فصل ۵

توابع مولد

۱-۵- توابع مولد عادی

همان‌گونه که در فصل‌های قبلی دیدیم یکی از مهمترین وظایف ترکیبیات ساختن ابزاری برای شمارش است. شاید یکی از قویترین و کاربردی‌ترین این وسایل مبحثی به نام توابع مولد باشد. این مبحث ریشه در کارهای« مویور» در حدود سال‌های ۱۷۲۰ دارد و توسط « اولر» در سال ۱۷۴۸ هنگامی که او روی مسایل افراز اعداد صحیح کار می‌کرد، توسعه یافت. بعدها در اواخر قرن ۱۸، توسط « لاپلاس» گسترش پیدا کرد و به شکل یک بحث علمی در آمد. در واقع مبحث توابع مولد نام خود را از یکی از کتاب‌های « لاپلاس» به نام « نظریه تحلیلی احتمالات » (پاریس ۱۸۱۲) گرفته است.

دنباله‌ی $(a_r) = (a_0, a_1, \ldots, a_r, \ldots)$ را در نظر بگیرید. برای دنباله‌ی (a_r) تابع

مولدی را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$A(x)=\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

دو تـــابع مولـــد$A(x)$ و$B(x)$ بـــرای دو دنبالـــه (a_r) و (b_r)مســـاوی هستند($A(x)$=$B(x)$) اگروفقط اگر $(i \in N^*) a_i = b_i$.

ممکن است بتوانیم x را طوری انتخاب کنیم که دنباله‌ی همگرا باشد. امـا در ایـن فصل به همگرایی سری‌ها کاری نداریم و فقط به ضرایب می‌پردازیم. « ایـوان نیـون» [N] بحثـی عـالی دربـارهٔ نظریـه‌ی سـری‌های توانـی انجـام داده است بـه مـا اجـازه می‌دهدکه سؤال همگرایی را نادیده بگیریم. می‌توانیـم عمـل ضـرب و جمـع را بـرای سری‌های توانی، مانند چند جمله‌ای‌ها، به شکل زیر تعریف کنیم:

فرض کنید $A(x)$ و$B(x)$ تابع مولد برای دو دنباله‌ی (a_r) و (b_r)باشند. یعنی:

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$
$$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots$$

آنگاه دو دنباله‌ی $A(x)$+$B(x)$ و$A(x)B(x)$برای دو دنباله‌ی $A(x)$ و$B(x)$ برابر اسـت با:

$$A(x)+B(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots$$
$$A(x)B(x)=d_0+d_1x+d_2x^2+\dots$$

که در آنها

$$c_r=a_r+b_r \qquad (r=0,1,2,\dots)$$
$$d_r=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\dots+a_{r-1}b_1+a_rb_0 \qquad (r=0,1,2,\dots)$$

با جایگزینی به دست می‌آوریم:

$$A(x)+B(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots;$$

و

$$A(x)B(x)=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots;$$

و نیز برای عدد حقیقی ثابت α داریم

$$\alpha A(x)=(\alpha a_0)+(\alpha a_1)x+(\alpha a_2)x^2+\ldots$$

تبصره:

دنباله‌ی (c_r)، ترکیب دو تابع تعریف می‌شود و دنباله (d_r) به *نام حاصل ضرب کاچی یا حاصل‌ضرب تلفیقی دو تابع* تعریف می‌شود. وقتی دو دنباله متناهی باشند هر دوی این عملگرها دقیقا" مانند چند جمله‌ای‌ها عمل می‌کنند. در این فصل نشان خواهیم داد چگونه با استفاده از توابع مولد، ترکیبیات به جبر متصل می‌شود. در حقیقت این مهمترین فایدهٔ نظریه‌ی توابع مولد است.

حال به ازای هر عدد حقیقی α و عدد طبیعی r «ضریب دو جمله‌ای تعمیم یافته» $\binom{\alpha}{r}$ را این گونه تعریف می‌کنیم:

$$\binom{\alpha}{r}=\frac{p_r^\alpha}{r!}$$

که $p_r^\alpha=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r+1)$ و $\binom{\alpha}{0}=1$ تعریف می‌شود.

حال بسط دو جمله‌ای« نیوتن» را این‌گونه تعمیم می‌دهیم:

$$(1\pm x)^\alpha=\sum_{r=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{r}(\pm x)^r$$
$$=1\pm\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2\pm\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$+(-1)^r \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-r+1)}{r!}x^r+\dots \qquad (۵-۱-۱)$$

اثبات این بسط را می‌توان در کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت. توجه کنید که سری‌های (۱-۱-۵) در حالتی‌که α عدد صحیح مثبتی نباشد، سری‌های نامتناهی هستند. بحث تعمیم یافته $\binom{\alpha}{r}$ ویژگی‌های مشابهی مانند ضرایب بسط دو جمله‌ای دارد. برای مثال به ازای هر α حقیقی و r طبیعی داریم:

$$\binom{\alpha+1}{r}=\binom{\alpha}{r}+\binom{\alpha}{r-1}$$

طبق (۱-۱-۵) داریم:

$$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\dots;$$

و

$$\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots;$$

و در حالت کلی داریم:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^n}&=(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\dots\\&=1+\binom{1+n-1}{1}x+\binom{2+n-1}{2}x^2+\dots+\binom{r+n+1}{r}x^r+\dots,\ (\text{به ازای هر عدد طبیعی } n)\end{aligned}}$$

مثال ۱-۱-۵ (الف) به ازای هر عدد n ($n \in N^*$)، دنباله‌ی (a_r) را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$a_r=\begin{cases}1 & r=n\\ 0 & r\neq n\end{cases}$$

یعنی:

$$(a_r) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow\uparrow & & \uparrow \\ 0\ 1 & & n \end{array}$$

پس تابع مولد دنباله‌ی (a_r) برابر x^n است.

(ب) تابع مولد برای دنباله‌ی $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}, 0, 0, \ldots\right)$ برابر است با:

$$\sum_{r=0}^{n} C_r^n x^r = (1+x)^n \qquad (5-1-2)$$

(ج) تابع مولد برای دنباله‌ی (۱،۱،۱،...) برابر است با:

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \qquad (5-1-3)$$

در حالت کلی تابع مولد برای دنباله‌ی $(1, k, k^2, \ldots)$ که k مقدار ثابتی است برابر است با:

$$1 + kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \ldots = \frac{1}{1-kx} \qquad (5-1-4)$$

(د) در حالت دیگر تابع مولد برای دنباله‌ی (۱،۲،۳،...) برابر است با:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (5-1-5)$$

(هـ) تابع مولد برای دنباله‌ی $\left(\binom{n-1}{0}, \binom{1+n-1}{1}, \ldots, \binom{r+n-1}{r}, \ldots\right)$ برابر است با:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{r} = \frac{1}{(1-x)^n} \quad \blacksquare \qquad (5-1-6)$$

فرمول‌های (۵-۱-۲) تا (۵-۱-۶) در یافتن ضرایب توابع مولد بسیار کار ساز هستند. به مثال بعد توجه کنید.

مثال ۲-۱-۵ : ضریب جمله x^k، $(k \geq ۱۸)$، را در بسط زیر بیابید.

$$(x^۳ + x^۴ + x^۵ + \ldots)^۶$$

حل. مشاهده می‌کنید که

$$\begin{aligned}
&(x^۳ + x^۴ + x^۵ + \ldots)^۶ \\
&= \{x^۳(۱ + x + x^۲ + \ldots)\}^۶ \\
&= x^{۱۸}(۱ + x + x^۲ + \ldots)^۶ \\
&= x^{۱۸}\left(\frac{۱}{۱-x}\right)^۶ \\
&= x^{۱۸}\sum_{r=۰}^{\infty}\binom{r+۶-۱}{r} x^r \\
&= x^{۱۸}\sum_{r=۰}^{\infty}\binom{r+۵}{۵} x^r
\end{aligned}$$

بنابراین ضریب جمله x^k $(k \geq ۱۸)$، در بسط $(x^۳ + x^۴ + x^۴ + \ldots)^۶$ برابر ضریب جمله $x^{k-۱۸}$ در $\sum_{r=۰}^{\infty}\binom{r+۵}{۵} x^r$ است که برابر $\binom{k-۳}{۵}$ است. ■

مثلاً در این بسط ضریب جمله $x^{۲۰}$ برابر $\binom{۱۷}{۵}$ است.

قضیه ۱-۱-۵ (عملگرهای توابع مولد)

فرض کنید $A(x)$ و $B(x)$ دو تابع مولد برای دنباله‌های (a_r) و (b_r) باشد. بنابراین:

(الف) به ازای دو عدد α و β تابع مولد $\alpha A(x) + \beta B(x)$ تابع مولدی برای دنباله‌ی (c_r) تعریف می‌شود که

$$c_r = \alpha a_r + \beta b_r$$

(ب) $A(x)B(x)$ تابع مولد دنباله‌ی (c_r) است که

$$c_r = a_0 b_r + a_0 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \ldots + a_{r-1} b_1 + a_r b_0$$

ج) $A^2(x)$ تابع مولد دنباله‌ی (c_r) است که

$$c_r = a_0 a_r + a_1 a_{r-1} + a_2 a_{r-2} + \ldots + a_{r-1} a_1 + a_r a_0$$

د) $x^m A(x)$ به ازای عدد طبیعی m، تابع مولد دنباله‌ی (c_r) تعریف می‌شود که

$$c_r = \begin{cases} 0 & 0 \le r \le m-1 \\ a_{r-m} & r \ge m \end{cases}$$

ه) $A(kx)$، به ازای مقدار ثابت k، یک تابع مولد برای دنباله‌ی (c_r) است که

$$c_r = k^r a_r$$

و) $(1-x)A(x)$، تابع مولد تعریف شده برای دنباله‌ی (c_r) است که

$$c_0 = a_0 \quad \text{و} \quad c_r = a_r - a_{r-1} \qquad (r \ge 1)$$

یعنی:

$$(c_r) = (a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots);$$

ز) $\dfrac{A(x)}{1-x}$، تابع مولد تعریف شده برای دنباله‌ی (c_r) است که

$$c_r = (a_0 + a_1 + \ldots + a_r)$$

یعنی:

$$(c_r) = (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$$

ح) $A'(x)$، تابع مولد برای دنباله‌ی (c_r) تعریف می‌شود که

$$c_r = (r+1) a_{r+1}$$

یعنی:

$$(c_r) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots)$$

(ط) $xA'(x)$، تابع مولد برای دنباله‌ی (c_r) تعریف می‌شود که

$$c_r = ra_r$$

یعنی:

$$(c_r) = (0, a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots)$$

(ی) $\int_0^\infty A(t)dt$ تابعی برای دنباله‌ی (c_r) تعریف شده است که

$$c_0 = 0 \quad \text{و} \quad c_r = \frac{a_{r-1}}{r} \quad (r \geq 1)$$

یعنی:

$$(c_r) = (0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots)$$

اثبات. قسمت‌های (الف)، (ب) و (ه) مستقیماً به دست می‌آیند و قسمت‌های (ج)، (د) و (و) حالت‌های خاص از قسمت (ب) هستند. قسمت‌های (ح)، (ط) و (ی) نیز به سادگی اثبات می‌شوند. در اینجا فقط قسمت (ز) را ثابت خواهم کرد.

(ز) طبق (۳-۱-۵)، $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$. بنابراین:

$$\frac{A(x)}{1-x} = A(x)(1 + x + x^2 + \ldots) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots)$$

$$= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \ldots$$

بنابراین $\frac{A(x)}{1-x}$ تابع مولد دنباله‌ی (c_r) است که $c_r = a_0 + a_1 + \ldots + a_r$. ■

از قضیه ۱-۱-۵ دریافتیم که عمل‌گرهایی که روی رشته‌ها تعریف می‌شوند را می‌توان به سادگی برای توابع مولدشان تعریف کرد. بنابراین توابع مولد، ابزاری کاربردی برای عملیاتی جبری روی سری‌ها هستند.

مثال ۳-۱-۵ توابع مولد هر کدام از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $c_r = ۳r + ۵$ ، $(r \in N^*)$

ب) $c_r = r^۲$ ، $(r \in N^*)$

حل.(الف) دنباله‌های $a_r = r$ و $b_r = ۱$ را در نظر بگیرید. تابع مولد برای دنباله‌ی (a_r)، $\frac{x}{(۱-x)^۲}$ است. و برای (b_r)، $\frac{۱}{۱-x}$.

بنابراین طبق قضیه ۱-۱-۵ (الف) تابع مولد برای دنباله‌ی $c_r = ۳r + ۵ = ۳a_r + ۵b_r$ برابر $\frac{۵}{(۱-x)} + \frac{۳x}{(۱-x)^۲}$ است.

(ب) دنباله‌ی $a_r = r$ را در نظر بگیرید. همان گونه که در (الف) دیدیم تابع مولد برای دنباله‌ی (a_r)، تابع $\frac{x}{(۱-x)^۲}$ است.

از طرفی $c_r = r^۲ = ra_r$ و طبق قضیه ۱-۱-۵ تابع مولد برابر دنباله‌ی (a_r) برابر است با:

$$xA'(x) = x.\frac{(۱-x)^۲ + x.۲(۱-x)}{(۱-x)^۴} = \frac{x(۱+x)}{(۱-x)^۳} \quad .\blacksquare$$

۲-۵- چند مساله نمونه

در این بخش نشان خواهیم داد که چگونه مبحث توابع مولد که در بخش گذشته بوجود آمده می‌تواند در حل مسایل ترکیبیات کاربرد داشته باشد در بین این مثال‌ها، خوانندگان می‌توانند تکنیک‌های کاربردی در حل مسایل را ببینند.

برای شروع ، مجموعه‌ی $S=\{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. تعداد راه‌های انتخاب شی از S هشت راه است.

برای انتخاب یک شی از S داریم:

$\{c\}$ یا $\{b\}$ یا $\{a\}$ (با $a+b+c$ نمایش داده می‌شود)

برای انتخاب دوشی از S داریم:

$\{b,c\}$ یا $\{a,c\}$ یا $\{a,b\}$ (با $ab+ac+bc$ نمایش داده می‌شود)

برای انتخاب سه شی از S داریم:

$\{a,b,c\}$ (با abc نمایش داده می‌شود)

تمام نشانه‌ها در عبارت زیر ظاهر می‌شوند. زیرا جمله‌ی $\binom{n+۲}{۳}$۳ ثابت نیست و بستگی به مقدار n دارد.

$$(۱+ax)(۱+bx)(۱+cx)=$$
$$۱x^{\circ}+(a+b+c)x^{۱}+(ab+ac+bc)x^{۲}+(abc)x^{۳} \qquad (*)$$

می‌توانیم $(۱+ax)$ را به صورت $x^{\circ}+ax^{۱}$ بنویسیم که به معنی این است که a انتخاب نشود یا یکبار a انتخاب شود.

$$۱+ax = x^{\circ} + ax^{۱}$$

"a" انتخاب نشود — یا — "a" یکبار انتخاب شود

به طور مشابه، می‌توان $(۱+bx)$ و $(۱+cx)$ را نیز به همان صورت نشان داد.

با بسط دادن عبارت سمت چپ تساوی (*)، به عبارت سمت راست خواهیم رسید.

در این بسط می‌بینیم که تعداد راه‌های انتخاب k شی، در ضریب جمله‌ی x^k ظاهر شده است. از آنجا که فقط به دنبال تعداد راه‌های انتخاب و نه خود

راه‌ها هستیم می‌توانیم حالت سادهٔ $a=b=c=1$ را در نظر بگیریم و

$$(1+x)(1+x)(1+x)=1+3x+3x^2+x^3$$

که این عبارت یک تابع مولد برای دنباله‌ی (۱،۳،۳،۱،۰، ...) یا (۱،۳،۳،۱) است. بنابراین تابع مولد برای تعداد راه‌های انتخاب r شی از ۳ شی، تابع $(1+x)^3$ است.

مثال ۱-۲-۵ مجموعه‌ی $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید a_r نمایش دهندهٔ تعداد راه‌های انتخاب r شی از اعضای S باشد. بنابراین تابع مولد برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$(1+x)(1+x)\dots(1+x)=(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

$$(s_1)\qquad(s_2)\qquad(s_n)$$

بنابراین $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r=\sum_{r=0}^{\infty}(a_r)x^r$ که ایجاب می‌کند

$$a_r=\begin{cases}C_r^n & (0\le r\le n)\\ 0 & (r\ge n+1)\end{cases}$$ ■

حال شبه مجموعه‌ی $S=\{2.a,1.b\}$ را در نظر بگیرید. به شش حالت می‌توان چند عضو از بین اعضای S را انتخاب کرد.

برای انتخاب یک شی از S داریم:

$\{a\}$ یا $\{b\}$ (با $a+b$ نمایش داده می‌شود)

برای انتخاب دو شی از S، داریم:

$\{a,a\}$ یا $\{a,b\}$ (با $a^{۲}+ab$ نمایش داده می‌شود)

برای انتخاب سه شی از S داریم:

$\{a,a,b\}$ (با $a^{۲}b$ نمایش داده می‌شود)

که تمام نشانه‌ها در عبارت زیر ظاهر می‌شوند.

$$(۱+ax+a^{۲}x^{۲})(۱+bx)=۱x^{۰}+(a+b)x^{۱}+(a^{۲}+ab)x^{۲}+(a^{۲}b)x^{۳}$$

مانند قبل، می‌توان به سادگی دید که هر کدام از ضرایب جملات، نشان دهندهٔ تعداد راه‌های انتخاب اشیاء، به تعداد توان همان جمله‌ی، از شبه مجموعه‌ی S هستند. دوباره برای اینکه تعداد راه‌های انتخاب را به دست آوریم، می‌توانیم $a=b=۱$ در نظر بگیریم و داریم:

$$(۱+x+x^{۲})(۱+x)=۱+۲x+۲x^{۲}+۱x^{۳}$$

که این عبارت یک تابع مولد برای دنباله‌ی (...، ۰، ۰،۱،۲،۲،۱) است و از این رو تابع مولد برای تعداد راه‌های انتخاب r شی از شبه مجموعه‌ی $S=\{۲.a,۱.b\}$ برابر $(۱+x+x^{۲})(۱+x)$ است.

مثال ۲-۲-۵ تعداد راه‌های انتخاب ۴ شی از شبه مجموعه‌ی $M=\{۲.b,۱.c,۲.d,۱.e\}$ را بیابید.

حل. فرض کنید a_r برابر تعداد راه‌های انتخاب r عضو از M تعریف شود. آنگاه تابع مولد برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$(۱+x+x^{۲})(۱+x)(۱+x+x^{۲})(۱+x)$$
$$=(۱+۲x+۲x^{۲}+x^{۳})(۱+۲x+۲x^{۲}+x^{۳})$$

مقدار $a_۴$ برابر ضریب جمله‌ی $x^{۴}$ در حاصل‌ضرب بالاست. پس $a^{۴}=۲+۴+۲=۸$.

در حالت کلی داریم:

فرض کنید b_r برابر تعداد راه‌های انتخاب r شی از شبه مجموعه‌ی $M=\{n_1.a_1,n_2.a_2,\ldots,n_k.a_k\}$ باشد.
آنگاه تابع مولد دنباله‌ی (b_r) تابع زیر است:

$$\underset{(a_1)}{(1+x+x^2+\ldots+x^{n_1})}\underset{(a_2)}{(1+x+x^2+\ldots+x^{n_2})}\ldots\underset{(a_k)}{(1+x+x^2+\ldots+x^{n_k})}$$

که b_r، ضریب جمله‌ی x^r در بسط حاصل ضرب فوق است.

مثال ۳-۲-۵ فرض کنید a_r تعداد راه‌های انتخاب r شی از شبه مجموعه‌ی $M=\{\infty.b_1,\infty.b_2,\ldots,\infty.b_k\}$ باشد. آنگاه تابع مولد برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$\underset{(b_1)}{(1+x+x^2+\ldots)}\underset{(b_2)}{(1+x+x^2+\ldots)}\ldots\underset{(b_k)}{(1+x+x^2+\ldots)}$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}\right)^k=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{r}x^r$$

بنابراین داریم : $a_r=\binom{r+k-1}{r}$ ■

تبصره:

جواب a_r در مثال ۳-۲-۵ می‌تواند با شمارش ضریب x^r در تابع مولد زیر نیز به دست آید:

$$(1+x+x^2+\ldots+x^r)^k$$

از آنجا که ضرایب متناهی هستند نمی‌توان عبارت‌ها را به شکل بالا ساده کرد و داریم:

$$(1+x+x^2+\ldots+x^r)^k=\left(\frac{1-x^{r+1}}{1-x}\right)^k$$

که به عبارتی مشکل‌تر از مثال بالا می‌انجامد.

مثال ۴-۲-۵ فرض کنید a_r برابر تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در n جعبه متمایز باشد آنگاه تابع مولد برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است:

$$\underset{(\text{جعبه } 1)}{(1+x+x^2+\ldots)}\underset{(\text{جعبه } 2)}{(1+x+x^2+\ldots)}\ldots\underset{(\text{جعبه } n)}{(1+x+x^2+\ldots)}$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}\right)^n=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+n-1}{r}\ x^r$$

بنابراین داریم: $a_r=C_r^{r+k-1}$. ■

مثال ۵-۲-۵ فرض کنید a_r برابر تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در n جعبه متمایز باشد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند. پس هر جعبه باید حداقل دارای یک شی باشد و تابع مولد برای هر تابع $(x+x^2+x^3+\ldots)$است. بنابراین تابع مولد برای (a_r) برابر است با

$$(x+x^2+\ldots)^n=x^n(1+x+\ldots)^n$$

$$=x^n\left(\frac{1}{1-x}\right)^n$$

$$=x^n\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+n-1}{i}x^i$$

بنابراین داریم:

$$a_r = \begin{cases} 0 & (r < n) \\ \binom{r-1}{n-1} & (r \geq n) \end{cases}$$

مثال ۶-۲-۵ یک تاس را سه بار به هوا پرتاب می‌کنیم. در چند حالت مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۱۴ خواهد بود؟

حل. a_r را برابر تعداد راه‌هایی در نظر بگیرید که مجموع اعداد r شود. از آنجا که اعداد ظاهر شده ۶،۵،۴،۳،۲،۱ هستند پس تابع برای (a_r) تابع زیر است.

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$$
$$= x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3 = x^3\left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^3$$
$$= x^3(1 - 3x^6 + 3x^{12} - x^{18})\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+2}{2}x^i$$

از آنجا مقدار a_{14} برابر ضریب جمله x^{14} در بسط فوق است داریم:

$$a_{14} = \binom{11+2}{2} - 3\binom{5+2}{2} = \binom{13}{2} - 3\binom{7}{2} \qquad .\blacksquare$$

۳-۵- افراز اعداد صحیح

یک افراز عدد صحیح n، یک شبه مجموعه از اعداد صحیح است که مجموع اعضایش n باشد. (نوشتن n به صورت جمع اعداد طبیعی به طوری که ترتیب اعداد مهم نباشد). از آنجا که ترتیب اعداد مهم نیست، می‌توان هر افراز عدد n را دنباله‌ای

غیر صعودی از اعداد $n_۱ \ge n_۲ \ge ... \ge n_k$ در نظر گرفت به طوری که $\sum_{i=۱}^{k} n_i = n$

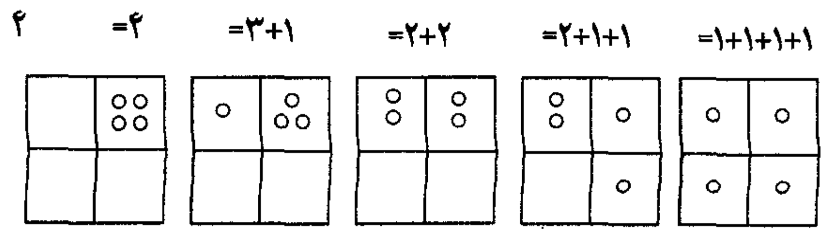
تعداد افزارهای مختلف عدد n را با $p_{(n)}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱-۳-۵ جدول زیر افزارهای اعداد ۴،۳،۲،۱ را نشان می‌دهد.

n	افزارهای عدد n	$p(n)$
۱	۱	۱
۲	۲=۱+۱	۲
۳	۳=۲+۱=۱+۱+۱	۳
۴	۴=۳+۱=۲+۲=۲+۱+۱=۱+۱+۱+۱	۵
۵	۵=۴+۱=۳+۲=۳+۱+۱=۲+۲+۱=۲+۱+۱+۱=۱+۱+۱+۱+۱	۷

نکته. (۱) اگر $n = n_۱ + n_۲ + ... + n_k$ یک حالت افراز عدد n باشد. می‌گوییم n به k جزء با اندازه‌های $n_۱, n_۲, ..., n_k$ تقسیم شده است. بنابراین در افراز ۱+۲+۳+۳=۹، ۴ جزء با اندازه‌های ۳،۳،۲،۱ بوجود آمده‌اند.

(۲) یک افراز عدد n تعداد راه‌های توزیع n شی همانند در n جعبه همانند است. (جعبه‌های می‌توانند خالی باشند)، همان گونه که در شکل زیر نشان داده‌ایم، ۴ شی همانند را در ۴ جعبه همانند به ۵ حالت می‌توان نشان داد.



مثال ۲-۳-۵ فرض کنید (a_r) تعداد راه‌های افراز عدد صحیح r به اجزایی با اندازه ۱،۲،۳ باشند. تابع مولد برای (a_r) عبارتست از

$$\underset{\text{(اندازه ۱)}}{(۱+x+x^۲+\ldots)}\underset{\text{(اندازه ۲)}}{(۱+x^۲+x^۴+\ldots)}\underset{\text{(اندازه ۳)}}{(۱+x^۳+x^۶+\ldots)}$$

$$=\frac{۱}{(۱-x)(۱-x^۲)(۱-x^۳)}$$

توجه کنید که سه عامل تابع مولد فوق به شکل

$$(x^k)^۰+(x^k)^۱+(x^k)^۲+\ldots$$

هستند که k=۱،۲،۳ و $(x^k)^j$ به این معنی است که در افراز j جز با اندازه‌ی k وجود دارد. حال جمله‌ی $x^۳$ و ضریبش را در نظر بگیرید. می‌بینیم که ضریب جمله $x^۳$ برابر ۳ است و این به آن معنی است که ۳ راه برای افراز عدد ۳ وجود دارد.

$x^۳=(x^۱)^۰(x^۲)^۰(x^۳)^۱=(x^۱)^۱(x^۲)^۱(x^۳)^۰=(x^۱)^۳(x^۲)^۰(x^۳)^۰$. که این حاصل‌ضرب‌ها را می‌توان در جدول زیر نشان داد.

$$\begin{array}{lllll} & \text{اندازه ۱} & \text{اندازه ۲} & \text{اندازه ۳} & \\ \multirow{3}{*}{$۳x^۲$} & x^۰ & x^۰ & x^۳ & ۳=۳ \\ & x^۱ & x^۲ & x^۰ & ۳=۱+۲ \\ & x^۳ & x^۰ & x^۰ & ۳=۱+۱+۱ \end{array}$$

و می‌بینیم که ضریب جمله $x^۴$ در بسط فوق برابر ۴ است پس باید ۴ راه برای افراز ۴ به اعداد ۱،۲،۳ وجود داشته باشد.

اندازه ۱   اندازه ۲   اندازه ۳

$$4x^4\begin{cases} x^0 & x^4 & x^0 & 4=2+2 \\ x^1 & x^0 & x^3 & 4=1+3 \\ x^2 & x^2 & x^0 & 4=1+1+2 \\ x^4 & x^0 & x^0 & 4=1+1+1+1 \end{cases}$$

مثال ۳-۳-۵ فرض کنید a_r تعداد افرازهای عدد r به اعداد نامساوی با اندازه‌های ۱،۲،۳،۴ باشد. تابع مولد برای (a_r) تابع زیر است:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$$

می‌دانیم که تکرار مجاز نیست و هر عدد k حداکثر یکبار آمده است. دو راه برای نوشتن x^6 وجود دارد. زیرا:

$$x^6 = 1.x^2.1.x^4 \leftrightarrow 6 = 2+4$$

$$x^6 = x.x^2.x^3.1 \leftrightarrow 6 = 1+2+3$$

بنابراین $a_6 = 2$. ■

مثال ۴-۳-۵ فرض کنید (a_r) نمایش دهنده تعداد افرازهای عدد r به اعداد نامساوی با اندازه‌های دلخواه باشد. برای مثال:

۶=۵+۱=۴+۲=۳+۲+۱

۷=۶+۱=۵+۲=۴+۳=۴+۲+۱

۸=۷+۱=۶+۲=۵+۳=۵+۲+۱=۴+۳+۱

به سادگی می‌توان دید که تابع مولد (a_r) تابع زیر است.

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots=\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)$$

(۱)   (۲)   (۳)

توجه کنید که تعداد جملات سمت چپ بی‌نهایت است، چون اندازهٔ اجزا دلخواه هستند.

برای مثال در حاصل‌ضرب بالا، ۴ روش برای ساختن $x^۶$ وجود دارد.

$$x^۶ = x^۶ \leftrightarrow ۶ = ۶$$

$$x^۶ = x^۱x^۵ \leftrightarrow ۵ = ۱ + ۵$$

$$x^۶ = x^۲x^۶ \leftrightarrow ۶ = ۲ + ۴$$

$$x^۶ = x^۱x^۲x^۳ \leftrightarrow ۶ = ۱ + ۲ + ۳$$

مثال ۵-۳-۵ یک جزء در افراز فرد نامیده می‌شود، اگر اندازهٔآن فـرد باشـد. فرض کنید (b_r) نشان دهندهٔ تعداد افرازهای r به اجزا فرد باشد. برای مثال،

۶=۵+۱=۳+۳=۳+۱+۱+۱=۱+۱+۱+۱+۱+۱ ;

۷=۷=۵+۱+۱=۳+۳+۱=۳+۱+۱+۱+۱=۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱ ;

۸=۷+۱=۵+۳=۵+۱+۱+۱=۳+۳+۱+۱=۳+۱+۱+۱+۱+۱=۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱ ;

بنابراین $b_۶ = ۴$، $b_۷ = ۵$، $b_۸ = ۶$.

تابع مولد (b_r) تابع زیر است:

$$(۱+x+x^۲+...)(۱+x^۳+x^۶+...)(۱+x^۵+x^{۱۰}+...) = \frac{۱}{(۱-x)(۱-x^۳)(۱-x^۵)...}$$

(۱) (۳) (۵)

برای مثال در حاصل‌ضرب فوق که چهار حالت $x^۶$ ساخته می‌شود.

$(x^۳)^۲$ ،	$x^۱x^۵$ ،	$(x^۱)^۳x^۳$ و	$(x^۱)^۶$
۳ + ۳	۱ + ۵	۱ + ۱ + ۱ + ۳	۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱

درنتیجه $b_۶ = ۴$. ■

از دو مثال بالا، می‌توان فهمید که $a_{۴} = ۴ = b_{۴}$ ، $a_{۷} = ۵ = b_{۷}$ ، $a_{۸} = ۶ = b_{۸}$. در واقع این تساوی‌ها، حالات خاصی از نتیجه زیر که مربوط به اولراست؛ هستند. او حدود سال ۱۷۴۸، با اثبات چند قضیه زیبا درباره افراز اعداد، این مبحث را بنیان نهاد.

قضیه ۱-۳-۵ (اولر)

تعداد افرازهای n به اجزای فرد با تعداد افرازهای n به اجزای نامساوی برابر است.

اثبات. فرض کنید a_r (b_r)، نمایش دهنده تعداد افرازهای عدد n به اجزای نامساوی (فرد) باشد. آنگاه تابع مولد (a_r) تابع زیراست:

$$\begin{aligned}&(۱+x)(۱+x^{۲})(۱+x^{۳})(۱+x^{۴})\ldots\\&=\frac{۱-x^{۲}}{۱-x}\cdot\frac{۱-x^{۴}}{۱-x^{۲}}\cdot\frac{۱-x^{۶}}{۱-x^{۳}}\cdot\frac{۱-x^{۸}}{۱-x^{۴}}\ldots\\&=\frac{۱}{(۱-x)(۱-x^{۳})(۱-x^{۵})\ldots}\end{aligned}$$

که این تابع، تابع مولد (b_r) است. بنابراین $b_r = a_r$ (r=۱،۲،۳،...). روش استفاده شده در اثبات این قضیه را می‌توان برای مساله‌های دیگری که به مسایل اولر معروفند، به کار برد .

قضیه ۲-۳-۵ تعداد افرازهای n به اجزا، به طوری که هر عدد حداکثر دوبار ظاهر شود با تعداد افرازهایی که اجزای تشکیل دهنده مضرب ۳ نباشند، برابر است.

قبل از اثبات، اجازه دهید درستی آن را به ازای n=۶ تحقیق کنیم. ۷ افراز از عـدد ۶ وجود دارد که در آنها هر عدد حداکثر دوبار ظاهر شده باشد:

۶=۵+۱=۴+۲=۴+۱+۱=۳+۳

=۳+۲+۱=۲+۲+۱+۱ ;

همچنین ۷ افراز برای عدد ۶ وجود دارد که اجزای تشکیل دهنده مضرب ۳ نباشند:

۵+۱=۴+۲=۴+۱+۱=۲+۲+۲=۲+۲+۱+۱

=۲+۱+۱+۱+۱=۱+۱+۱+۱+۱+۱ ;

اثبات قضیه ۲-۳-۵ تعداد افرازهای n به اجزاء، به طوری که هر عـدد حداکـثر دو بار ظاهر شود دنباله‌ای است که تابع آن تابع زیر است:

$$(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8)\ldots$$
$$=\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(1-x)}\frac{(1-x^2)(1+x^2+x^4)}{(1-x^2)}\frac{(1-x^3)(1+x^3+x^6)}{(1-x^3)}$$
$$\frac{(1-x^4)(1+x^4+x^6)}{(1-x^4)}\ldots$$
$$=\frac{1-x^3}{1-x}\frac{1-x^6}{1-x^2}\frac{1-x^9}{1-x^3}\frac{1-x^{12}}{1-x^4}\ldots$$
$$\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^4}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^7}\ldots$$
$$=\prod\left(\frac{1}{1-x^k}\,|\,k\in N, 3\nmid k\right),$$

که این دقیقا" تابع مولد تعداد افرازهای n به اجزاء غیر بخش‌پذیر به ۳ است.

قضیه ۲-۳-۵ به قضیـه کلی زیـر می‌انجـامد کـه در سـال ۱۸۳۳ توسـط« جـی.ال.

گلایشر» کشف شده است.

قضیه ۳-۳-۵ [G]

به ازای دو عدد طبیعی n و k، تعداد افرازهای n به اجزاء، به طوری که هر جزء حداکثر k بار ظاهر شده باشد برابر تعداد افرازهای n به اجزای غیر بخش‌پذیر بر $k+1$ است.

اثبات این قضیه را بر عهده خواننده می‌گذاریم (مسأله ۵-۵۹ را ببینید).

قضیه ۴-۳-۵ تعداد افرازهای عدد n به اجزاء به طوری که هر عدد حداقل دوبار آمده باشد، برابر تعداد افرازهای n به اعدادی است که باقیمانده آنها بر ۶، مساوی ۱ یا ۵ نباشد.

قضیه ۴-۳-۵ اولین بار در تمرینات کتاب [An۱] آمده است. خوانندگان برای اطلاعات بیشتر می‌توانند به مقاله [AL] مراجعه کنند. در این مقاله نتایج زیادی دربارهٔ مسایل « اولر» وجود دارد.

نمودار فررس

یک وسیله مناسب برای مطالعه افرازهای اعداد صحیح نمودارهایی هستند که توسط نرمن. ام. فررس(۱۸۲۹-۱۹۰۳) طرح شده‌اند. *نمودار فررس* برای یک افراز $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ که $n_1 \geq n_2 \geq \ldots n_k$ اعدادی صحیح و مثبت هستند نموداری است که در سطر iام آن n_i ستاره قرار داده شده است. به ازای هر افراز p، $F(p)$ نشان دهنده نمودار فررس افراز p است.

مثال ۶-۳-۵ افراز زیر را از عدد ۱۵ در نظر بگیرید. p:۱۵=۶+۳+۳+۲+۱

نمودار فررس افراز p به شکل زیر است:

$$F(p)\begin{cases} * * * * * * \\ * * * \\ * * * \\ * * \\ * \end{cases}$$

ترانهادهٔ نمودار F، که با F^t نمایش داده می‌شود یک نمودار است که سطرهای آن ستون‌های نمودار F است. بنابراین $F^t(p)$ نمودار زیر است:

$$F'(p)\begin{cases} * * * * * \\ * * * * \\ * * * \\ * \\ * \\ * \end{cases}$$

این نمودار افراز دیگری از عدد ۱۵ را به ما می‌دهد.

Q:۱۵=۵+۴+۳+۱+۱+۱

دو افراز عدد n که نمودارهای فررس آنها ترانهادهٔ همدیگر هستند، *افرازهای مزدوج* نامیده می‌شوند. بنابراین P و Q دو افراز مزدوج هستند. بسادگی از تعریف بر می‌آید که تعداد اجزاء در افراز P برابر بزرگترین عدد در افراز Q است. با توجه به این نکته می‌توان دیگری از مسایل «اولر» را ثابت کرد.

قضیه ۵-۳-۵ (اولر) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند که $k \le n$. تعداد افرازهای n به k جزء برابر تعداد افرازهای n به اعدادی است که بزرگترین آنها k

باشد.

اثبات. فرض کنید A مجموعه‌ی تمام افرازهای n به k جزء باشد و B مجموعه‌ی افرازهای n به اعدادی باشد که بزرگترین آنها k است.

تابع $f:A\to B$ را این گونه تعریف می‌کنیم: به ازای هر افراز $P\in A$، $F(p)$ را افرازی در بین B در نظر می‌گیریم که نمودار فررس آن برابر $F^t(p)$ باشد. به سادگی می‌توان دریافت که f تابعی یک به یک و پوشاست و تناظری یک به یک بین اعضاء A و B برقرار می‌کند. بنابراین طبق اصل تناظر یک به یک داریم $|A|=|B|$.

برای توضیح بیشتر مقادیر $n=۸$ و $k=۳$ را در نظر می‌گیریم.

افرازهای عدد ۸ به اجزایی که بزرگترینشان ۳ است.	افرازهای عدد ۸ به ۳ جزء
$F(p)$	p
۳+۱+۱+۱+۱+۱	۶+۱+۱
۳+۲+۱+۱+۱	۵+۲+۱
۳+۲+۲+۱	۴+۳+۱
۳+۳+۱+۱	۴+۲+۲
۳+۳+۲	۳+۳+۲

کاربرد قضیه ۵-۳-۵ را در مثال زیر می‌توانید ببینید.

مثال ۷-۳-۵ فرض کنید (a_r) تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در ۳ جعبه باشد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. تابع دنباله‌ی (a_r) را بیابید.

حل. ابتدا، توجه کنید که (a_r) تعـداد افرازهـای r بـه ۳ جـز اسـت. طبـق قضیـه ۵-۳-۵ مقدار این افرازهای برابر تعداد افرازهایی است که بزرگترین‌شان ۳ باشـد. بـه سادگی می‌توان دید که تابع مولد دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$\underbrace{(1+x+x^2+\dots)}_{\text{(اندازه ۱)}}\underbrace{(1+x^2+x^4+\dots)}_{\text{(اندازه ۲)}}\underbrace{(x^3+x^6+\dots)}_{\text{(اندازه ۳)}}$$

$$=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

تبصره:

از آنجا کـه حتمـاً بـاید یـک جـزء بـا انـدازه ۳ وجـود داشـته باشـد پـس عـامل سـوم در حاصل‌ضرب بالا به جای $(1+x^3+x^6+\dots)$، عامل $(x^3+x^6+\dots)$ است.

نتیجه. اعداد طبیعی n,m $(m\le n)$ را در نظر بگیرید. آنگاه تعداد افرازهای عـدد n به حداکثر m قسمت برابر تعداد افرازهای n به اعداد نابیشتر از m است.■

برای دیدن مطالب جزیی‌تـر و پیشـرفته‌تر، خوانندگـان می‌تواننـد بـه کتـاب [An۲] مراجعه نمایند.

۵-۴- توابع مولدنمایی

همان گونه که در دو بخش قبل دیدیم، توابع مولد عادی در مسایل توزیع اشیاء یـا جایگشت‌ها و افرازها به کار می‌روند که در آنها ترتیب اهمیتی نداشت. در این بخش

به مطالعه توابع مولد نمایی می‌پردازیم که در مسایل شمارش جایگشت‌ها زمانی که ترتیب در نظر گرفته می‌شود، کاربرد دارند.

تابع مولد نمایی را برای دنباله (a_r) اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \ldots + a_r\frac{x^r}{r!} + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\frac{x^r}{r!}$$

مثال ۱-۴-۵ (۱) تابع نمایی مولد برای دنباله‌ی (...،۱،۱،۱) تابع زیر است:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} = e^x$$

(۲) تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی $(0!,1!,\ldots,r!,\ldots)$ تابع زیر است:

$$\sum_{r=0}^{\infty} r!\frac{x^r}{r!} = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

(۳) تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی $(1,k,k^2,\ldots,k^r,\ldots)$ که k مقدار ثابت غیر صفر است، عبارتست از :

$$1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2x^2}{2!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(kx)^r}{r!} = e^{kx}\ . \blacksquare$$

مثال ۲-۴-۵ نشان دهید تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی

(۱ و ۱.۳ و ۱.۳.۵ و ۱.۳.۵.۷ و...) تابع $(1-2x)^{\frac{-3}{2}}$ است.

اثبات. کافی است نشان دهیم که ضریب جمله‌ی x^r در بسط $(1-2x)^{\frac{-3}{2}}$

برابر $\frac{۱\cdot۳\cdot۵...(۲r+۱)}{r!}$ است.

طبق تعریف داریم:

$$(۱-۲x)^{\frac{-۳}{۲}} = \sum_{i=۰}^{\infty}\binom{\frac{-۳}{۲}}{i}(-۲x)^{i}$$

بنابراین ضریب جمله‌ی x^r در این بسط است با

$$(-۲)^r\binom{\frac{-۳}{۲}}{r} = (-۲)^r\frac{\left(\frac{-۳}{۲}\right)\left(-\frac{۳}{۲}-۱\right)...\left(-\frac{۳}{۲}-r+۱\right)}{r!}$$

$$= (-۲)^r(-\frac{۱}{۲})^r\frac{۳.۵.۷...(۲r+۱)}{r!} = \frac{۱.۳.۵.۷...(۲r+۱)}{r!} \quad .\blacksquare$$

تابع مولد نمایی برای تبدیل‌ها

از فصل اول p_r^n را که نمایش دهنده تعداد تبدیل‌هـایی r عضـوی از مجموعـه‌ی n عضوی بود به یاد بیاورید. طبق فرمول(۱-۴-۱) داریم:

$$p_r^n = \binom{n}{r}\ r!$$

در نتیجه:

$$\sum_{r=۰}^{n} p_r^n\frac{x^r}{r!} = \sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}x^r = (۱+x)^n$$

بنابراین طبق تعریف، تابع نمایی مولد برای دنباله‌ی (p_r^n) تابع $(۱+x)^n$ است.

مثال ۳-۴-۵ فرض کنید a_r برابر تعداد تبدیل‌های r تایی از p شی همـانند باشد. تابع مولد نمایی برای دنباله (a_r) تابع زیر است:

$$۱+\frac{x}{۱!}+\frac{x^{۲}}{۲!}+\ldots+\frac{x^{p}}{p!}$$

زیرا مقدار a_r $(r=۰،۱،...،p)$ برابر یک است و برای r هـای بزرگـتر از p مقـدار آن صفر است.

مثال ۴-۴-۵ دنباله‌ی (a_r) را که a_r برابر تعـداد تبدیل‌هـای r تـایی از p توپ همانند آبی و q توپ همانند قرمز تعریف می‌شود. تابع مولد نمـایی ایـن دنبالـه تابع زیر است:

$$(۱+\frac{x}{۱!}+\frac{x}{۲!}+\ldots+\frac{x^{p}}{p!})(۱+\frac{x}{۱!}+\frac{x^{۲}}{۲!}+\ldots+\frac{x^{q}}{q!}) \qquad .■$$

اگر a_r تعداد تبدیل‌های r تایی از شبه مجموعه‌ی

$$\{n_۱.b_۱,n_۲.b_۲,\ldots n_k.b_k\}$$

باشد، آنگاه مولد نمایی برای دنباله‌ی (a_r) تابع

$$(۱+\frac{x}{۱!}+\ldots+\frac{x^{n_۱}}{n_۱!})(۱+\frac{x}{۱!}+\ldots+\frac{x^{n_۲}}{n_۲!})\ldots(۱+x+\ldots\frac{x^{n_k}}{n_k!})$$

است و a_r ضریب جمله‌ی $\frac{x^r}{r!}$ در عبارت فوق است.

مثال ۵-۴-۵ چند کلمه‌ی چهار حرفی با حـروف کلمـه‌ی PAPAYA سـاخته می‌شوند؟

حل. a_r را برابر تعداد تبدیل‌های rتایی شبه مجموعه‌ی $\{۳.A,۲.P,۱.Y\}$ که با استفاده از حروف کلمه PAPAYA ساخته شده‌اند باشد. آنگاه تابع مولد نمایی برای دنباله‌(a_r) تابع زیر است.

$$(۱+\frac{x^۱}{۱!}+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!})(۱+\frac{x^۱}{۱!}+\frac{x^۲}{۲!})(۱+\frac{x^۱}{۱!})$$
$$(A) \qquad\qquad (P) \qquad\qquad (Y)$$

برای به‌دست آوردن مقدار $a_۴$، جملاتی را که از مرتبه‌ی $x^۴$باشند، سوا می‌کنیم. داریم:

$$x.\frac{x^۲}{۲!}.x+\frac{x^۲}{۲!}.x.x+\frac{x^۲}{۲!}.\frac{x^۲}{۲!}.۱+\frac{x^۳}{۳!}.x.۱+\frac{x^۳}{۳!}.۱.x=a_۴\frac{x}{۴!}$$

و در نتیجه داریم:

$$a_۴=\frac{۴!}{۲!}+\qquad\frac{۴!}{۲!}+\qquad\frac{۴!}{۲!۲!}+\qquad\frac{۴!}{۳!}+\qquad\frac{۴!}{۳!}$$
$$(A,۲.P,Y)\ (۲.A,P,Y)\ (۲.A,۲.P)\ (۳.A,P)\ (۳.A,Y)$$

مثال ۶-۴-۵ اگر a_rبرابر تعداد تبدیل‌های rتایی از شبه مجموعه‌ی $\{\infty.b_۱,\infty.b_۲,\ldots,\infty.b_k\}$ باشد، آنگاه تابع مولد نمایی دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است:

$$(۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\ldots)^k=(e^x)^k=e^{kx}=\sum_{r=۰}^{\infty}\frac{(kx)^r}{r!}=\sum_{r=۰}^{\infty}k^r\frac{x^r}{r!}$$

بنابراین مقدار a_r برابر k^r بدست می‌آید.

مثال ۷-۴-۵ برای عدد $r \in N^*$، a_r را برابر تعداد اعداد r رقمی در مبنای چهار (هر رقم ۰، ۱، ۲، یا ۳ باشد) که در آنها هر کدام از ارقام ۲ و ۳ حداقل یکبار آمده باشند در نظر بگیرید. مقدار a_r را بیابید.

حل. تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$\underset{(0)(1)}{(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^2}\underset{(2)(3)}{(x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^2}=(e^x)^2(e^x-1)^2$$

$$\begin{aligned}&=e^{2x}(e^{2x}-2e^x+1)\\&=e^{4x}-2e^{3x}+e^{2x}\\&=\sum_{r=0}^{\infty}(4^r-2.3^r+2^r)\frac{x^r}{r!}\end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $r \in N^*$ مقدار a_r برابر $4^r-2.3^r+2^r$ به دست می‌آید. ■

تبصره.

از آنجا که

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

و

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^x}{n!}+\ldots$$

داریم:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{۲} = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \dots$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{۲} = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \dots$$

توجه کنید که $\frac{e^x + e^{-x}}{۲}$ تنها دارای توان‌های زوج x است در حالی که $\frac{e^x + e^{-x}}{۲}$ فقط توان‌های فرد را شامل می‌شود. این نکات در حل مساله بعد ما را یاری می‌کنند.

مثال ۸-۴-۵ به ازای عدد $r \in N^*$، فرض کنید a_r تعداد اعداد r رقمی در مبنای ۳ است که دارای فرد رقم "۰" و زوج رقم "۱" باشند. a_r را بیابید.

حل. تابع مولد نمایی برای دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است:

$$\underset{(۰)}{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{۲}\right)}\underset{(۱)}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{۲}\right)}\underset{(۲)}{e^x} =$$

$$= \frac{۱}{۴} e^x (e^{۲x} - e^{-۲x})$$

$$= \frac{۱}{۴} (e^{۳x} - e^{-x})$$

$$= \frac{۱}{۴} \sum_{r=۰}^{\infty} (۳^r - (-۱)^r) \frac{x^r}{r!}$$

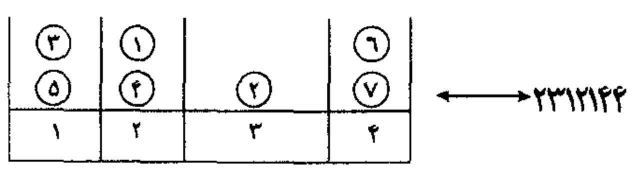
بنابراین داریم: $a_r = \frac{۱}{۴}(۳^r - (-۱)^r)$

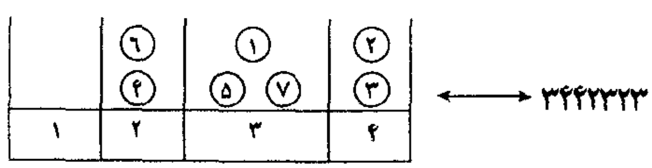
مسایل توزیع

در بخش‌های ۲ و ۳ دیدیم که مبحث توابع مولد عادی در توزیع اشیاء یکسان به کار برده می‌شوند. در این قسمت با استفاده از دو مثال نشان خواهیم داد. که توابع نمایی در مسایل توزیع اشیا متمایز در جعبه‌های متمایز کاربرد دارند.

مثال ۹-۴-۵ به ازای عدد $r \in N^*$، مقدار a_r برابر تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز در ۴ جعبه متمایز را بیابید در صورتی که بخواهیم در جعبه‌های ۱ و ۲ تعداد زوج و در جعبه۳ تعداد فردی شی قرار بگیرد.

قبل از حل مسأله، می‌خواهیم نشان بدهیم که چگونه مسأله توزیع طرح شده می‌تواند به مسأله یافتن تعداد اعداد r رقمی است که در آن به تعداد زوجی "۰" و "۱" و تعداد فردی "۳" بر می‌خوریم. برای مثال $n=۷$، دو حالت تناظر توزیع و عدد در مبنای چهار را نشان می‌دهیم.





توجه می‌کنید که توپ شمارهٔ i در جعبه‌ی j قرار گرفته اگر وفقط اگر رقم j، i امین حرف دنباله‌ی در مبنای چهار مربوطه باشد. مثلاً" در دنباله‌ی ۳۴۴۲۲۳۲۳، رقم "۴" دوبار و در مکان‌های ۲و۳ آمده‌اند و در نتیجه توپ‌های شمارهٔ ۲ و ۳ در جعبه‌ی

۴ قرار گرفته‌اند. با توجه به مطالب ذکر شده، می‌توانیم توابع مولد نمایی را در حل مساله توزیعی داده شده به کار ببریم .

حل. تابع مولد نمایی دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{۲}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{۲}\right)e^x$$

(۲)(۱) (۳) (۴)

$$= \frac{۱}{۸}(e^{۲x} - e^{-۲x})(e^{۲x} + ۱)$$

$$= \frac{۱}{۸}(e^{۴x} - ۱ + e^{۲x} - e^{-۲x})$$

$$= \frac{۱}{۸}\left(-۱ + \sum_{r=۰}^{\infty}[۴^r + ۲^r - (-۲)^r]\frac{x^r}{r!}\right)$$

بنابراین مقدار a_r برابر $\frac{۱}{۸}[۴^r + ۲^r - (-۲)^r]$ به دست می‌آید.

مثال ۱۰-۴-۵ فرض کنید a_r، تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز در n جعبه متمایز باشد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند a_r را بیابید.

حل. تابع مولد نمایی (a_r) تابع زیر است.

$$(x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \ldots)^n$$

$$= (e^x - ۱)^n$$

$$= \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i}(e^x)^{n-i}(-۱)^i$$

$$= \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i}\left(\sum_{r=۰}^{\infty}\frac{(n-i)^r x^r}{r!}\right)(-۱)^i$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}(n-i)^{r}\right)\frac{x^{r}}{r!}$$

بنابراین، $a_r = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^r$ ، که این مقدار همان طور که در قضیه ۱-۵-۴ نشان داده شده تعداد توابع پوشا از N_r به N_n است. ■

به طورکلی، مسایل توزیع اشیاء به ۴ نوع تقسیم می‌شوند بسته به اینکه اشیاء توزیع شده همانند یا متمایز باشند و جعبه‌هایی که اشیا در آنها جای می‌گیرند همانند یا متمایز باشند. فصل را با ارایه مقادیر به دست آمده برای چهار نوع مساله به پایان می‌رسانیم.

	r شی	n جعبه	مقدار به دست آمده
الف)	متمایز	متمایز	n^r
ب)	همانند	متمایز	$\binom{r+n-1}{r}$
ج)	متمایز	همانند	$\sum_{i=1}^{n} S_{(r,i)}$
د)	همانند	همانند	تعداد افرازهای عدد r به n عدد طبیعی

در این فصل، دیدیم که توابع مولد می‌توانند در حل مسایل توزیعی نوع‌های (الف)، (ب) و(د) به کار بروند. به طور کلی در این گونه مسایل اگر بخواهیم اشیاء همانندی را در جعبه‌های متمایز (مثال‌های ۴-۲-۵ و ۵-۲-۵) قرار دهیم یک تابع مولد عادی می‌سازیم در حالتی که اشیای متمایز و جعبه‌ها هم متمایز باشند (مثال‌های۹-۴-۵ و ۱۰-۴-۵) ، توابع مولد نمایی کارساز خواهند بود. حالت اشیا همانند و جعبه‌های همانند نیز در واقع مساله افراز عدد صحیح است که برای حل این مسایل می‌توانیم به ازای هر اندازه‌ی هر جزء از افراز یک تابع مولد عادی بسازیم.

❖ تمرینات فصل پنجم

۱- ضریب x^{20} را در بسط عبارت $(x^2+x^4+x^5+\dots)^3$ بیابید.

۲- ضریب جملات x^9 و x^{14} را در بسط عبارت $(1+x+x^2+\dots+x^5)^4$ بیابید.

۳- در قضیه ۱-۱-۵ قسمت‌های (د) ، (و)، (ح)، (ط) و (ی) را اثبات کنید.

٤- تابع مولد دنباله‌ی (c_r) که $c_0=0$ و $c_r=\sum_{i=1}^{r} i^2$ را بیابید و با استفاده از آن نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^{r} i^2=\binom{r+1}{3}+\binom{r+2}{3}$$

۵- تابع مولد دنباله‌ی (c_r)، $c_0=0$ و $c_r=\sum_{i=0}^{r} i2^i$ را بیابید و نشان دهید

$$\sum_{i=0}^{r} i2^i=2+(r-1)2^{r+1}$$

۶- (الف) برای عدد $r\in N^*$، a_r را برابر $\frac{1}{4^r}\binom{2r}{r}$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید تابع مولد دنباله‌ی (a_r) تابع $(1-x)^{\frac{-1}{2}}$ است.

(ب) با استفاده از تساوی $(1-x)^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}}=(1-x)^{-1}$ نشان دهید:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}=4^n$$

۷- نشان دهید:
$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}\binom{m}{r}=n\binom{n+m-1}{n}$$

۸- به چند روش می‌توانیم ۱۰ شکلات همانند را بین ۳ پسر تقسیم کنیم به طوری که هیچ پسری بیشتر از ۴ شکلات نداشته باشد؟

۹- تعداد راه‌های قرار دادن ۴۰ توپ همانند در ۷ جعبه متمایز را بیابید به طوری که در جعبه اول حداقل ۱ و حداکثر ۱۰ توپ وجود داشته باشد؟

۱۰- به چند روش می‌توان $2n$ توپ را از بین n توپ همانند قرمز، n توپ همانند آبی و n توپ همانند سفید انتخاب کرد؟

۱۱- به چند روش می‌توان ۱۰۰ صندلی همانند را در ۴ اتاق متمایز قرار داد به طوری که در هر اتاق ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، یا ۵۰ صندلی قرار گرفته باشد؟

۱۲- فرض کنید a_r تعداد حالات تقسیم r شی همانند در ۵ جعبه متمایز باشد به طوری که جعبه‌های ۱،۳ و ۵ خالی نباشند و b_r تعداد راه‌های قرار دادن r شی همانند در ۵ جعبه متمایز باشد به طوری که در هر یک از جعبه‌های ۲ و ۴ حداقل دو توپ قرار گرفته باشد.

(الف) تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید.

(ب) تابع مولد دنباله‌ی (b_r) را بیابید.

(ج) نشان دهید $a_r = b_{r+1}$ $(r = 1,2,\ldots)$.

۱۳- برای عدد $r \in N^*$، a_r را برابر تعداد دسته جواب‌های معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 = r$$

تعریف می‌کنیم که $3 \le x_1 \le 9$، $0 \le x_2 \le 8$ و $7 \le x_3 \le 17$. تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید و مقدار a_{28} را معین کنید.

۱۴- به چندروش می‌توانیم ۳۰۰۰مداد مشابه را در بسته‌های۲۵ تایی بین۴دانش‌آموز تقسیم کنیم به‌طوری که هر دانش‌آموزحداقل ۱۵۰و حداکثر ۱۰۰۰ مداد دریافت کند؟

۱۵- به چند روش می‌توان ۱۰ حرف را بین از حروف "F,U,N,C,T,L,O" انتخاب کرد به طوری که حداکثر ۳ بار U و حداقل یک بار O انتخاب شده باشد.

۱۶- تابع مولد دنباله (a_r) را بیابید، اگر a_r

(الف) تعداد حالات انتخاب r حرف (نه لزوماً متمایز) از مجموعه‌ی $\{D,R,A,S,T,I,C\}$ باشد که حداکثر ۳ بار D و حداقل ۲ بار T آمده باشد.

(ب) تعداد افرازهای عدد r به اجزا با اندازه ۱، ۲، ۳، ۵، ۸ باشد.

(ج) تعداد افرازهای r به اجزا متمایز با اندازه‌های ۵، ۱۰، ۱۵ باشد.

(د) تعداد افرازهای r به اجزا متمایز فرد باشد.

(هـ) تعداد افزارهای r به اجزا متمایز زوج باشد.

(و) تعداد جواب‌های صحیح نامعادله‌ی

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ \leq ۷$$

باشد که $۶ \geq x_i \geq ۱ \,(i = ۱,۲,\ldots,۵)$.

۱۷- تعداد شبه زیر مجموعه‌های $۴n$ عضوی را از شبه مجموعه‌ی $\{(۳n).x,(۳n).y,(۳n).z\}$ بیابید.

۱۸- برای اعداد طبیعی $m,n \; (m,n \geq ۳)$ تعداد شبه زیرمجموعه‌های $۳n$ عضوی شبه مجموعه‌ی $M = \{n.z_۱, n.z_۲, \ldots, n.z_m\}$ را بیابید.

۱۹- احتمال اینکه مجموع اعداد ظاهر شده در انداختن ۵ تاس متمایز برابر ۱۷ شود، چقدر است؟

۲۰- تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید، که a_r برابر تعداد حالات به دست آوردن مجموع r در انداختن هر تعداد تاس متمایز است.

۲۱- به ازای اعداد طبیعی k و m و عدد $r \in N^*$، (a_r) را برابر تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در $۲k+۱$ جعبه متمایز تعریف می‌کنیم به طوری که $k+۱$ جعبه اول خالی نباشند و (b_r) را تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در $۲k+۱$ جعبه متمایز تعریف می‌کنیم به طوری که در هر کدام از k جعبه آخر m شی قرار گرفته باشد.

(الف) تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید.

ب) تابع مولد (b_r) را بیابید.

ج) نشان دهید $a_r = b_{r+(m-1)k-1}$.

۲۲- تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را که a_r تعداد دسته جواب‌های صحیح معادله

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = r$$

که $(x_i \geq 0)$ بیابید.

۲۳- به ازای عدد $r \in N^*$، a_r را تعداد راه‌های انتخاب ۴ عدد صحیح متمایز از مجموعه‌ی N_r در نظر بگیرید که هیچ دوتایی متوالی نباشند. تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید و نشان دهید $a_r = \binom{r-3}{4}$.

۲۴- برای اعداد طبیعی m و t و عدد $r \in N^*$، (a_r) را برابر تعداد زیر مجموعه‌های مرتب $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ از مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,r\}$ در نظر بگیرید، که $(n_1 < n_2 < \ldots < n_m)$، $n_{i+1} - n_i \geq t$ $(i = 1,2,\ldots,m-1)$. تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید و نشان دهید.

$$(a_r) = \binom{r-(m-1)(t-1)}{m}$$

(مسأله ۹۱-۱ را ببینید).

۲۵- برای عدد $r \in N^*$، a_r را برابر تعداد دسته جواب‌های صحیح نامعادله‌ی

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq r$$

در نظر بگیرید که $3 \leq x_1 \leq 9$ و $1 \leq x_2 \leq 10$ و $x_3 \geq 2$ و $x_4 \geq 0$. تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید و مقدار a_{20} را مشخص کنید.

۲۶- نشان دهید اگر $n \in N^*$ و α عددی حقیقی باشد که $-1 < \alpha < 0$، آنگاه

$$\binom{2\alpha}{2n} \geq (2n+1)\binom{\alpha}{n}^2$$

و اگر $\alpha < -1$ باشد، نامعادله بر عکس می‌شود.(این مساله توسط« ای .روسن

کرانس» به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا ۱۱۳۶؛۱۹۷۲،۹۷ پیشنهاد شده است.)

۲۷- برای عدد طبیعی n ، فرض کنید:

$$a_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{k}\right\}.\left\{\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}+\ldots+\binom{n}{n}\right\}$$

و فرض کنید $B(x)$ تابع مولد دنباله‌ی (b_k) باشد که:

$$b_k=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{k}$$

(الف) نشان دهید:

$$B(x)=\frac{(1+x)^n}{(1-x)}$$

(ب) تابع مولد (a_n) را بیابید و نشان دهید:

$$a_{n-1}=\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}(n-r)$$

(ج) نشان دهید:

$$a_{n-1}=\frac{n}{2}\binom{2n}{n}$$

(«جی. چنگ» و« ز. شان» ، ۱۹۸۴)

۲۸- برای اعداد طبیعی n و m و عدد درست r ، مقدار تعمیم یافته $\binom{n}{r}_m$ را برای ضرایب دو جمله‌ای این گونه تعریف می‌کنیم.

$$\binom{1}{r}_m=\begin{cases}1 & (0\le r\le m-1)\\ 0 & (r<0 \ \text{یا}\ \ r>m-1)\end{cases}$$

$$\binom{n}{r}_m=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n-1}{r-i}_m;(n\ge 2)$$

می‌توان به سادگی فهمید که $\binom{n}{r}_۲ = \binom{n}{r}$. نشان دهید.

(الف) $\binom{n}{r}_m$ تعداد دسته جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = r$$

است که در شرط $۰ \le x_i \le m-۱$، $i=۱،۲،\ldots،n$، صدق می‌کنند.

(ب) $\binom{n}{۰}_m = ۱$

(ج) $\binom{n}{۱}_m = n$، اگر $m \ge ۲$.

(د) $\binom{n}{r}_m = \binom{n}{s}_m$، اگر $r+s=n(m-۱)$

(ه) $\sum_{r=۰}^{n(m-۱)} \binom{n}{r}_m = m^n$

(و) تابع مولد دنباله‌ی $\left(\binom{n}{r}_m\right)$، $(r=۰\ ،۱،۲،\ldots)$، تابع $(۱+x+\ldots x^{m-۱})^n$ است.

(ز) $$\sum_{r=۰}^{n(m-۱)} (-۱)^r \binom{n}{r}_m = \begin{cases} ۰ & m \text{ عددی زوج} \\ ۱ & m \text{ عددی فرد} \end{cases}$$

(ح) $$\sum_{r=۰}^{n(m-۱)} r\binom{n}{r}_m = \frac{n(m-۱)m^n}{۲}$$

(ط) $$\sum_{r=۰}^{n(m-۱)} (-۱)^{r-۱} r\binom{n}{r}_m = \begin{cases} ۰ & m \text{ عددی زوج} \\ \dfrac{n(۱-m)}{۲} & m \text{ عددی فرد} \end{cases}$$

(ی) برای اعداد طبیعی p و q داریم:

$$\sum_{i=۰}^{r} \binom{p}{i}_m \binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}_m$$

(ک) $$\binom{n}{r}_m = \sum_{i=۰}^{n} (-۱)^i \binom{n}{i}\binom{n-۱+r-mi}{n-۱}$$

(برای دیدن پاسخ مسأله می‌توانید به مجله‌ی ریاضیات دشوار(۱۰،۱۹۸۴؛۱۳۸-۱۳۴) مراجعه کنید.)

۲۹- به ازای عدد طبیعی n، مقدار زیر را بیابید.

$$S_n = \sum_{r=0}^{n} 2^{r-2n}\binom{2n-r}{n}$$

(این مساله توسط تیم اعزامی از رژیم صهیونیستی به ۳۱ امین المپیاد جهانی ریاضی پیشنهاد شده است).

۳۰- برای عدد درست r ، مقدار a_r را برابر

$$a_r = 1\times 4\times 7\times\ldots\times(3r+1)$$

در نظر بگیرید. نشان دهید تابع مولد نمایی (a_r) تابع $(1-3x)^{\frac{-4}{3}}$ است.

۳۱- تعداد راه‌های رنگ کردن n مربع صفحه شطرنجی را $1\times n$ با سه رنگ قرمز، آبی و سفید بیابید، اگر قرار باشد تعداد زوجی مربع ۱×۱ با رنگ قرمز رنگ شده باشند.

۳۲- تعداد اعداد n رقمی در مبنای ۴ را بیابید که در آنها حداقل یک بار عدد ۳ به کار رفته باشد و از هر کدام از ارقام "۰" و "۱" به ترتیب به تعداد فرد و زوجی استفاده شده باشد.

۳۳- تعداد کلمات n حرفی که با حروف e,d,c,b,a و f ساخته می‌شوند چقدر است اگر مجموع تعداد aها و bها (الف) عددی زوج باشد. (ب) عددی فرد باشد؟

۳۴- به چند حالت می‌توان r شی متمایز را در ۵ جعبه متمایز قرار داد به طوری که در هر کدام از جعبه‌های ۱و۳و۵ تعداد فردی شی و در هر کدام از جعبه‌های دیگر تعداد زوجی شی قرار گرفته باشد؟

۳۵- درستی تساوی‌های زیر را به ازای عدد حقیقی z ثابت کنید.

(الف) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{z}{2k}\binom{z-2k}{n-k}2^{2k} = \binom{2z}{2n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{z+1}{2k+1}\binom{z-2k}{n-k}2^{2k+1}=\binom{2z+2}{2n+1} \quad \text{(ب)}$$

این مسأله توسط« ام. مک اوور» و« وی. گود» به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا (۷۵؛۱۹۸۵،۷۶) پیشنهاد شده است).

۳۶- ثابت کنید.

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k+1}\frac{k}{r}\binom{r}{k}k^{n-1}=0 \qquad (n=2,3,4,\ldots)$$

این مساله توسط «جی. ام.لی» به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا(۷۷، ۱۹۷۰؛۳۰۹-۳۰۸) پیشنهاد شده است).

۳۷- اگر برای اعداد درست $k_1, k_2, \ldots, k_n$ داشته باشیم $n=\sum_{i=1}^{n} ik_i$ و مجموع این اعداد r باشد، ثابت کنید.

$$\sum \frac{1}{k_1!k_2!\ldots k_n!}=\frac{1}{r!}\binom{n-1}{r-1}$$

(مجموع برای همه‌ی دسته اعداد $k_1, k_2, \ldots, k_n$ که شرایط ذکر شده را دارا باشند، حساب می‌شود.)

(این مسأله به عنوان مسأله پیشنهادی « دی.ژوگوویچ» به ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا (۷۷، ۱۹۷۰؛۶۵۹) مطرح شده است).

۳۸- در یک شرکت ۸ مرد و ۱۰ زن کار می‌کنند. به چند حالت می‌توان محل کار آنها را در یکی از چهار اتاق این شرکت قرار داد اگر

(الف) در هر اتاق حداقل یک نفر قرار داشته باشد؟

(ب) در هر اتاق حداقل یک زن کار کند؟

(ج) در هر اتاق حداقل یک مرد و حداقل یک زن کارکنند؟

۳۹- تعداد تبدیل‌هایی r عضوی شبه مجموعه‌ی

$$\{\infty.\alpha,\infty.\beta,\infty.\gamma,\infty.\lambda\}$$

بیابید که تعداد α ها در آن عددی فرد و تعداد β ها زوج باشند.

۴۰- برای عدد طبیعی n و عدد درست r رابطه‌ی $(\alpha_r) = F(r,n)$ را تعریف می‌کنیم که $F(r,n)$ برابر تعداد راه‌های توزیع r شی متفاوت در n جعبه متفاوت به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد، تعریف می‌شود (قضیه ۱-۵-۴) . بنابراین $F(r,n) = n!S(r,n)$ ، که $S(r,n)$ عدد استرلینگ نوع دوم است. تابع مولد نمایی دنباله‌ی (a_r) را بیابید و برای عدد $r \geq ۲$ نشان دهید.

$$\sum_{m=۰}^{\infty}(-۱)^m m!S(r,m+۱) = ۰$$

۴۱- تابع $A_n(x)$ را تابع مولد نمایی دنباله‌ی $\left(S(۰,n),S(۱,n),\ldots,S(r,n),\ldots\right)$ تعریف می‌کنیم $A_n(x)$ را بیابید و نشان دهید:

$$\frac{d}{dx}A_n(x) = n\ A_n(x) + A_{n-۱}(x)$$

۴۲- عدد B_r را برابر $B_r = \sum_{k=۱}^{r} S(r,k)$ تعریف می‌کنیم. این اعداد به اعداد بل معروفند(بخش ۷-۱). نشان دهید تابع مولد نمایی دنباله‌ی B_r تابع $(e^{e^x-۱})$ است.

۴۳- برای عدد طبیعی n و عدد درست r :

(الف) تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز n در جعبه متفاوت را به طوری که در هر جعبه ترتیب اشیا مهم باشد، بیابید.

(ب) فرض را a_r برابر تعداد راه‌های انتخاب حداکثر r شی از r شی متفاوت و

توزیع آنها در n جعبه متفاوت باشد، به طوری که در هر جعبه ترتیب اشیا مهم باشد. نشان دهید.

۱- $a_r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} n^{(i)}$ ، که $n^{(i)} = n(n-1)\ldots(n-i+1)$ و $n^{(0)}$ برابر یک تعریف می‌شود.

۲- تابع مولد نمایی دنباله‌ی (a_r) تابع زیر است.

$$e^x(1-x)^{-n}$$

۴۴- تابع مولد نمایی (a_r) را در هر یک از حالات زیر بیابید. a_r تعداد راه‌های توزیع r شی متفاوت در

(الف) ۴ جعبه متفاوت است.

(ب) ۴ جعبه متفاوت است به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند.

(ج) ۴ جعبه همانند است به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند.

(د) ۴ جعبه همانند است.

۴۵- ثابت کنید تعداد افرازهای عدد n به اجزاء، به طوری که هیچ جزء زوجی بیشتر از یک بار نیامده باشد؛ برابر تعداد افرازهای n به اجزاء است به طوری که هر جز حداکثر سه بار ظاهر شده باشد.

۴۶- برای اعداد طبیعی r و n ، a_r را برابر تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

در نظر می‌گیریم که $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 1$. تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید.

۴۷- به ازای عدد طبیعی n و عدد درست r ، b_r را برابر تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

در نظر می‌گیریم که $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$. تابع دنباله‌ی (b_r) را بیابید.

۴۸- به ازای عدد طبیعی n و عدد درست r، فرض کنید a_r نمایش دهندهٔ تعداد راه‌های توزیع r شی همانند در n جعبه همانند باشد و b_r نمایش دهندهٔ تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$\sum_{k=1}^{n} k\, x_k = r$$

که $x_k \geq 0$ ، باشد. نشان دهید

$$a_r = b_r$$

۴۹- فرض کنید a_r، $r \in N^*$، برابر تعداد افرازهای r به توان‌های مختلف عدد ۲ باشد.

(الف) تابع مولد دنباله‌ی (a_r) را بیابید.

(ب) نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی r ، $a_r = 1$

(ج) از قسمت (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۵۰- برای عدد طبیعی n ، نشان دهید تعداد راه‌های افراز عدد $2n$ به اجزای متفاوت زوج برابر تعداد افرازهای n به اعداد فرد است.

۵۱- اعداد طبیعی k و n را در نظر بگیرید. نشان دهید تعداد افرازهای n به اعداد فرد تعداد افرازهای kn به اجزای متمایزی است که طول هر جزء مضربی از k باشد.

۵۲- فرض کنید $p(n)$ تعداد افرازهای عدد طبیعی n باشد. نشان دهید.

$$p(n) \leq \frac{1}{2}\left(p(n+1) + p(n-1)\right)$$

۵۳- برای اعداد طبیعی k و n ، $k \leq n$، فرض کنید $p(n,k)$ نمایش دهندهٔ تعداد افرازهای n به دقیقاً k جزء باشد.

(الف) مقادیر $p(5,1)$ ، $p(5,2)$ ، $p(5,3)$ و $p(8,3)$ را بیابید.

(ب) نشان دهید اگر m و n دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$.

$$\sum_{k=1}^{m} p(n,k) = p(n+m,m)$$

۵٤- الف)اگر $p(n,k)$ همان مقدار تعریف شده در مسأله‌ی قبل باشد، مقادیر $p(5,3)$ و $p(7,2)$ و $p(8,3)$ را بیابید.

(ب) نشان دهید: $p(n-1,k-1) + p(n-k,k) = p(n,k)$

۵۵- به ازای اعداد طبیعی n و k ، $n \le k$، نشان دهید

$$p(n+k,k) = p(2n,n) = p(n)$$

۵۶- برای اعداد طبیعیn و k ، $n \le k$، نشان دهید:

$$p(n,k) \ge \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}$$

۵۷- اگر n و k دو عدد طبیعی باشند، نشان دهید تعداد افزارهای n به k عدد متمایز برابر است با $p\left(n-\binom{k}{2},k\right)$

۵۸- نتیجه‌ی قضیه۲-۳-۵ را ثابت کنید.

۵۹- الف) قضیه۳-۳-۵ را ثابت کنید.

(ب) قضیه ۴-۳-۵ را ثابت کنید.

۶۰- برای عدد صحیح مثبتn، $C(n)$ تعداد راه‌های نوشتن n به صورت مجموع غیر صعودی توان‌های ۲ است به طوری که هیچ توانی بیش از ۳ بار نوشته نشود. مثلاً $C(8) = 5$ است زیرا عدد ۸ را به ۵ صورت می‌توان نمایش داد:

۱+۱+۲+۲+۲ و ۱+۱+۲+۴و ۲+۲+۴ و ۴+۴ و ۸

صحت و سقم گزارهٔ زیر را بیابید.

چند جمله‌ای $Q(x)$ یافت می‌شود به طوری که به ازای تمام اعداد صحیح n ، داشته باشیم $C(n) = \lfloor Q(n) \rfloor$. (پاتنام، ۱۹۸۳)

۶۱- فرض کنید $C(n)$ همان مقدار تعریف شده در مسأله‌ی قبل باشد. نشان دهید

تابع مولد دنباله‌ی $(C(n))$ تابع زیر است.

$$\frac{۱}{(۱+x)(۱-x)^{۲}}$$

۶۲- (الف)۱- تمام افرازهای ۸ به ۳ جزء را بنویسید.

۲- تمام مثلث‌های ناهم ارز که طول اضلاعشان سه عدد صحیح b,a و c است و $a+b+c=۱۶$، فهرست کنید.

۳- آیا تعداد افرازهای قسمت (۱) با تعداد مثلث‌های نا مساوی قسمت (۲) برابر است.

(ب) برای هر عدد طبیعی r a_r را برابر تعداد مثلث‌های نا هم ارز که طول اضلاع‌شان اعداد صحیح c,b,a است و $a+b+c=۲r$ ، تعریف می‌کنیم و b_r را برابر تعداد افرازهای r ، به ۳ جز قرار می‌دهیم.

۱- با استفاده از اصل تناظر یک به یک نشان دهید $a_r = b_r$

۲- تابع مولد نمایی (a_r) را بیابید.

۶۳- یک افراز P عدد صحیح مثبت n خود مزدوج نامیده می‌شود اگر P ومزدوج آن نمودار فررس همانند داشته باشند.

(الف) تمام افرازهای خود مزدوج ۱۵ را بیابید.

(ب) تمام افرازهای ۱۵ به اعداد فرد متمایز را بیابید.

(ج) نشان دهید تعداد افرازهای خود مزدوج n برابر تعداد افرازهای n به اعداد فرد متمایز است.

۶۴- نشان دهید تعداد افرازهای خود مزدوج n که اندازهٔ بزرگ‌ترین جزء‌شان m است، برابر تعداد افراز خود مزدوج عدد n-۲m+۱ است که بزرگترین عددشان از m-۱ تجاوز نمی‌کند.

۶۵- الف) بزرگترین مربع از ستاره‌ها که در گوشه بالا و سمت چپ نمودار فررس

وجود دارد، *مربع دورفی* نمودار نامیده می‌شود. تابع مولدی برای تعداد افرازهای خود مزدوج عدد r بیابید که مربع دورفی آنها، مربعی $m \times m$ باشد.

(ب) رابطه‌ی زیر را به دست آورید.

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+x^{2k+1}\right)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m^2}}{\prod_{k=1}^{m}\left(1-x^{2k}\right)}$$

۶۶- فرض کنید $A(x)$ تابع مولد دنباله $(p(r))$ باشد که $p(r)$ تعداد افرازهای عدد r است.

(الف) $A(x)$ را بیابید.

(ب) با استفاده از مربع دورفی ثابت کنید.

$$\left[\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)\right]^{-1}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m^2}}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^2}$$

۶۷- با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین که با ستاره ساخته شده است و در گوشه بالایی و سمت چپ نمودار فررس قرار دارد، نشان دهید:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k})=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m(m+1)}}{\prod_{k=1}^{m}(1-x^{2k})}$$

۶۸- اعداد طبیعی p و q و r، $p<r$ و $q<r$ را در نظر بگیرید. نشان دهید تعداد افرازهای عدد $r-p$ به $q-1$ جزء کوچکتر از p برابر تعداد افرازهای $r-q$ به $p-1$ جزء کوچکتر از q است.

۶۹- برای عدد طبیعی n، $P_e(n)$ را برابر تعداد افرازهای n به تعداد زوجی عدد متمایز و $P_o(n)$ را برابر تعداد افرازهای n به تعداد فردی عدد متمایز تعریف

می‌کنیم. نشان دهید.

$$P_e(n) - P_o(n) = \begin{cases} (-۱)^k & n = \dfrac{k(۳k \pm ۱)}{۲} \\ ۰ & n \neq \dfrac{k(۳k \pm ۱)}{۲} \end{cases}$$

۷۰- قضیه اعداد مخمسی اولر را ثابت کنید:

$$\prod_{m=-\infty}^{\infty} (۱ - x^k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-۱)^m x^{\frac{۱}{۲}m(۳m-۱)}$$

۷۱- برای هر عدد طبیعی n نشان دهید:

$$P(n) - P(n-۱) - P(n-۲) + P(n-۵) + P(n-۷)$$

$$+\ldots+(-۱)^m P(n - \frac{۱}{۲}m(۳m-۱))+\ldots$$

$$+(-۱)^m P(n - \frac{۱}{۲}m(۳m+۱))+\ldots = ۰$$

۷۲- برای عدد طبیعی n و عدد درست j داریم $\beta(j) = \dfrac{۳j^۲ + j}{۲}$. با استفاده از اصل تناظر یک به یک تساوی اولر را ثابت کنید.

$$\sum_{\text{زوج } j} P(n - \beta(j)) = \sum_{\text{فرد } j} P(n - \beta(j))$$

(مقاله‌ی« د.ام.بریسود» و « د.زیلبرگر»، تناظر افرازهای بازگشتی اولر، ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا، ۹۲، ۱۹۸۵؛ ۵۵-۵۴) را ببینید).

۷۳- برای اعداد طبیعی r و n، فرض کنید $f(r,n)$ را تعداد افرازهای n که به شکل $n = n_۱ + n_۲ + \ldots + n_s$ هستند و $n_i \geq r n_{i+۱}$ است، (i=۱،۲،... و s-۱) تعریف کرده‌ایم و $g(r,n)$ تعداد افرازهای عدد n است که هر جزء افراز به شکل $۱ + r + r^۲ + \ldots + r^k$ است. نشان دهید:

$$f(r,n) = g(r,n)$$

(مقاله‌ی« د.ر.هیکرسون» ، یک تساوی افراز از نوع اولر، ماهنامه‌ی ریاضی آمریکا، (۸۱ ,۱۹۷۴؛۶۲۹-۶۲۷) را ببینید).

فهرست:

[Al] H.L.Alder,the use of Generating Fanctions to Discover and prove partition Ldentities,Two-Year Mathematics Joarnal. ۱۰(۱۹۷۹),۳۱۸-۳۲۹.

[A_n ۱] G.E.Andrew,Numbertheory,Saunders,Philadelphia, PA.,۱۹۷۱

[A_n ۲] G.E.Andrew, the theory of partitions , Encyclopedia of Mathematics and Lts Applications , V.۱۲,Addison- Wesley,Reading,۱۹۷۶

[G] J.W.L.Glaisher,Messenger of Mathematics , ۱۲(۱۸۸۳),۱۵۸-۱۷۰.

[N] ۱.Niven, Formal Power Series , Amer,Mth . Monthly , ۷۶(۱۹۶۹), ۸۷۱ - ۸۸۹.