

## پاسخنامه تشریحی مسائل سری دوم

۱- معادله را بر حسب  $t = \sqrt{x-1}$  ( $t \geq 0$ ) بازنویسی می کنیم. داریم:

$$t + \sqrt{t^2 + 1 - 2t} = 1 \rightarrow t + \sqrt{(t-1)^2} = 1 \rightarrow t + |t-1| = 1 \rightarrow |t-1| = 1 - t$$

پس  $(t-1)$  نامثبت است.

$$t-1 \leq 0 \rightarrow t \leq 1 \Rightarrow (t \leq 1) \cap (t \geq 0) \dots \rightarrow 0 \leq t \leq 1$$

حال مقدار  $t$  را بر حسب  $x$  جایگذاری می کنیم:

$$0 \leq \sqrt{x-1} \leq 1 \rightarrow 0 \leq x-1 \leq 1 \rightarrow x \in [1, 2]$$

تالیفی بیک محمدی

۲- این مساله به مساله گلدباخ مشهور است. در واقع می خواهیم حاصل عبارت زیر را محاسبه کنیم:

$$S = \left( \binom{1}{2} + \binom{1}{3} + \dots \right) + \left( \binom{1}{3} + \binom{1}{4} + \dots \right) + \left( \binom{1}{4} + \binom{1}{5} + \dots \right) + \dots$$

$$\rightarrow S = \frac{\binom{1}{4}}{\binom{1}{2}} + \frac{\binom{1}{9}}{\binom{1}{3}} + \frac{\binom{1}{16}}{\binom{1}{4}} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$$

$$\rightarrow S = \frac{1}{(1 \times 2)} + \frac{1}{(2 \times 3)} + \frac{1}{(3 \times 4)} + \dots = \frac{(2-1)}{(1 \times 2)} + \frac{(3-2)}{(2 \times 3)} + \frac{(4-3)}{(3 \times 4)} + \dots$$

$$\rightarrow S = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$$

تالیفی بیک محمدی

$$\begin{array}{l}
 ۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad \dots \quad ۱۰ \\
 ۲ \quad ۴ \quad ۶ \quad \dots \quad ۲۰ \\
 ۳ \quad ۶ \quad ۹ \quad \dots \quad ۳۰ \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 ۱۰ \quad ۲۰ \quad ۳۰ \quad \dots \quad ۱۰۰
 \end{array}$$

اگر تعریف کنیم:

$$S = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰$$

آنگاه مجموع سطرها را بر حسب  $S$  می نویسیم. داریم:

$$S + ۲S + ۳S + \dots + ۱۰S = (۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰)S = \frac{(۱۰ \times ۱۱)}{۲} \times S = ۵۵ S = ۵۵ \times \frac{(۱۰ \times ۱۱)}{۲} = ۵۵^۲ = ۳۰۲۵$$

بنابر این گزینه ۴ صحیح است.

تالیفی بیک محمدی

$$x + \frac{1}{x} = a, (a \geq 2)$$

۴- باید  $f$  را صریحا بر حسب  $x$  بدست آوریم. داریم:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - ۲ = x^2 + \frac{1}{x^2} + ۲ - ۴ = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - ۴ = a^2 - ۴$$

$$\rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm \sqrt{a^2 - ۴}$$

بنابراین:

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = a \times \left(\pm \sqrt{a^2 - ۴}\right)$$

همچنین داشتیم:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(a) = \pm a \sqrt{a^2 - ۴} \rightarrow f(\sqrt{۵}) = \pm \sqrt{۵}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

تالیفی بیک محمدی

$$\left(\frac{1}{a^1}\right) + \left(\frac{1}{a^2}\right) + \left(\frac{1}{a^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{a^{10}}\right) = 13$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{aq^1}\right) + \left(\frac{1}{aq^2}\right) + \left(\frac{1}{aq^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{aq^9}\right) = 13$$

$$\rightarrow \frac{(q^9 + q^8 + \dots + 1)}{(aq^9)} = 13$$

صورت و مخرج را در  $a$  ضرب میکنیم. داریم:

$$\frac{(a^{10} + a^9 + \dots + a^1)}{(a^{10})} = (S_{10})(a^1 \times a^{10}) = 13$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

تالیفی بیک محمدی