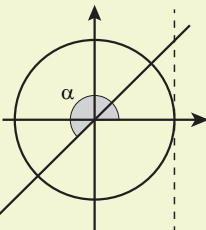
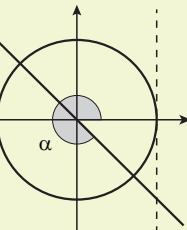
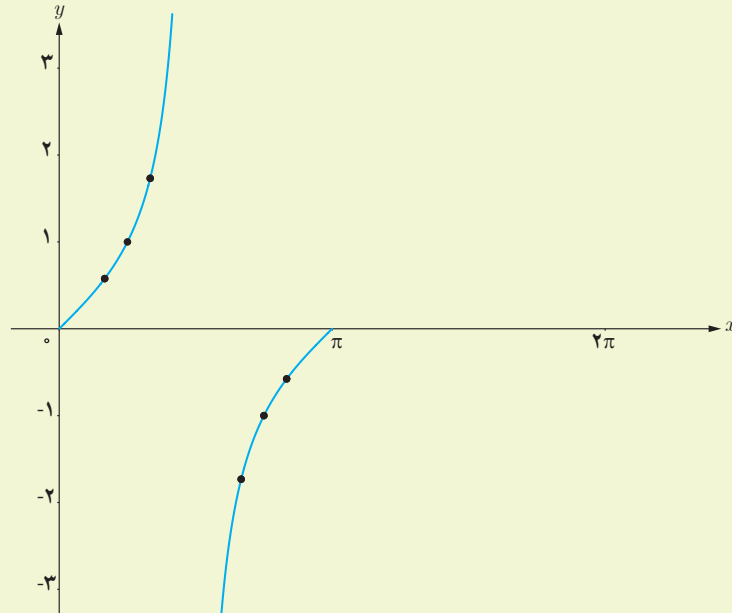
از این رو محور عمودی مماس بر دایره را محور تانژانت می‌نامند. در دایره‌های مثلثاتی زیر از چپ به راست زاویه  $\alpha$  در حال افزایش است و تانژانت آن نیز بر روی محور تانژانت مشخص شده است. به نظر شما وقتی که اندازه زاویه  $\alpha$  به زاویه  $90^\circ$  نزدیک می‌شود مقدار تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟



در فعالیت زیر تغییرات تابع  $y = \tan \alpha$  را از  $x = 0^\circ$  تا  $x = 2\pi$  به کمک محور تانژانت نیز جدول مقادیر تانژانت که از سال‌های قبل فرا گرفته‌اید بررسی می‌کنیم و نمودار تابع تانژانت را به دست می‌آوریم.

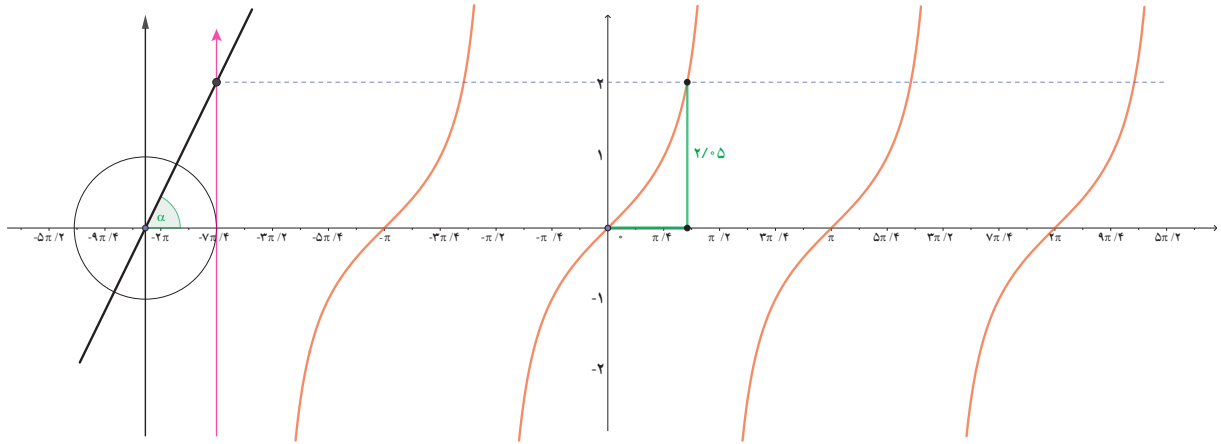
## فعالیت

- ۱ در ردیف الف از جدول زیر صعودی و نزولی بودن  $\tan \alpha$  را با توجه به محور تانژانت در هر بازه تعیین نمایید.
- ۲ در ردیف ب از جدول زیر مقدار  $\tan \alpha$  را به ازای مقادیر داده شده از  $\alpha$  به دست آورید ( $\sqrt{3} = 1.73$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{3} = -0.58$ ).
- ۳ در ردیف پ نمودار تابع  $y = \tan \alpha$  را با استفاده از نقاط کمکی ردیف ب و نیز تغییرات به دست آمده در ردیف الف تکمیل کنید.

| $\alpha$ | $0^\circ < \alpha < \frac{\pi}{2}$                                                   | $\frac{\pi}{2}$                                                                   | $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$                                                     | $\pi$                                                                               | $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ |                  |                  |                  |                  |                  |                   |        |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|------------------|----------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|--------|
| الف      |     |  |  |  | .....                           | .....            | .....                            |                  |                  |                  |                  |                  |                   |        |
| ب        | $0^\circ$                                                                            | $\frac{\pi}{6}$                                                                   | $\frac{\pi}{4}$                                                                    | $\frac{\pi}{3}$                                                                     | $\frac{2\pi}{3}$                | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$                 | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|          | $0^\circ$                                                                            | $30^\circ$                                                                        | $45^\circ$                                                                         | $60^\circ$                                                                          | $120^\circ$                     | $135^\circ$      | $150^\circ$                      | $210^\circ$      | $225^\circ$      | $240^\circ$      | $300^\circ$      | $315^\circ$      | $330^\circ$       |        |
| ج        |  |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                 |                  |                                  |                  |                  |                  |                  |                  |                   |        |



همان طور که در فعالیت قبل بررسی شد تابع مثلثاتی  $y = \tan a$  برای مقادیر  $a = \frac{k\pi}{p}$  تعریف می شود و نمودار آن در بازه  $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$  به صورت زیر است. همچنین محور مماس بر دایره مثلثاتی که به موازات محور  $y$  ها (محور سینوس) است را محور تانژانت می نامند چرا که محل تقاطع ضلع پایانی زاویه  $\alpha$  با آن محور بیانگر  $\tan \alpha$  است. در زیر ارتباط این محور با تابع تانژانت نیز مشخص شده است.



## کار در کلاس

۱ آیا تابع  $y = \tan x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  یک نواست؟

۲ با توجه به روابط مثلثاتی سال گذشته نمودار تابع  $y = \tan x$  را به بازه های بزرگ تر از  $\pi$  و کوچک تر از  $-\pi$  گسترش دهید. آیا تابع  $y = \tan x$  متناوب است؟ اگر بلی دوره تناوب آن را به دست آورید.

۳ با توجه به نمودار تابع  $y = \tan x$  دامنه و برد این تابع را بیابید.

## تمرین

۱ دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

ب)  $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x$

الف)  $y = 1 + 2 \sin 7x$

ت)  $y = -\pi + \sqrt{2} \tan 3x$

پ)  $y = -\pi \sin \frac{1}{4}(x - 2)$

۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

ب)  $y = 1 - \cos 2x$

ب)  $y = 2 - \cos \frac{1}{4}x$

الف)  $y = \sin \pi x$

ج)  $y = \tan \frac{1}{4}x$

ث)  $y = \sin 2x$

ت)  $y = -\frac{1}{4} \tan 2x$

