

بِسْمِ تَعَالَى



دوازدهمین تیم ایران در

المپیاد جهانی نجوم و اختر فیزیک

امتحان تحلیل داده

جدول ثوابت

ثابت گرانش	$G \approx 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$
جرم خورشید	$M_{\odot} \approx 1.99 \times 10^{30} kg$
قدر مطلق خورشید	$M \approx 5 mag$
عرض جغرافیایی پکن	$\varphi_{Beijing} \approx 40^{\circ} N$
واحد نجومی	$Au. \approx 1.5 \times 10^{11} m$
پارسک	$pc \approx 3.09 \times 10^{16} m$

توضیحاتی در مورد سوال:

این سوال شامل سه بخش اصلی است که به ترتیب به مباحث کروی، اخترفیزیک و مکانیک مربوط می‌شوند. سعی شده تا سوال نیاز به تئوری سنگینی نداشته باشد ولی در عوض کارهای تحلیلی چون برازش و رسم نمودار در این سوال مورد توجه قرار گرفته‌اند. زمان پیشنهادی برای حل این سوال 5 ساعت در نظر گرفته شده است که ممکن است برای افراد تازه کار کم باشد.

مصطفی بروووو... (محمد صدرا حیدری - نوید اکبری)

در سال 2018 به علت نابسامانی های ایجاد شده در فضای اقتصادی کشور و رشد ناگهانی و چشم گیر قیمت ارز، باشگاه دانش پژوهان جوان تصمیم می گیرد به علت هزینه های موجود به جای اعزام دو تیم پنج نفره، فقط "مصطفی" را به المپیاد جهانی نجوم و اخترفیزیک در پکن (چین) اعزام کند.

سوال تیمی آن سال به بررسی سیاره ای فراخورشیدی که به دور ستاره ای خورشیدگون در حال گردش است می پردازد و به دو بخش رصد و تحلیل داده تقسیم می شود. از آنجا که مصطفی در این مسابقات دست تنهاست، از شما انتظار می رود تا در حل این سوال به او کمک کنید.

در بخش اول به تیم ها مدت پنج ساعت مهلت داده می شود تا ستاره مورد نظر را بررسی کنند و اطلاعاتی که لازم دارند را با استفاده از امکانات موجود به دست آورند. مصطفی در این زمان قدر ظاهری ستاره را مورد مطالعه قرار میدهد و آن را برحسب زاویه ساعتی ستاره در جدول زیر یادداشت می کند.

#	z	m	H(min)
1	5	10.301	15.238
2	10	10.305	46.580
3	15	10.311	73.547
4	20	10.319	99.830
5	25	10.331	125.951
6	30	10.346	152.096
7	35	10.366	178.370
8	40	10.392	204.852
9	45	10.424	231.620
10	50	10.467	258.753

- الف میل این سیستم را محاسبه کنید. (خطا لازم نیست)
- ب با دانستن رابطه زیر بین قدر ظاهری و فاصله سمت الرئسی آن در هر لحظه، مقادیر k, m_0 را به همراه خطا محاسبه کنید.
- $$m = m_0 + k \sec z$$
- ج نمودار قدر ظاهری ستاره را بر حسب زمان رسم کنید.
- د فاصله این سیستم را به همراه خطا گزارش کنید.
- بعد از یک روز استراحت به دانش آموزان جدولی که حاصل بررسی چند ساله حرکت این سیاره حول ستاره مرکزی است داده می شود. (این جدول در انتهای سوال آمده است)
- در این جدول مختصات سیاره در هر لحظه به صورتی که مبدا آن ستاره باشد به همراه زمان رصد داده شده است. در قسمت های بعد، نیازی به محاسبه خطا نیست.
- ه نمودار حرکت سیاره حول ستاره را رسم کنید و نشان دهید این منحنی تقریباً دایره‌ای شکل است. سپس استدلال کنید که میل مداری این سیستم $i = 0^\circ$ نمی باشد. (محورها را هم واحد در نظر بگیرید).
- فرض کنید راستای دید ما عمود بر نیم قطر اقصر است.
- و با استفاده از داده های جدول، مقدار میل مداری (i) را محاسبه کنید.
- ز حال با داشتن میل مداری، X و Y واقعی را به دست آورید و در نموداری جدید رسم کنید.
- ح با داشتن مقدار X و Y واقعی، نیم قطر اطول و خروج از مرکز مدار سیاره را حساب کنید.
- ط زاویه آنومالی خروج از مرکزی را برای هر کدام از داده های جدول محاسبه و نمودار آنومالی خروج از مرکزی را بر حسب زمان رسم کنید.

#	θ°	$x'(\text{arcsec})$	$y'(\text{arcsec})$	time
1	0	0.00000	0.004628	2014.84
2	17	-0.00172	0.0045	2014.867
3	34	-0.00346	0.0041	2014.896
4	51	-0.00522	0.003383	2014.929
5	68	-0.00701	0.002265	2014.97
6	85	-0.00876	0.000613	2015.023
7	102	-0.01034	-0.00176	2015.098
8	119	-0.01142	-0.00506	2015.209
9	136	-0.01131	-0.00937	2015.38
10	153	-0.00903	-0.01418	2015.644
11	170	-0.00393	-0.01783	2016.011
12	187	0.002789	-0.01817	2016.435
13	204	0.008332	-0.01497	2016.818
14	221	0.011098	-0.01021	2017.1
15	238	0.011509	-0.00575	2017.286
16	255	0.010585	-0.00227	2017.406
17	272	0.009061	0.000253	2017.485
18	289	0.007322	0.002017	2017.542
19	306	0.005536	0.003218	2017.584
20	323	0.003766	0.003998	2017.618
21	340	0.002024	0.00445	2017.648
22	357	0.000303	0.004624	2017.675

روابط مورد نیاز

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum d_i^2 \quad \sigma^2 = \frac{n}{n-1} s^2$$

روابط برازش خط راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$\delta B^2 = \frac{B^2}{n-2} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right)$$

$$\delta A^2 = \delta B^2 (s_x^2 + \bar{x}^2)$$

$$y = Bx$$

$$d_i = y_i - Bx_i$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$\delta B^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}$$

جواب های نهایی برای چک کردن

میل سیستم	$\delta = 36^\circ$
فاصله از زمین	$d = 100 pc$
قدر ظاهری خارج از جو	$m_0 = 10 mag$
ضریب k	$k = 0.3$
میل مداری	$i = 36.87^\circ$
نیم قطر اطول	$a = 2 Au$
خروج از مرکز	$e = 0.6$

مقادیر واقعی X با مقادیر داده شده برابراند.

#	E°	#	E°	#	y_{real}	#	y_{real}
1	0	12	193.96	1	0.00801	12	-0.03145
2	8.5409	13	226.09	2	0.007788	13	-0.02591
3	17.37	14	253.62	3	0.007096	14	-0.01768
4	26.809	15	275.94	4	0.005855	15	-0.00996
5	37.249	16	293.86	5	0.00392	16	-0.00393
6	49.2	17	308.49	6	0.001062	17	0.000438
7	63.35	18	320.77	7	-0.00304	18	0.003491
8	80.611	19	331.43	8	-0.00876	19	0.005569
9	102.08	20	341.02	9	-0.01622	20	0.00692
10	128.67	21	349.93	10	-0.02454	21	0.007701
11	160.14	22	358.5	11	-0.03085	22	0.008003

پاسخنامه

الف) برای محاسبه میل ستاره، از مثلث pzx داریم:

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \varphi \cos \delta \cos H$$

با برآزش داده های موجود (Z بر حسب $\cos H$) داریم:

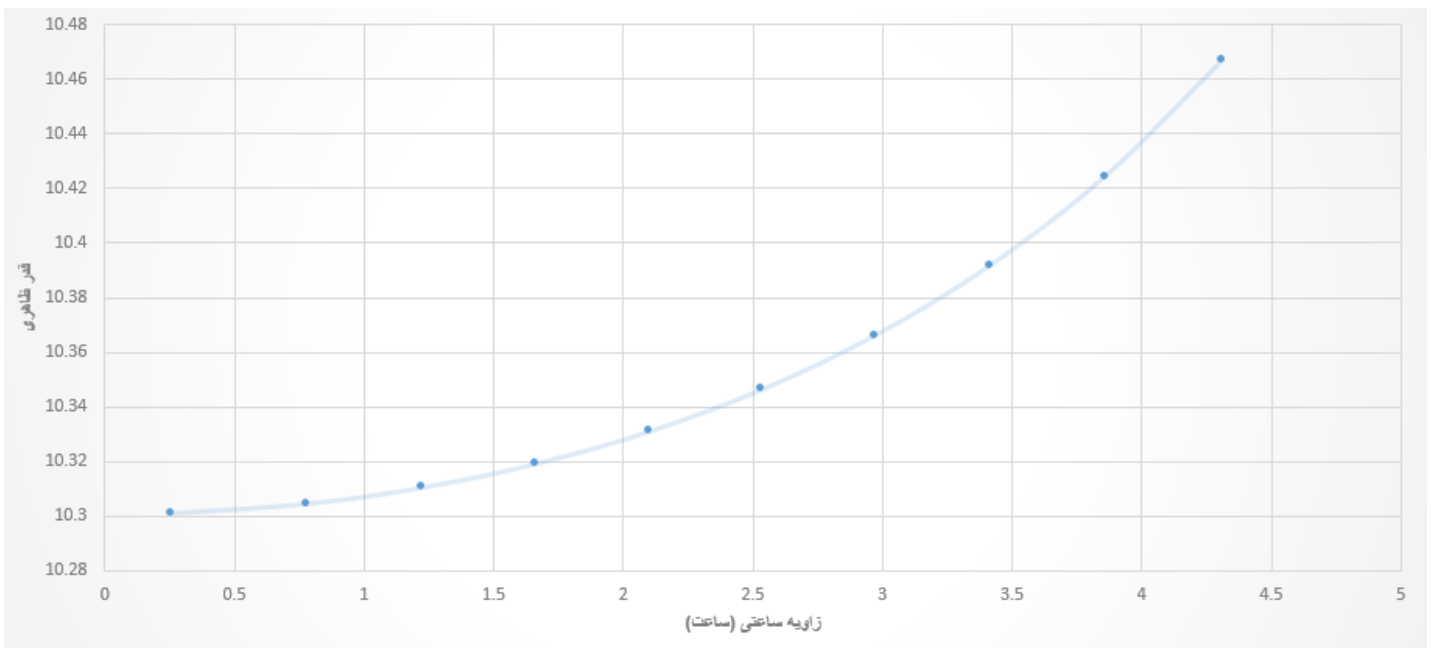
$$\delta = 36.00^\circ$$

ب) با برآزش داده ها داریم:

$$m_0 = 10.0000 \pm 0.0007$$

$$k = 0.30000 \pm 0.0006$$

ج)



(د) از مدول فاصله داریم:

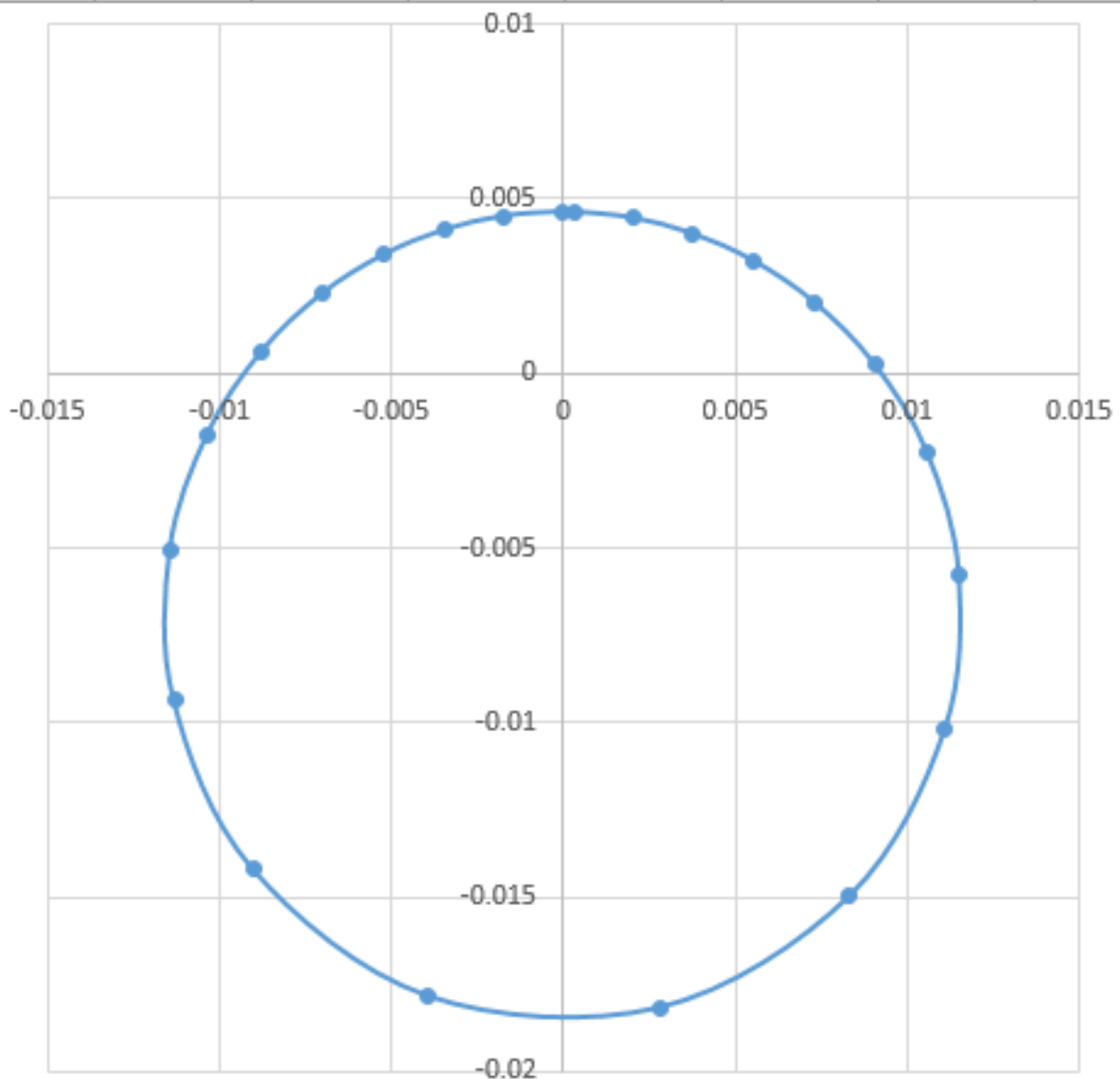
$$m - M = 5 \log d - 5 \stackrel{M=5}{\implies} m = 5 \log d \Rightarrow d = 10^{m/5}$$

از رابطه نشر خطا داریم:

$$\delta d^2 = \left(\frac{\partial d}{\partial m} \delta m \right)^2 = \left(\frac{1}{5} 10^{\frac{m}{5}} \times \ln 10 \times \delta m \right)^2$$

$$d = 100.00 \pm 0.03 \text{ pc}$$

(ه)



از آنجا که منحنی دایره ای شکل است ولی مبدا نمودار که همان ستاره باشد در مرکز دایره نیست، به این نتیجه می‌رسیم که مدار در واقع یک بیضی است که ما آن را کج مشاهده میکنیم. بنابراین سیستم دارای میل مداری می‌باشد.

و) از آنجا که در $\theta = 0$ داده ما بر روی محور Y قرار دارد، به این نتیجه می‌رسیم که محور X در راستای نیم قطر اقصر و محور Y تصویر شده نیم قطر اطول است. از آنجا که راستای ما عمود بر نیم محور اقصر است، نتیجه می‌گیریم که میل مداری در مقدار X تاثیری ندارد و فقط Y ها را تصویر می‌کند.

$$x' = -r \sin \theta$$

$$y' = r \cos \theta \cos i$$

با تقصیم دو رابطه به هم داریم:

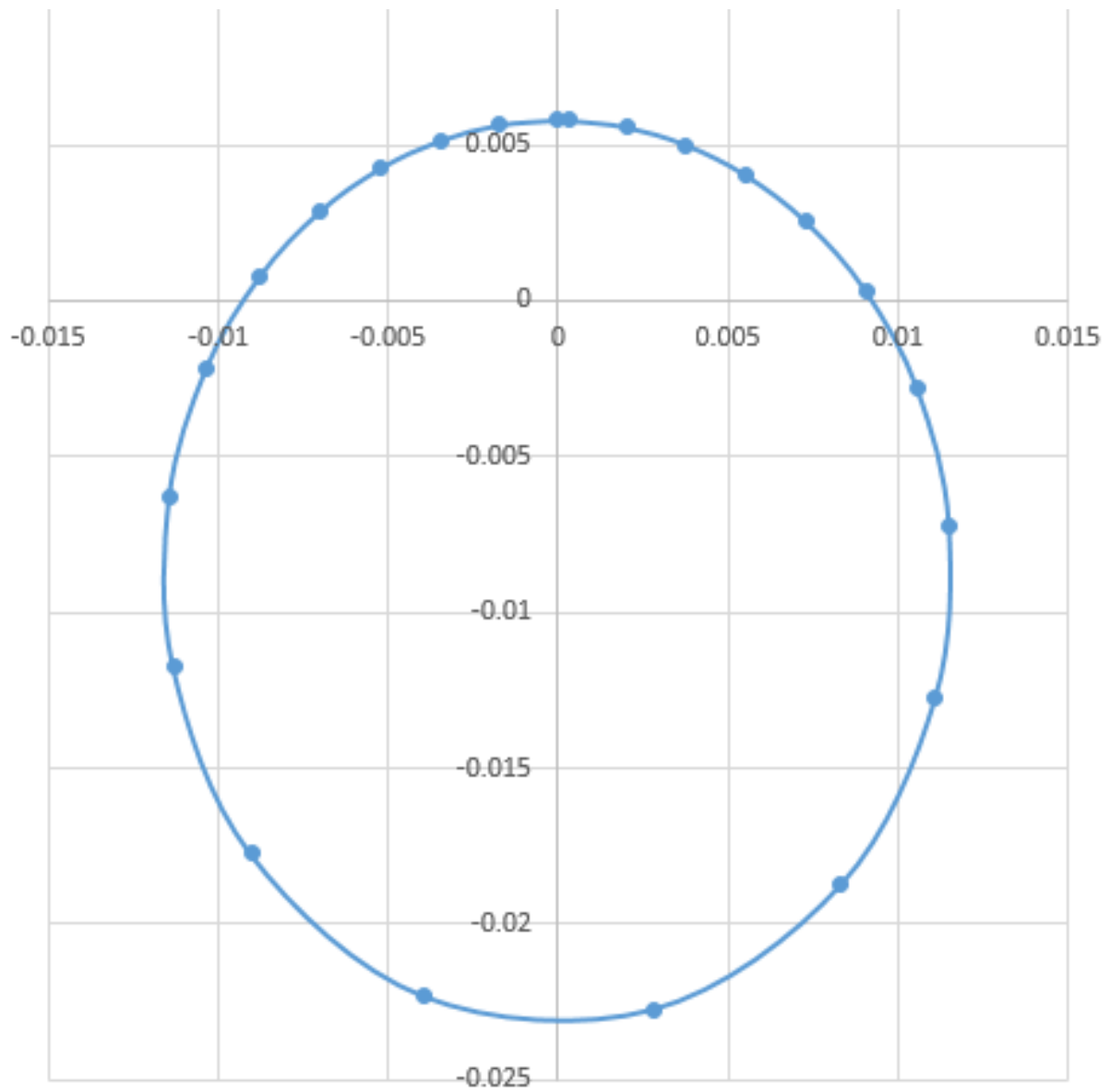
$$-\frac{x'}{y'} \cos i = \tan \theta$$

با برازش مبدا گذر داریم:

$$\cos i = 0.799655 \quad i = 36.90^\circ$$

(ز) حال می‌دانیم:

$$x_{real} = x', \quad y_{real} = y' / \cos i$$



ح) ابتدا با داشتن مقادیر x و y ، اندازه r را محاسبه می‌کنیم:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

و از رابطه بیضی در دستگاه قطبی داریم:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

با خطی کردن معادله بالا برای برازش داریم:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1 - e^2)} + \frac{e}{a(1 - e^2)} \cos \theta$$

با برازش داده‌ها داریم:

$$e = 0.6, a \approx 2Au$$

برای به دست آوردن این دو عدد بدون برازش نیز می‌توانستیم از روش زیر استفاده کنیم.

برای a می‌دانیم فاصله زمانی بین داده اول و آخر تقریباً برابر با دوره تناوب این سیاره است و از قانون سوم کپلر میدانیم:

$$T^2 = a^3 \quad a \approx 2Au$$

برای خروج از مرکز هم می‌دانیم که در قسمت «ه» میل مداری به اندازه ای است تا $2a$ به اندازه $2b$ دیده شود بنابراین:

$$a \cos i = b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$e = \sqrt{1 - \cos^2 i} = \sin i \approx 0.6$$

ط) از معادلات زمان در مدار برای بیضی داریم:

$$\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

