بسمه تعالی

امتحان میان ترم
درس معادلات دیفرانسیل

تاریخ:۱۳۹۸/۲/۲
وقت:۹۰ دقیقه

(درک وفهم مسائل بخشی ازامتحان است، لذابه هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود)

مسئله ۱. دسته منحنی های $(x^۳+۱)(y^۳+۱)=c$ مفروضند. مسیرهای قائم این دسته منحنی ها را بیابید. (۸ نمره)

مسئله ۲. با تعیین یک فاکتور انتگرال معادلهٔ ناکامل زیر را حل کنید (۱۲ نمره)

$$(۲xy^۴e^y+۲xy^۳+y)\,dx+(x^۲y^۴e^y-x^۲y^۲-۳x)\,dy=۰$$

مسئله ۳. معادله دیفرانسیل زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.(۱۰ نمره)

$$y=\arcsin y'+\ln(۱+y'^۲)$$

مسئله ۴. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$y'x^۳\sin y+۲y=xy'$$

مسئله ۵. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید. (۱۰ نمره)

$$x^۲y''-۲xy'+۲y=\ln^۲ x-\ln x^۲$$

مسئله ۶. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید. (۱۰ نمره)

$$y''+y=\cos ۲x$$

موفق باشید.

پاسخ تشریحی آزمون میانترم «معادلات دیفرانسیل» «ابراهیم شاه ابراهیمی»
«دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی» اردیبهشت ۹۸

---

۱) $(x^3+1)(y^3+1)=c$ مسیر قائم؟

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 3x^2(y^3+1)+3y^2y'(x^3+1)=0 \longrightarrow \frac{3x^2(y^3+1)}{3y^2(x^3+1)}=-y' \xrightarrow[y'\to-\frac{1}{y'}]{\text{مسیر قائم}}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده سازی}} \frac{x^2(y^3+1)}{y^2(x^3+1)}=\frac{1}{y'} \longrightarrow \left(\frac{y^3+1}{y^2}\right)dy=\left(\frac{x^3+1}{x^2}\right)dx$$

$$\left(y+\frac{1}{y^2}\right)dy=\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx \xrightarrow[\text{تفکیک پذیر}]{\int} \boxed{\frac{y^2}{2}-\frac{1}{y}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+c_1}$$

---

۲) $\underbrace{(2xy^4e^y+2xy^3+y)}_{M}dx+\underbrace{(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)}_{N}dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy^4e^y-2xy^2-3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=8xy^3e^y+8xy^2+4=4(2xy^3e^y+2xy^2+1)$$

از طرفی می‌دانیم: $M=2xy^4e^y+2xy^3+y=y(2xy^3e^y+2xy^2+1)$

بنابراین با تقسیم $\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ بر M داریم:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\times\frac{1}{M}=\frac{4(2xy^3e^y+2xy^2+1)}{y(2xy^3e^y+2xy^2+1)}=\boxed{\frac{4}{y}}$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور انتگرال}} e^{-\int f(y)dy}=e^{-\int\frac{4}{y}dy}=e^{-4\ln y}=e^{\ln y^{-4}}=y^{-4}=\boxed{\frac{1}{y^4}}$$ فاکتور انتگرال

$$\xrightarrow[\text{طرفین معادله ۲}]{\text{ضرب فاکتور در}} \underbrace{\left(2xe^y+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^3}\right)}_{M}dx+\underbrace{\left(x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-\frac{3x}{y^4}\right)}_{N}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2xe^y-\frac{2x}{y^2}-\frac{3}{y^4} \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2xe^y-\frac{2x}{y^2}-\frac{3}{y^4} \longrightarrow$$ کامل شده است.

$$c=\int Mdx+\int \overset{*}{N}dy \longrightarrow c=\int\left(2xe^y+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^3}\right)dx+0$$

$$\boxed{c=x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}}$$

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۸

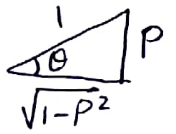
۳) $y = \arcsin y' + \ln(1+y'^2)$

$\xrightarrow[\text{فرض}]{y'=P}$ $y = \arcsin P + \ln(1+P^2) \xrightarrow{\frac{d}{dP}} \frac{dy}{dP} = \frac{1}{\sqrt{1-P^2}} + \frac{2P}{1+P^2}$

$\xrightarrow{\text{طبق فرض}}$ $\frac{P\,dx}{dP} = \frac{1}{\sqrt{1-P^2}} + \frac{2P}{1+P^2} \longrightarrow dx = \left(\frac{1}{P\sqrt{1-P^2}} + \frac{2}{1+P^2}\right) dP$ $\xrightarrow[\int]{\text{معادله تفکیک پذیر}}$

$$\boxed{x = \ln\left|\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{1-P^2}}{P}\right| + 2\,tg^{-1}P \quad , \quad y = \arcsin P + \ln(1+P^2)}$$

$\int \frac{1}{P\sqrt{1-P^2}} dP$ $\begin{cases} P = \sin\theta \\ dP = \cos\theta\, d\theta \end{cases} \longrightarrow \int \frac{1}{\sin\theta \cancel{\cos\theta}} \cancel{\cos\theta}\, d\theta = \int \csc\theta\, d\theta = \ln|\csc\theta - \cot\theta|$



$= \ln\left|\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{1-P^2}}{P}\right|$ «نحوه انتگرال گیری»

$\int \frac{2}{1+P^2} dP = 2\,tg^{-1}P$

math-teacher.blog.ir

---

۴) $y'x^3 \sin y + 2y = xy' \longrightarrow y'(x^3 \sin y - x) = -2y$

$\longrightarrow y' = \frac{2y}{x - x^3 \sin y} \xrightarrow{\text{عوض کردن صورت و مخرج}} x' = \frac{x - x^3 \sin y}{2y} = \frac{x}{2y} - \frac{x^3 \sin y}{2y}$

$\longrightarrow x' - \frac{1}{2y} x = -\frac{\sin y}{2y} x^3$ معادله برنولی $\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $\begin{cases} \frac{1}{x^2} = t \\ -\frac{2}{x^3} x' = t' \end{cases}$

$\xrightarrow{\div x^3} \frac{x'}{x^3} - \frac{1}{2y} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{\sin y}{2y}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} -\frac{t'}{2} - \frac{1}{2y} t = -\frac{\sin y}{2y} \xrightarrow{\times -2} t' + \frac{1}{y} t = \frac{\sin y}{y}$ $\xrightarrow{\text{عامل}} e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$

$\xrightarrow{\times y} \underbrace{yt' + t}_{(yt)'} = \sin y \xrightarrow{\int} yt = -\cos y + c \longrightarrow \boxed{t = \frac{-\cos y + c}{y}}$

$$\boxed{\frac{1}{x^2} = \frac{-\cos y + c}{y}} \longleftarrow \frac{1}{x^2} = t$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۸

۵) $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - \ln x^2$ معادله کوشی اویلر ناهمگن

$$\xrightarrow[\text{تغییر متغیر}]{x=e^t ,\ \ln x = t} \quad e^{2t}\underbrace{\left(e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right)} - 2e^{t}\underbrace{\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)} + 2y = t^2 - 2t$$

این عبارات به کمک مشتق زنجیره ای بدست می آیند

$$\xrightarrow{\text{ساده سازی}} y'' - 3y' + 2y = t^2 - 2t \longrightarrow$$ تبدیل شد به معادله با ضرایب ثابت

$$\xrightarrow{\text{حالت همگن}} y'' - 3y' + 2y = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} t^2 - 3t + 2 = 0 \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{y_h = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \boxed{y_h = c_1 x + c_2 x^2}$$

$$\xrightarrow[\text{روش ضرایب نامعین}]{\text{حالت ناهمگن}} \begin{cases} y = At^2 + Bt + C \\ y' = 2At + B \\ y'' = 2A \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} 2A - 3(2At + B) + 2(At^2 + Bt + C) = t^2 - 2t$$

$$\xrightarrow{\text{ساده سازی}} 2At^2 + (2B - 6A)t + (2C - 3B + 2A) = t^2 - 2t$$

$$\text{مقایسه طرفین} \begin{cases} 2A = 1 \longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}} \\ 2B - 6A = -2 \longrightarrow 2B - 3 = -2 \longrightarrow 2B = 1 \longrightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}} \\ 2C - 3B + 2A = 0 \longrightarrow 2C - \frac{3}{2} + 1 = 0 \longrightarrow 2C = \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{C = \frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{y_p = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \boxed{y_p = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2}(\ln x) + \frac{1}{4}}$$

$$\boxed{y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۸

4) $y'' + y = \cos 2x$ معادله خطی با ضرایب ثابت ناهمگن

قسمت همگن $\rightarrow$ $y''+y=0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} t^2+1=0 \rightarrow t^2=-1 \rightarrow t=\pm i$

$$\rightarrow \boxed{y_h = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)}$$

برای حل قسمت ناهمگن (جواب خصوصی)

از هر سه روش: اپراتور، لاگرانژ، ضرایب نامعین قابل حل است؛

$$\xrightarrow{\text{اپراتور}} D^2y + y = \cos 2x \rightarrow y(D^2+1) = \cos 2x \rightarrow y = \frac{1}{D^2+1}\cos 2x$$

$$\xrightarrow{D^2=-4} \boxed{y_p = -\frac{1}{3}\cos 2x}$$

math-teacher.blog.ir

$$\xrightarrow{\text{ضرایب نامعین}} y = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

$$y' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$y'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + A\cos(2x) + B\sin(2x) = \cos 2x$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه طرفین}} \begin{cases} -3A = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{3} \\ -3B = 0 \rightarrow B = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{y_p = -\frac{1}{3}\cos 2x}$$

$$\boxed{y = y_h + y_p = c_1\sin(x) + c_2\cos(x) - \frac{1}{3}\cos(2x)}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
ریاضی ۱و۲،معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی،محاسبات عددی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۸