دو کره یِ رسانا یِ هم‌سان ِ مماس، در یک میدان ِ الکتریکی

احمد شریعتی

دو کره ی ِ رسانا ی ِ هم‌سان ِ مماس، در یک میدان ِ الکتریکی قرار دارند. میدان در فواصل ِ بسیار زیاد از کره‌ها ثابت است. به کمک ِ روش ِ تصویر، بارها و دوقطبی‌ها ی ِ القاء شده رو ی ِ دو کره به دست می‌آید و نیرو یی که دو کره به هم وارد می‌کنند محاسبه می‌شود. در حالت ِ خاص که میدان ِ خارجی در راستا ی ِ خط‌المرکزین است، از جواب می‌توان برا ی ِ مسئله ی ِ یک کره که رو ی ِ یک صفحه ی ِ رسانا ی ِ بی‌نهایت بلند قرار دارد و میدان در فواصل ِ دور از کره بر صفحه عمود و ثابت است، استفاده کرد.

1 مقدّمه

دو کره ی ِ رسانا، با شعاع‌ها ی ِ مساوی ی ِ a بر هم مماس اند. برا یِ ساده شدن ِ فرمول‌ها a را 1 می‌گیریم. نقطه ی ِ تماس ِ دو کره را مبداء، و صفحه ی ِ مماس ِ مشترک ِ دو کره را صفحه ی ِ $z = 0$ می‌گیریم. این مجموعه در یک میدان ِ الکتریکی ی ِ خارجی است، و میدان در فاصله‌ها ی ِ بسیار دور از مجموعه ثابت است. بی آن که از کلیّت ِ مسئله کم شود، با انتخاب ِ مناسب ِ محور ِ x، می‌توان فرض کرد که میدان مؤلفه ی ِ y ندارد. اگر θ زاویه ی ِ E_0 با محور ِ z باشد (سنجیده شده در جهت ی که اگر E_0 در راستا ی ِ x باشد $\theta = \pi/2$)، داریم

$$\boldsymbol{E}_0 = E_0\,\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{k}} + E_0\,\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{i}}.$$

برا ی ِ آن که میدان ِ الکتریکی در نزدیکی ی ِ دو کره را به دست آوریم، کافی است θ را یک بار صفر و یک بار $\pi/2$ بگیریم، میدان‌ها ی ِ حاصل را به دست آوریم، و میدان ِ کل را با استفاده از اصل ِ

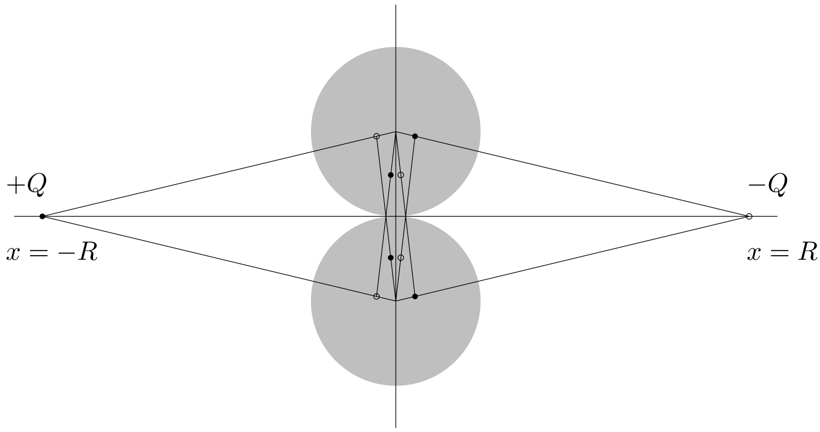
برهم‌نهی بنویسیم. چیزها یی که به خصوص به آن‌ها علاقه داریم این‌ها است: قطبیده‌گی ی ِ کل، بار ِ کل ی که رو ی ِ هر کره هست، و نیرو و احیاناً گشتاور ی که دو کره به هم وارد می‌کنند.

پیش از شروع به محاسبه، به یاد بیاوریم که اگر بار ِ q در فاصله یِ r از مرکز ِ کره ای به شعاع ِ a باشد، تصویر ش بار ی است به اندازه یِ $q' = -\frac{a}{r}q$ که در فاصله یِ $r' = \frac{a^2}{r}$ از مرکز ِ کره است [4، ص 59]. اگر $a = 1$ باشد، فرمول‌ها بسیار ساده می‌شوند: $q' = -\frac{q}{r}$ و $r' = \frac{1}{r}$. ضمناً، دقّت کنیم که اگر دو بار در بیرون از کره در فاصله یِ بسیار کوچک ِ δr از هم باشند، تصویر ِ آن دو در فاصله یِ بسیار کوچک ِ $|\delta r'| = \frac{\delta r}{r^2}$ از هم خواهند بود (a را 1 گرفته‌ایم).

2 میدان عمود بر خط‌المرکزین

ابتدا حالت ی را در نظر بگیریم که میدان ِ خارجی (در بی‌نهایت) در راستا ی ِ x باشد. این میدان را می‌توان با گذاشتن ِ دو بار به اندازه‌ها ی ِ $\mp Q$ در نقاط ِ $x = \pm R$ رو ی ِ محور ِ x تأمین کرد [4، ص 63]. اگر Q و R بزرگ شوند، طور ی که $E_0 = \frac{2\,Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,R^2}$ ثابت باشد، میدان (در غیاب ِ دو کره ی ِ مماس) در نزدیکی ی ِ مبدأ $E_0\,\hat{i}$ است. پس ابتدا ببینیم چه طور می‌توان اثر ِ بارها ی ِ $\mp Q$ در $x = \pm R$ بر دو کره را به حساب آورد. برا ی ِ این کار ابتدا هر دو بار را در هر دو کره تصویر می‌کنیم. به این ترتیب چهار بار ِ تصویری در درون ِ کره‌ها شکل می‌گیرد. واضح است که (به علّت ِ تقارن) در این مرحله مجموع ِ بارها یی که در هر کره هست صفر است. ضمناً دقّت کنیم که با بزرگ شدن ِ R بارها ی ِ تصویری در هر کره به مرکز ِ کره نزدیک می‌شوند، و با زیاد شدن ِ Q اندازه ی ِ آن‌ها هم زیاد می‌شود. با محاسبه ای ساده دیده می‌شود که اندازه ی ِ بارها ی ِ تصویری در این حد $\pm Q/R$ است، و بردار ی که بار ِ تصویری ی ِ منفی را به بار ِ تصویری ی ِ مثبت (در کره ی ِ بالایی) وصل می‌کند $\frac{2}{R}\hat{i}$ است. به این ترتیب، دیده می‌شود که در حد ِ $R \to \infty$ و $Q \to \infty$، و با شرط ِ $E_0 = \frac{2\,Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,R^2}$، بارها ی ِ تصویری یک دوقطبی ی ِ نقطه‌ای با اندازه ی ِ $(4\,\pi\,\epsilon_0)\,E_0\,a^3$ و موازی ی ِ x می‌سازند که که در $z = 1$ (یعنی همان $z = a$) است.

دو بار ِ تصویری در کره ی ِ بالایی را در کره ی ِ پایینی، و دو بار ِ تصویری در کره ی ِ پایینی را در کره ی ِ بالایی تصویر می‌کنیم. به این ترتیب چهار بار ِ دیگر (دو تا در هر کره) به دست می‌آید. از تقارن ِ شکل پیدا است که باز هم مجموع ِ بار ِ هر کره صفر است. به علاوه، به علّت ِ تقارن، بردارها یی



که بارها یِ تصویری یِ منفی یِ جدید را به نظیر ِ مثبت ِ شان وصل می‌کنند هم‌واره موازی یِ x اند. در حد ِ $Q, R \to \infty$، این تصویرها یِ ثانویه هم تشکیل ِ دو دوقطبی می‌دهند، که تصویر ِ نختسین دوقطبی‌ها است (دوقطبی‌ها یی که در مرکز ِ دو کره بودند).

پس دنباله ای از دوقطبی‌ها یِ نقطه‌ای داریم: برا یِ $n \in \mathbb{N}$ دوقطبی یِ P_n در $z = z_n$ (در کره یِ بالایی) و دوقطبی یِ $P'_n = P_n$ در $z'_n = -z_n$ (در کره یِ پایینی) است. نخستین جفت در $z_1 = 1$ و $z'_1 = -1$ اند. تصویر ِ دوقطبی یِ P'_n که در کره یِ پایینی است، در کره یِ بالایی در نقطه یِ z_{n+1} است که در این جا

$$1 - z_{n+1} = \frac{1}{1 - z'_n} = \frac{1}{1 + z_n} \qquad \Rightarrow \frac{1}{z_{n+1}} = \frac{1}{z_n} + 1.$$

حل ِ این معادله یِ تفاضلی ساده است[1]. با شرط ِ $z_1 = 1$ خواهیم داشت:

$$z_n = \frac{1}{n}.$$

اگر یک دوقطبی یِ نقطه‌ای به اندازه یِ P در فاصله یِ b از کره یِ رسانا یی به شعاع ِ $a = 1$ باشد، و اگر راستا یِ دوقطبی بر خط ی که مرکز ِ کره را به دوقطبی وصل می‌کند عمود باشد، اندازه یِ تصویر ِ این دوقطبی در کره $-1/b^3$ برابر ِ P است (زیرا اندازه یِ بارها $-1/b$ برابر، و فاصله یِ آن‌ها هم $1/b^2$ برابر می‌شود). پس برا یِ دوقطبی یِ P_{n+1} که تصویر ِ P'_n است داریم

[1] برا یِ آشنایی با معادله‌ها یِ تفاضلی، می‌توانید به [5] رجوع کنید.

$$P_{n+1} = \frac{-P'_n}{(1-z'_n)^3}, \qquad z'_n = -z_n, \quad P'_n = P_n,$$

$$\frac{P_n+1}{P_n} = \frac{-1}{(1+z_n)^3} = \frac{-n^3}{(n+1)^3}.$$

حل ِ این معادله ی ِ تفاضلی هم ساده است.

$$P_n = (-1)^{n-1}\frac{P_1}{n^3}.$$

و حالا می‌توانیم دوقطبی ی ِ کل ِ القاء شده در هر کره را حساب کنیم (پیوست را ببینید).

$$\begin{aligned} P &= P_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} = P_1\,\frac{3}{4}\,\zeta(3) \\ &= (4\,\pi\,\epsilon_0)\,E_0\,a^3\,\left(\frac{3}{4}\,\zeta(3)\right). \end{aligned}$$

دوقطبی کل سیستم دو برابر این مقدار است.

$$P_{\rm twospheres} = \frac{3}{2}\,\zeta(3)\,\,(4\pi\epsilon_0)\,\,E_0\,a^3$$

اکنون نیرو یی که به کره ی ِ بالایی وارد می‌شود را حساب کنیم. ابتدا به یاد بیاوریم که دوقطبی ی ِ $P' = P'\,\hat{i}$ که رو ی ِ محور ِ z است، بر دوقطبی ی ِ $P = P\,\hat{i}$، که آن هم رو ی ِ محور ِ z است، نیرو ی ِ $\frac{-2\,P\,P'}{4\,\pi\,\epsilon_0\,d^4}$ را وارد می‌کند که در این جا d فاصله ی ِ دو دوقطبی از هم است. اگر دوقطبی‌ها موازی باشند، نیرو جاذبه است، و اگر پادموازی باشند نیرو دافعه است. به این ترتیب، نیرو یی که به دوقطبی ی ِ P_n وارد می‌شود هست:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{-2}{4\,\pi\,\epsilon_0}\sum\nolimits_m \frac{(-1)^{n-1}\,P_1}{n^3}\,\frac{(-1)^{m-1}\,P_1}{m^3}\,\frac{1}{\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)^4} \\ &= \frac{-2\,P_1^2}{4\,\pi\,\epsilon_0}\sum\nolimits_m (-1)^{n+m}\frac{n\,m}{(n+m)^4}. \end{aligned}$$

نیرو یی که به کره یِ بالایی وارد می‌شود برابر است با جمعِ همه یِ F_n ها.

$$F = \frac{-2\,P_1^2}{4\,\pi\,\epsilon_0} \sum\nolimits_{n,m} (-1)^{n+m} \frac{n\,m}{(n+m)^4}.$$

این سری یِ دوگانه «مطلقاًهم‌گرا» نیست، به این معنی که مجموعِ آن به ترتیبِ جمع زدن و حد گرفتن بسته‌گی دارد. تعریف کنیم:

$$\alpha_N = -2 \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{(-1)^{n+m}\,n\,m}{(n+m)^4}$$

می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} \alpha :&= \lim_{N\to\infty} \alpha_N = \frac{1}{3}\,\ln 2 - \frac{1}{4}\,\zeta(3) \\ &= -0.069\,465\,165\,613 \end{aligned}$$

به این ترتیب،

$$F = \alpha\ (4\,\pi\,\epsilon_0)\ (E_0\,a)^2$$

α را می‌توان به روشِ تحلیلی حساب کرد (مرجع [1] را ببینید). با یک برنامه یِ ساده یِ کامپیوتری هم می‌توان α_N را حساب کرد. با برنامه ای به زبانِ Fortran 90 این مقادیر به دست آمده است:

$$\alpha_{1000} = -0.069\,465\,196\,3228$$

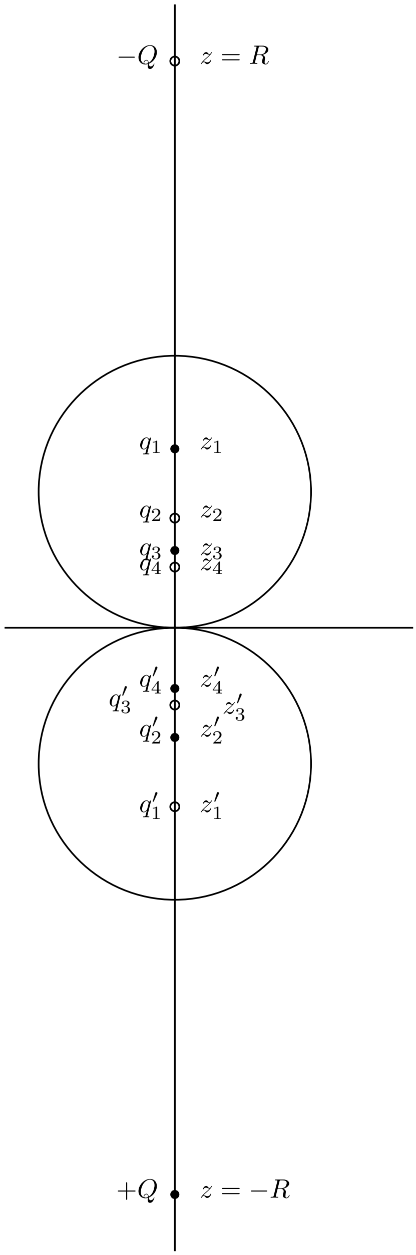
$$\alpha_{10000} = -0.069\,465\,165\,9152$$

$$\alpha_{20000} = -0.069\,465\,165\,6812$$

$$\alpha_{100000} = -0.069\,465\,165\,6063$$

3 میدان موازی یِ خط‌المرکزین

اکنون به وضعیّت ی بپردازیم که E_0 در راستا یِ خط‌المرکزینِ دو کره باشد.



دو بار ِ نقطه ای رو ی ِ محور ِ z می‌گذاریم:

بار ی به اندازه ی ِ $-Q$ در نقطه ی ِ $z = R$، و

بار ی به اندازه ی ِ Q در نقطه ی ِ $z = -R$.

اکنون دو کره ی ِ رسانا در یک میدان ِ الکتریکی اند و قطبیده می‌شوند. کره ی ِ بالایی بار ِ q (که مثبت است) و کره ی ِ پایینی بار ِ $-q$ می‌گیرد. می‌خواهیم q را حساب کنیم. برا ی ِ این کار، ابتدا بارها ی ِ $\mp Q$ را در هر دو کره تصویر می‌کنیم. به این ترتیب چهار بار به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{Q}{R-1}, \quad & z_1 &= 1 + \frac{1}{R-1} \\
q_2 &= \frac{-Q}{R+1}, \quad & z_2 &= 1 - \frac{1}{R+1} \\
q'_1 &= \frac{-Q}{R-1}, \quad & z'_1 &= -1 - \frac{1}{R-1} \\
q'_2 &= \frac{Q}{R+1}, \quad & z'_2 &= -1 + \frac{1}{R+1}
\end{aligned}
$$

از این چهار بار، q_1 و q_2 در کره ی ِ بالایی، و q'_1 و q'_2 در کره ی ِ پایینی اند. تصویرها ی ِ q_1 و q_2 در کره ی ِ پایینی را به ترتیب q'_3 و q'_4، و تصویرها ی ِ q'_1 و q'_2 در کره ی ِ بالایی را به ترتیب q_3 و q_4 می‌نامیم. این کار را ادامه می‌دهیم تا دو دنباله از بارها به دست آید: دنباله ی ِ q_n در کره ی ِ بالایی، و دنباله ی ِ q'_n در کره ی ِ پایینی. از تقارن ِ مسئله پیدا است که

$$q'_n = -q_n, \quad z'_n = -z_n.$$

برا ی ِ یافتن ِ بار ِ کره ی ِ بالایی، باید مجموع ِ همه ی ِ q_n ها را حساب کنیم. همان طور که خواهیم دید، این کار باید با دقّت انجام شود.

اگر بار ِ q_i در نقطه ی ِ z_i در کره ی ِ بالایی باشد، تصویر ِ آن در کره ی ِ پایینی بار ی است به اندازه ی ِ $q'_i = -q_i(1+z_i)^{-1}$ در نقطه ی ِ $z'_i = -1 + (1+z_i)^{-1}$، و تصویر ِ این بار در کره ی ِ بالایی بار ی است به اندازه ی ِ q_{i+1} در نقطه ی ِ z_{i+1} که در این جا

$$\begin{aligned}
z_{i+1} &= 1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1+z_i}} = \frac{z_i}{1 + 2\,z_i},\\
q_{i+1} &= -\cfrac{-q'_i}{2 - \cfrac{1}{1+z_i}} = \frac{q_i}{\left(2 - \cfrac{1}{1+z_i}\right)(1+z_i)}\\
&= \frac{q_i}{2\,z_i + 1}.
\end{aligned}$$

معادله ی ِ بازگشتی ی ِ z_i به ساده‌گی حل می‌شود:

$$\frac{1}{z_{i+1}} = \frac{1}{z_i} + 2 \qquad \Rightarrow \qquad z_i = \frac{z_0}{1 + 2\,i\,z_0}.$$

و حالا معادله ی ِ q_i حل می‌شود. ابتدا توجّه کنیم که

$$\frac{q_{i+1}}{q_i} = \frac{1}{1 + 2\,z_i},$$

$$2\,z_i + 1 = \frac{2\,z_0}{1 + 2\,i\,z_0} + 1 = \frac{1 + 2\,(i+1)\,z_0}{1 + 2\,i\,z_0}.$$

و حالا

$$\begin{aligned}
\frac{q_i}{q_0} &= \frac{q_i}{q_{i-1}} \cdot \frac{q_{i-1}}{q_{i-2}} \cdots \frac{q_1}{q_0}\\
&= \frac{1 + 2\,(i-1)\,z_0}{1 + 2\,i\,z_0} \cdot \frac{1 - 2\,(i-2)\,z_0}{1 + 2\,(i-1)\,z_0} \cdots \frac{1}{1 + 2\,z_0}\\
&= \frac{1}{1 + 2\,i\,z_0}.
\end{aligned}$$

به این نکته توجّه کنیم که

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_0}{1 + 2\,i\,z_0} = \infty.$$

امّا در مورد ِ مسئله ای که داریم حل می‌کنیم، چهار بار در کره ی ِ بالایی هست که هر کدام بی‌نهایت تصویر ِ ثانویّه می‌دهند. بارها ی ِ اوّلیّه و مکان‌ها شان این‌ها است:

$$q_0^{(1)} = \frac{Q}{R-1}, \qquad z_0^{(1)} = \frac{R}{R-1},$$

$$q_0^{(2)} = \frac{-Q}{R+1}, \qquad z_0^{(2)} = \frac{R}{R+1},$$

$$q_0^{(3)} = \frac{Q}{2R-1}, \qquad z_0^{(3)} = \frac{R}{2R-1},$$

$$q_0^{(4)} = \frac{-Q}{2R+1}, \qquad z_0^{(3)} = \frac{R}{2R+1},$$

اکنون تعریف کنیم

$$\begin{aligned} S_i &:= \sum_{\alpha=1}^{4} q_i^{(\alpha)} = q_i^{(1)} + q_i^{(2)} + q_i^{(3)} + q_i^{(4)} \\ &= \frac{q_0^{(1)}}{1 + 2\,i\,z_0^{(1)}} + \frac{q_0^{(2)}}{1 + 2\,i\,z_0^{(2)}} + \frac{q_0^{(3)}}{1 + 2\,i\,z_0^{(3)}} + \frac{q_0^{(4)}}{1 + 2\,i\,z_0^{(4)}} \end{aligned}$$

با یک محاسبه ی ِ سرراست دیده می‌شود که

$$S_i = 2\,Q \left[\frac{1}{(2i+1)^2\,R^2 - 1} + \frac{1}{(2i+2)^2\,R^2 - 1}\right].$$

بار ِ کل ی که در کره ی ِ بالایی است مجموع ِ S_i ها است:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=0}^{\infty} S_i \\ &= 2\,Q \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2\,R^2 - 1} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+2)^2\,R^2 - 1}\right] \\ &= 2\,Q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\,R^2 - 1}. \end{aligned}$$

در آخرین گام به این توجّه کرده ایم که وقت ی i از 0 تا ∞ می‌رود، $(2i+1)$ تمام ِ اعداد ِ فرد، و $(2i+2)$ تمام ِ اعداد ِ زوج ِ مثبت را می‌گیرد. سری ای که در نهایت به دست آمده است هم‌گرا است! توجّه کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4} q_n^{(i)}$ هم‌گرا است، امّا $\sum_{i=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty} q_n^{(i)}$ واگرا است.

در حد ِ R ها ی ِ بزرگ

$$q = \frac{2\,Q}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

و داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

بنا بر این برا ی ِ R ها ی ِ بزرگ داریم

$$q = \frac{\pi^2}{3}\,\frac{Q}{R^2}.$$

اگر Q و R هر دو بزرگ باشند، طور ی که $\frac{2\,Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,R^2} = E_0$ باشد، در آن صورت در غیاب ِ کره‌ها ی ِ فلزّی در نزدیکی ی ِ مبداء میدان ِ الکتریکی ثابت و E_0 می‌بود. پس، اگر دو کره ی ِ مماس را در یک میدان ِ الکتریکی ی ِ ثابت بگذاریم (خط‌المرکزین در امتداد ِ میدان) در آن صورت بار ی که رو ی ِ کره ی ِ مثبت جمع می‌شود هست:

$$q = \frac{\pi^2}{6}\,(4\,\pi\,\epsilon_0)\;E_0\,a^2.$$

چگالی ی ِ متوسط ِ بار رو ی ِ کره ی ِ مثبت هست

$$\bar{\sigma} = \frac{\pi^2}{6}\,\epsilon_0\,E_0 = 1.64\,\epsilon_0\,E_0.$$

اگر یک کره در مبداء بود، بار ی که رو ی ِ نیم‌کره ی ِ بالایی می‌نشست برابر بود با $3\,\pi\,\epsilon_0\,E_0\,a^2$، یعنی چگالی ِ متوسط ِ بار رو ی ِ نیم‌کره ی ِ بالایی می‌شد $1.5\,\epsilon_0\,E_0$.

از تقارن ِ بارها پیدا است که رو ی ِ صفحه ی ِ $z=0$ میدان ِ الکتریکی مؤلفه ی ِ مماسی ندارد. یعنی پتانسیل در فضا، $f(x,y,z)$ چنان است که داریم

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{z=0} = 0.$$

بنا بر این سطح ِ $z = 0$ یک سطح ِ هم‌پتانسیل است (که می‌توان آن را 0 گرفت). از این جا پیدا است که آن چه یافته ایم حل ِ یک مسئله ی ِ دیگر هم هست: کره ای به شعاع ِ a رو ی ِ یک صفحه ی ِ رسانا (صفحه ی ِ $z = 0$) که می‌تواند یک جوشن ِ یک خازن ِ تخت باشد می‌گذاریم. اگر در غیاب ِ کره میدان ِ الکتریکی ثابت و در راستا ی ِ z باشد (با شدت ِ E_0) همین مقدار بار رو ی ِ کره می‌نشیند.

اکنون توجّه کنیم که وقت ی R بزرگ می‌شود، $z_0^{(1)}$ و $z_0^{(2)}$ به هم نزدیک می‌شوند، و بارها یی که در این دو نقطه هست تشکیل ِ یک دوقطبی می‌دهند. به همین نحو $z_0^{(3)}$ و $z_0^{(4)}$ هم به هم نزدیک می‌شوند و یک دوقطبی هم در آن جا شکل می‌گیرد. این طرح برا ی ِ تصویرها ی ِ ثانویّه هم درست است، دقّت کنید:

$$
\begin{aligned}
q_i^{(1)}\, z_i^{(1)} + q_i^{(2)}\, z_i^{(2)} &= \frac{q_0^{(1)}\, z_0^{(1)}}{\left(1 + 2iz_0^{(1)}\right)^2} + \frac{q_0^{(2)}\, z_0^{(2)}}{\left(1 + 2iz_0^{(2)}\right)^2} \\
&= \frac{Q}{R-1} \cdot \frac{R}{R-1} \frac{1}{\left(1 + 2i\frac{R}{R-1}\right)^2} + \frac{-Q}{R+1} \cdot \frac{R}{R+1} \frac{1}{\left(1 + 2i\frac{R}{R+1}\right)^2} \\
&= \frac{Q\,R}{((2i+1)R-1)^2} - \frac{Q\,R}{((2i+1)R+1)^2} \\
&= \frac{Q\,R}{((2i+1)^2\,R^2-1)^2} \left[((2i+1)R+1)^2 - ((2i+1)R-1)^2\right] \\
&= \frac{Q\,R\,4\,(2i+1)\,R}{\left[(2i+1)^2\,R^2-1\right]^2} \\
&\sim \frac{4Q}{R^2} \frac{1}{(2i+1)^3}, \qquad \text{for} \quad R \to \infty
\end{aligned}
$$

و مشابهاً

$$
q_i^{(3)}\, z_i^{(3)} + q_i^{(4)}\, z_i^{(4)} \sim \frac{4Q}{R^2} \frac{1}{(2i+2)^3}, \qquad \text{for} \quad R \to \infty
$$

و به یاد بیاوریم که $4Q/R^2 \to 2\,E_0\,(4\pi\epsilon_0)$ است. به این ترتیب دیده می‌شود که دنباله ای از دوقطبی‌ها ی ِ نقطه‌ای داریم.

$$
\tilde{P}_n = (4\pi\epsilon_0)\; E_0\, a^3 \frac{2}{n^3}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.
$$

در این جا باید نکته یِ مهم ی را به یاد بیاوریم: تعریفِ دوقطبی یِ الکتریکی، $\sum q_i\, r_i$ وابسته است به انتخابِ مبداءِ مختصّه‌ها. البتّه اگر بار ِ کلِ سیستم ی صفر باشد، دوقطبی مستقل از انتخابِ مبداء است. با بزرگ شدنِ R، بارها یِ $q_i^{(1)}$ و $q_i^{(2)}$ (و $q_i^{(3)}$ و $q_i^{(4)}$) به هم نزدیک می‌شوند و تشکیلِ سیستم ی می‌دهند که هم بار ِ ناصفر دارد، هم دوقطبی یِ ناصفر. بار ِ این مجموعه‌ها همان طور که پیش‌تر دیدیم $2Qa^2/(R^2\, n^2)$ است و مکانِ آن‌ها a/n است. بنا بر این، دوقطبی یِ n ام، اگر نسبت به نقطه یِ $z_n = a/n$ تعریف شود می‌شود:

$$P_n = \frac{4Qa^3}{R^2}\frac{1}{n^3} - \frac{2Qa^3}{R^2}\frac{1}{n^3} = \frac{2Qa^3}{R^2}\frac{1}{n^3}.$$

می‌توان $\sum_1^\infty \tilde{P}_n$ را حساب کرد ـ توجّه کنید که همه یِ جمله‌ها یِ این جمع نسبت به یک مبداء تعریف شده اند. به ساده‌گی دیده می‌شود که

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \tilde{P}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\tilde{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n = 2\,\zeta(3)\ (4\pi\epsilon_0)\ E_0\, a^3.$$

توجّه داشته باشید که این دوقطبی یِ یک ی از دو کره است. دوقطبی یِ کل (نسبت به نقطه یِ تماس) دو برابر ِ $\tilde{P}$ است. چون بار ِ سیستمِ کل، یعنی اجتماعِ دو کره، صفر است، دوقطبی یِ کلِ آن مستقل از مبداء است:

$$P_{\text{two spheres}} = 4\,\zeta(3)\ (4\pi\epsilon_0)\ E_0\, a^3$$

به این ترتیب، میدانِ الکتریکی در بیرونِ کره‌ها معادل است با میدانِ ناشی از دنباله یِ زیر از بارها و دوقطبی‌ها. (هر دوقطبی نسبت به مکانِ خود ش تعریف شده است.)

$$z_n = +\frac{a}{n}, \quad q_n = +(4\pi\epsilon_0)\ E_0\, a^2\,\frac{1}{n^2}, \quad \boldsymbol{P}_n = (4\pi\epsilon_0)\ E_0\, a^3\,\frac{1}{n^3}\,\hat{\boldsymbol{k}},$$

$$z'_n = -\frac{a}{n}, \quad q'_n = -(4\pi\epsilon_0)\ E_0\, a^2\,\frac{1}{n^2}, \quad \boldsymbol{P}'_n = (4\pi\epsilon_0)\ E_0\, a^3\,\frac{1}{n^3}\,\hat{\boldsymbol{k}},$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

حالا نیرو یِ وارد بر کره یِ بالایی را حساب کنیم. نیرو یی که به کره یِ بالایی وارد می‌شود مجموعِ دو نیرو است:

1) نیرو یی که بارها یِ $\mp Q$ که در $z = \pm R$ اند وارد می‌کنند؛ این را F_{Field} می‌نامیم. محاسبه یِ این نیرو ساده است: حاصل‌ضربِ q (بارِ کره یِ بالایی) در میدان E_0

$$F_{\text{Field}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2\,Q}{R^2}\,q = (4\pi\epsilon_0)\ (E_0\,a)^2\ \zeta(2).$$

2) نیرو یی که بارها یِ تصویر شده در کره یِ پایینی وارد می‌کنند؛ این را F_{Image} می‌نامیم. محاسبه یِ این نیرو چنین است:

فاصله یِ $z'_n = -\dfrac{a}{n}$ از $z_m = \dfrac{a}{m}$ برابر است با $\dfrac{a}{n} + \dfrac{a}{m}$.

بار ی که در z'_n هست بر بار ی که در z_m هست نیرو یی وارد می‌کند که برابر است با

$$F^{qq}_{n\to m} = -\,(4\pi\epsilon_0)\ E_0^2\,a^2\,\frac{1}{n^2}\,\frac{1}{m^2}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)^2} = -\,(4\pi\epsilon_0)\ E_0^2\,a^2\,\frac{1}{(n+m)^2}$$

بار ی که در z'_n هست بر دوقطبی ای که در z_m هست نیرو یی وارد می‌کند که برابر است با

$$F^{qp}_{n\to m} = (4\pi\epsilon_0)\ E_0^2\,a^2\,\frac{1}{n^2}\,\frac{1}{m^3}\frac{2}{\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)^3} = (4\pi\epsilon_0)\ E_0^2\,a^2\,\frac{n}{(n+m)^3}$$

دوقطبی ای که در z'_n هست بر بار ی که در z_m هست نیرو یی وارد می‌کند که برابر است با

$$F^{pq}_{n\to m} = (4\pi\epsilon_0)\ E_0^2\,a^2\,\frac{1}{n^3}\,\frac{1}{m^2}\frac{2}{\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)^3} = (4\pi\epsilon_0)\ E_0^2\,a^2\,\frac{m}{(n+m)^3}$$

دوقطبی ای که در z'_n هست بر دوقطبی ای که در z_m هست نیرو یی وارد می‌کند که برابر است با

$$F^{pp}_{n\to m} = -\,(4\pi\epsilon_0)\ E_0^2\,a^2\,\frac{1}{n^3}\,\frac{1}{m^3}\,\frac{6}{\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)^4} = -\,(4\pi\epsilon_0)\ E_0^2\,a^2\,\frac{6\,n\,m}{(n+m)^4}$$

نیرو یی که n بر m وارد می‌کند جمع ِ این چهار نیرو است و می‌شود

$$F_{n\to m} = (4\pi\epsilon_0)\ E_0^2\, a^2\ \left(\frac{(n+m)^2 - 6\,n\,m}{(n+m)^4}\right).$$

و نیرو ی ِ F_{Image} مجموع ِ همه ی ِ این $F_{n\to m}$ ها است، یعنی

$$F_{\text{Image}} = \sum_{n,m} F_{n\to m}.$$

تعریف کنیم

$$\beta_N := \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \frac{(n+m)^2 - 6\,n\,m}{(n+m)^4}.$$

این سری «مطلقاً هم‌گرا» نیست؛ حد ِ آن بسته‌گی دارد به ترتیب ِ جمع زدن. ترتیب ی که در بالا برا ی ِ جمع زدن معرفی شده ترتیب ِ «طبیعی» ای است که در فرآیند ِ تصویر کردن‌ها ی ِ پیاپی ظاهر شده است.

می‌توان نشان داد [1] که

$$\begin{aligned}\beta &:= \lim_{N\to\infty}\beta_N = \zeta(3) - \zeta(2) - \frac{1}{12}\\ &= -0.526\,210\,496\,983\end{aligned}$$

با یک برنامه ی ِ ساده هم می‌توان β_N را، برا ی ِ N ِ متناهی، حساب کرد. با یک برنامه ی ِ ساده به زبان ِ Fortran 90 این نتیجه‌ها به دست آمده است:

N	β_N	$\frac{\lvert\beta_N - \beta\rvert}{\lvert\beta\rvert}$
1	$-0.125\,000\,0000$	8×10^{-1}
10^1	$-0.437\,150\,1278$	2×10^{-1}
10^2	$-0.516\,327\,3624$	2×10^{-2}
10^3	$-0.525\,211\,6733$	2×10^{-3}
10^4	$-0.526\,110\,5088$	2×10^{-4}
10^5	$-0.526\,200\,4968$	2×10^{-5}

توجّه کنید که هم‌گرایی نسبتاً کُند است ـــ حتّا برا ی ِ $N = 10^5$، که یعنی مجموع ِ حدود ِ 10^6 جمله، عدد ی که به دست می‌آید تنها تا با دقّت ِ 2×10^{-5} درست است!

پس،

$$F_{\mathrm{Image}} = \left(\zeta(3) - \zeta(2) - \frac{1}{12}\right) (4\pi\epsilon_0)\ (E_0\, a)^2\,,$$

و به این ترتیب

$$F = F_{\mathrm{Field}} + F_{\mathrm{Image}} = \left(\zeta(3) - \frac{1}{12}\right) (4\pi\epsilon_0)\ (E_0\, a)^2$$

امّا این نیرو هنوز درست نیست! یک نکته یِ مهم هست که در نظر نگرفته ایم و آن این که در همسایه‌گی یِ نزدیک ِ نقطه یِ تماس ِ دو کره میدان باید صفر باشد. در این جا منظور از همسایه‌گی یِ نزدیک، فاصله‌ها یی بسیارکوچک‌تر از شعاع ِ کره‌ها است. برا یِ تحقیق ِ این مطلب به نحو زیر عمل می‌کنیم.

دنباله ی ِ بارها و دوقطبی‌ها ی ِ نقطه ای را تا یک n ِ بزرگ امّا متناهی در نظر بگیریم. این دنباله از بارها و دوقطبی‌ها ناحیه ی ِ $-h < z < h$ را <u>نمی‌پوشانند</u> ــ در این جا $h = \frac{1}{n+1}$ است. توزیع ِ بار و دوقطبی را رو یِ قطعه یِ $-h < z < h$ از محور ِ z ها قطعه‌قطعه پیوسته بگیریم، به این نحو که چگالی یِ بار (λ) و چگالی یِ دوقطبی (μ) رو ی ِ این دو قطعه چنین باشند:

$$\lambda(z) = \begin{cases} 4\pi\epsilon_0\, E_0\, a & 0 < z < h \\ -4\pi\epsilon_0\, E_0\, a & < z < 0, \end{cases}$$

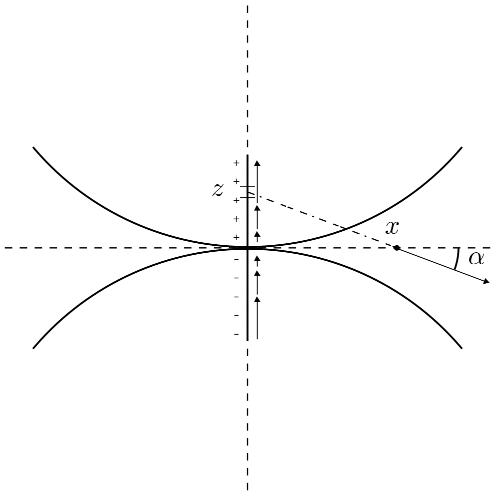
$$\mu(z) = 4\pi\epsilon_0\, E_0\, a\, |z|,$$

قطعه یِ بسیارکوچک ی به طول ِ dz را در همسایه‌گی یِ z در نظر بگیریم. بار ی که در این قطعه هست یک میدان ِ الکتریکی ی ِ $E^{(1)}$ ایجاد می‌کند که در نقطه ی ِ P رو یِ محور ِ x، یعنی نقطه یِ $(x, 0, 0)$، مؤلفه ی ِ z اش هست

$$\frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi\epsilon_0\, E_0\, a\, dz}{r^2} \cdot \sin\alpha,$$

که در این جا

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}, \qquad \sin\alpha = \frac{z}{r}.$$



با توجّه به این که بارها یی که رو یِ بخشِ منفی یِ محورِ z هستند منفی اند، معلوم می‌شود که

$$E_z^{(1)} = -2\,E_0\,a \int_0^h \frac{z\,dz}{r^3}.$$

همان قطعه یِ بسیارکوچک به طولِ dz یک توزیعِ دوقطبی هم دارد که منجر به میدان ی می‌شود که آن را $E^{(2)}$ می‌نامیم. با توجّه به فرمولِ

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\hat{\boldsymbol{n}}\,\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}}{r^3},$$

و با توجّه به این که $n_z = z/r$ است، و با دقّت کردن در این که توزیعِ دوقطبی به شکلِ $\mu = \lambda_0\,|z|$ است، می‌توان دید که

$$E_z^{(2)} = 2\,E_0\,a \int_0^h \frac{3\,z^2 - r^2}{r^5}\,z\,dz.$$

با توجّه به تقارن، در نقطه یِ مشاهده (که رو یِ محورِ x است)، میدانِ ناشی از این دو توزیع (بار و دوقطبی) فقط مؤلفه یِ z دارد، که می‌شود

$$E_z^{\text{segment}} = E_z^{(1)} + E_z^{(2)} = 2\,E_0\,a \int_0^h \frac{z^2 - 2\,x^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\,z\,dz = \frac{2\,E_0\,a\,h^2}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} = f(h,x).$$

دقّت کنید که

$$\lim_{h\to 0}\lim_{x\to 0} f(h,x) = \lim_{h\to 0}\frac{2\,E_0\,a}{h} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{h\to 0} f(h,x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

این میدان، در نزدیکیِ نقطه ي تماسِ دوکره، یک چگالی يِ انرژی دارد که برابر است با $\frac{\epsilon_0}{2}E^2$. در استوانه ای به ارتفاعِ ℓ (که بسیار کوچک خواهیم گرفت) و شعاعِ R، این انرژی می‌شود

$$\frac{\epsilon_0}{2}\,\ell\,2\pi\int_0^R \left(E_z^{\text{segment}}\right)^2 = \ell\,\pi\,\epsilon_0\,E_0^2\,a^2\left(1-\frac{h^4}{\left(h^2+R^2\right)^2}\right)\xrightarrow[h\to 0]{}\pi\,\epsilon_0\,E_0^2\,a^2\,\ell.$$

متناظر با این چگالی يِ انرژی یک نیرو هست که اندازه اش برابر است

$$|F_{\text{extra}}| = \frac{\pi\,\epsilon_0\,E_0^2\,a^2\,\ell}{\ell} = \pi\,\epsilon_0\,E_0^2\,a^2.$$

به این ترتیب نیرو یی به کره يِ بالایی وارد می‌شود که به سمتِ پایین است (یعنی دو کره هم را جذب می‌کنند). امّا این نیرو را در واقع نباید به حساب بیاوریم، زیرا این نیرو در واقع وجود ندارد، زیرا در همسایه‌گی يِ نقطه يِ تماس میدانِ واقعی باید صفر باشد (زیرا هر چه به نقطه يِ تماس نزدیک‌تر شویم، موقعیّت بیشتر شبیه به درونِ یک رسانا است). پس باید سهمِ این جاذبه را از نیرو یی که بالاتر حساب کردیم کم کنیم، که یعنی

$$\begin{aligned} F &= F_{\text{Field}} + F_{\text{Image}} + \pi\epsilon_0\,E_0\,a^2 \\ &= \left(\zeta(3) - \frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)(4\pi\epsilon_0)\,\left(E_0\,a\right)^2 \\ &= \left(\zeta(3) + \frac{1}{6}\right)(4\pi\epsilon_0)\,\left(E_0\,a\right)^2 \end{aligned}$$

این نتیجه با روش‌ها يِ تحلیلی هم به دست آمده است (به مراجعِ 2 و 3 از مرجعِ [1] رجوع کنید).

4 پیوست: زتا يِ ریمان

اگر z عدد ی مختلط باشد با $\mathrm{Re}\,z > 1$، در آن صورت سری یِ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ هم‌گرا است و تابع ی که به این ترتیب تعریف می‌شود در ناحیه یِ $\mathrm{Re}\,z > 1$ تحلیلی است. این تابع «تابعِ زِتا یِ ریمان» نام دارد.

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots$$

ثابت می‌شود که

$$
\begin{aligned}
\zeta(2) &= 1.644\,934\,066\,9, = \frac{\pi^2}{6} \\
\zeta(3) &= 1.202\,056\,903\,2 \\
\zeta(4) &= 1.082\,323\,233\,7 = \frac{\pi^4}{90}.
\end{aligned}
$$

اکنون تعریف کنیم

$$
\alpha(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^n}.
$$

می‌توان نشان داد که

$$
\alpha(n) = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \zeta(n),
$$

و از این جا

$$
\alpha(3) = \frac{3}{4}\zeta(3) = 0.901\,542\,677\,3.
$$

تابع ِ زتا ی ِ ریمان در اکثر کتاب‌ها ی ِ درس ِ توابع ِ مختلط بررسی می‌شود، مثلاً می‌توانید به مرجع [2] رجوع کنید. عددها یی که در بالا نوشته شده از مرجع [3] برداشته شده است.

5 سپاسگزاری

در اسفند ِ 1387 نادر رسولی مسئله ای برا یِ دوره یِ المپیاد ِ فیزیک طرح کرد که در واقع قسمت ی از مسئله ای بود که در این مقاله بررسی شده است. از ایشان که توجّه ِ مرا به این مسئله جلب کرد سپاسگزارم. چند روز بعد، محمّد خرّمی و امیرحسین فتح‌اللهی و من بخش ی از این مسئله را که عبارت بود از یافتن ِ بار ِ کره یِ بالایی حل کردیم. در ایّام ِ عید ِ 1388 مرجع ِ [1] را گیر آوردم و از خواندن ِ آن بسیار لذّت بردم، و محاسبه‌ها یِ آن را با روش ی که خود م می‌فهمم تکرار کردم. جالب است که این مقاله در مجلّه ای خاص ِ «فیزیک ِ کاربردی» چاپ شده است! نکته یِ تصحیح ِ میدان در اطراف ِ نقطه یِ تماس ِ دو کره را از این مقاله و با کمک گرفتن از محمّد خرّمی یاد گرفتم. واضح است که مسئولیّت ِ هر خطا یِ احتمالی ای با من است، که البته از خواننده می‌خواهم خود ش محاسبه‌ها را تکرار کند، اگر غلط ی دید مرا آگاه کند.

6 مراجع

[1] H. F. M. van den Bosch, K. J. Ptasinski, P. J. A. M. Derkhof, “Two conducting spheres in a parallel electric field” *Journal of Applied Physics*, vol. 78 (1995) pp. 6345–6352.

[2] H. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, 2$^{\text{ed}}$ edition, W. H. Freeman and Company, 1987, p. 223.

[3] D. Zwillinger, Editor-in-Chief, *Standard Mathematical Tables and Formulae*, 30$^{\text{th}}$ edition, CRC Press, 1996, pp. 22-23.

[4] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3$^{\text{ed}}$ edition, John Weley & Sons, 1999.

[5] امیر آقامحمدی؛ مقدمه‌ای بر معاله‌های تفاضلی؛ گاما، شماره‌ی ۶، بهار ۱۳۸۴، صص ۵۲ تا ۶۸.