جزوه معادلات دیفرانسیل

بهروز آدینه

فهرست مطالب

۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۳

۲-۱ مقدمه ۳

۲-۲ معادلات تفکیک‌پذیر (متغیرهای از هم جدا) ۳

۲-۳ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن ۷

۲-۴ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی ۱۵

۲-۵ معادله دیفرانسیل مرتبه اول از نوع برنولی ۱۸

۲-۶ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع کامل ۱۹

۲-۷ بحث یافتن عامل انتگرال‌ساز ۲۱

۲-۸ معادله دیفرانسیل مرتبه اول از درجه n ۲۴

۲-۹ مسیرهای قائم ۲۶

مراجع ۲۸

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۲-۱) مقدمه

صورت کلی این معادلات به فرم $F(x, y, y') = ۰$ می‌باشد [۳].

۲-۲) معادلات تفکیک‌پذیر (متغیرهای از هم جدا)

اگر معادله به صورت $y' = f(x, y)$ باشد و داشته باشیم $f(x, y) = f_۱(x)f_۲(y)$ که در آن $f_۱$ تابعی تنها از x و $f_۲$ تابعی تنها از y باشد در این صورت داریم:

$$\frac{dy}{dx} = f_۱(x)f_۲(y) \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{f_۲(y)} = f_۱(x)dx$$

و یا به فرم کلی

$$q(x)dx + g(y)dy = ۰ \qquad (۲-۱)$$

eq21-

با انتگرال‌گیری از (۲-۱) جواب عمومی بدست می‌آید [۳].

در مرجع [۲] گفته شده که: اگر بتوان معادله دیفرانسیل مرتبه اول را در قالب کلی $A(x)dx = B(y)dy$ نوشت، آنگاه با انتگرال‌گیری از طرفین می‌توان جواب را یافت.

نکته ۲-۲-۱ برای حل معادلات مرتبه اول به فرم $y' = f(x, y)$ ابتدا مخرج‌ها را از بین می‌بریم و سپس معادله را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = ۰ \qquad (۲-۲)$$

eq22-

اگر (۲-۲) به فرم

$$f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0 \qquad (۲-۳)$$ eq23-

باشد. طرفین (۲-۳) را در $\frac{1}{f_2(x)f_3(x)}$ ضرب می‌کنیم تا به فرم (۲-۱) درآید [۳].

مثال ۲-۱ نشان دهید که معادله زیر تفکیک‌پذیر است و سپس، جواب آن را پیدا کنید [۴]. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$

حل:

$$(1-y^2)dy = x^2dx \Rightarrow \int (1-y^2)dy = \int x^2dx \Rightarrow y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$$

مثال ۲-۲ معادله دیفرانسیل $y' = e^{x+y}$ را حل کنید [۳].

حل: ابتدا طرفین را در dx ضرب کرده، $dy = e^{x+y}dx$ و طرفین را در e^{-y} ضرب می‌کنیم $e^{-y}dy = e^x dx$ سپس از طرفین انتگرال می‌گیریم:

$$\int e^{-y}dy = \int e^x dx \Rightarrow -e^{-y} = e^x + c$$

مثال ۲-۳ معادله دیفرانسیل $y' \cot x = 2 + y$ را حل کنید [۳].

حل: ابتدا طرفین را در dx ضرب کرده و سپس انتگرال می‌گیریم:

$$\cot x dy = (2+y)dx \Rightarrow \frac{dy}{2+y} = \tan x dx \Rightarrow \ln|2+y| = -\ln|\cos x| + \ln c,\ \ c > 0$$
$$\ln|2+y| = \ln\frac{c}{|\cos x|} \Rightarrow y + 2 = c\sec x$$

مثال ۲-۴ معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x(1+y)}{y(x+2)}$ را حل کنید [۳].

حل: ابتدا معادله را به فرم زیر می‌نویسیم: $y(x+2)dy = x(1+y)dx$ و طرفین را بر $(1+y)(x+2)$ تقسیم می‌کنیم و سپس با انتگرال‌گیری از طرفین معادله داریم:

$$\frac{y}{1=y}dy = \frac{x}{x+2}dx \Rightarrow y - \ln|1+y| = x - 2\ln|x+2| + c$$

مثال ۲-۵ معادله دیفرانسیل $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$ را حل کنید [۳].

حل:

$$xy(۱+x^۲)dy=(۱+y^۲)dx \Rightarrow \frac{y}{۱+y^۲}dy=\frac{dx}{x(۱+x^۲)} \Rightarrow \int \frac{y}{۱+y^۲}dy=\int \frac{dx}{x(۱+x^۲)}$$

برای حل اینگونه مسائل باید از روش تفکیک کسر استفاده کنیم:

$$\frac{۱}{x(۱+x^۲)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{۱+x^۲} \Rightarrow ۱=A(۱+x^۲)+Bx^۲+Cx$$

حال به ازای چند مقدار x (به تعداد مجهولات) معادله چند مجهولی را حل می‌کنیم تا مقادیر مجهول را بدست آوریم. معمولا مقادیری مثل ۰، ۱، ۱− و مقادیری که مخرج را صفر می‌کنند، مناسب هستند.

$$\begin{cases} x=۰ \Rightarrow ۱=A \\ x=۱ \Rightarrow ۱=۲+B+C \\ x=-۱ \Rightarrow ۱=۲+B-C \end{cases} \Rightarrow C=۰, B=-۱$$

حال داریم:

$$\int \frac{y}{۱+y^۲}dy=\int \frac{dx}{x}-\int \frac{x}{۱+x^۲}dx \Rightarrow \frac{۱}{۲}\ln\left(۱+y^۲\right)=\ln|x|-\frac{۱}{۲}\ln\left(۱+x^۲\right)+\ln c$$
$$\Rightarrow ۱+y^۲=\frac{cx^۲}{۱+x^۲}$$

مثال ۲-۶ معادله دیفرانسیل $y'=۲x\cos^۲ y$ مفروض است. حد جواب این معادله دیفرانسیل وقتی $x \longrightarrow \infty$ محاسبه کنید [۲].

حل:

$$\frac{dy}{dx}=۲x\cos^۲ y \Rightarrow \frac{dy}{\cos^۲ y}=۲xdx \Rightarrow \int(۱+\tan^۲ y)dy=\int ۲xdx \Rightarrow \tan y=x^۲+c$$
$$\Rightarrow y=\tan^{-۱}(x^۲+c) \Rightarrow \lim_{x\longrightarrow\infty} y=\lim_{x\longrightarrow\infty}\tan^{-۱}(x^۲+c)=\tan^{-۱}\infty=\frac{pi}{۲}$$

مثال ۲-۷ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=\frac{y^۲-۴}{x^۲+۹}$ چیست [۲]؟

حل: معادله دیفرانسیل مورد نظر تفکیک‌پذیر است، پس خواهیم داشت:

$$y'=\frac{y^۲-۴}{x^۲+۹} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y^۲-۴}{x^۲+۹} \Rightarrow \frac{dy}{y^۲-۴}=\frac{dx}{x^۲+۹} \Rightarrow$$
$$\int \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{y-۲}-\frac{۱}{y+۲}\right)dy=\int \frac{dx}{x^۲+۹} \Rightarrow \frac{۱}{۴}\ln\frac{y-۲}{y+۲}=\frac{۱}{۳}\tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۳}\right)+۳$$

مثال ۲-۸ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را مشخص کنید [۲]. $y' = \sqrt{۱ + x + y + xy}$

حل:

$$y' = \sqrt{۱ + x + y(۱ + x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{(۱ + x)(۱ + y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (۱ + x)^{\frac{۱}{۲}}(۱ + y)^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow$$
$$(۱ + y)^{\frac{-۱}{۲}} dy = (۱ + x)^{\frac{۱}{۲}} dx \Rightarrow \int (۱ + y)^{\frac{-۱}{۲}} dy = \int (۱ + x)^{\frac{۱}{۲}} dx \Rightarrow ۲(۱ + y)^{\frac{۱}{۲}}$$
$$= \frac{۲}{۳}(۱ + x)^{\frac{۳}{۲}} + c$$

note2 **نکته ۲-۲-۲** معادلاتی به فرم

eq24- $$y' = f(ax + by + c) \qquad (۴-۲)$$

را می‌توان با تغییر متغیر زیر تبدیل به فرم متغیرهای از هم جدا نمود:

eq25- $$u = ax + by + x \qquad (۵-۲)$$

زیرا با مشتق‌گیری نسبت به x از طرفین (۲-۴) داریم:

eq26- $$u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{۱}{b}(u' - a) \qquad (۶-۲)$$

با جایگذاری (۲-۵) و ۲-۶ در (۲-۴) داریم [۳]:

$$\frac{۱}{b}(u' - a) = f(u) \Rightarrow u' = bf(u) + a = h(u) \Rightarrow \frac{du}{h(u)} = dx$$

مثال ۲-۹ معادله دیفرانسیل $y' = \tan(x + y) - ۱$ را حل کنید [۳].

حل:

$$u = x + y \Rightarrow y' = u' - ۱ \Rightarrow u' - ۱ = \tan(u) - ۱ \Rightarrow \cot(u)du = dx$$
$$\int \cot(u)du = \int dx \Rightarrow \ln|\sin u| = x + c_۱ \Rightarrow \sin u = ce^x \Rightarrow y + x = \sin^{-۱} ce^x$$

مثال ۲-۱۰ معادله دیفرانسیل $y' = ۱ + \frac{۱}{x - y}$ را حل کنید [۳].

حل:

$$u = x - y \Rightarrow y' = ۱ - u' \Rightarrow ۱ - u' = ۱ + \frac{۱}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{۱}{u}$$
$$\Rightarrow udu = -dx \Rightarrow \int udu = -\int dx \Rightarrow \frac{۱}{۲}u^۲ = -x + c \Rightarrow (x-y)^۲ = -۲x + c$$

مثال ۲-۱۱ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = (x+y)^۲$ را بیابید [۲].

حل: با توجه به نکته ۲-۲-۲ خواهیم داشت:

$$u(x) = x + y \Rightarrow u' = ۱ + y' \xrightarrow[\text{خواهیم داشت:}]{\text{با جایگذاری در معادله}} u' - ۱ = u^۲ \Rightarrow \frac{du}{dx} = ۱ + u^۲ \Rightarrow$$
$$\int \frac{du}{۱+u^۲} = \int dx \Rightarrow \tan^{-۱} u = x + c \Rightarrow u = \tan(x+c)$$
$$\xrightarrow[\text{با توجه به اینکه}]{u=x+y} x + y = \tan(x+c)$$

۲-۳) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن

تعریف ۲-۱ تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوییم، اگر [۳]

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

مثال ۲-۱۲ نشان دهید تابع زیر همگن از درجه ۳ می‌باشد [۳]: $f(x,y) = x^۳ + ۵xy^۲ + ۳y^۳$

حل: به جای x، λx و به جای y، λy می‌گذاریم. داریم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^۳ x^۳ + ۵\lambda x \lambda^۲ y^۲ + ۳\lambda^۳ y^۳ = \lambda^۳(x^۳ + ۵xy^۲ + ۳y^۳) = \lambda^۳ f(x,y)$$

مثال ۲-۱۳ نشان دهید تابع زیر همگن از درجه ۱ می‌باشد [۳]: $f(x,y) = x \sin \frac{y}{x}$

حل: به جای x، λx و به جای y، λy می‌گذاریم. داریم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \sin \frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda x \sin \frac{y}{x} = \lambda f(x,y)$$

مثال ۲-۱۴ توابع $xe^{\frac{x}{y}}$، $x^۲ + xy$، $\tan \frac{x}{y}$ و $x + \sqrt{xy}$ به ترتیب همگن از درجه ۱، ۲، ۰ و ۱ می‌باشند و توابع xe^x، $x^۲ + y$، $xy + ۳$ و $(x^۲ + y^۳)\cos y$ همگن نیستند [۳].

تعریف ۲-۲ هر معادله دیفرانسیل به فرم $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = ۰$ را که در آن $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ هر دو همگن از درجه n باشند، یک معادله دیفرانسیل همگن نامیده می‌شود. برای حل این نوع معادلات، از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$y = vx, \quad dy = vdx + xdv$$

با این تغییر متغیر، معادله همگن، تبدیل به نوع متغیرهای از هم جدا می‌شود [۳].

مثال ۲-۱۵ معادله دیفرانسیل $۲xydy + (x^۲ - y^۲)dx = ۰$ را حل کنید [۳].

حل: معادله همگن می‌باشد:

$$y = vx, \quad dy = vdx + xdv \Rightarrow ۲xvx(vdx + xdv) + (x^۲ - v^۲x^۲)dx = ۰$$

طرفین معادله را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$(v^۲ + ۱)dx + ۲vxdv = ۰$$

معادله تبدیل به نوع متغیرهای از هم جدا می‌شود:

$$\frac{dx}{x} + \frac{۲v}{۱+v^۲}dv = ۰ \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{۲v}{۱+v^۲}dv = \int ۰ \Rightarrow \ln x + \ln\left(۱+v^۲\right) = \ln c \Rightarrow$$
$$x(۱+v^۲) = c \Rightarrow x(۱ + \frac{y^۲}{x^۲}) = c \Rightarrow y^۲ + x^۲ = cx$$

مثال ۲-۱۶ معادله دیفرانسیل $x(y-x)y' = y^۲$ را حل کنید [۳].

حل: ابتدا معادله را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$y^۲dx = x(y-x)dy$$

معادله از نوع همگن می‌باشد:

$$v^۲x^۲dx = x(vx - x)(vdx + xdv)$$

سپس طرفین را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$vdx = x(v-۱)dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{v-۱}{v}dv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{v-۱}{v}dv \Rightarrow \ln x = v - \ln v + \ln c$$
$$\Rightarrow \ln \frac{vx}{c} = v \Rightarrow vx = ce^v \Rightarrow y = ce^{\frac{y}{x}}$$

مثال ۲-۱۷ معادله دیفرانسیل $x(y-x)y' = y^{۲}$ را حل کنید [۳].

حل: معادله همگن است، پس

$$x^{۳}(۱+v^{۳})dx + ۳x^{۳}v^{۲}(vdx+xdv) = ۰$$

طرفین را بر $x^{۳}$ تقسیم می‌کنیم

$$(۱+v^{۳})dx + ۳v^{۳}dx + ۳xv^{۲}dv = ۰ \Rightarrow (۱+۴v^{۳})dx + ۳xv^{۲}dv = ۰ \Rightarrow$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{۳v^{۲}}{۱+۴v^{۳}}dv = ۰ \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{۳v^{۲}}{۱+۴v^{۳}}dv = ۰ \Rightarrow \ln x + \frac{۱}{۴}\ln\left(۱+۴v^{۳}\right) = \ln c_{۱}$$
$$\Rightarrow x^{۴}(۱+۴v^{۳}) = c \Rightarrow x^{۴} + ۴xy^{۳} = c$$

مثال ۲-۱۸ معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$ را حل کنید [۳].

حل: معادله را به فرم زیر می‌نویسیم

$$(x+\sqrt{xy})dy - ydx = ۰$$

معادله همگن می‌باشد.

$$(x+\sqrt{x^{۲}v})(vdx+xdv) - vxdx = ۰$$

طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم

$$(۱+\sqrt{v})(vdx+xdv) - vdx = ۰ \Rightarrow v\sqrt{v}dx + x(۱+\sqrt{v})dv = ۰ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{۱+\sqrt{v}}{v\sqrt{v}} = ۰ \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{۱+\sqrt{v}}{v\sqrt{v}} = c \Rightarrow \ln x - ۲v^{-\frac{۱}{۲}} + \ln v = c$$
$$\Rightarrow \ln vx = c + ۲v^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \ln y = c + ۲\sqrt{\frac{x}{y}}$$

مثال ۲-۱۹ معادله دیفرانسیل $\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}dx - (\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x})dy = ۰$ را حل کنید [۳].

حل: معادله همگن می‌باشد:

$$v\cos v dx - (\frac{۱}{v}\sin v + \cos v)(vdx+xdv) = ۰ \Rightarrow$$
$$-\sin v dx - x(\frac{۱}{v}\sin v + \cos v)dv = ۰ \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dv}{v} + \cot v dv = ۰ \Rightarrow$$
$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{v} + \int \cot v dv = ۰ \Rightarrow \ln x + \ln v + \ln|\sin v| = \ln c \Rightarrow xv\sin v = c$$
$$\Rightarrow y\sin\frac{y}{x} = c$$

مثال ۲-۲۰ معادله دیفرانسیل $y' - \frac{y}{x} + \csc\frac{y}{x} = ۰, \quad y(۱) = ۰$ را حل کنید [۳].

حل: معادله را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$dy + (-\frac{y}{x} + \csc\frac{y}{x})dx = ۰$$

معادله از نوع همگن می‌باشد:

$$vdx + xdv + (-v + \csc v)dx = ۰ \Rightarrow xdv + \csc v dx = ۰ \Rightarrow \frac{dx}{x} + \sin v dv = ۰ \Rightarrow$$
$$\int \frac{dx}{x} + \int \sin v dv = ۰ \Rightarrow \ln x - \cos v = c \Rightarrow \ln x - \cos\frac{y}{x} = c \Rightarrow \ln ۱ - \cos ۰ = c$$
$$\Rightarrow c = -۱ \Rightarrow \ln x = \cos\frac{y}{x} - ۱$$

نکته ۲-۳-۱ معادلات به فرم

$$y' = f(\frac{ax + by}{cx + ey})$$

همگن می‌باشند و با تغییر متغیر

$$y = vx, \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

تبدیل به نوع متغیرهای از هم جدا می‌شوند. زیرا با جایگذاری داریم:

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(\frac{a + bv}{c + ev}) \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = f(\frac{a + bv}{c + ev}) - v = F(v)$$

یا $\frac{dv}{F(v)} = \frac{dx}{x}$ که از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد. توجه کنید که y' تابعی از یک کسر می‌باشد که صورت و مخرج آن دو خط هستند که از مبدا مختصات عبور می‌کنند.

مثال ۲-۲۱ معادله دیفرانسیل $y' = \frac{y - x}{y + x}$ را حل کنید [۳].

حل: معادله را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$(y + x)dy = (y - x)dx$$

معادله همگن می‌باشد:

$$(vx + x)(vdx + xdv) = (vx - x)dx$$

طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم:

$$v^{۲}dx + xvdv + xdv = -dx \Rightarrow (v^{۲}+۱)dx + x(v+۱)dv = ۰ \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{v+۱}{v^{۲}+۱}dv = ۰$$
$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{v^{۲}+۱}dv + \int \frac{۱}{v^{۲}+۱}dv = c_{۱} \Rightarrow \ln x + \frac{۱}{۲}\ln\Big(v^{۲}+۱\Big) + \tan^{-۱}(v) = c_{۱}$$
$$\Rightarrow \ln\Big(x^{۲}(۱+v^{۲})\Big) + ۲\tan^{-۱}\Big(\frac{y}{x}\Big) = c, \quad c = ۲c_{۱} \Rightarrow$$
$$\ln\Big(x^{۲}+y^{۲}\Big) + ۲\tan^{-۱}\Big(\frac{y}{x}\Big) = c$$

نکته ۲-۳-۲ معادلات به فرم

$$y' = f(\frac{ax+by+c}{ex+hy+d})$$

همگن نمی‌باشند. ولی قابل تبدیل به همگن هستند. در این معادله دو خط صورت و مخرج از مبدا نمی‌گذرند (c و d با هم صفر نیستند). پس کافی است که مبدا مختصات را به محل تلاقی دو خط انتقال دهیم؛ البته اگر دو خط موازی نباشند.

روش حل: ابتدا $ah - be$ را حساب می‌کنیم، اگر مخالف صفر باشد، دو خط یگدیگر را قطع می‌کنند. مختصات نقطه تلاقی را از حل دستگاه

$$\begin{cases} ax+by+c = ۰ \\ ex+hy+d = ۰ \end{cases}$$

پیدا می‌کنیم. فرض کنید نقطه تلاقی $(x_۰, y_۰)$ باشد، سپس تغییر متغیر می‌دهیم:

$$x = X + x_۰$$
$$y = Y + y_۰$$

می‌دهیم. معادله به فرم

$$\frac{dY}{dX} = f(\frac{aX+bY}{eX+hY})$$

در می‌آید که همگن است.

مثال ۲-۲۲ معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x+y+۲}{x-y-۴}$ را حل کنید [۳].

ابتدا مقدار $ah - be$ را حساب می‌کنیم $ah - be = -۱ - ۱ \neq ۰$ یعنی دو خط موازی نیستند. از حل دستگاه زیر مختصات نقطه تلاقی دو خط را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x+y+۲ = ۰ \\ x-y-۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow x_۰ = ۱, y_۰ = -۳$$

با جایگذاری

$$x = X + ۱, \quad dx = dX$$

$$y = Y - ۳, \quad dy = dY$$

در معادله داریم:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

که همگن می‌باشد و قرار می‌دهیم:

$$Y = vX, dY = vdX + Xdv \Rightarrow (X-Y)dY = (X+Y)dX \Rightarrow$$

$$X(۱-v)(vdX + Xdv) = X(۱+v)dX$$

طرفین را بر X تقسیم می‌کنیم:

$$(۱+v^۲)dX + X(v-۱)dv = ۰ \Rightarrow \frac{dX}{X} + \frac{v-۱}{۱+v^۲}dv = ۰ \Rightarrow \int \frac{dX}{X} + \int \frac{v-۱}{۱+v^۲}dv = c$$

$$\Rightarrow \ln X + \frac{۱}{۲}\ln\left(۱+v^۲\right) - \tan^{-۱}(v) = c \Rightarrow$$

$$\ln X + \frac{۱}{۲}\ln\left(۱+\frac{Y^۲}{X^۲}\right) - \tan^{-۱}\left(\frac{Y}{X}\right) = c \Rightarrow$$

$$\ln(x-۱) + \frac{۱}{۲}\ln\left(۱+\frac{(y+۳)^۲}{(x-۱)^۲}\right) - \tan^{-۱}\left(\frac{y+۳}{x-۱}\right) = c$$

نکته ۲-۳-۳ اگر دو خط موازی باشند، ($ah - be = ۰$)، با استفاده از تغییر متغیر

$$u = ax + by$$

یا

$$u = ex + hy$$

معادله تبدیل به نوع متغیرهای از هم جدا می‌شود. زیرا $u = ax + by$ از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{b}(\frac{du}{dx} - a)$$

با جایگذاری داریم:

$$\frac{۱}{b}(\frac{du}{dx} - a) = f(\frac{u+c}{ku+d}) \Rightarrow \frac{du}{dx} = bf(\frac{u+c}{ku+d}) + a = H(u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{H(u)} = dx$$

مثال ۲-۲۳ معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x+y}{۱-x-y}$ را حل کنید [۳].

حل: دو خط موازی هستند.

$$u = x + y, \quad u' = ۱ + y', \quad y' = u' - ۱$$
$$\Rightarrow u' = \frac{u}{۱-u} + ۱ = \frac{۱}{۱-u} \Rightarrow (۱-u)du = dx$$
$$u - \frac{۱}{۲}u^۲ = x + c \Rightarrow x + y - \frac{۱}{۲}(x+y)^۲ = x + c \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}(x+y)^۲ + c$$

مثال ۲-۲۴ معادله دیفرانسیل $(x - ۲\sin y + ۳)dx + (۲x - ۴\sin y - ۳)\cos y dy = ۰$ را حل کنید [۳].

حل: فرض می‌کنیم: $\sin y = z$. از طرفین دیفرانسیل می‌گیریم: $\cos y dy = dz$ در معادله جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$$(x - ۲z + ۳)dx + (۲x - ۴z - ۳)dz = ۰ \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{x - ۲z + ۳}{۲x - ۴z - ۳}$$

با استفاده از تغییر متغیر $u = x - ۲z$ داریم:

$$\frac{du}{dx} = ۱ - ۲\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{۱}{۲}(۱ - \frac{du}{dx})$$

به جای $x - ۲z$ و $\frac{dz}{dx}$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}(۱ - \frac{du}{dx}) = -\frac{u + ۳}{۲u - ۳} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{۴u + ۳}{۲u - ۳} \Rightarrow \frac{۲u - ۳}{۴u + ۳}du = dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{۲u - ۳}{۴u + ۳}du = \int dx \Rightarrow x = \frac{u}{۲} - \frac{۹}{۸}\ln|۴x - ۸z + ۳| + c$$
$$\Rightarrow ۸\sin y - ۴x + ۹\ln|۴x - ۸\sin y + ۳| = c$$

نکته ۲-۳-۴ بعضی از معادلات دیفرانسیل ممکن است با تغییر متغیر

$$y = t^\alpha, \quad dy = \alpha t^{\alpha - ۱}dt$$

به معادله همگن تبدیل شوند.

مثال ۲-۲۵ معادله دیفرانسیل $(y^۴ - ۳x^۲)dy + xydx = ۰$ را حل کنید [۳].

حل: $y = t^\alpha \Rightarrow dy = \alpha t^{\alpha - ۱}dt$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$(t^{۴\alpha} - ۳x^۲)(\alpha t^{\alpha - ۱})dt + xt^\alpha dx = ۰$$
$$\alpha(t^{۵\alpha - ۱} - ۳x^۲ t^{\alpha - ۱})dt + xt^\alpha dx = ۰$$

برای آنکه معادله بالا همگن باشد، باید ضرایب dt و dx هردو همگن با درجه همگنی برابر باشند. پس قرار می‌دهیم:

$$۵\alpha - ۱ = ۲ + \alpha - ۱ \Rightarrow ۴\alpha = ۲ \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۲}$$

به ازای $\alpha = \frac{۱}{۲}$، ضریب dt، همگن از درجه $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد. حال باید ضریب dx به ازای همین مقدار α، همگن از درجه $\frac{۳}{۲}$ باشد. درجه ضریب dx، در این مثال $۱ + \alpha$ است که به ازای $\alpha = \frac{۱}{۲}$، مساوی $\frac{۳}{۲}$ می‌شود. بنابراین، معادله با تغییر متغیر $y = t^{\frac{۱}{۲}}$ قابل تبدیل به معادله همگن است. داریم:

$$\frac{۱}{۲}(t^{\frac{۳}{۲}} - ۳x^۲t^{-\frac{۱}{۲}})dt + xt^{\frac{۱}{۲}}dx = ۰$$

طرفین را در $t^{\frac{۱}{۲}}$ ضرب می‌کنیم:

$$(t^۲ - ۳x^۲)dt + ۲xtdx = ۰$$

معادله بالا همگن است، قرار می‌دهیم: $t = vx, \quad dt = vdx + xdv$

$$x^۲(v^۲ - ۳)(vdx + xdv) + ۲x^۲vdx = ۰$$

طرفین را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$(v^۳ - v)dx + x(v^۲ - ۳)dv = ۰ \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{v^۲ - ۳}{v^۳ - v}dv = ۰$$
$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{v^۲ - ۳}{v^۳ - v}dv = c_۱$$

برای محاسبه انتگرال دوم ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{v^۲ - ۳}{v(v^۲ - ۱)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v - ۱}\frac{C}{v + ۱} \Rightarrow$$
$$v^۲ - ۳ = A(v - ۱)(v + ۱) + Bv(v + ۱) + C(v - ۱)v$$

حال داریم:

$$v = ۰ \Rightarrow A = ۳, \quad v = ۱ \Rightarrow B = -۱, \quad v = -۱ \Rightarrow C = -۱$$

مقادیر را جایگزین می‌کنیم و انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\int \frac{dx}{x} + ۳\int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{v-۱} - \int \frac{dv}{v+۱} = c_۱ \Rightarrow$$
$$\ln(x) + ۳\ln(v) - \ln(v-۱) - \ln(v+۱) = \ln(c) \Rightarrow \frac{xv^۳}{v^۲-۱} = c$$
$$\frac{x\frac{t^۳}{x^۳}}{\frac{t^۲}{x^۲}-۱} = c \Rightarrow \frac{t^۳}{t^۲-x^۲} = c$$

به جای t، $y^۲$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{y^۶}{y^۴-x^۲} = c$$

۲-۴) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی

تعریف ۲-۳ اگر یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را بتوان به فرم

$$A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y + C(x) = ۰$$

نوشت، آن را خطی گوییم. در فاصله‌ای که $A(x) \neq ۰$ باشد، می‌توانیم طرفین را بر $A(x)$ تقسیم کنیم:

eq27-
$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (۲-۷)$$

اگر $Q(x) = ۰$ باشد، معادله را همگن و در غیر این صورت آن را ناهمگن نامند.

در زیر به بررسی روشی جهت پیدا کردن فرمولی برای جواب عمومی معادله بالا می‌پردازیم. فرض کنید $Q(x)$ و $P(x)$ هر دو در فاصله I پیوسته باشند. جواب عمومی را نیز در این فاصله پیدا می‌کنیم. روش اول: اگر معادله (۲-۷) همگن باشد:

eq28-
$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \qquad (۲-۸)$$

معادله (۲-۸) از نوع متغیرهای از هم جدا می‌باشد. با انتگرال‌گیری از طرفین (۲-۸) داریم:

$$\ln y = -\int P(x)dx + c_۱ \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

اگر معادله (۲-۷) ناهمگن باشد، ابتدا آن را به فرم زیر می‌نویسیم:

eq29-

$$(yP(x) - Q(x))dx + dy = ۰ \qquad (۲-۹)$$

معادله (۲-۹) در حالت کلی از نوع متغیرهای از هم جدا و همگن نیست. لذا شرط

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی در کلی‌ترین حالت به فرم زیر نوشته می‌شود [۲]:

eq210-

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (۲-۱۰)$$

می‌توان نشان داد، جوای عمومی این معادله دیفرانسیل از رابطه زیر قابل حصول است [۲]:

eq211-

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right\} \qquad (۲-۱۱)$$

مثال ۲-۲۶ معادله دیفرانسیل $y' + ۲y = e^x$ را حل کنید [۳].

حل: با مقایسه معادله بالا با معادله (۲-۱۰) مشاهده می‌شود که این معادله از نوع خطی مرتبه اول است و داریم:

$$P(x) = ۲, \quad Q(x) = e^x$$

پس داریم:

$$y = e^{-\int ۲dx}\left[\int e^x e^{\int ۲dx}dx + c\right] \Rightarrow y = e^{-۲x}\left[\int e^{۳x}dx + c\right] \Rightarrow$$
$$y = e^{-۲x}(\frac{۱}{۳}e^{۳x} + c) = \frac{۱}{۳}e^x + ce^{-۲x}$$

مثال ۲-۲۷ جواب عمومی معادله دیفرانسیل روبه‌رو را بیابید [۲]. $y' + y\tan x = \cos^۳(x)$

حل: با مقایسه معادله بالا با معادله (۲-۱۰) مشاهده می‌شود که این معادله از نوع خطی مرتبه اول است و داریم:

$$P(x) = \tan x, \quad Q(x) = \cos^۳(x)$$

پس داریم:

$$y = e^{-\int \tan x dx}\left[\int \cos^۳(x)e^{\int \tan x dx}dx + c\right] \Rightarrow$$
$$y = e^{\ln(\cos x)}\left[\int \cos^۳(x)e^{-\ln(\cos x)dx}dx + c\right] \Rightarrow$$
$$y = \cos x\left[\int \cos^۲(x)dx + c\right] \Rightarrow y = \cos x\left[\int \frac{۱ + \cos(۲x)}{۲}dx + c\right] \Rightarrow$$
$$y = \cos x\left[\frac{۱}{۲}\left(x + \frac{۱}{۲}\sin ۲x\right) + c\right] \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x\cos x + \frac{۱}{۴}\sin ۲x\cos x + c\cos x$$

مثال ۲-۲۸ در معادله دیفرانسیل همراه با شرط کمکی داده شده زیر حاصل $y(۱)$ را بیابید [۲].

$$\begin{cases} y' + ۲y = x^۲ + x \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

با توجه به اینکه معادله از نوع خطی مرتبه اول است، لذا خواهیم داشت:

$$P(x) = ۲, \quad Q(x) = x^۲ + x$$

$$y(x) = e^{-\int ۲dx}\Big[\int (x^۲ + x)e^{\int ۲dx} + c\Big] \Rightarrow y(x) = e^{-۲x}\Big[\int (x^۲ + x)e^{۲x}dx + c\Big]$$

برای محاسبه انتگرال فوق از روش جز به جز خواهیم داشت:

مشتق		انتگرال
$x^۲ + x$	$+$	$e^۲x$
$۲x + ۱$	$-$	$\frac{۱}{۲}e^{۲x}$
۲	$+$	$\frac{۱}{۴}e^{۲x}$
۰		$\frac{۱}{۸}e^{۲x}$

$$\int (x^۲ + x)e^{۲x}dx = \frac{۱}{۲}(x^۲ + x)e^{۲x} - \frac{۱}{۴}(۲x + ۱)e^{۲x} + \frac{۱}{۴}e^{۲x}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-۲x}\Big[\frac{۱}{۲}(x^۲ + x)e^{۲x} - \frac{۱}{۴}(۲x + ۱)e^{۲x} + \frac{۱}{۴}e^{۲x} + c\Big]$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{x^۲ + x}{۲} - \frac{۲x + ۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + ce^{-۲x}$$

حال با اعمال $y(۰) = ۱$ داریم:

$$y(۰) = ۱ \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow y(x) = \frac{x^۲}{۲} + e^{-۲x} \Rightarrow y(۱) = \frac{۱}{۲} + e^{-۲}$$

مثال ۲-۲۹ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + ۱ = xe^{-y}$ را بیابید [۲].

ابتدا دو طرف معادله را در e^y ضرب می‌کنیم و سپس با تغییر متغیر $u = e^y, u' = y'e^y$، معادله فوق به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود:

$$y' + ۱ = xe^{-y} \Rightarrow y'e^y + e^y = x \Rightarrow u' + u = x \Rightarrow u(x) = e^{-\int dx}\big[xe^{dx}dx + c\big]$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{-x}\Big[\int xe^x dx + c\Big] \Rightarrow u(x) = e^{-x}\big[xe^x - e^x + c\big]$$

$$\Rightarrow u(x) = x - ۱ + ce^{-x} \Rightarrow e^y = (x - ۱ + ce^{-x}) \Rightarrow y = \ln\big(x - ۱ + ce^{-x}\big)$$

برای حل $\int xe^x dx$ داریم:

مشتق		انتگرال
x	$+$	e^x
۱	$-$	e^x
۰		e^x

$$\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - e^x$$

۲-۵) معادله دیفرانسیل مرتبه اول از نوع برنولی

یک معادله دیفرانسیل برنولی به صورت زیر بیان می‌شود [۲]:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

در این معادله $n \in R$ و صفر یا یک نیست، زیرا اگر صفر یا یک باشد، در این صورت، معادله خطی خواهد بود [۳].

برای حل این معادله طرفین را بر y^n تقسیم می‌کنیم و تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$u(x) = y^{1-n} \Rightarrow u'(x) = (1-n)y^{-n}y'$$

آنگاه معادله تبدیل به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌گردد.

مثال ۲-۳۰ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید [۳]. $\frac{dy}{dx} - y = xy^2$

حل: بدیهی است معادله فوق به ازای $n = 2$ از نوع برنولی است. لذا طرفین را بر y^2 تقسیم می‌کنیم:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1} = x$$

تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$u = y^{1-2} = y^{-1}, \quad \frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} + u = -x \Rightarrow P(x) = 1, Q(x) = -x$$

$$\Rightarrow g(x) = \int P(x)dx = \int 1dx = x \Rightarrow$$

$$u = e^{-g(x)}\Big[\int Q(x)e^{g(x)}dx + c\Big] = e^{-x}\Big[\int -xe^x dx + c\Big] = e^{-x}\big[(1-x)e^x + c\big]$$

$$\Rightarrow u = 1 - x + ce^{-x} \Rightarrow \frac{1}{y} = 1 - x + ce^{-x}$$

نکته ۲-۵-۱ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌تواند نسبت به x به عنوان تابعی از y به فرم معادله برنولی و به صورت کلی زیر باشد:

$$\frac{dx}{dy} + xf(y) = x^n g(y)$$

جواب عمومی آن همان جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول از نوع برنولی است، با این تفاوت که جای x و y عوض می‌شود [۲].

مثال ۲-۳۱ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید [۳]. $y' = \frac{۳x^۲}{x^۳ + y + ۱}$

حل:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^۳ + y + ۱}{۳x^۲} = \frac{x}{۳} + \frac{۱}{۳}(۱ + y)x^{-۲}$$

معادله برنولی می‌باشد. طرفین را بر $x^{-۲}$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^۲\frac{dx}{dy} - \frac{۱}{۳}x^۳ = \frac{۱}{۳}(y - ۱)$$

تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$u = x^۳, \frac{du}{dy} = ۳x^۲\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{du}{dy} - u = y + ۱ \Rightarrow P(y) = -۱, Q(y) = y + ۱$$
$$g(y) = \int P(y)dy = \int -۱dy = -y \Rightarrow u = e^{-g(x)}\big[\int Q(x)e^{g(x)}dx + c\big]$$
$$= e^y\big[\int (y + ۱)e^{-y}dy + c\big] = e^y\big[-ye^{-y} - ۲e^{-y} + c\big] = -y + ce^y - ۲$$
$$x^۳ = -y + ce^y - ۲$$

۲-۶) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع کامل

معادله دیفرانسیل مقابل را در نظر بگیرید: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = ۰$

چنانچه $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ برقرار باشد، معادله مذکور از نوع کامل گفته می‌شود و می‌توان نشان داد، جواب عمومی آن $u(x, y) = c$ می‌باشد، که در آن:

eq212-

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \qquad (۱۲-۲)$$

دو روش برای حل این‌گونه معادلات وجود دارد که روش اول پیشنهاد می‌شود:

روش اول [۲] در این روش پس از بررسی کامل بودن معادله، از دو معادله در فرمول (۲-۱۲) انتگرال می‌گیریم و دو جواب برای $u(x,y)$ بدست می‌آید. تمام جملات غیر مشترک این دو جواب، جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول کامل خواهد بود.

روش دوم [۳] در این روش پس از بررسی کامل بودن معادله، از یکی از معادلات در فرمول (۲-۱۲) انتگرال گرفته می‌شود و سپس از جواب بدست آمده نسبت به متغیر مستقل دیگر مشتق گرفته خواهد شد. با مقایسه جواب بدست آمده از مشتق با $P(x,y)$ یا $Q(x,y)$ جواب اصلی معادله دیفرانسیل بدست خواهد آمد.

مثال ۲-۳۲ جوابی از معادله دیفرانسیل $(۲x^۳ + ۳xy^۲)dx + (۲y^۳ + ۳x^۲y)dy = ۰$ که از مبدا مختصات می‌گذرد چیست [۲]؟

حل: شکل سوال ما را به یاد معادلات دیفرانسیل کامل و غیرکامل می‌اندازد. حال ابتدا شرط کامل بودن را بررسی کنیم:

$$\begin{cases} P(x,y) = ۲x^۳ + ۳xy^۲ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = ۶xy \\ Q(x,y) = ۲y^۳ + ۳x^۲y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = ۶xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{معادله از نوع کامل است.}$$

لذا خواهیم داشت (روش اول):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = ۲x^۳ + ۳xy^۲ \Rightarrow u(x,y) = \frac{۱}{۲}x^۴ + \frac{۳}{۲}x^۲y^۲ + A(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = ۲y^۳ + ۳x^۲y \Rightarrow u(x,y) = \frac{۱}{۲}y^۴ + \frac{۳}{۲}x^۲y^۲ + B(x) \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع جواب‌ها}}$$

$$u(x,y) = \frac{x^۴}{۲} + \frac{۳}{۲}x^۲y^۲ + \frac{y^۴}{۲} = c$$

در روش دوم پس از بررسی کامل بودن معادله، یکی از معادلات را حل می‌کنیم، به عنوان مثال معادله $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ را حل می‌کنیم. با توجه به اینکه در روش اول این کار را کرده‌ایم جواب آن به صورت $u(x,y) = \frac{۱}{۲}x^۴ + \frac{۳}{۲}x^۲y^۲ + f(y)$ خواهد بود. حال از این جواب نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ۰ + ۳x^۲y + f'(y) = Q(x,y) \Rightarrow f'(y) = ۲y^۳ \Rightarrow f(y) = \frac{y^۴}{۲} \Rightarrow$$
$$u(x,y) = \frac{۱}{۲}x^۴ + \frac{۳}{۲}x^۲y^۲ + \frac{y^۴}{۲} = c$$

حال به ادامه سوال می‌پردازیم. با توجه به اینکه جواب معادله باید از مبدا بگذرد، داریم:

$$\frac{۱}{۲}x^۴ + \frac{۳}{۲}x^۲y^۲ + \frac{y^۴}{۲} = c \xrightarrow[x=۰,y=۰]{\text{شرط گذشتن از مبدا}} c = ۰$$

پس جواب عمومی چنین است:

$$x^۴ + ۳x^۲y^۲ + y^۴ = ۰ \Rightarrow (x^۲ + y^۲)^۲ + x^۲y^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲y^۲ = ۰ \\ (x^۲ + y^۲)^۲ \end{cases} \Rightarrow x = y = ۰$$

پس جواب یک نقطه است.

مثال ۲-۳۳ مقادیر a و b چگونه باشد تا معادله دیفرانسیل $(x^۲ + \frac{۱}{y} + by^۲)dx + axy^{-۲}dy = ۰$ کامل باشد [۲].

حل: شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} P(x,y) = x^۲ + \frac{۱}{y} + by^۲ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{۱}{y^۲} + ۲by \\ Q(x,y) = axy^{-۲} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = ay^{-۲} \end{cases} \Rightarrow -\frac{۱}{y^۲} + ۲by = ay^{-۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۰ \end{cases}$$

۲-۷) بحث یافتن عامل انتگرال‌ساز

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = ۰$$

چنانچه $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد، معادله مذکور کامل نخواهد بود، اما ممکن است بتوان تابعی مانند $\mu(x,y)$ را بگونه‌ای یافت که با ضرب آن در این معادله دیفرانسیل، معادله به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل شود، یعنی:

$$\frac{\partial(P.\mu)}{\partial y} = \frac{\partial(Q.\mu)}{\partial x}$$

آنگاه می‌توان گفت: $\mu(x,y)$ یک عامل انتگرال‌ساز، برای معادله دیفرانسیل مورد نظر بوده است. برای یافتن عامل انتگرال‌ساز ممکن است یکی از دو بحث زیر مناسب باشد:

الف) برخی مواقع ساختار کلی عامل انتگرال‌ساز که در قالب کلی $\mu = x^\alpha y^\beta$ قابل بیان بوده، در فرض مساله و یا با استفاده از گزینه‌های داده شده مشخص می‌گردد. در این شرایط، می‌توان آن ساختار کلی را در معادله دیفرانسیل مورد نظر ضرب کرده و شرط کامل بودن معادله حاصل را بنویسیم، تا وضعیت عامل انتگرال‌ساز معلوم شود [۲].

ب) معادله دیفرانسیل $Pdx + Qdy = ۰$ را در نظر بگیرید و سه بحث زیر را به خاطر داشته باشید:

۱- اگر $\frac{۱}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = h(x)$ باشد آنگاه:

$$\mu(x) = e^{\int h(x)dx}$$

۲- اگر $\frac{۱}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = h(y)$ باشد آنگاه:

$$\mu(y) = e^{-\int h(y)dy}$$

۳- اگر $\frac{۱}{yQ - xP}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = h(xy)$ باشد آنگاه:

$$\mu(xy) = e^{\int h(xy)d(xy)}$$

نکته: اگر معادله دیفرانسیل دارای یک فاکتور انتگرال‌گیری باشد، آنگاه دارای بی‌نهایت فاکتور انتگرال است.

مثال ۲-۳۴ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل $ydx + (x\ln y + y^۶)dy = ۰$ پیدا کنید [۲].

حل:

$$\begin{cases} P(x,y) = y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = ۱ \\ Q(x,y) = (x\ln y + y^۶) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \ln y \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$
$$\Rightarrow h(y) = \frac{۱ - \ln y}{y} = \frac{۱}{y} - \frac{\ln y}{y}$$

پس می‌توان گفت:

$$\mu(y) = e^{-\int h(y)dy} = e^{\int\left(\frac{\ln y}{y} - \frac{۱}{y}\right)dy} = e^{-\ln y + \frac{(\ln y)^۲}{۲}} \Rightarrow \mu(y) = \frac{e^{\frac{(\ln y)^۲}{۲}}}{y}$$

یادآوری:

$$I = \int \frac{۲\ln y}{y} \xrightarrow[(\ln y)' = \frac{۱}{y}]{\text{بدیهی است}} I = ۲\frac{(\ln y)^۲}{۲} = (\ln y)^۲$$

مثال ۲-۳۵ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله $(۱ + x^۲)dy - (\tan^{-۱} x - y)dx = ۰$ پیدا کنید [۲].

حل:

$$\begin{cases} P(x,y) = y - \tan^{-1} x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \\ Q(x,y) = 1 + x^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = h(x) \Rightarrow h(x) = \frac{1-2x}{1+x^2}$$

$$\mu(x) = e^{\int h(x)dx} = e^{\int \frac{1-2x}{1+x^2}dx} = e^{\int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}\right)} = e^{\tan^{-1} x - \ln(1+x^2)}$$

$$\mu(x) = e^{\tan^{-1} x}.e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}$$

مثال ۲-۳۶ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله $(y + x^4y^2)dx + xdy = 0$ پیدا کنید [۳].

حل:

$$\begin{cases} P(x,y) = y + x^4y^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2x^4y \\ Q(x,y) = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{yQ - xP}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2x^4y}{xy - xy - x^5y^2} = -\frac{2}{xy}$$

با در نظر گرفتن $z = xy$ داریم:

$$\mu(z) = e^{-2\int \frac{dz}{z}} = e^{-2\ln z} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \mu(xy) = \frac{1}{x^2y^2}$$

مثال ۲-۳۷ معادله دیفرانسیل $y(2-3xy)dx - xdy = 0$ عامل انتگرال‌سازی به صورت $\mu(x,y) = x^\alpha y^\beta$ دارد. α و β را بیابید [۲].

حل: ابتدا عامل انتگرال‌ساز $\mu(x,y) = x^\alpha y^\beta$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم و سپس شرط کامل

بودن را برای یافتن α و β بررسی می‌کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$(۲y - ۳xy^۲)dx - xdy = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{در } \mu=x^\alpha y^\beta \text{ضرب می‌کنیم}} (۲x^\alpha y^{\beta+۱} - ۳x^{\alpha+۱}y^{\beta+۲})dx - x^{\alpha+۱}y^\beta dy = ۰$$

$$\Rightarrow \text{شرط کامل بودن} : \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} P(x,y) = ۲x^\alpha y^{\beta+۱} - ۳x^{\alpha+۱}y^{\beta+۲} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = ۲(\beta+۱)x^\alpha y^\beta - ۳(\beta+۲)x^{\alpha+۱}y^{\beta+۱} \\ Q(x,y) = -x^{\alpha+۱}y^\beta \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -(\alpha+۱)x^\alpha y^\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲(\beta+۱)x^\alpha y^\beta - ۳(\beta+۲)x^{\alpha+۱}y^{\beta+۱} = -(\alpha+۱)x^\alpha y^\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲(\beta+۱) = -(\alpha+۱) \\ -۳(\beta+۲) = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = -۲; \alpha = ۱$$

عامل انتگرال‌ساز : $\mu(x,y) = xy^{-۲}$

۲-۸) معادله دیفرانسیل مرتبه اول از درجه n

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول از درجه n به فرم زیر بیان می‌شود:

$$y'^n + P_۱(x,y)y'^{n-۱} + P_۲(x,y)y'^{n-۲} + \cdots + Q(x,y) = ۰$$

چنانچه بتوان این معادله دیفرانسیل را به فرم زیر و به صورت حاصل‌ضرب n عامل درجه اول خطی، برحسب y' تجزیه نمود، یعنی داشته باشیم:

$$(y' - L_۱(x,y))(y' - L_۲(x,y))\cdots = ۰$$

کافی است، تک تک عوامل فوق را مساوی صفر قرار داده و جواب‌های زیر را پیدا کنیم:

$$y' - L_۱(x,y) = ۰ \Rightarrow \alpha(x,y,c) = ۰$$

$$y' - L_۲(x,y) = ۰ \Rightarrow \beta(x,y,c) = ۰$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

و سپس می‌توان نشان داد، جواب عمومی معادله چنین است:

$$\alpha(x,y,c)\beta(x,y,c)\cdots = ۰$$

مثال ۲-۳۸ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'^۲ \ln x + (y^۲ + \ln x)y' + y^۲ = ۰$ را پیدا کنید [۲].

حل: به سادگی مشاهده می‌شود که معادله فوق دو ریشه دارد و دو ریشه عبارتند از:

$$y' = -۱, \quad y' = -\frac{y^۲}{\ln x}$$

یادآوری: حل معادله جبری درجه دو

$$ax^۲ + bx + c = ۰ \Rightarrow x_{۱,۲} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}, \quad \Delta = b^۲ - ۴ac$$

اگر $\Delta < ۰$ معادله جواب ندارد.

در صورتی که $\Delta = ۰$، معادله دو ریشه مضاعف $x_{۱,۲} = \frac{-b}{۲a}$ دارد. همچنین داریم:

$$x_۱ x_۲ = \frac{c}{a}, \quad x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a}$$

چند نکته:

۱- اگر $a + b + c = ۰$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و دیگری برابر $\frac{c}{a}$ است.

۲- اگر $a + c = b$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها -۱ و دیگری $\frac{-c}{a}$ است.

۳- اگر $a = c$ باشد، آنگاه معادله دارای دو جواب معکوس هم دارد.

۴- اگر $a = -c$ باشد، آنگاه معادله دارای دو جواب معکوس و قرینه دارد.

$$y' = -۱ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -۱ \Rightarrow dy = -dx \Rightarrow y = -x + c_۱$$
$$y' = -\frac{y^۲}{\ln x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^۲}{\ln x} \Rightarrow -\frac{dy}{y^۲} = \frac{dx}{\ln x} \Rightarrow \frac{۱}{y} = \int \frac{dx}{\ln x} + c_۲$$

پس جواب عمومی عبارت است از:

$$(y + x - c_۱)\left(\frac{۱}{y} - \int \frac{dx}{\ln x} - c_۲\right) = ۰$$

مثال ۲-۳۹ جواب عمومی معادله $y'^۲ - (۳y^۲ + \cos x)y' + ۳y^۲ \cos x = ۰$ را بیابید [۲].

حل: با تجزیه معادله به صورت $(y' - \cos x)(y' - ۳y^۲) = ۰$ داریم:

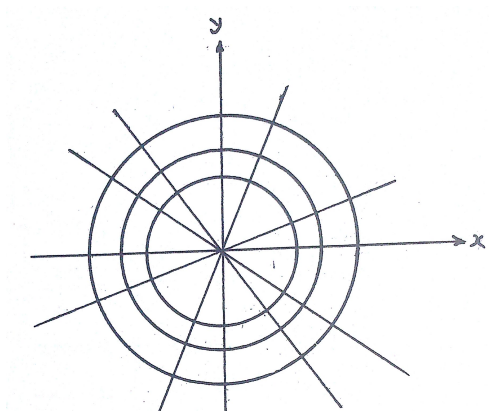
$$y' = \cos x \Rightarrow y = \sin x + k_۱$$
$$y' = ۳y^۲ \Rightarrow \frac{dy}{y^۲} = ۳dx \Rightarrow -\frac{۱}{y} = ۳x + k_۲$$

بنابراین جواب عمومی عبارت است از:

$$(y - \sin x - k_۱)\left(۳x + \frac{۱}{y} + k_۲\right) = ۰$$

۲-۹) مسیرهای قائم

دو دسته منحنی $x^۲ + y^۲ = c$ و $y = mx$ را بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنید که هر منحنی از یک دسته، بر کلیه منحنی‌های دسته دیگر عمود می‌باشد. هرگاه چنین ارتباطی بین دو دسته برقرار باشد، یک دسته را مسیرهای قائم دسته‌های دیگر می‌نامیم [۳].



شکل ۲-۱: دسته منحنی قائم

fig6

روش بدست آوردن مسیرهای قائم یک دسته منحنی به شرح زیر می‌باشد:

ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را پیدا می‌کنیم، سپس در این معادله بجای y'، $-\frac{۱}{y'}$ قرار می‌دهیم تا معادله دیفرانسیل مسیر قائم بدست آید (زیرا در هر نقطه روی مسیر اصلی، ضریب زاویه منحنی مسیر قائم، عکس و قرینه ضریب زاویه مسیر اصلی می‌باشد). آنگاه معادله دیفرانسیل مسیر قائم را حل می‌کنیم. دسته منحنی مسیر قائم بدست می‌آید [۳].

برای یافتن مسیرهای قائم دسته منحنی‌های $\phi(x, y, c) = ۰$ کافی است، از رابطه موجود نسبت به x مشتق گرفته و بین دو رابطه موجود پارامتر c را حذف می‌کنیم، تا بدین ترتیب معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی پیدا شود. سپس با تبدیل y' به $-\frac{۱}{y'}$ در معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم پیدا می‌شود که از حل آن، مسیرهای قایم مورد نظر بدست می‌آید [۲].

مثال ۲-۴۰ دسته منحنی‌های $(x^۳+۱)(y^۳+۱)=c$ مفروضند. مسیرهای قائم این دسته منحنی‌ها را بیابید [۲].

حل: معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی عبارتند از:

$$۳x^۲(y^۳+۱)+۳y^۲y'(x^۳+۱)=۰$$

معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم با تبدیل y' به $-\frac{۱}{y'}$ داریم:

$$۳x^۲(y^۳+۱)+۳y^۲(-\frac{۱}{y'})(x^۳+۱)=۰ \Rightarrow (۳x^۲)(y^۳+۱)=۳y^۲(x^۳+۱) \Rightarrow$$
$$\frac{y^۳+۱}{۳y^۲}dy=\frac{x^۳+۱}{۳x^۲}dx \Rightarrow \int\frac{y^۳+۱}{۳y^۲}dy=\int\frac{x^۳+۱}{۳x^۲}dx \Rightarrow$$
$$\frac{y^۲}{۲}-\frac{۱}{y}=\frac{x^۲}{۲}-\frac{۱}{x}+k$$

مثال ۲-۴۱ مسیرهای قائم دسته منحنی زیر را بدست آورید [۳]: $x^۲+y^۲=c$

حل: ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=c \\ ۲x+۲y'y=۰ \end{cases} \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$$

بجای y'، $-\frac{۱}{y'}$ قرار می‌دهیم؛ معادله دیفرانسیل مسیر قائم بدست می‌آید. $-\frac{۱}{y'}=-\frac{x}{y}$
حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$y'=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=\ln x+\ln k \Rightarrow y=kx$$