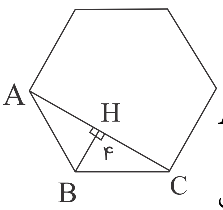
ریاضی

۱ گزینه ۱

ابتدا اندازهٔ هر زاویهٔ شش ضلعی منتظم را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(۶-۲)\times ۱۸۰^\circ}{۶}=۱۲۰^\circ$$



چون شش ضلعی منتظم است، پس $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است؛ درنتیجه:

$$\hat{A}=\hat{C}=\frac{۱۸۰-(۱۲۰)}{۲}=\frac{۶۰}{۲}=۳۰^\circ$$

مطابق صورت‌مسئله در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، BH ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° است، پس نصف وتر است؛ بنابراین $AB=۸$ و طبق فیثاغورس می‌توانیم AH را به دست آوریم:

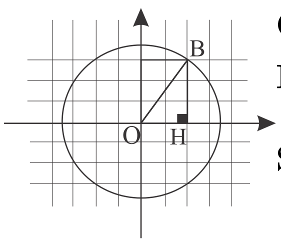
$$AH^۲=۸^۲-۴^۲=۶۴-۱۶=۴۸\Rightarrow AH=\sqrt{۴۸}\Rightarrow AC=۲\sqrt{۴۸}$$

پس مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ را می‌توانیم به دست آوریم:

$$S=\frac{\cancel{۲}\sqrt{۴۸}\times ۴}{\cancel{۲}}=۴\sqrt{۴۸}=۴\times ۴\sqrt{۳}=۱۶\sqrt{۳}$$

۲ گزینه ۴

برای به دست آوردن مساحت دایره نیاز به شعاع داریم، پس طبق رابطهٔ فیثاغورس، ابتدا وتر مثلث OBH که همان شعاع دایره است را به دست می‌آوریم:

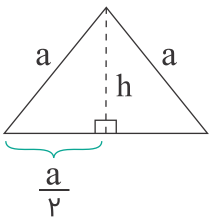


$$\begin{matrix} OH=۲ \\ BH=۳ \end{matrix}\Rightarrow OB^۲=۲^۲+۳^۲=۴+۹=۱۳\Rightarrow OB=\sqrt{۱۳}$$

$$S=\pi r^۲=۳\times(\sqrt{۱۳})^۲=۳\times ۱۳=۳۹$$

۳ گزینه ۱

نکته: می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع وارد بر قاعده، قاعده را نصف می‌کند.



می‌دانیم برای به دست آوردن مساحت مثلث نیاز به ارتفاع مثلث داریم و طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$h^۲ = a^۲ - \left(\frac{a}{۲}\right)^۲$$

$$h^۲ = \frac{a^۲ \times ۴}{۱ \times ۴} - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۳}{۴}a^۲ \Rightarrow h = \sqrt{\frac{۳a^۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}a}{۲}$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \times a}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

۴ گزینه ۱

چون دو شکل همنهشت هستند، پس:

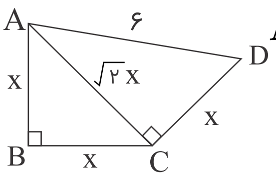
$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{F} \Rightarrow ۲x = ۱۰۸^\circ \quad \Rightarrow x = ۵۴^\circ \\ \hat{D} = \hat{H} \Rightarrow (۳y + ۱۲)^\circ = (۴y - ۸)^\circ \Rightarrow y = ۲۰^\circ \end{array}\right\} x - y = ۵۴ - ۲۰ = ۳۴^\circ$$

باتوجه‌به گزینه‌ها می‌بینیم که $۲۰ < ۳۴ < ۵۴$؛ بنابراین:

$$۲۰ < x - y < ۵۴$$

۵ گزینه ۲

قرار می‌دهیم: $AB = BC = CD = x$؛ بنابراین طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC داریم:



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow AC^۲ = x^۲ + x^۲ = ۲x^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۲}x$$

در مثلث ACD طبق رابطهٔ فیثاغورس خواهیم داشت:

$$AD^۲ = AC^۲ + CD^۲ \Rightarrow ۶^۲ = (\sqrt{۲}x)^۲ + x^۲ \Rightarrow ۳۶ = ۲x^۲ + x^۲ = ۳x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱۲ \Rightarrow x = \sqrt{۱۲} = \sqrt{۴ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$$

۶ گزینه ۱

ابتدا بررسی می‌کنیم، مثلث داده‌شده چه نوع مثلثی می‌باشد. باتوجه‌به اینکه مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° می‌باشد، داریم:

$$x + x + ۴۰^\circ + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$۲x + ۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x = ۱۰۰^\circ \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

پس نتیجه می‌گیریم $\hat{B} = ۹۰^\circ$ است و طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$(a+b)^۲ = (۲\sqrt{ab})^۲ + OB^۲ \Rightarrow OB^۲ = (a+b)^۲ - (۲\sqrt{ab})^۲ \Rightarrow OB^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab - ۴ab$$

$$OB^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab \Rightarrow OB^۲ = (a-b)^۲ \Rightarrow OB = \pm(a-b)$$

چون $a > b$ است، مقدار $-(a-b)$ مقداری منفی شده و چون طول نمی‌تواند منفی باشد، درنتیجه غیرقابل‌قبول است، پس:

$$OB = a - b$$

۷ گزینه ۱

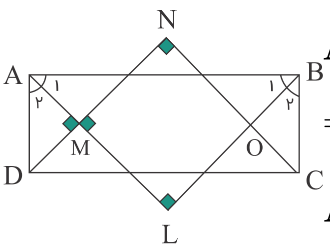
$OH = ۲ \times ۱ = ۲$ ضلع روبه‌رو به ۳۰°نصف وتر است

$$OT^۲ = (\sqrt{۵})^۲ + ۲^۲ = ۵ + ۴ = ۹ \Rightarrow OT = ۳ \Rightarrow OD = ۳$$

$$OC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲ = \sqrt{۳} \qquad CD = ۳ - \sqrt{۳}$$

۸ گزینه ۳

چون زوایای مستطیل ۹۰° هستند، با رسم نیمسازهای آن همهٔ زاویه‌ها به دو زاویهٔ ۴۵° تقسیم می‌شوند و در محل تلاقی نیمسازها زاویهٔ قائمه ایجاد خواهد شد. مثلث‌های ALB و AMD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند. ضلع $AL = x$ و $AM = y$ در نظر می‌گیریم:



$$\overset{\Delta}{ALB} : AL^۲ + LB^۲ = AB^۲ \Rightarrow x^۲ + x^۲ = AB^۲ \Rightarrow ۲x^۲ = ۱۲^۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow x^۲ = ۷۲ \Rightarrow x = ۶\sqrt{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AMD} = AM^۲ + MD^۲ = AD^۲ \Rightarrow y^۲ + y^۲ = AD^۲ \Rightarrow ۲y^۲ = ۴^۲$$

$$\Rightarrow ۲y^۲ = ۱۶ \Rightarrow y^۲ = ۸ \Rightarrow y = ۲\sqrt{۲}$$

ضلع مربع : $۶\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲} = \sqrt{۲}(۶-۲) = ۴\sqrt{۲}$

مساحت مربع : $۴\sqrt{۲} \times ۴\sqrt{۲} = ۱۶ \times ۲ = ۳۲$

۹ گزینه ۲

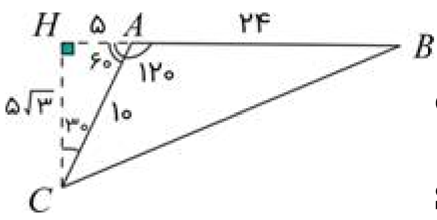
الگوی مثلث‌ها را به دست می‌آوریم:

مثلث اول : طول وتر $= \sqrt{۲}$
مثلث دوم : طول وتر $= \sqrt{۳}$
...

با قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود که اندازهٔ وتر در مثلث، $\sqrt{n+۱}$ است.

$$\frac{\text{طول وتر مثلث دوازدهم}}{\text{طول وتر مثلث سوم}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۴}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

۱۰ گزینه ۲



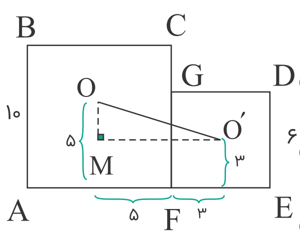
ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است : $AH = \frac{۱۰}{۲} = ۵$

$$CH^{۲} = ۱۰^{۲} - ۵^{۲} = ۷۵ \Rightarrow CH = \sqrt{۷۵} = ۵\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۲۴ \times ۵\sqrt{۳}}{۲} = ۶۰\sqrt{۳}$$

۱۱ گزینه ۴

مرکز تقارن مربع محل برخورد قطرها است.



$$OM = ۵ - ۳ = ۲$$

$$O'M = ۵ + ۳ = ۸$$

$$OO'^{۲} = OM^{۲} + O'M^{۲} = ۲^{۲} + ۸^{۲} = ۴ + ۶۴ = ۶۸$$

$$OO' = \sqrt{۶۸} = \sqrt{۴ \times ۱۷} = ۲\sqrt{۱۷}$$