Subject : Date :

معادلات دیفرانسیل   میان‌ترم ۷۰   پایان‌ترم ۱۱۰   Ta ۲۰

مفاهیم اولیه   دستگاه معادلات   معادلات دیفرانسیل سیموتر

معادلات مرتبه اول   تبدیل لاپلاس   معادلات دیفرانسیل بوسن - دیریکله

معادلات مرتبه دوم و بالاتر

سری ها

معادله‌ی دیفرانسیل: هر رابطه‌ای میان تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل را یک معادله‌ی دیفرانسیل می‌نامیم.

معادلات دیفرانسیل به دو دسته‌ی معمولی و با مشتقات جزئی تقسیم می‌شوند. اگر تابع مجهول در معادله تنها یک متغیر مستقل داشته باشد، معادله را دیفرانسیل معمولی (ODE) و اگر تابع مجهول بیش از یک متغیر مستقل داشته باشد معادله را دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامیم (PDE).

مثال:

$y'' + 3(y')^2 + \cos x = 4$ مرتبه ۲ - درجه ۱

$y''' + \sin y' = y^3 + x(y')^5$ مرتبه ۳ - درجه ندارد

معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $u(x,y)$

$(y'')^3 + x(y')^4 + y = 7x^2$ مرتبه ۲ - درجه ۳

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ معادله موج $u(x,t)$ مرتبه ۲ - درجه ۱

$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ معادله گرما $u(x,t)$ مرتبه ۲ - درجه ۱

مرتبه معادله دیفرانسیل: بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله را مرتبه معادله گویند.

درجه معادله دیفرانسیل: اگر بتوان یک معادله را برحسب خود تابع و مشتقات آن بصورت یک چند جمله ای نوشت آنگاه توان بالاترین مرتبه مشتق را درجه معادله گویند.

تشکیل معادله دیفرانسیل

به ازای ثابت های دلخواه c، $y = f(x, c)$ یک دسته از منحنی ها را مشخص می نماید. می خواهیم معادله دیفرانسیلی را بیابیم که $y = f(x, c)$ جواب آن باشد. بدین منظور با مشتق گیری از رابطه فوق، ثابت c را حذف می نماییم و به معادله دیفرانسیل مرتبه اول می رسیم.

$$y = f(x, c)$$
$$y' = f_x(x, c)$$

مثال: معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی های $y = x^2 + c$ را بیابید.

$$\boxed{y' = 2x}$$

مثال: معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی های $y = cx^2 + 2$ را مشخص نمایید.

$$y' = 2cx \Rightarrow c = \frac{y'}{2x}$$

$$y = \frac{y'}{2x} \times x^2 + 2 \Rightarrow y = \frac{y'}{2} x + 2$$

اگر دسته منحنی داده شده به بیش از یک پارامتر بستگی داشته باشد؛ مانند $y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$، آنگاه باید ثابت های c_1 تا c_n از معادلات حذف شوند.

$$y' = \frac{\partial F(x, c_1, c_2, \dots, c_n)}{\partial x}$$

$$y'' = \frac{\partial^2 F(x, c_1, \dots, c_n)}{\partial x^2}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{\partial^n F(x, c_1, \dots, c_n)}{\partial x^n}$$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل نظیر $y = (c_1 + c_2 x)e^x$ را بیابید.

$$y' = \underbrace{(c_1 + c_2 x)e^x}_{y} + c_2 e^x$$

$$y'' = (c_1 + c_2 x)e^x + 2c_2 e^x = y' + \underbrace{c_2 e^x}_{y'-y} = y' + y' - y$$

$$\Rightarrow y'' = 2y' - y$$

جواب عمومی: همان طور که دیدیم ممکن است یک معادله‌ی دیفرانسیل بیش از یک جواب داشته باشد که همگی تحت یک فرمول که شامل ثابت‌های دلخواه است بیان شوند که چنین جوابی را جواب عمومی معادله گویند.

تذکر: اگر معادله‌ی دیفرانسیل از مرتبه‌ی n باشد، جواب عمومی آن شامل n ثابت دلخواه خواهد بود.

جواب خصوصی: اگر جواب عمومی را تحت شرایط اولیه قرار دهیم و ثابت‌های موجود در آن را تعیین نماییم، جوابی که حاصل می‌شود را جواب خصوصی معادله می‌نامیم. بنابراین جواب خصوصی جوابی است که پارامتر ندارد و همیشه از جواب عمومی حاصل می‌شود.

Subject   Date :

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی $y' = \sin x$ را طوری بیابید که از نقطه‌ی $(0,1)$ عبور کند.

$y_g = -\cos x + c \xrightarrow{(0,1)} -1 + c = 1 \Rightarrow c = 2 \longrightarrow$

$y_p = -\cos x + 2$ جواب خصوصی

جواب غیرعادی یک معادله‌ی دیفرانسیل، جوابی است که منحنی نمایش آن بر تمام منحنی‌های جواب عمومی معادله مماس باشد. باید توجه داشت که جواب غیرعادی معادله تحت هیچ نوع شرط اولیه‌ای از جواب عمومی حاصل نمی‌شود.

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $y^2(1+(y')^2) = 4$ دارای جواب عمومی $(x-c)^2 + y^2 = 4$ می‌باشد (دایره‌ای به مرکز $(c,0)$ و شعاع 2) $y=2$ و $y=-2$ جواب‌های غیرعادی این معادله هستند.

مثال: معادله‌ی $y = xy' + \frac{1}{y'}$ دارای جواب عمومی $y = cx + \frac{1}{c}$ می‌باشد اما $y^2 = 4x$ جواب غیرعادی معادله است.

تذکر: معادلات دیفرانسیل خطی دارای جواب غیرعادی نمی‌باشند. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

$F = a_0 xy + a_1 xy' + \dots + a_n(x) y^{(n)} \longrightarrow$ معادله خطی

تذکر: برخی از معادلات دیفرانسیل دارای جواب عمومی نمی‌باشند و برخی از آن‌ها تنها یک جواب دارند.

$(y')^2 + 3 = 0$ در $\mathbb{R}$ جواب ندارد

DATA BANK

$(y')^2 + y^2 = 0$ تنها جواب معادله $y=0$

مسیرهای قائم (مسیرهای متعامد) : دو دسته منحنی $x^2+y^2=c$ و $y=mx$ را در نظر بگیرید. واضح است که هر منحنی از یک دسته بر کلیه‌ی منحنی های دسته‌ی دیگر عمود است. هرگاه چنین ارتباطی بین دو دسته منحنی برقرار باشد یک دسته را مسیر قائم دسته‌ی دیگر می نامند.

برای پیدا کردن مسیرهای قائم ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل متناظر با دسته منحنی های داده شده را با حذف ثوابت به دست آورده سپس در معادله‌ی دیفرانسیل حاصل y' را با $-\frac{1}{y'}$ جایگزین می‌کنیم. حال با حل معادله‌ی دیفرانسیل جدید می توان مسیرهای قائم دسته منحنی اولیه را پیدا نمود.

$$x^2+y^2=c \rightarrow 2x+2yy'=0 \xrightarrow{y'=-\frac{1}{y'}} 2x-\frac{2y}{y'}=0 \rightarrow$$

$$x-\frac{y}{y'}=0 \rightarrow xy'=y \rightarrow y'=\frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \rightarrow$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \rightarrow \ln y = \ln x + \underbrace{c}_{\ln m} \rightarrow \ln y = \ln mx$$

$$\rightarrow y = mx$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اول

فرم کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $F(x,y,y')=0$ می باشد. معمولاً فرض می کنیم می توان y' را به صورت صریح برحسب بقیه ی جملات نوشت.

قضیه (وجود و یکتایی جواب): فرض کنید توابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل $R: \alpha<x<\beta$ و $\gamma<y<\delta$ که شامل نقطه ی (x_0,y_0) است پیوسته باشد. در این صورت مستطیلی $[x_0-h, x_0+h] \subseteq [\alpha,\beta]$ حول x_0 موجود است که در آن مسأله ی

$$\begin{cases} y'=f(x,y) & \text{معادله ی} \\ y(x_0)=y_0 \to & \text{شرط اولیه} \end{cases}$$

دارای جواب یکتاست. ($y=f(x)$).

مثال:

$$\begin{cases} y'=x^2+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

مسأله ی مقدار اولیه

← با توجه به قضیه دارای جواب منحصربفرد است اما جواب آن قابل محاسبه نیست.

معادلات تفکیک پذیر (جداپذیر)

معادله ی دیفرانسیل $y'=f(x,y)$ را می توان به فرم $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ نوشت. اگر بتوان در معادله ی فوق نوشت $M(x,y)=g_1(x)g_2(y)$ و $N(x,y)=g_3(x)g_4(y)$ آن گاه معادله را جداپذیر یا تفکیک پذیر گوییم. زیرا می توان نوشت: $g_1(x)g_2(y)\,dx+g_3(x)g_4(y)\,dy=0$ و از آن جا:

$$\frac{g_1(x)}{g_3(x)}\,dx=-\frac{g_2(y)}{g_4(y)}\,dy$$

و با انتگرال گیری از طرفین تساوی فوق می توان معادله را حل کرد.

Subject :   Date : ....

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $y' = \frac{x(1+y)}{y(x+2)}$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y)}{y(x+2)} \rightarrow \frac{x}{x+2}\,dx = \frac{y}{1+y}\,dy \xrightarrow{\int}$$

$$x - 2\ln(x+2) = y - \ln(1+y) + c \longrightarrow x - y = \ln(x+2)^2 - \ln(1+y) + c$$

$$\rightarrow x - y = \ln c\frac{(x+2)^2}{1+y} \rightarrow e^{x-y} = c\frac{(x+2)^2}{1+y}$$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)} \rightarrow \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{y\,dy}{1+y^2} \xrightarrow{\int} \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| = \frac{1}{2}\ln|1+y^2| + c$$

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{1+x^2} = \frac{1}{x(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ D=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \ln|x^2| = \ln|c(1+x^2)(1+y^2)| \rightarrow 1+y^2 = \frac{x^2}{c(1+x^2)}$$

توجه) معادلات به‌ فرم $y' = f(ax+by+c)$ $(b \neq 0)$ را نیز می‌توان با استفاده از تغییر متغیر $u = ax+by+c$ به معادلات جدایی‌پذیر تبدیل نمود. در واقع داریم:

$$u' = a + by' \rightarrow y' = \frac{1}{b}(u'-a) \xrightarrow[\text{معادله اولیه}]{\text{جایگذاری در}}$$

$$\frac{1}{b}(u'-a) = f(u) \longrightarrow \frac{du}{dx} = bf(u) + a \rightarrow \frac{du}{bf(u)+a} = dx$$

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $y' = \tan(x+y) - 1$ را بیابید.

$$u = x+y \to u' = 1+y' \to y' = u'-1 \xrightarrow[\text{معادله اصلی}]{\text{جایگذاری در}}$$

$$u'-1 = \tan(u) - 1 \to u' = \tan(u) \to \frac{du}{dx} = \tan u \to \frac{du}{\tan u} = dx$$

$$\xrightarrow{\int} \ln(\sin u) = x + c \to \sin u = \underbrace{ce^x}_{e^x \times \underbrace{e^c}_{c}} \to \sin(x+y) = ce^x$$

$$\to x+y = \sin^{-1}(ce^x) \to y = \sin^{-1}(ce^x) - x$$

مثال: معادله $y' = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x-y}\right)}_{f(x-y)}$ را حل کنید.

$$u = x-y \to u' = 1-y' \to y' = 1-u' \to$$

$$\cancel{1} - u' = \cancel{1} + \frac{1}{u} \to \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u} \to u\,du = -dx \xrightarrow{\int}$$

$$\frac{u^2}{2} = -x + c \to \frac{(x-y)^2}{2} = -x+c \to (x-y)^2 + 2x = c$$

معادلات همگن

تعریف: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوییم هرگاه $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

مثال: $f(x,y) = x^3 + 5xy^2 + 3y^3 \to$ همگن درجه ۳

$f(x,y) = x\sin\left(\frac{y}{x}\right) \to$ همگن درجه ۱

$f(x,y) = \tan\left(\frac{x}{y}\right) \to$ همگن درجه ۰

Subject : Date :

$(y')^2 + y^2 = 0$ تنها جواب معادله $y=0$

مسیرهای قائم (مسیرهای متعامد) : دو دسته منحنی $x^2+y^2=c$ و $y=mx$ را در نظر بگیرید. واضح است که هر منحنی از یک دسته بر کلیه‌ی منحنی های دسته‌ی دیگر عمود است. هرگاه چنین ارتباطی بین دو دسته منحنی برقرار باشد یک دسته را مسیر قائم دسته‌ی دیگر می نامند.

برای پیدا کردن مسیرهای قائم ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل متناظر با دسته منحنی های داده شده را با حذف ثوابت به دست آورده سپس در معادله‌ی دیفرانسیل حاصل y' را با $-\frac{1}{y'}$ جایگزین می کنیم. حال با حل معادله‌ی دیفرانسیل جدید می توان مسیرهای قائم دسته منحنی اولیه را پیدا نمود.

$$x^2+y^2=c \rightarrow 2x+2yy'=0 \xrightarrow{y'=-\frac{1}{y'}} 2x-\frac{2y}{y'}=0 \rightarrow$$

$$x-\frac{y}{y'}=0 \rightarrow xy'=y \rightarrow y'=\frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \rightarrow$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \rightarrow \ln y = \ln x + \underbrace{c}_{\ln m} \rightarrow \ln y = \ln mx$$

$$\rightarrow y = mx$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول

فرم کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بصورت $F(x,y,y')=0$ می باشد. معمولاً فرض می کنیم بتوان y' را بصورت صریح برحسب بقیه‌ی جملات نوشت.

قضیه (وجود و یکتایی جواب): فرض کنید توابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل $\alpha<x<\beta$ و $\gamma<y<\delta$:R که شامل نقطه‌ی (x_0,y_0) است پیوسته باشد. در این صورت همسایگی $[x_0-h,x_0+h] \subseteq [\alpha,\beta]$ حول x_0 موجود است که در آن مسأله‌ی

$$\begin{cases} y'=f(x,y) & \text{معادله‌ی} \\ y(x_0)=y_0 & \text{(شرط اولیه)} \end{cases}$$

دارای جواب یکتاست. ($y=f(x)$)

مثال:

$$\begin{cases} y'=x^2+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

مسئله‌ی مقدار اولیه

$\longrightarrow$ با توجه به قضیه دارای جواب منحصر بفرد است اما جواب آن قابل محاسبه نیست.

معادلات تفکیک پذیر (جداپذیر)

معادله‌ی دیفرانسیل $y'=f(x,y)$ را می توان بفرم $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ نوشت. اگر بتوان در معادله‌ی فوق نوشت $M(x,y)=g_1(x)g_2(y)$ و $N(x,y)=g_3(x)g_4(y)$ آنگاه معادله را جداپذیر یا تفکیک پذیر گوییم. زیرا می توان نوشت: $g_1(x)g_2(y)dx+g_3(x)g_4(y)dy=0$ و از آن جا: $\frac{g_1(x)}{g_3(x)}dx=-\frac{g_2(y)}{g_4(y)}dy$

و با انتگرال گیری از طرفین تساوی فوق می توان معادله را حل کرد.

Subject : Date :

$f(x,y) = x + \sqrt{xy}$ $\rightarrow$ همگن درجه $\frac{1}{2}$

$f(x,y) = (x^2+y^2)\cos y$ $\rightarrow$ همگن نیست

$f(x,y) = xy + 3$ $\rightarrow$ همگن نیست

تعریف (معادله‌ی همگن): هر معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول به فرم $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

را که در آن $M(x,y)$ و $N(x,y)$ هر دو همگن از درجه n باشند را یک معادله‌ی دیفرانسیل همگن می‌نامیم.

$y' = f(x,y)$ $\rightarrow$ همگن از درجه ۰

با تغییر متغیر $y = xv$ می‌توان معادله‌ی دیفرانسیل همگن را به معادله‌ای جداپذیر تبدیل نمود

$dy = x\,dv + v\,dx$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$\underbrace{2xy}_{\substack{N(x,y)\\ \text{همگن درجه ۲}}}\,dy + \underbrace{(x^2-y^2)}_{\substack{M(x,y)\\ \text{همگن درجه ۲}}}\,dx = 0$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{y^2-x^2}{2xy}}_{f(x,y)}$ $\rightarrow$ همگن از درجه ۰

$y = xv \rightarrow dy = x\,dv + v\,dx \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{جایگذاری در}}$

$2x\underbrace{y}_{xv}(x\,dv + v\,dx) + (x^2 - x^2v^2)\,dx = 0 \rightarrow 2vx\,dv + 2v^2dx + (1-v^2)dx = 0$

$\Rightarrow 2vx\,dv + (1+v^2)\,dx = 0 \rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{2v\,dv}{1+v^2} \rightarrow$

$\ln x = -\ln(1+v^2) + c \longrightarrow x(1+v^2) = c \longrightarrow x\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = c$

$\Rightarrow y^2 + x^2 = cx$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول $y' = \underbrace{\frac{y}{x+\sqrt{xy}}}_{f(x,y)}$ را حل کنید.

$y = xv \longrightarrow dy = x\,dv + v\,dx \longrightarrow y' = x\frac{dv}{dx} + v = \frac{xv}{x+\sqrt{x^2 v}}$

$\longrightarrow x\frac{dv}{dx} + v = \frac{v}{1+\sqrt{v}} \longrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+\sqrt{v}} - v$

$\longrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v\sqrt{v}}{1+\sqrt{v}} \longrightarrow -\frac{1+\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}\,dv = \frac{dx}{x} \longrightarrow$

$\left(-\frac{1}{v\sqrt{v}} - \frac{1}{v}\right)dv = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \frac{2}{\sqrt{v}} - \ln v = \ln x + c$

$\longrightarrow xv = ce^{\frac{2}{\sqrt{v}}} \longrightarrow y = ce^{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}}$

مثال: جواب معادله‌ی دیفرانسیل زیر را بیابید.

$\underbrace{\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)}_{M(x,y)}dx - \underbrace{\left(\frac{x}{y}\sin\left(\frac{y}{x}\right) + \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)}_{N(x,y)}dy = 0$

$v\cos v\,dx - \left(\frac{1}{v}\sin v + \cos v\right)(x\,dv + v\,dx) = 0 \longrightarrow$

$-\frac{x}{v}\sin v\,dv - x\cos v\,dv - \sin v\,dx = 0 \longrightarrow -x\,dv\left(\frac{1}{v}\sin v + \cos v\right) = \sin v\,dx$

$$\Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{\frac{1}{v}\sin v + \cos v}{\sin v}\, dv \xrightarrow{\int}$$

$$-\ln x = \ln v + \ln(\sin v) \Longrightarrow x v \sin v = c$$

$$\Rightarrow y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = c$$

تذکر: معادلات دیفرانسیل به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+ey}\right)$ نیز همگن می باشند و لذا می توان آن ها را با همان تغییر متغیر $y = xv$ به معادلات جدایی پذیر تفکیک نمود. $y' = x\frac{dv}{dx} + v$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = f\left(\frac{a+bv}{c+ev}\right) \longrightarrow \frac{dv}{f\left(\frac{a+bv}{c+ev}\right) - v} = \frac{dx}{x}$$

تذکر: معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+d}\right)$ همگن نمی باشند ولی قابل تبدیل به معادلات همگن می باشند. با فرض این که دو خط $ax+by+c=0$ و $ex+hy+d=0$ موازی نباشند می توان با یک تغییر

$\frac{a}{b} \neq \frac{e}{h} \rightarrow ah - be \neq 0$

متغیر مناسب، محل تلاقی دو خط را به مبدأ مختصات انتقال داد. در واقع با فرض این که (x_0, y_0) نقطه ی تلاقی دو خط باشد

می توان نوشت:

$$x = X + x_0 \qquad y = Y + y_0$$

$$\Rightarrow dx = dX \qquad \Rightarrow dy = dY$$

$$\rightarrow \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{eX+hY}\right)$$

معادله ی فوق همگن می باشد و با تغییر متغیر $Y = XV$ قابل حل می باشد. در نهایت در جواب به دست آمده

به جای X و Y به ترتیب $x - x_0$ و $y - y_0$ قرار داده می شود.

Subject		Date :

مثال) معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y-4}$ را حل کنید.

$\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=4 \end{cases} \rightarrow \quad x_0 = 1$

$x = X + 1$

$y = Y - 3$

$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y} \qquad Y = VX \rightarrow \frac{dY}{dX} = V + X\frac{dV}{dX}$

$V + X\frac{dV}{dX} = \frac{1+V}{1-V} \longrightarrow X\frac{dV}{dX} = \frac{1+V^2}{1-V} \longrightarrow \frac{1-V}{1+V^2}dV = \frac{dX}{X}$

$\rightarrow \tan^{-1}(V) - \frac{1}{2}\ln(1+V^2) = \ln|X| + c \xrightarrow{V = \frac{Y}{X}} \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{Y^2}{X^2}\right) = \ln|X| + c$

$\rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y+3}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{(y+3)^2}{(x-1)^2}\right) = \ln(x-1) + c$

تذکر: اگر در معادله $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+d}\right)$ دو خط موازی باشند یعنی $ah-be=0$ آنگاه می توان

از تغییر متغیر $U = ax+by$ یا $U = ex+hy$ استفاده نمود و نوشت:

$U = ax+by \rightarrow U' = a + by' \rightarrow y' = \frac{1}{b}(U'-a)$

$\rightarrow \frac{1}{b}(U'-a) = f\left(\frac{u+c}{ku+d}\right) \rightarrow U' = bf\left(\frac{u+c}{ku+d}\right) + a \rightarrow$

$\frac{du}{bf\left(\frac{u+c}{ku+d}\right) + a} = dx$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $(x-2\sin y+3)\,dx+(2x-4\sin y-3)\cos y\,dy=0$ را حل کنید.

$z=\sin y \longrightarrow dz=\cos y\,dy$

$(x-2z+3)\,dx+(2x-4z-3)\,dz=0 \longrightarrow \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{-x+2z-3}{2x-4z-3}$

$u=-x+2z \longrightarrow u'=-1+2z'$

$\dfrac{u'+1}{2}=\dfrac{u-3}{-2u-3} \longrightarrow u'=\dfrac{2u-6}{-2u-3}-1 \longrightarrow u'=\dfrac{-4u+3}{2u+3} \longrightarrow$

$\dfrac{2u+3}{-4u+3}\,du=dx \longrightarrow \left(\dfrac{u+\frac{3}{2}}{-2u+\frac{3}{2}}\right)du=dx \longrightarrow$

$\displaystyle\int\left(\frac{u}{-2u+\frac{3}{2}}\right)du+\int\left(\frac{\frac{3}{2}}{-2u+\frac{3}{2}}\right)du=\int dx \longrightarrow$

$-\frac{1}{2}u-\frac{3}{8}\ln\left(-2u+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{4}\ln\left(-2u+\frac{3}{2}\right)=x+C$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x-2z)-\frac{9}{8}\ln\left|2x-4z+\frac{3}{2}\right|=x+C \longrightarrow$

$\frac{1}{2}(x-2\sin y)-\frac{9}{8}\ln\left(2x-4\sin y+\frac{3}{2}\right)=x+C$

معادلات دیفرانسیل کامل

معادله‌ی دیفرانسیل $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ را کامل گویند هرگاه تابعی مانند $\varphi(x,y)$ موجود باشد که $\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ و $\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ در این صورت جواب $\varphi(x,y)=C$

Subject   Date :

معادله ی دیفرانسیل اول ایست . زیرا $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi(x,y) \right) = 0$$

قضیه: فرض کنید $M(x,y)$ ، $N(x,y)$ ، $M_y(x,y)$ و $N_x(x,y)$ در ناحیه ی مستطیلی R: $\alpha < x < \beta$ ، $\gamma < y < \delta$ پیوسته باشند. در این صورت معادله ی $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (*)$ در R کامل است اگر و فقط اگر در هر نقطه از R داشته باشیم $M_y(x,y) = N_x(x,y)$.

برهان: فرض می کنیم معادله ی $(*)$ کامل باشد. لذا تابع $\varphi(x,y)$ موجود است به طوری که $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,y)$ و $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y)$. داریم:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}}_{\varphi_{xy}} = M_y(x,y) \qquad \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}}_{\varphi_{yx}} = N_x(x,y)$$

باتوجه به پیوستگی M_y و N_x می توان نتیجه گرفت که $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$ بنابراین $M_y = N_x$

بالعکس، فرض کنیم $M_y = N_x$ نشان می دهیم معادله ی $(*)$ کامل است.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow \varphi(x,y) = \int M(x,y)\, dx + h(y)$$

$$\xrightarrow[y \text{ به}]{\text{مشتق نسبت}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int M_y(x,y)\, dx + h'(y)$$

باید داشته باشیم $\int M_y(x,y)\,dx + h'(y) = N(x,y)$. تابع $h(y)$ را طوری می یابیم که

DATA BANK

Subject : Date :

تساوی فوق برقرار شود. $h'(y) = N(x,y) - \int M_y(x,y)\,dx$ تابع سمت راست تنها وابسته

به y است. زیرا مشتق آن نسبت به x برابر صفر می‌شود. (طبق فرض می‌دانیم $M_y(x,y)=N_x(x,y)$)

$$\Rightarrow h(y) = \int N(x,y)\,dy - \iint M_y(x,y)\,dx\,dy$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\underbrace{(y\cos x + 2xe^y)}_{M(x,y)} + \underbrace{(\sin x + x^2e^y - 1)}_{N(x,y)}\,y' = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\cos x + 2xe^y = \cos x + 2xe^y$ ✓ معادله کامل است

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y\cos x + 2xe^y \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{انتگرال}} \varphi(x,y) = y\sin x + x^2e^y + h(y)$$

$$\xrightarrow[y]{\text{مشتق نسبت به}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin x + x^2e^y + h'(y) = \underbrace{\sin x + x^2e^y - 1}_{N(x,y)}$$

$$\Rightarrow h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = c \rightarrow y\sin x + x^2e^y - y = c$$

DATA BANK

Subject   Date :

عامل انتگرال ساز

اگر معادله‌ی دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dx = 0$ کامل نباشد آن‌گاه

ممکن است بتوان تابع مناسبی مانند $\mu(x,y)$ را به‌گونه‌ای یافت که اگر طرفین معادله را در $\mu(x,y)$ ضرب نماییم، معادله‌ی

حاصل کامل شود. چنین تابعی را عامل یا فاکتور انتگرال ساز گویند.

مثال: معادله‌ی $-y\,dx + x\,dy = 0$ کامل نیست اما با ضرب معادله در $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2}$ به معادله‌ی زیر

می‌رسیم که کامل است. $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad \underbrace{\frac{-y}{x^2}}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\frac{1}{x}}_{N(x,y)} dy = 0$

هم‌چنین معادله‌ی $4x\,dy + 3y\,dx = 0$ کامل نیست اما با ضرب $\mu(x,y) = x^2y^3$ در آن

آن را به معادله‌ی کامل تبدیل نمود. $\underbrace{4x^3y^3}_{N(x,y)} dy + \underbrace{3x^2y^4}_{M(x,y)} dx = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^2y^3 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

فرض کنید معادله‌ی دیفرانسیل زیر کامل نباشد.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad *$$

در این صورت به دنبال یافتن تابعی مانند $\mu(x,y)$ هستیم که معادله‌ی زیر کامل باشد:

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

باید داشته باشیم: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)N(x,y)\right)$

$$\mu_y M + M_y \mu = \mu_x N + N_x \mu \xrightarrow{\div \mu} M_y - N_x = N\frac{\partial}{\partial x}\ln\mu - M\frac{\partial}{\partial y}\ln\mu$$

حل معادلات دیفرانسیل فوق و یافتن تابع $\mu(x,y)$ در حالت کلی دشوار است و لذا می‌توان آن را در برخی از حالات خاص پیدا نمود.

حالت (۱): اگر $\frac{M_y-N_x}{N}$ تابعی از تنها متغیر x باشد آنگاه معادله * دارای عامل انتگرال‌ساز

به فرم $\mu(x)=e^{\int f(x)\,dx}$ می‌باشد که $f(x)=\frac{M_y-N_x}{N}$

زیرا $M_y - N_x = N\frac{\partial}{\partial x}\ln\mu - 0$

$$\to \frac{\partial}{\partial x}\ln\mu = \underbrace{\frac{M_y-N_x}{N}}_{f(x)} \xrightarrow{\int} \ln\mu = \int f(x)\,dx \to \mu = e^{\int f(x)\,dx}$$

مثال: معادله دیفرانسیل $(x+y^2)dx - 2xy\,dy = 0$ را حل کنید.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -2y$ $\qquad \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x} = f(x)$

$$\to \mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

$\left(\frac{x+y^2}{x^2}\right)dx - \frac{2y}{x}dy = 0$ معادله کامل

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{2y}{x} \to \varphi(x,y) = -\frac{y^2}{x} + h(x)$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2}+h'(x)$ $\qquad \frac{y^2}{x^2}+h'(x) = \frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2} \to \boxed{h(x)=\ln x}$

Subject   Date :

حالت (۲) : اگر $\frac{N_x - M_y}{M}$ تابعی از تنها متغیر y باشد آنگاه معادله‌ی * دارای عامل انتگرال‌ساز

به فرم $\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$ می‌باشد که $g(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$. زیرا

$$M_y - N_x = -M \frac{\partial}{\partial y} \ln\mu \rightarrow \underbrace{\frac{N_x - M_y}{M}}_{g(y)} = \frac{\partial}{\partial y} \ln\mu \longrightarrow \ln\mu = \int g(y)dy \rightarrow$$

$$\mu = e^{\int g(y)dy}$$

مثال : معادله‌ی $y(1+xy)dx - xdy = 0$ را حل کنید.

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-1-(1+2xy)}{y(1+xy)} = \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)} = -\frac{2}{y} = g(y)$$

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{1+xy}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$ معادله کامل

حالت (۳) : اگر $\frac{M_y - N_x}{yN - xM}$ تابعی از xy باشد، آنگاه معادله‌ی * دارای عامل انتگرال‌ساز

به فرم $\mu(z) = e^{\int h(z)dz}$ می‌باشد که $h(z) \equiv \frac{M_y - N_x}{yN - xM}$ ، $z = xy$

زیرا

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\mu(z) = \frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z) \times \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{y} = y\frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\ln\mu(z) = \frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z) \times \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{x} = x\frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z)$$

$$M_y - N_x = \frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z)\left[yN - xM\right] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z) = \underbrace{\frac{M_y - N_x}{yN - xM}}_{h(z)}$$

$$\longrightarrow \ln\mu(z) = \int h(z)\,dz \longrightarrow \mu(z) = e^{\int h(z)dz}$$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $(y + x^4y^4)dx + xdy = 0$ دارای عامل انتگرال سازی بیابید

$$\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{1 + 4x^4y^3 - 1}{xy - xy - x^5y^4} = \frac{4x^4y^3}{-x^5y^4} = -\frac{4}{xy}$$ می‌باشد زیرا $\mu(x,y) = \frac{1}{x^4y^4}$

$$= -\frac{4}{z} = h(z) \longrightarrow \mu(z) = e^{\int -\frac{4}{z}dz} = \frac{1}{z^4} = \frac{1}{x^4y^4}$$

حالت (۴): اگر ؟ تابعی از $z = (x^2 + y^2)$ باشد آنگاه معادله‌ی * دارای عامل انتگرال سازی بصورت $\mu(z) = e^{\int h(z)dz}$ می‌باشد که $h(z) = ?$

$$M_y - N_x = \underbrace{N\frac{\partial}{\partial x}\ln\mu(z)}_{2x\frac{\partial}{\partial z}\ln(\mu(z))} - \underbrace{M\frac{\partial}{\partial y}\ln\mu(z)}_{2y\frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z)\left[2xN - 2yM\right] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z) = \underbrace{\frac{M_y - N_x}{2(xN - yM)}}_{h(z)}$$

مثال: عامل انتگرال ساز معادله‌ی $(x - xy)dx + (y + x^2)dy = 0$ را بیابید.

$$\frac{M_y - N_x}{2(xN - yM)} = \frac{-x - 2x}{2(xy + x^3 - xy + xy^2)} = \frac{-3}{2(x^2+y^2)} = -\frac{3}{2z} = h(z)$$

$$\mu(z) = e^{-\int \frac{3}{2z} dz} = \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حالت (۵): اگر ? تابعی از $z = \frac{y}{x}$ باشد آنگاه معادله * دارای عامل انتگرال ساز $\mu(z) = e^{\int h(z)dz}$

می‌باشد که $h(z) = ?$.

$$M_y - N_x = N \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \ln\mu}_{-\frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z)} - M \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \ln\mu}_{\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z)}$$

$$\rightarrow \frac{M_y - N_x}{-\frac{y}{x^2}N - \frac{M}{x}} = \frac{\partial}{\partial z} \ln\mu(z) = -x^2\left(\frac{M_y - N_x}{yN + xM}\right) \equiv h(z)$$

حالت (۶): اگر ? تابعی از $z = \frac{x}{y}$ باشد آنگاه معادله * دارای عامل انتگرال ساز $\mu(z) = e^{\int h(z)dz}$

می‌باشد که $h(z) = ?$.

$$M_y - N_x = N \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \ln\mu}_{\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z)} - M \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \ln\mu}_{-\frac{x}{y^2}\frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z)}$$

$$\rightarrow \frac{M_y - N_x}{\frac{N}{y} + \frac{Mx}{y^2}} = \frac{\partial}{\partial z} \ln\mu(z) = y^2\left(\frac{M_y - N_x}{yN + xM}\right) \equiv h(z)$$

Subject : Date :

مثال: تحت چه شرطی معادله‌ی دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ دارای انتگرال ساز به فرم تابعی از $z=x^2-y^2$ می‌باشد؟ $z=x^2-y^2$

$$M_y-N_x=N\frac{\partial}{\partial x}\ln\mu-M\frac{\partial}{\partial y}\ln\mu=N\frac{\partial}{\partial z}\ln\mu\times 2x-M\frac{\partial}{\partial z}\ln\mu\times(-2y)$$

$$\longrightarrow M_y-N_x=(2xN+2yM)\frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z)\longrightarrow\frac{\partial}{\partial z}\ln\mu(z)=\frac{M_y-N_x}{2(xN+yM)}$$

باید $\frac{M_y-N_x}{2(xN+yM)}$ تابعی از x^2-y^2 باشد.

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی

معادله‌ی مرتبه‌ی اول خطی به فرم $A(x)y'+B(x)y=C(x)$ می‌باشد. با فرض این که $A(x)\neq 0$ می‌توان نوشت: $y'+P(x)y=q(x)$. اگر در این معادله $q(x)=0$ معادله را همگن و در غیر این صورت ناهمگن می‌نویسیم.

برای حل این دسته از معادلات می‌توان نوشت: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=q(x)\longrightarrow\underbrace{(P(x)y-q(x))}_{M(x,y)}dx+\underbrace{dy}_{N(x,y)}=0$

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{P(x)-0}{1}=P(x)$$

بنابراین معادله‌ی فوق دارای عامل انتگرال ساز به فرم $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$ می‌باشد. بنابراین

معادله‌ی $\underbrace{\mu(x)y'+\mu(x)P(x)y}_{\frac{d}{dx}(\mu(x)y(x))}=\mu(x)q(x)$ کامل است.

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}\rightarrow\frac{d}{dx}\mu(x)=\mu(x)P(x)$$

Subject   Date :

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\mu(x)y(x)\right)=\mu(x)p(x) \rightarrow \mu(x)y(x)=\int \mu(x)p(x)dx+c \rightarrow$$

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)q(x)\,dx+c\right]$$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $xy'+2y=4x^2$ را با شرط اولیه‌ی $y(1)=2$ حل کنید.

$$y'+\underbrace{\frac{2y}{x}}_{p(x)}=\underbrace{4x}_{q(x)} \qquad \mu=e^{\int p(x)dx}=e^{2\int\frac{dx}{x}}=x^2$$

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)q(x)dx+c\right]=\frac{1}{x^2}\left[\int x^2\times 4x\,dx\right]=\frac{1}{x^2}\left[x^4+c\right]=x^2+\frac{c}{x^2}$$

$$y(1)=1+c=2 \rightarrow c=1 \Rightarrow y(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$$

مثال: معادله‌ی $\operatorname{tg}x\,y'+y=3x\sec x$ را حل کنید.

$$y'+\underbrace{\cot x}_{p(x)}\,y=\underbrace{3x\csc x}_{q(x)} \qquad \mu(x)=e^{\int\cot x\,dx}=e^{\ln|\sin x|}\overset{\sin x>0}{=\!=}\sin x$$

$$y(x)=\frac{1}{\sin x}\left[\int \cancel{\sin x}\,3x\,\cancel{\csc x}\,dx\right]=\frac{1}{\sin x}\left[\frac{3x^2}{2}+c\right],\ \sin x>0$$

تذکر: یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول می‌تواند نسبت به x به عنوان تابعی از y خطی باشد.

یعنی: $\frac{dx}{dy}+P(y)x=q(y)$. جواب این معادله بصورت قبل است با این تفاوت که جای x و y عوض می‌شود.

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y\ln y+y-x} \longrightarrow \frac{dx}{dy} = 2\ln y + 1 - \frac{x}{y} \longrightarrow$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y} = 2\ln y+1 \qquad P(y)=\frac{1}{y} \qquad q(y)=2\ln y+1$$

$$\mu(y)=e^{\int\frac{dy}{y}} = y$$

$$x=\frac{1}{y}\left[\int y(2\ln y+1)\,dy\right] = \frac{1}{y}\left[2\int y\ln y + \frac{y^2}{2}\right] = \frac{1}{y}\left[\ln y - \frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}+c\right]$$

$$= \frac{c}{y} + \ln y$$

$$x = \frac{c}{y} + y\ln y$$

$$\int y\ln y\,dy \xrightarrow[dv=y\,dy\,\to\, v=\frac{y^2}{2}]{u=\ln y\,\to\, du=\frac{dy}{y}} \frac{y^2\ln y}{2} - \int\frac{y^2}{2}\times\frac{dy}{y} = \frac{y^2\ln y}{2} - \frac{y^2}{4}$$

برخی از معادلات معروف را می‌توان به معادلات خطی مرتبه اول تبدیل نمود که عبارتند از:

(۱) معادله‌ی برنولی: معادله‌ی دیفرانسیل $y'+P(x)y=q(x)y^n$ که $n\in\mathbb{R}$ و $n\neq 0,1$ را معادله‌ی برنولی می‌گویند.

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = q(x)$$

فرض می‌کنیم $u=y^{1-n} \Rightarrow u'=(1-n)y'y^{-n}$

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+P(x)u=q(x) \longrightarrow \frac{du}{dx}+(1-n)P(x)u=(1-n)q(x)$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

مثال: معادله دیفرانسیل $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$ را حل کنید.

$$y' - \frac{2}{3x} y = \frac{x^2}{3} y^{-2} \Rightarrow u = y^3 \Rightarrow u' = 3y'y^2$$

$$y^2 y' - \frac{2}{3x} y^3 = \frac{x^2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{3}}\frac{du}{dx} - \frac{2}{\cancel{3}x} u = \frac{x^2}{\cancel{3}} \Rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{2}{x} u = x^2$$

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow u = x^2\left[\int \frac{1}{x^2} x^2 dx\right] = x^2[x+c] = x^3 + cx^2$$

$$\Rightarrow y^3 = x^3 + cx^2$$

تذکر: $\frac{dx}{dy} + P(y)x = q(y)x^n \qquad u = x^{1-n} \Rightarrow \frac{du}{dy} = (1-n)\frac{dx}{dy} x^{-n}$

مثال: معادله دیفرانسیل $xy' + y = 2x^2 y y' \ln y$ را حل کنید.

$$y'(2x^2 y\ln y - x) = y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 2x^2\ln y - \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \underbrace{\frac{1}{y}}_{P(y)} x = \underbrace{2x^2\ln y}_{q(y)x^2}$$

$$u = x^{-1} \Rightarrow \frac{du}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy}$$

$$-\frac{du}{dy} + \frac{1}{y}\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{u} = 2\ln y \Rightarrow \frac{du}{dy} - \frac{1}{y}(u) = -2\ln y$$

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{dy}{y}} = \frac{1}{y}$$

$$u = y\left[\int -2\ln y \times \frac{1}{y} dy\right] = y\left[-(\ln y)^2 + c\right] \Rightarrow u = -y(\ln y)^2 + cy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = -y(\ln y)^2 + cy$$

Subject :　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Date :

(۲) معادلات دیفرانسیل $[f(y)]'\frac{dy}{dx}+f(y)P(x)=q(x)$ با تغییر متغیر $u=f(y)$ به معادلات

خطی مرتبه اول تبدیل می‌شوند. زیرا: $u=f(y) \to u'=y'f'(y)$

$$\to \frac{du}{dx}+P(x)u=q(x)$$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $y'-2=2xe^{-y}$ را حل کنید.

$$\underbrace{e^y}_{f'(y)}y'-2\underbrace{e^y}_{f(y)}=2x \qquad u=e^y \to u'=y'e^y$$

$$u'-2u=2x \qquad P(x)=-2 \qquad q(x)=2x \qquad \mu(x)=e^{-2\int dx}=e^{-2x}$$

$$u=e^{2x}\left[\int 2xe^{-2x}dx\right]=2e^{2x}\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c\right]=-x-\frac{1}{2}+ce^{2x}$$

$$\to e^y=-x-\frac{1}{2}+ce^{2x}$$

(۳) معادله‌ی ریکاتی: معادله‌ی دیفرانسیل $y'+P_1(x)y+P_2(x)y^2=q(x)$ را معادله‌ی ریکاتی می‌نامند.

($P_2(x)\neq 0$) برای حل این معادله باید یک جواب خصوصی از آن مانند $y_1(x)$ معلوم باشد. در این صورت جواب معادله

به فرم $y=y_1+\frac{1}{z}$ حاصل می‌شود که z تابعی از x می‌باشد. $y=y_1+\frac{1}{z}$

$$\left[y_1+\frac{1}{z}\right]'+P_1(x)\left(y_1+\frac{1}{z}\right)+P_2(x)\left[y_1+\frac{1}{z}\right]^2=q(x) \to$$

$$y_1'-\frac{1}{z^2}z'+P_1(x)y_1+\frac{P_1(x)}{z}+P_2(x)y_1^2+P_2(x)\left(\frac{1}{z^2}\right)+2P_2(x)y_1\left(\frac{1}{z}\right)=q(x)$$

$$\underbrace{y_1' + P_1(x)y_1 + P_2(x)y_1^2}_{\cancel{q(x)}} + \left[-\frac{1}{z^2}z' + \frac{P_1(x)}{z} + \frac{P_2(x)}{z^2} + \frac{2P_2(x)y_1}{z}\right] = \cancel{q(x)}$$

$$\rightarrow z' - P_1(x)z - P_2(x) - 2P_2(x)y_1 z = 0$$

$$\rightarrow z' - \underbrace{\left(P_1(x) + 2P_2(x)y_1\right)}_{P(x)} z = \underbrace{P_2(x)}_{Q(x)}$$

مثال: با فرض این که $y_1(x) = x$ جواب خصوصی معادله $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$ باشد

جواب عمومی آن را بدست آورید.

$$y' - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 1 \qquad y = x + \frac{1}{z}$$

$$P_1(x) = -\frac{1}{x} \qquad P_2(x) = \frac{1}{x^2} \qquad q(x) = 1$$

$$\frac{dz}{dx} - \left(\frac{1}{x}\right)z = \frac{1}{x^2} \qquad \mu(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$z = x\left[\int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2}\, dx\right] = x\left(\int x^{-3}\, dx\right) = x\left[-\frac{1}{2}x^{-2} + c\right]$$

$$= -\frac{1}{2x} + cx = \frac{cx^2 - 1}{2x}$$

$$y = x + \frac{2x}{cx^2 - 1}$$

Subject : Date :

(۴) معادلهٔ کلرو : هر معادلهٔ دیفرانسیل به فرم $y = xy' + f(y')$ را معادلهٔ کلرو می‌نامند. برای

حل این معادله فرض می‌کنیم $y' = p$. داریم:

$$y = xp + f(p) \longrightarrow y' = x\frac{dp}{dx} + p + \frac{dp}{dx} f'(p) \longrightarrow$$

$$\frac{dp}{dx}\left(x + f'(p)\right) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0 \longrightarrow p = c \longrightarrow y = xc + f(c) \\ x = -f'(p) \end{cases}$$

با حل دستگاه زیر و حذف ثابت c جواب غیرعادی معادله حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} y = xc + f(c) \\ x = -f'(c) \end{cases}$$

مثال: معادلهٔ دیفرانسیل $y = xy' + \frac{1}{y'}$ را حل کنید.

$y' = p \Rightarrow y = xp + \frac{1}{p}$ $\qquad y = xc + \frac{1}{c}$ جواب عمومی

$$\begin{cases} y = cx + \frac{1}{c} \\ x = \frac{1}{c^2} \end{cases} \longrightarrow cx = \frac{1}{c} \longrightarrow y = 2cx \longrightarrow y^2 = 4c^2x^2 \longrightarrow y^2 = 4x$$

(۵) معادلهٔ لاگرانژ : معادلهٔ دیفرانسیل $y = xf(y') + g(y')$ را معادلهٔ لاگرانژ می‌نامند. برای حل این

معادله فرض می‌کنیم $y' = p$.

$$y = xf(p) + g(p) \longrightarrow \underbrace{y'}_{p} = f(p) + x\frac{dp}{dx} f'(p) + \frac{dp}{dx} g'(p)$$

Subject   Date :

$$\rightarrow p - f(p) = \left(x f'(p) + g'(p)\right)\frac{dp}{dx} \xrightarrow{p \neq f(p)} \frac{dx}{dp} = \frac{x f'(p) + g'(p)}{p - f(p)}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)} x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$ معادله خطی نسبت به x

معادله ی فوق یک معادله ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول نسبت به تابع x و متغیر p می باشد.

با حل معادله ی فوق می توان نوشت: $x = \psi(p)$

لذا جواب معادله ی اولیه از حذف p در دستگاه زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} y = x f(p) + g(p) \\ x = \psi(p) \end{cases}$$

بررسی چند حالت خاص در حل $F(x, y, y') = 0$

(۱) اگر معادله ی دیفرانسیل به فرم $F(y') = 0$ باشد آن گاه با فرض این که معادله ی $F(x) = 0$ دارای حداقل یک ریشه ی حقیقی مانند k باشد می توان نوشت:

$$y' = k \rightarrow y = kx + c \rightarrow k = \frac{y - c}{x}$$

لذا جواب معادله عبارت است از: $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$

(۲) اگر معادله به فرم $F(y, y') = 0$ باشد آن گاه ممکن است دو حالت زیر رخ دهد:

I: $y' = f(y) \rightarrow x + c = \int \frac{dy}{f(y)}$

II ,

$$y=f(y') \xrightarrow{y'=p} y=f(p) \rightarrow \underbrace{dy}_{p\,dx}=f'(p)\,dp$$

$$\rightarrow \frac{dp}{dx}=\frac{p}{f'(p)} \rightarrow x+c=\int \frac{f'(p)}{p}\,dp$$

$$\begin{cases} y=f(p) \\ x+c=\int \frac{f'(p)}{p}\,dp \end{cases}$$

از حذف p در دستگاه روبرو جواب عمومی حاصل می‌شود.

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $y=(y')^2 e^{y'}$ را حل کنید.

$y'=p$

$$y=p^2e^p \rightarrow \underbrace{dy}_{p\,dx}=(2pe^p+p^2e^p)\,dp \rightarrow p\,dx=pe^p(2+p)\,dp \rightarrow$$

$$\begin{cases} p=0 \\ (2+p)e^p\,dp-dx=0 \rightarrow x+c=e^p(1+p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=p^2e^p \\ x=e^p(1+p)-c \end{cases} \qquad \begin{cases} p=0 \\ \rightarrow y=0 \end{cases}$$

(۳) اگر معادله به فرم $F(x,y')=0$ دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

I ,

$$y'=f(x) \rightarrow y=\int f(x)\,dx+c$$

II ,

$$x=f(y') \xrightarrow{y'=p} x=f(p) \rightarrow \underbrace{dx}_{\frac{dy}{p}}=f'(p)\,dp \rightarrow dy=f'(p)\,p\,dp$$

$$\rightarrow y=\int pf'(p)\,dp+c$$

Subject   Date :

لذا جواب معادله از حذف p در دستگاه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p f'(p)\,dp + c \end{cases}$$

(۴) برای معادله‌ی $F(x, y, y') = 0$ می‌تواند دو حالت زیر رخ دهد.

* الف) $x = f(y, y')$

* ب) $y = f(x, y')$

الف) $x = f(y, y') \xrightarrow{y' = p} x = f(y, p) \rightarrow \dfrac{dx}{\frac{dy}{p}} = f_y\,dy + f_p\,dp$

$$\rightarrow \frac{1}{p} = f_y + f_p \frac{dp}{dy}$$

با حل معادله‌ی دوم و یافتن p برحسب y و جایگذاری در معادله‌ی اول جواب حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} x = f(y, p) \\ \dfrac{1}{p} = f_y + f_p \dfrac{dp}{dy} \end{cases}$$

ب) $y = f(x, y') \xrightarrow{y' = p} y = f(x, p) \rightarrow dy = f_x\,dx + f_p\,dp \rightarrow$

$$p\,dx = f_x\,dx + f_p\,dp \rightarrow p = f_x + f_p \frac{dp}{dx}$$

با حل معادله‌ی دوم و یافتن p برحسب x و جایگذاری در معادله‌ی اول جواب حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} y = f(x, p) \\ p = f_x + f_p \dfrac{dp}{dx} \end{cases}$$

مثال: معادله‌ی $y = \frac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2$ را حل کنید:

$$y' = p \Rightarrow y = \frac{p^2}{2} + 2xp + x^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{p^2}{2} + 2xp + x^2 \quad * \\ p = 2p + 2x + (p+2x)\frac{dp}{dx} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p + 2x = 0 \\ \frac{dp}{dx} + 1 = 0 \rightarrow p = -x + c \end{cases}$$

با قرار دادن $p = -x + c$ در معادله‌ی * جواب عمومی به صورت زیر ظاهر می‌شود:

$$y = cx + \frac{1}{2}(c^2 - x^2)$$

با قرار دادن $p = -2x$ در معادله‌ی * جواب غیرعادی $y = -x^2$ به دست می‌آید.

Subject: Date:

معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم

فرم کلی یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی n ام بصورت $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ می‌باشد. این معادلات به دو دسته‌ی خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند. معادلات دیفرانسیل خطی به دو دسته‌ی زیر تقسیم می‌شوند:

۱) خطی با ضرایب ثابت

۲) خطی با ضرایب متغیر

فرم کلی یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دوم خطی بصورت زیر است:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad *$$

اگر $r(x) = 0$ معادله را همگن و در غیراین صورت ناهمگن گوییم. اگر $p(x)$ و $q(x)$ در معادله‌ی فوق توابع ثابت باشند معادله را خطی با ضرایب ثابت گویند.

مسایل مقدار مرزی و اولیه: اگر معادله‌ی (*) روی $[x_0, b]$ دارای جواب باشد، آن گاه این معادله را همراه با شرایط اولیه‌ی
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$
یک مسأله‌ی مقدار اولیه گویند. اما اگر شرایط روی تابع مجهول در ابتدا و انتهای بازه بصورت زیر داده شده باشد، مسأله را یک مسأله‌ی مقدار مرزی گویند:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(x_0) + \beta_1 y'(x_0) = y_0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = y_1 \end{cases}$$

که (α_1, β_1) و (α_2, β_2) همزمان صفر نیستند.

DATA BANK

قضیه‌ی وجود و یکتایی جواب معادلات مرتبه‌ی دوم

اگر توابع $p(x)$ ، $q(x)$ و $r(x)$ بر بازه‌ی I که شامل نقطه‌ی x_0 است پیوسته باشند، آن‌گاه معادله‌ی

$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ در بازه‌ی I با شرایط اولیه‌ی $\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y'_0 \end{cases}$ دارای جواب منحصربفرد

$y=\varphi(x)$ می‌باشد.

مثال: بزرگترین بازه‌ای که در آن مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر دارای جواب یکتاست کدام است؟

$$(x^2-3x)y''+xy'-(x+3)y=0$$

$$\begin{cases} y(1)=2 \\ y'(1)=1 \end{cases}$$

$$p(x)=\frac{1}{x-3} \qquad q(x)=\frac{-(x+3)}{x^2-3x}$$

با توجه به نقاط ناپیوستگی توابع $p(x)$ و $q(x)$ ، بازه‌ی مورد نظر $I=(0,3)$ می‌باشد.

برخلاف مسائل مقدار اولیه، مسائل مقدار مرزی ممکن است بدون جواب یا دارای بی‌نهایت جواب باشند. به عنوان

مثال: $y''=0$ $\begin{cases} y(-1)=0 \\ y(1)-2y'(1)=0 \end{cases}$

دارای جواب‌های $y=c(1+x)$ می‌باشد.

Subject Date :

قضیه (اصل برهم نهی یا انطباق جواب ها) :

هرگاه y_1 و y_2 دو جواب معادله ی دیفرانسیل $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ باشند آن گاه :

$c_1y_1+c_2y_2$ نیز به ازای هر مقدار از ثابت های c_1 و c_2 یک جواب می باشند .

تذکر : این قضیه تنها برای معادلات همگن و خطی برقرار است .

تعریف : دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را در فاصله ی $[a,b]$ مستقل خطی گوییم هرگاه برای هر $x\in[a,b]$ ، $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$ نتیجه دهد : $c_1=c_2=0$. در غیر این صورت اگر یک ترکیب خطی از y_1 و y_2 مساوی صفر شود اما همه ی ضرایب صفر نباشند ، ($y_1(x)=k\,y_2(x)$ یا $y_2(x)=l\,y_1(x)$) آن گاه y_1 و y_2 را روی $[a,b]$ وابسته ی خطی گوییم .

$\frac{y_1}{y_2}=c$ (ثابت) وابسته خطی ، $\frac{y_1}{y_2}=$ (تابعی از x) مستقل خطی

به عنوان مثال توابع $y_1(x)=\frac{5}{4}x$ و $y_2(x)=2x$ وابسته ی خطی می باشند اما توابع $y_1=e^{2x}$ و $y_2=e^{x}$ مستقل خطی اند .

تذکر : استقلال خطی جواب های یک معادله ی دیفرانسیل مهم است . زیرا می توان ثابت کرد اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی برای معادله ی $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ باشند آن گاه $y=c_1y_1+c_2y_2$ علاوه بر این که جواب این معادله است ، جواب عمومی آن نیز می باشد . یعنی هر جواب معادله به فرم

Subject : Date :

$c_1y_1+c_2y_2$ نوشته می‌شود.

رونسکین (دترمینان رونسکی): دترمینان زیر را رونسکین یا دترمینان رونسکی جواب های y_1 و y_2 در نقطه‌ی x_0 می‌نامند:

$$W=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)\,y_2'(x_0) - y_2(x_0)\,y_1'(x_0)$$

گاهی مواقع w را با $w(y_1,y_2)(x_0)$ نمایش می‌دهند.

قضیه: اگر f و g در بازه‌ی I مشتق پذیر باشند آن گاه f و g بر I وابسته‌ی خطی اند اگر و تنها اگر به ازای هر $x\in I$

$W(f,g)(x)=0$.

به طور معادل اگر $x_0\in I$ موجود باشد به طوری که $w(f,g)(x_0)\neq 0$ آن گاه، f و g در I مستقل خطی اند و بالعکس.

برهان: فرض کنید f و g در I وابسته‌ی خطی باشند. بنابراین c_1 و c_2 موجودند که $c_1f(x)+c_2g(x)=0$ که c_1 و c_2 هردو با هم صفر نمی‌باشند.

$c_1f(x)+c_2g(x)=0$

$c_1f'(x)+c_2g'(x)=0$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{x}=0 \qquad x\neq 0 \rightarrow \det A=0 \longrightarrow f(x)g'(x)-g(x)f'(x)=0$$

$$\rightarrow W(f,g)(x)=0$$

Subject   Date :

حال به ازای هر x فرض کنید $W(f,g)(x)=0$. بنابراین:

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{g(x)}{g'(x)} \xrightarrow{\int} \ln f(x) = \ln g(x) + c \rightarrow$$

$$f(x) = c\,g(x) \rightarrow$$ f و g وابسته‌ی خطی هستند

مثال:

$$y_1 = e^{2x} \qquad y_2 = e^{x}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{x} \\ 2e^{2x} & e^{x} \end{vmatrix} = -e^{3x} \neq 0 \rightarrow$$ y_1, y_2 مستقل خطی

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \qquad y_2(x) = \frac{1}{x} \qquad x>0$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sqrt{x} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3x^{\frac{3}{2}}} \neq 0 \rightarrow$$ y_1, y_2 مستقل خطی

تمرین: اگر y_1 و y_2 جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل زیر باشند، آن‌گاه رونسکین y_1 و y_2 عبارت است از

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

$$W(y_1, y_2)(x) = c\,e^{-\int p(x)\,dx} .$$

c ثابت مستقل از x

اثبات:

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$W'(x) = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - \cancel{y_1' y_2'} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

$F(r,\theta,c)$ $\qquad \frac{r}{r'} \to -\frac{r'}{r}$

$\tan\psi = \frac{r}{r'}$

$y_1'' + P(x)\,y_1' + q(x)\,y_1 = 0 \qquad \times(-y_2)$

$y_2'' + P(x)\,y_2' + q(x)\,y_2 = 0 \qquad \times(y_1)$

$$\to \underbrace{-y_2 y_1'' + y_1 y_2''}_{W'(x)} + P(x)\underbrace{(y_1 y_2' - y_1' y_2)}_{W(x)} = 0 \quad \to \quad W'(x) + P(x)\,W(x) = 0$$

$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

$W(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int \mu(x)\times 0 + c\right] = c\,e^{-\int P(x)dx}$

با توجه به رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت اگر x_0 موجود باشد که $W(x_0)=0$ آن گاه به ازای هر x، $W(x)=0$، و اگر x_0 موجود باشد که $W(x_0)\neq 0$ آن گاه به ازای هر x $W(x)\neq 0$. به عبارت دیگر رونسکین دو تابع یا کلاً صفر است یا کلاً مخالف صفر.

روش حل معادلات خطی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت

معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت به فرم $y'' + Py' + qy = 0$ (*) می‌باشد که $P,q \in \mathbb{R}$ مقادیر ثابت هستند. با توجه به این که معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' + ky = 0$ دارای جوابی به فرم $y = ce^{-kx}$ می‌باشد

لذا طبیعی است که حدس زده شود معادله فوق هم دارای جوابی به این فرم باشد. بنابراین فرض می‌کنیم $y = e^{\lambda x}$.

داریم: $\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0 \rightarrow (\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x} = 0$

شرط این که $y=e^{\lambda x}$ جواب معادله باشد آن است که $\lambda^2+p\lambda+q=0$. بنابراین معادله، معادله‌ی مشخصه (معادله‌ی مفسر) گفته می‌شود. برای حل این معادله‌ی مشخصه سه حالت زیر در نظر گرفته می‌شود:

۱) $\Delta = p^2-4q>0$ یعنی معادله‌ی مشخصه دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز باشد مانند λ_1 و λ_2. بنابراین:

$y_1=e^{\lambda_1 x}$ و $y_2=e^{\lambda_2 x}$ جواب های معادله‌ی * می‌باشند.

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0 \quad ; \forall x$$

لذا y_1 و y_2 مستقل خطی هستند و در نتیجه جواب عمومی معادله‌ی * عبارتست از: $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$

مثال: مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y''+5y'+6y=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=0 \end{cases} \qquad \lambda^2+5\lambda+6=0 \quad \text{معادله مشخصه} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-2 \\ \lambda_2=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1=e^{-2x} \\ y_2=e^{-3x} \end{cases} \rightarrow y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=2 \rightarrow c_1+c_2=2 \\ y'(0)=0 \rightarrow -2c_1-3c_2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} c_1=9 \\ c_2=-7 \end{array}$$

$$\rightarrow y=9e^{-2x}-7e^{-3x}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$: یادآوری فرمول اویلر

Subject:
Year: Month: Day:

۲) $\Delta = p^2 - 4q < 0$ در این صورت معادله‌ی مشخصه دارای دو ریشه‌ی مختلط به صورت زیر می‌باشد.

$\lambda_1 = a + ib \qquad \lambda_2 = a - ib$

$y_1 = e^{(a+ib)x} \qquad y_2 = e^{(a-ib)x}$

$Y_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$Y_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i}$

$Y_1 = e^{ax}\cos bx$

$Y_2 = e^{ax}\sin bx$

واضح است که Y_1 و Y_2 جواب‌های معادله‌ی * می‌باشند و $\underbrace{W(Y_1, Y_2)}_{be^{2ax},\, b\neq 0} \neq 0$. لذا Y_1 و Y_2 مستقل خطی‌اند

و جواب عمومی معادله * به صورت زیر است:

$y(x) = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2 \sin bx)$

مثال: مسئله‌ی مقدار مرزی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 10y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \qquad \Delta = -36$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{2 + \sqrt{-36}}{2} \qquad \lambda_2 = \dfrac{2 - \sqrt{-36}}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \underset{\uparrow a}{1} \pm \underset{\uparrow b}{3}i$

$y(x) = e^{x}(c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x)$

$y(0) = c_1 = -1$

$y(\frac{\pi}{2}) = c_2 = -e^{-\frac{\pi}{2}}$

AIDIN $\Rightarrow y(x) = e^{x}(-\cos 3x - e^{-\frac{\pi}{2}}\sin 3x)$

Subject:
Year: Month: Day:

۳) $\Delta = p^2 - 4q = 0$ در این حالت معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$ است و لذا

$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$ جواب معادله * می‌باشد. فرض می‌کنیم $y_2 = v(x)\,y_1$. با جایگذاری y_2

در معادله * می‌توان نوشت :

$$v''y_1 + 2v'y_1' + \cancel{vy_1''} + p(v'y_1 + \cancel{y_1'v}) + q(\cancel{vy_1}) = 0$$

$$\Rightarrow v''y_1 + 2v'y_1' + pv'y_1 = 0 \Rightarrow v'' + \underbrace{\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)}_{0} v' = 0 \xrightarrow{\frac{y_1'}{y_1} = -\frac{p}{2}}$$

$$v''(x) = 0 \Rightarrow v(x) = c_1^* x + c_2^*$$

$$\Rightarrow y_2 = (c_1^* x + c_2^*)\,e^{-\frac{p}{2}x}$$

لذا جواب عمومی معادله عبارتست از : $y = e^{-\frac{p}{2}x}(c_1 + c_2 x)$

مثال: جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{cases} y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}x} \qquad y_2 = xe^{\frac{1}{2}x}$$

$$y(x) = (c_1 + xc_2)\,e^{\frac{1}{2}x} \qquad c_1 = 2 \,,\; c_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y(x) = \left(2 - \frac{2}{3}x\right) e^{\frac{1}{2}x}$$

Subject:
Year: Month: Day:

روش کاهش مرتبه:

ایده‌ی به کار رفته در حالت قبل را می‌توان به طور کلی برای یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم همگن (نه لزوماً با ضرایب ثابت) پیاده سازی نمود. در واقع با فرض این که $y_1(x)$ جواب معادله‌ی زیر باشد آن گاه می‌توان جواب مستقل خطی دیگری برای معادله‌ی زیر به صورت $y_2 = v(x)\, y_1$ در نظر گرفت:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

با قرار دادن $y_2(x)$ در معادله‌ی اولیه می‌توان تابع $v(x)$ را بدست آورد.

$$y_2' = v'y_1 + y_1'v$$
$$y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$v'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)v' = 0$$

معادله‌ی فوق خطی مرتبه اول است (نسبت به تابع $v'(x)$)

$$\mu = e^{\int\left[2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right]dx} = e^{2\ln y_1}\, e^{\int p(x)dx} = y_1^2\, e^{\int p(x)dx}$$

$$v'(x) = \frac{1}{\mu}[c] \overset{c=1}{=} \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)dx} \rightarrow v(x) = \int\left(\frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)dx}\right)dx$$

$$\rightarrow y_2 = y_1 \int\left(\frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)dx}\right)dx \quad \rightarrow \quad \text{فرمول آبل}$$

بنابراین جواب عمومی عبارتست از:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: با فرض این که $y_1 = \frac{1}{x}$ جواب معادله‌ی زیر باشد، جواب عمومی آن را بیابید:

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0 \quad ; x > 0 \qquad \Rightarrow \quad y'' + \frac{3}{2x}y' - \frac{1}{2x^2}y = 0$$

$$V(x) = \int \left(\frac{1}{(\frac{1}{x})^2} e^{-\int \frac{3}{2x} dx} \right) dx = \int x^2 \times x^{-\frac{3}{2}} dx = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

$$y_2 = \frac{2}{3}\sqrt{x}$$

$$y(x) = c_1 \left(\frac{1}{x}\right) + c_2 \left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right) = c_1 \left(\frac{1}{x}\right) + c_2 \sqrt{x}$$ جواب عمومی

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم ناهمگن خطی

معادله‌ی $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ (*) را در نظر می‌گیریم. اگر y_p یک جواب خصوصی برای معادله‌ی فوق باشد

واضح است که هر جواب دیگری از معادله مانند $y(x)$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$y(x) - y_p = y_g$$

که در آن y_g جواب معادله‌ی همگن نظیر (*) می‌باشد. بنابراین جواب عمومی معادله‌ی (*) عبارت است از:

$$y(x) = y_g + y_p$$

برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله‌ی (*) از دو روش زیر می‌توان استفاده نمود:

۱) تغییر پارامتر ۲) ضرایب نامعین

AIDIN

Year.......Month.......Day....... Subject:..

۱) روش تغییر پارامتر: فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی از معادله‌ی همگن نظیر * باشند. واضح است

که $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$. برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله‌ی * فرض می‌کنیم y_p به فرم جواب عمومی معادله‌ی

همگن آن باشد با این تفاوت که به جای ثابت‌های c_1 و c_2 توابع $u(x)$ و $v(x)$ جایگزین می‌شوند. بنابراین

می‌توان نوشت:

$$y_p = u(x) y_1 + v(x) y_2$$

با جایگذاری y_p در معادله‌ی * داریم:

$$y_p' = u' y_1 + y_1' u + v' y_2 + v y_2'$$

فرض می‌کنیم $u' y_1 + v' y_2 = 0$ (1)، داریم:

$$y_p'' = u y_1'' + u' y_1' + v y_2'' + v' y_2'$$

$$\xrightarrow{*} u y_1'' + u' y_1' + \cancel{v y_2''} + v' y_2' + P(x)\left[\cancel{u y_1'} + \cancel{v y_2'}\right] + q(x)\left[\cancel{u y_1} + \cancel{v y_2}\right] = r(x)$$

$$\rightarrow u' y_1' + v' y_2' = r(x) \quad (2)$$

بنابراین برای یافتن توابع $u(x)$ و $v(x)$ می‌توان معادلات (1) و (2) را همزمان حل نمود.

$$\begin{cases} u' y_1 + v' y_2 = 0 \\ u' y_1' + v' y_2' = r(x) \end{cases} \qquad u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{w(y_1, y_2)}}$$

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{w(y_1, y_2)}}$$

SOBHAN

با توجه به استقلال خطی y_1 و y_2 داریم:

$W(y_1, y_2)(x) \neq 0$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$V(x) = \int \frac{r(x)\, y_1}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx \qquad u(x) = -\int \frac{r(x)\, y_2}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx$$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x} \ln x$$

$$y'' + 2y' + y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \longrightarrow \lambda = -1$$

$$\longrightarrow y_g = c_1 \underbrace{e^{-x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{x e^{-x}}_{y_2} \qquad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

$$u(x) = -\int \frac{4\cancel{e^{-x}} \ln x \times x \cancel{e^{-x}}}{\cancel{e^{-2x}}}\, dx = -4 \int x \ln x\, dx = -4\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}\right)$$

$$V(x) = \int \frac{4e^{-x} \ln x \times e^{-x}}{e^{-2x}}\, dx = 4(x \ln x - x)$$

$$y_p = -4\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}\right) e^{-x} + 4(x \ln x - x)\, x e^{-x}$$

جواب عمومی معادله:

$$y = y_g + y_p$$

مثال: نشان دهید $y_1 = x$ و $y_2 = x^2$ جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

می‌باشند. جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = \frac{4}{x}$$

$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = \frac{6}{x^3}$ $\qquad u(x) = -\int \frac{\frac{6}{x^3} \times x^2}{W(x, x^2)} dx = -\int \frac{6}{x^3} dx = +\frac{3}{x^2}$

$v(x) = \int \frac{\frac{6}{x^3} \times x}{x^2} dx = \int \frac{6}{x^4} dx = -\frac{2}{x^3}$

$y_p = \frac{3}{x^2}(x) - \frac{2}{x^3}(x^2) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x}$

$y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{x}$

۲) روش ضرایب نامعین: از این روش تنها برای معادلاتی استفاده می‌شود که خطی ناهمگن با ضرایب ثابت باشند. یکی از محدودیت‌های این روش آن است که تنها در حالات خاص برای تابع $r(x)$ جوابگو می‌باشد بنابراین حالات زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت ۱: اگر $r(x)$ به فرم یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد.

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی زیر را بیابید:

$y'' - 4y = 3$ $\qquad y = A \rightarrow 0 - 4A = 3 \rightarrow A = -\frac{3}{4}$

$\rightarrow y_p = -\frac{3}{4}$

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی $y'' - 4y' = 3$ را بیابید.

$y_p = A \rightarrow 0 = 3$ ✗ $\leftarrow$ به دلیل اشتراک جواب عمومی و جواب خصوصی

$y_p = Ax \rightarrow -4A = 3 \rightarrow A = -\frac{3}{4} \rightarrow y_p = -\frac{3}{4}x$

$y = \underbrace{c_1 + c_2 e^{4x}}_{y_g} - \underbrace{\frac{3}{4}x}_{y_p}$

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی $y''+2y'+y=4x^2+1$ را بیابید.

$$y_p = ax^2+bx+c \rightarrow 2a + 2(2ax+b) + ax^2+bx+c = 4x^2+1$$

$$\rightarrow ax^2 + (b+4a)x + 2a+2b+c = 4x^2+1 \rightarrow \begin{cases} a=4 \\ 4a+b=0 \rightarrow b=-16 \\ 2a+2b+c=1 \end{cases} \rightarrow c=25$$

$$y_p = 4x^2-16x+25$$

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی $y''-y'=2x$ را بدست آورید.

$y_p = Ax+B \rightarrow -A = 2x$ ✗ $\rightarrow$ به دلیل اشتراک با جواب عمومی (ثابت)

$$y_g = c_1 + c_2 e^x$$

$$\rightarrow y_p = Ax^2+Bx \rightarrow 2A-(2Ax+B) = 2x \rightarrow -2Ax+2A-B = 2x$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y_p = -x^2-2x$$

قاعده‌ی کلی: اگر طرف راست معادله‌ی زیر به فرم یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد آنگاه y_p را به صورت زیر در نظر می‌گیرند:

$$y''+py'+qy=r(x)$$

$$y_p = (\text{چندجمله‌ای کامل از درجه } n)\, x^m$$

که در آن m تعداد دفعاتی است که معادله‌ی مشخصه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل همگن تعداد ریشه‌ی $\lambda=0$ دارد.

یعنی $m=0$ یا 1 یا 2.

حالت ۲: اگر $r(x)$ در معادله‌ی * به فرم $M(x)\, e^{px}$ باشد که $M(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد.

مثال: جواب عمومی $y'' - 5y' + 4y = (x-2)e^x$ را بیابید.

فرض می‌کنیم: $y_p = (Ax+B)\, e^x$

$y_p' = Ae^x + (Ax+B)e^x \qquad y_p'' = 2Ae^x + (Ax+B)e^x$

$\xrightarrow{\text{معادله}} (B+2A)e^x + Axe^x - 5(A+B)e^x - 5Axe^x + 4(Ax+B)e^x = (x-2)e^x$

$\rightarrow -5Ae^x = (x-2)e^x$ به دلیل اشتراک با جواب عمومی معادله همگن ✗.

جواب عمومی معادله همگن: $y_g = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$

بنابراین با فرض این که $y_p = x(Ax+B)e^x$ داریم: $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x$

قاعده‌ی کلی: اگر $r(x)$ در معادله‌ی * به فرم $M(x)e^{px}$ باشد که $M(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است آنگاه

در نظر می‌گیریم: $y_p = x^m e^{px}$ (چندجمله‌ای کامل از درجه n)

که در آن m تعداد ریشه‌های $\lambda = p$ در معادله‌ی مشخصه‌ی معادله‌ی همگن نظیر است. ($m = 0$ یا 1 یا 2)

مثال: جواب عمومی معادله‌ی $y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x}$ را مشخص کنید.

Year.......Month.......Day.......   Subject:...................................

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_g = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$

$y_p = x^2 A e^{2x}$

با جایگذاری y_p در معادله داریم:

$A = \frac{5}{2} \Rightarrow y_p = \frac{5}{2} x^2 e^{2x}$

$\Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{5}{2} x^2 e^{2x}$

حالت ۳: اگر $r(x)$ در * به فرم $M(x)\cos qx + N(x)\sin qx$ باشد که $M(x)$ و $N(x)$ دو چندجمله‌ای باشند:

قاعده‌ی کلی: در این حالت جواب خصوصی معادله‌ی * به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود:

$y_p = x^m \left(S(x)\cos qx + R(x)\sin qx \right)$

که در آن $S(x)$ و $R(x)$ دو چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌باشند که n ماکزیمم درجات چندجمله‌ای های $M(x)$ و $N(x)$ می‌باشد و m تعداد دفعاتی است که $\lambda = iq$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه می‌باشد. ($m = 0$ یا 1)

SOBHAN

مثال: معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y = 3\cos 5x \qquad \lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2i \\ \lambda_2 = -2i \end{cases}$$

$$y_p = A\cos 5x + B\sin 5x \rightarrow y_p' = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$$

$$y_p'' = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x$$

$$-25A\cos 5x - 25B\sin 5x + 4A\cos 5x + 4B\sin 5x = 3\cos 5x$$

$$\rightarrow A = -\frac{1}{7} \;,\; B = 0 \qquad \rightarrow y_p = -\frac{1}{7}\cos 5x$$

$$y = (c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) - \frac{1}{7}\cos 5x$$

مثال: فرم کلی جواب خصوصی معادلهٔ زیر را بیان کنید.

$$y'' + 4y = x^2\sin 2x$$

$$y_p = x\left[(Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 2x\right]$$

حالت ۴: اگر $r(x)$ به فرم $e^{px}\left[M(x)\cos qx + N(x)\sin qx\right]$ باشد که در آن

$M(x)$ و $N(x)$ دو چندجمله‌ای می‌باشند.

قاعدهٔ کلی: در این حالت جواب خصوصی معادلهٔ * بصورت $y_p = x^m e^{px}\left[S(x)\cos qx + R(x)\sin qx\right]$

در نظر گرفته می‌شود که در آن $S(x)$ و $R(x)$ دو چندجمله‌ای از درجه n می‌باشند که n ماکزیمم درجات $M(x)$ و $N(x)$ است.

همچنین m تعداد دفعاتی است که $\lambda = p + iq$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه می‌باشد. $(m = 0$ یا $1)$

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی $y'' - 4y' + 5y = (x+2)e^{2x}\sin x$ را بیابید.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = 2 \pm i$$

$$y_p = x e^{2x}\left[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\right]$$

با جایگذاری y_p در معادله داریم:

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{4}$$

$$y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2 \sin x) + y_p$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی n

فرم کلی یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی nام بصورت زیر است:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = r(x)$$

که در آن $a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ ضرایب معادله می‌باشند که توابعی از متغیر مستقل معادله‌اند.

اگر این توابع ثابت باشند، معادله را با ضرایب ثابت گویند که به فرم زیر است:

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 = r(x)$$

اگر $r(x) = 0$ معادله را همگن و در غیر این صورت ناهمگن گویند.

توجه: جواب عمومی معادله‌ی همگن مرتبه n وابسته به n ثابت انتگرال‌گیری می‌باشد. بنابراین برای یافتن جواب منحصر به فرد معادله نیاز به برقراری n شرط اضافی می‌باشد که این شرایط می‌تواند از نوع اولیه یا مرزی باشد.

تعریف: توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ را روی بازه‌ی I مستقل خطی گوییم هرگاه رابطه‌ی

$$\forall x \in I \quad c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \qquad (*)$$

نتیجه دهد $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. اگر رابطه‌ی * برقرار باشد اما تمام c_i ها صفر نباشند، توابع فوق را وابسته‌ی خطی گوییم. (در این حالت حداقل یکی از y_i ها را می‌توان به صورت ترکیب خطی از سایر توابع نوشت.)

تعریف: رونسکین توابع $y_1(x), \dots, y_n(x)$ در نقطه‌ی x_0 توسط دترمینان زیر تعریف می‌شود:

$$W(y_1,\dots,y_n)(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

قضیه: توابع $y_1(x), \dots, y_n(x)$ در $[a,b]$ مستقل خطی می‌باشند اگر و تنها اگر $\forall x\in[a,b];\ W(y_1,\dots,y_n)(x)\neq 0$

به طور معادل، توابع $y_1(x), \dots, y_n(x)$ در $[a,b]$ وابسته‌ی خطی‌اند اگر و تنها اگر $W(y_1,\dots,y_n)(x)=0;\ \forall x\in[a,b]$

اگر $y_1,\dots,y_n$ جواب های معادله‌ی $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ باشند آنگاه:

$$W(y_1,\dots,y_n)=ce^{-\int a_{n-1}(x)\,dx}$$

قضیه: اگر $y_1(x), \dots, y_n(x)$، n جواب مستقل خطی معادله‌ی زیر باشند:

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

آنگاه $y=c_1y_1+\dots+c_ny_n$ جواب عمومی معادله‌ی فوق است. به y_1 تا y_n در این حالت مجموعه جواب‌های پایه‌ی معادله گفته می‌شود.

اگر y_p جواب خصوصی معادله‌ی ناهمگن زیر باشد:

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=r(x)$$

آن گاه $y = y_g + y_p$ جواب عمومی معادله‌ی فوق است که در آن y_g جواب معادله‌ی همگن نظیر آن می‌باشد.

حل معادلات دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه‌ی n با ضرایب ثابت

همان طور که دیدیم فرم کلی این معادلات به صورت زیر است:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

که در آن a_0 تا a_{n-1} ثابت های معادله می‌باشند. با فرض این که $y = e^{\lambda x}$ جواب معادله‌ی فوق باشد، باید داشته باشیم:

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

به معادله‌ی فوق معادله‌ی مشخصه گفته می‌شود. بنا به قضیه‌ی اساسی جبر، هر معادله‌ی درجه‌ی n دارای n ریشه می‌باشد (با در نظر گرفتن ریشه‌های تکراری و مختلط)

اگر n فرد باشد معادله حداقل دارای یک ریشه‌ی حقیقی است.

برای حل معادله‌ی مشخصه‌ی فوق حالات زیر را بررسی می‌نماییم:

حالت اول: اگر معادله‌ی مشخصه دارای n ریشه‌ی حقیقی و متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد آن گاه جواب عمومی معادله‌ی همگن عبارت است از:

$$y_g = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

مثال: جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید: $y''' - 2y'' - 3y' = 0$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-3)(\lambda+1) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$$

حالت دوم: اگر معادله‌ی مشخصه دارای n ریشه‌ی حقیقی باشد که m تای آن‌ها با هم مساوی باشد. فرض کنیم

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$ و $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ ریشه‌های معادله‌ی مشخصه باشند:

$$e^{\lambda_n x}, \dots, e^{\lambda_{m+1} x} \qquad e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda_m x}$$

$$y_g = (c_1 + c_2 x + \dots + c_m x^{m-1}) e^{\lambda_1 x} + c_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

مثال: جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید.

$$y''' - y'' = 0 \qquad \lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x}$$

حالت سوم: اگر معادله‌ی مشخصه علاوه بر ریشه‌های حقیقی دارای ریشه‌های مختلط متمایز نیز باشد. اگر $\alpha + i\beta$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه باشد آن‌گاه $\alpha - i\beta$ نیز ریشه‌ی معادله است و جواب نظیر این دو ریشه عبارت است از:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

مثال: معادله‌ی $y''' - 4y'' + 5y' = 0$ را حل کنید.

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2+i \\ \lambda_3 = 2-i \end{cases}$$

$$y = c_1 + e^{2x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x)$$

حالت چهارم: معادله‌ی مشخصه دارای ریشه‌ی مختلط تکراری باشد. این حالت زمانی رخ می‌دهد که معادله‌ی مشخصه پس از تجزیه در عاملی که ریشه‌ی مختلط دارد توانی مانند m داشته باشد.

در این حالت حداقل $2m$ ریشه‌ی مختلط وجود دارد که m تای آن‌ها تکراری و m تای دیگر مزدوج m ریشه‌ی اولیه می‌باشند. اگر ریشه‌ی مختلط تکراری $\alpha + i\beta$ باشد، مزدوج آن نیز ریشه‌ی معادله است و جواب‌های متناظر با این $2m$ ریشه عبارتند از:

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \alpha + i\beta$$
$$\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_{2m} = \alpha - i\beta$$

$$y_1 = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$
$$y_2 = x e^{\alpha x}(c_3 \cos\beta x + c_4 \sin\beta x)$$
$$\vdots$$
$$y_m = x^{m-1} e^{\alpha x}(c_{2m-1} \cos\beta x + c_{2m} \sin\beta x)$$

که جواب عمومی از جمع جواب‌های پایه بدست می‌آید.

مثال: جواب عمومی معادله‌ی $y^{(4)}+y^{(3)}-y''-y=0$ را بیابید.

یافتن جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل خطی و ناهمگن از مرتبه‌ی n

مشابه معادلات مرتبه دوم می‌توان از دو روش تغییر پارامتر و ضرایب نامعین برای یافتن جواب خصوصی این معادلات استفاده نمود.

روش تغییر پارامتر:

فرض کنید که $y_1(x)$، ...، $y_n(x)$، n جواب مستقل خطی از معادله‌ی همگن نظیر معادله‌ی زیر باشد:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = r(x)$$

در نظر می‌گیریم:

$$y_p = u_1(x)\,y_1 + u_2(x)\,y_2 + \dots + u_n(x)\,y_n$$

با مشتق گیری از y_p می‌توان نوشت:

$$y_p' = u_1'y_1 + \dots + u_n'y_n + u_1y_1' + \dots + u_ny_n'$$

برای سادگی فرض می‌کنیم:

$$u_1'(x)\, y_1 + \cdots + u_n'(x)\, y_n = 0$$

بنابراین:

$$y_p'' = u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' + u_1 y_1'' + \cdots + u_n y_n''$$

فرض می‌کنیم:

$$u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' = 0$$

با ادامه‌ی این روند داریم:

$$u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y_p^{(n)} = u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} + u_1 y^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}$$

با جایگذاری y_p و ... و $y_p^{(n)}$ در معادله‌ی اولیه داریم:

$$u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = r(x)$$

بنابراین دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n = 0 \\ u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = r(x) \end{cases}$$

لذا داریم:

$$U_m' = \frac{W_m(x)}{W(y_1, \dots, y_n)(x)}$$

که در آن $W_m(x)$ حاصل تعویض ستون mام رونسکین y_1 تا y_n با بردار سمت راست یعنی $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(x) \end{bmatrix}_{n\times 1}$

$$\Rightarrow U_m(x) = \int \frac{W_m(x)}{W(y_1, \dots, y_n)(x)} dx$$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y''' - 2y'' + y' = e^x$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$y_g = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x \Rightarrow y_1 = 1 \quad y_2 = e^x \quad y_3 = x e^x$$

$$y_p = u_1(x) + u_2(x) e^x + u_3(x) x e^x$$

$$\begin{cases} u_1' + u_2' e^x + u_3' x e^x = 0 \\ u_1' \times 0 + u_2' e^x + u_3' (1+x) e^x = 0 \\ u_1' \times 0 + u_2' e^x + u_3' (2+x) e^x = e^x \end{cases}$$

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & xe^x \\ 0 & e^x & (1+x)e^x \\ 0 & e^x & (2+x)e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x & xe^x \\ 0 & e^x & (1+x)e^x \\ e^x & e^x & (2+x)e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} = e^x \Rightarrow u_1(x) = e^x$$

u

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & xe^x \\ 0 & 0 & (1+x)e^x \\ 0 & e^x & (2+x)e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = -(1+x) \Rightarrow u_2(x) = -x - \frac{x^2}{2}$$

$$u_3'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = 1 \Rightarrow u_3(x) = x$$

$$\Rightarrow y_p = e^x + \left(-x - \frac{x^2}{2}\right) e^x + x^2 e^x$$

لذا جواب معادله برابر است با:

$$y = y_g + y_p$$

روش ضرایب نامعین:

از این روش تنها برای معادلات خطی ناهمگن با ضرایب ثابت استفاده می‌شود. معادله‌ی مرتبه‌ی n زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \quad a_1 y' + a_0 y = (x)$$

تنها در صورتی که $r(x)$ به فرم یکی از حالات زیر باشد می‌توان از این روش استفاده نمود:

(۱) اگر $r(x)$ به فرم یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد، قاعده‌ی کلی در این حالت آن است که

$y_p = x^m$ (چندجمله‌ای کامل از درجه n)

که در آن m تعداد دفعاتی است که $\lambda = 0$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه‌ی نظیر معادله‌ی همگن (*) می‌باشد.

(۲) اگر $r(x)$ به فرم $M(x)\, e^{px}$ باشد که $M(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌باشد. قاعده‌ی کلی آن است که:

$y_p = x^m e^{px}$ (چندجمله‌ای کامل از درجه n)

که در آن m تعداد دفعاتی است که $\lambda = p$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه است.

(۳) اگر $r(x)$ به فرم $M(x)\cos qx + N(x)\sin qx$ باشد که M و N دو چندجمله‌ای می‌باشند، قاعده‌ی کلی آن است که:

$$y_p = x^m \left(R(x) \cos qx + S(x) \sin qx \right)$$

که در آن $R(x)$ و $S(x)$ دو چندجمله‌ای از درجه‌ی ماکزیمم درجات M و N می‌باشند. همچنین m تعداد دفعاتی است که $\lambda = iq$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه است.

(۴) اگر $r(x)$ به فرم $e^{px}[M(x)\cos qx + N(x)\sin qx]$ باشد قاعده‌ی کلی آن است که:

$$y_p = x^m e^{px}[R(x)\cos qx + S(x)\sin qx]$$

که $R(x)$ و $S(x)$ دو چند جمله‌ای از درجه‌ی ماکزیمم درجات $M(x)$ و $N(x)$ می‌باشند و m تعداد دفعاتی است که

$\lambda = p+iq$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه است.

مثال (۱):

$$y''' - 2y'' = x^3+1 \qquad \lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

$$y_p = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + d)$$

مثال (۲):

$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = (x^2+3)e^{-x} + 4x$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = \lambda_4 = -1 \end{cases}$$

$$y_p = \underbrace{x^2(Ax+B)}_{\substack{y_{p_1} \\ = 4x}} + \underbrace{x^2 e^{-x}(Cx^2+Dx+E)}_{\substack{y_{p_2} \\ = (x^2+3)e^{-x}}}$$

مثال (۳): جواب خصوصی معادله دیفرانسیل با معادله مشخصه $\lambda^2(\lambda^2+1)^3(\lambda-2)^2=0$ و طرف راست $r(x)=x+(x+3)\sin x+x^2e^{2x}$ را بیابید.

$\lambda_1=\lambda_2=0 \qquad \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=i$

$\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=-i$

$\lambda_9=\lambda_{10}=2$

$$y_p=x^2(A_1x+B_1)+x\left[(A_2x+B_2)\cos x+(A_3x+B_3)\sin x\right]+x^2\left[(A_4x^2+B_4x+C)e^{2x}\right]$$

مثال (٤): $y'''+y'=x^2+4\sin 2x+xe^{3x}$

$\lambda^3+\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=i\ ,\ \lambda_3=-i$

$$y_p=\underbrace{x(Ax^2+Bx+C)}_{y_{p_1}}+\underbrace{A_1\sin 2x+B_1\cos 2x}_{y_{p_2}}+\underbrace{(A_2x+B_2)e^{3x}}_{y_{p_3}}$$

با قرار دادن y_{p_1} در معادله داریم: $A=\frac{1}{3}\ ,\ B=0\ ,\ C=-2$

با قرار دادن y_{p_2} داریم: $A_1=0\ ,\ B_1=1$

و با قرار دادن y_{p_3} به دست می‌آید: $A_2=\frac{1}{30}\ ,\ B_2=-\frac{14}{450}$

حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به کمک اپراتور ها

با تعریف عملگرهای زیر:

$D=\frac{d}{dx}$, $D^2=\frac{d^2}{dx^2}$, ... , $D^n=\frac{d^n}{dx^n}$

معادله ی دیفرانسیل $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=r(x)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$D^ny+a_{n-1}D^{n-1}y+\cdots+a_1Dy+a_0y=r(x)$

یا $(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0)y=r(x)$

معادله ی فوق را می توان به فرم $F(D)y(x)=r(x)$ نیز نوشت که در آن

$F(D)=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0$

یک چندجمله ای بر حسب D می باشد که به آن چندجمله ای اپراتوری گویند. اگر λ_1 تا λ_n نمایانگر ریشه های $F(D)$ باشند می توان نوشت: $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n)y=r(x)$

با توجه به این که $F(D)$ یک چندجمله ای با ضرایب ثابت است ترتیب عوامل فوق در معادله ی $F(D)y=r(x)$ اهمیتی ندارد. به عنوان مثال: $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y=(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)y$

توجه) اگر ضرایب $F(D)$ ثابت نباشند آن گاه ترتیب عوامل در تجزیه ی $F(D)$ مهم است. به عنوان مثال داریم:

$(D-x)(D-2)y\neq(D-2)(D-x)y$

$y''-2y'-xy'+2xy\neq y''-D(xy)-2y'+2xy$

خواص اپراتورها

اگر $F_1(D)$ ، $F_2(D)$ و $F_3(D)$ سه چندجمله‌ای اپراتوری باشند داریم:

1) $(F_1(D)+F_2(D))y = F_1(D)y + F_2(D)y$

2) $(F_1(D)F_2(D))y = F_1(D)[F_2(D)y]$

3) $F_1(D)[F_2(D)+F_3(D)]y = F_1(D)F_2(D)y + F_1(D)F_3(D)y$

4) $F_1(D)[F_2(D)F_3(D)]y = [F_1(D)F_2(D)]F_3(D)y$.

5) $[cF_1(D)y] = c[F_1(D)y]$

6) $[F_1(D)+c]y = F_1(D)y + cy$

یافتن جواب خصوصی معادله‌ی $F(D)y = r(x)$

فرض می‌کنیم $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ریشه‌های چندجمله‌ای $F(D)$ مشخص باشند. داریم:

$$(D-\lambda_1)\underbrace{(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n)y}_{v_1(x)} = r(x)$$

در گام اول فرض می‌کنیم $v_1(x) = (D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n)y$ بنابراین:

معادله خطی مرتبه اول $(D-\lambda_1)v_1(x) = r(x) \Rightarrow v_1'(x) - \lambda_1 v_1(x) = r(x)$

$v_1(x) = e^{\lambda_1 x}\left[\int r(x)\, e^{-\lambda_1 x} dx\right]$

در گام دوم قرار می‌دهیم: $(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n)\, y = v_2(x)$

بنابراین داریم: $(D-\lambda_2)\, v_2(x) = v_1(x) \implies v_2'(x) - \lambda_2 v_2(x) = v_1(x)$

$\implies v_2 = e^{\lambda_2 x}\left[\int v_1(x)\, e^{-\lambda_2 x} dx\right]$

با ادامه‌ی همین روند در گام $n-1$ داریم:

$(D-\lambda_n)\, y = v_{(n-1)}(x) \implies y' - \lambda_n y = v_{(n-1)}(x)$

$\implies y_p = e^{\lambda_n x}\left[\int v_{(n-1)}(x)\, e^{-\lambda_n x} dx\right]$ جواب خصوصی معادله‌ی اولیه

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی $(D^2-4D+3)\, y = 1$ را بدست آورید.

$(D-1)\underbrace{(D-3)\,y}_{v_1(x)} = 1 \implies (D-1)\, v_1(x) = 1 \implies v_1(x) = e^{x}\left[\int e^{-x} dx\right] = -1$

$(D-3)\, y = -1 \implies y_p = e^{3x}\left[\int -e^{-3x} dx\right] = \frac{1}{3}$

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی $(D^2+4)\, y = e^{x}$ را بیابید.

$(D-2i)\underbrace{(D+2i)\,y}_{v_1(x)} = e^{x}$ $(D-2i)\, v_1(x) = e^{x} \implies v_1(x) = e^{2ix}\left[\int e^{-2ix} \times e^{x} dx\right]$

$= \frac{e^{2ix}}{(1-2i)}\, e^{(1-2i)x} = \frac{e^{x}}{1-2i}$

$(D+2i)\,y = \dfrac{e^x}{1-2i}$ $\qquad y_p = e^{-2ix}\left[\int \dfrac{e^{2ix}e^{x}}{1-2i}\,dx\right] = \dfrac{e^{-2ix}\,e^{(1+2i)x}}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{e^x}{5}$

مثال: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $(D^2-3D+2)\,y = \sin(e^{-x})$ را بیابید.

$(D-1)\underbrace{(D-2)\,y}_{v_1(x)} = \sin(e^{-x})$ $\qquad (D-1)\,v_1(x) = \sin(e^{-x})$

$\to v_1(x) = e^{x}\left[\int e^{-x}\sin(e^{-x})\,dx\right] = e^{x}\cos(e^{-x})$

$(D-2)\,y = e^{x}\cos(e^{-x})$

$y_p = e^{2x}\left[\int e^{-2x}e^{x}\cos(e^{-x})\,dx\right] = -e^{2x}\sin(e^{-x})$

قضیه: اگر $F(D)$ یک چندجمله‌ای اپراتوری باشد آنگاه برای هر ثابت a و هر تابع دلخواه $u(x)$ که حداقل n بار مشتق‌پذیر باشد داریم:

$F(D)\left[e^{ax}u(x)\right] = e^{ax}F(D+a)\,u(x)$

برهان: $F(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0$

کافی است نشان دهیم $D^k\left[e^{ax}u(x)\right] = e^{ax}(D+a)^k\,u(x)$ $\qquad k=1,2,\dots,n$

به کمک استقرا روی k رابطه فوق را ثابت می‌کنیم:

$k=0 \to e^{ax}u(x) = e^{ax}u(x)$ ✓

$k=1 \to D\left[e^{ax}u(x)\right] = ae^{ax}u(x) + e^{ax}D(u(x)) = e^{ax}(D+a)\,u(x)$ ✓

فرض می‌کنیم رابطه به ازای $k=m$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم به ازای $k=m+1$ نیز برقرار است.

$$D^{m+1}\left[e^{ax}u(x)\right] = D\,D^{m}\left[e^{ax}u(x)\right] = D\left[e^{ax}(D+a)^{m}u(x)\right]$$

$$= ae^{ax}(D+a)^{m}u(x) + \underbrace{e^{ax}D(D+a)^{m}u(x)}_{e^{ax}(D+a)^{m}D\,u(x)} = e^{ax}\left[a(D+a)^{m}u(x)+(D+a)^{m}D\,u(x)\right]$$

$$= e^{ax}(D+a)^{m}\left[a\,u(x)+D\,u(x)\right] = e^{ax}(D+a)^{m}(D+a)\,u(x) = e^{ax}(D+a)^{m+1}u(x)$$

نتیجه ۱: اگر $F(D)=(D-a)^{n}$ آنگاه $(D-a)^{n}\left[e^{ax}u(x)\right] = e^{ax}D^{n}u(x) = e^{ax}u^{(n)}(x)$ ،

نتیجه ۲: اگر $F(D)$ یک چندجمله‌ای اپراتوری باشد، آنگاه:

$$F(D)\left[ce^{ax}\right] = e^{ax}F(D+a)c = ce^{ax}F(a)$$

زیرا $F(D+a) = (D+a)^{n} + a_{n-1}(D+a)^{n-1} + \dots + a_{1}(D+a) + a_{0}$

$$(D+a)^{k}c = \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}D^{m}a^{k-m}c = ca^{k}$$

مثال: عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$(D^{2}+2D-3)(4e^{2x}) = 4e^{2x}F(2) = 20e^{2x}$$

$$\underbrace{(D^{2}+3D-1)}_{F(D)}(x^{2}e^{x}) = e^{x}F(D+1)x^{2} = e^{x}\left[(D+1)^{2}+3(D+1)-1\right]x^{2} =$$

$$e^{x}\left[D^{2}+5D+3\right]x^{2} = e^{x}\left[2+10x+3x^{2}\right]$$

$$\underbrace{(D+3)^2}_{F(D)}(e^{-3x}\underbrace{\cot x}_{u(x)}) = e^{-3x}D^2\cot x = e^{-3x}(2\cot x(\csc^2 x))$$

اپراتور معکوس

با توجه به این که دو عمل مشتق گیری و انتگرال گیری عکس یکدیگر می باشند لذا انتگرال گیری را با نماد D^{-1} یا $\frac{1}{D}$ نمایش می دهیم

و آن را به گونه ای تعریف می کنیم که $D^{-1}(DU) = U = D(D^{-1}U)$

هم چنین تعریف می کنیم: $D^{-2}(U) = D^{-1}(D^{-1}U)$

$$\vdots$$

$$D^{-k}(U) = \underbrace{D^{-1}(D^{-1}\cdots(D^{-1}(U)\cdots)}_{k\text{ بار}} = \frac{1}{D^k}U$$

تعریف: اپراتور معکوس $F(D)$ را با $\frac{1}{F(D)}$ یا $F^{-1}(D)$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}U\right] = U = \frac{1}{F(D)}\left[F(D)U\right]$$

قضیه: به ازای هر ثابت c داریم:

$$\frac{1}{F(D)}\left[cU(x)\right] = c\frac{1}{F(D)}U(x)$$

اثبات:

$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}cU(x)\right] = cU(x)$ سمت چپ

$F(D)\left[c\frac{1}{F(D)}U(x)\right] = cF(D)\left[\frac{1}{F(D)}U(x)\right] = cU(x)$ سمت راست

قضیه: فرض کنید $F(D)$ یک چندجمله‌ای اپراتوری و a عددی ثابت باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{1}{F(D)}\left[e^{ax}U(x)\right] = e^{ax}\frac{1}{F(D+a)}U(x)$$

برهان: $F(D)\left[\frac{1}{F(D)}e^{ax}u(x)\right] = e^{ax}u(x)$ سمت چپ

$F(D)\left[\underbrace{e^{ax}\frac{1}{F(D+a)}U(x)}_{V(x)}\right] = e^{ax}F(D+a)V(x) = e^{ax}u(x)$ سمت راست

نتیجه ۱: اگر $F(D)=(D-a)^n$ داریم:

$$\frac{1}{(D-a)^n}e^{ax}U(x) = e^{ax}\frac{1}{D^n}u(x)$$

نتیجه ۲: $\frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{1}{F(a)}e^{ax} \qquad F(a)\neq 0$

$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}e^{ax}\right] = e^{ax}$ سمت چپ

$F(D)\left[\underbrace{\frac{1}{F(a)}}_{c}e^{ax}\right] = \frac{1}{\cancel{F(a)}}e^{ax}\cancel{F(a)} = e^{ax}$ سمت راست

نتیجه ۳: $\frac{1}{F(D)}c = \frac{c}{F(0)} \qquad F(0)\neq 0$

$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}c\right] = c$ سمت چپ

$F(D)\left[\frac{1}{F(0)}c\right] = \frac{1}{F(0)}F(0)c = c$ سمت راست

نتیجه ۴: اگر a ریشه‌ی مرتبه‌ی kام $F(D)$ باشد یعنی $F(D)=(D-a)^k P(D)$ که $P(a)\neq 0$ آنگاه می‌توان

نوشت:

$$\frac{1}{F(D)}ce^{ax}=c\,\frac{x^k}{k!}\,\frac{e^{ax}}{P(a)}$$

$$\frac{1}{(D-a)^k P(D)}ce^{ax}=e^{ax}\frac{1}{D^k}\underbrace{\frac{1}{P(D+a)}c}_{\frac{c}{P(a)}\ (\text{نتیجه ۳})}=e^{ax}\frac{1}{D^k}\frac{c}{P(a)}=e^{ax}c\frac{x^k}{k!\,P(a)}$$

توجه: جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل $F(D)y=ce^{ax}$ عبارتست از:

۱) اگر $\lambda=a$ ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه نباشد $(F(a)\neq 0)$:

$$y_p=\frac{1}{F(D)}ce^{ax}=\frac{c\,e^{ax}}{F(a)}$$

۲) اگر $\lambda=a$ ریشه‌ی مرتبه kام معادله‌ی مشخصه باشد $(F(D)=(D-a)^k P(D))$:

$$y_p=\frac{1}{F(D)}ce^{ax}=\frac{c\,e^{ax}x^k}{k!\,P(a)}$$

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل زیر را بیابید:

$$(D^2+D+1)y=e^{3x}+4e^{x}-3e^{-2x}+5$$

$$F(D)=D^2+D+1\ \rightarrow\ y_p=\frac{1}{F(D)}e^{3x}+4\frac{1}{F(D)}e^{x}-3\frac{1}{F(D)}e^{-2x}+\frac{1}{F(D)}5$$

$$=\frac{e^{3x}}{13}+4\frac{e^{x}}{3}-3\frac{e^{-2x}}{3}+\frac{5}{1}=\frac{e^{3x}}{13}+2e^{x}-e^{-2x}+5$$

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی $(D^2-1)y = e^x$ را بیابید.

$$y_p = \frac{1}{\underbrace{(D-1)(D+1)}_{P(D)}} e^x = \frac{x e^x}{2}$$

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل $\underbrace{(D-1)^2 (D+1)^3}_{F(D)} y = 2e^x + 4e^{-x}$ را بیابید.

$$y_p = \frac{1}{F(D)} 2e^x + \frac{1}{F(D)} 4e^{-x} = \frac{2x^2 e^x}{2! \times 8} + \frac{4x^3 e^{-x}}{3! \times 4}$$

تذکر: اگر در معادله‌ی دیفرانسیل $F(D)y = r(x)$ ، $r(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی m باشد، آنگاه برای یافتن جواب خصوصی معادله‌ی فوق، 1 را بر $F(D)$ تقسیم می‌کنیم و این عمل را تا جمله‌ی D^m ادامه می‌دهیم. زیرا

$$\forall k > m \rightarrow D^k r(x) = 0$$

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی زیر را بیابید.

$$\underbrace{(D^3 - 2D + 4)}_{F(D)} y = x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 4 - 2D + D^3 \\ \cline{2-2} -1 + \frac{1}{2}D - \frac{1}{4}D^3 & \frac{1}{4} + \frac{1}{8}D + \frac{1}{16}D^2 \\ \hline \frac{1}{2}D - \frac{1}{4}D^3 & \\ -\frac{1}{2}D + \frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{8}D^4 & \\ \hline \frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{4}D^3 - \frac{1}{8}D^4 & \\ -\frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{8}D^3 - \frac{1}{16}D^5 & \end{array}$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} x^2 - 2x + 1$$

$$y_p = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}D + \frac{1}{16}D^2\right) x^2 - 2x + 1$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{8}(2x - 2) + \frac{1}{16}(2) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$$

توجه: برای آن که یک قابل قسمت بر $F(D)$ باشد باید داشته باشیم $F(0)\neq 0$ در غیر این صورت اگر ۰ ریشه‌ی مرتبه‌ی k ام $F(D)$ باشد آن گاه می‌توان نوشت:

$$F(D) = D^k\, P(D) \quad , \quad P(0) \neq 0$$

بنابراین در این حالت داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^k\, P(D)}\, r(x)$$

کافی است ۱ را تا جمله‌ی D^m بر $P(D)$ تقسیم نماییم و از چندجمله‌ای حاصل k بار انتگرال‌گیری نماییم.

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی $(D^4+2D^3-3D^2)\,y = x^2-1$ را بیابید.

$$y_p = \frac{1}{D^2(D^2+2D-3)}\,(x^2-1)$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & -3+2D+D^2 \\ \hline
-1+\frac{2}{3}D+\frac{1}{3}D^2 & -\frac{1}{3}-\frac{2}{9}D-\frac{7}{27}D^2 \\ \hline
\frac{2}{3}D+\frac{1}{3}D^2 & \\
-\frac{2}{3}D+\frac{4}{9}D^2+\frac{2}{9}D^3 & \\ \hline
\frac{7}{9}D^2+\frac{2}{9}D^3 &
\end{array}$$

$$y_p = \frac{1}{D^2}\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}D-\frac{7}{27}D^2\right)(x^2-1)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}-\frac{4}{9}x-\frac{14}{27}\right) = \frac{1}{D^2}\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x-\frac{5}{27}\right)$$

$$= \frac{1}{D}\left(-\frac{x^3}{9}-\frac{2}{9}x^2-\frac{5}{27}x\right) = -\frac{x^4}{36}-\frac{2x^3}{27}-\frac{5x^2}{54}$$

قضیه: اگر $F(D)$ یک چندجمله‌ای اپراتوری باشد داریم:

$$F(D^2)\sin ax = F(-a^2)\sin ax$$

$$F(D^2)\cos ax = F(-a^2)\cos ax$$

اثبات:

$$(D^{2n}+a_{n-1}D^{2n-2}+\cdots+a_1D^2+a_0)\sin ax = \left((-1)^n a^{2n}+a_{n-1}(-1)^{n-1}a^{2n-2}+\cdots-a_1a^2+a_0\right)\sin ax$$

$$= F(-a^2)\sin ax$$

رابطه‌ی دوم نیز به طور مشابه اثبات می‌شود.

قضیه: اگر $F(D)$ یک چند جمله‌ای از اپراتوری باشد داریم:

$$\frac{1}{F(D^2)} \sin ax = \frac{1}{F(-a^2)} \sin ax$$

$$\frac{1}{F(D^2)} \cos ax = \frac{1}{F(-a^2)} \cos ax$$

اثبات: با استفاده از قضیه قبل و اثر دادن عملگر $F(D^2)$ بر طرفین تساوی اثبات واضح است.

تذکر: اگر معادله‌ی دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به یکی از فرم‌های زیر باشد:

1) $F(D^2)\, y = c \sin ax$

2) $F(D^2)\, y = c \cos ax$

آن‌گاه جواب خصوصی معادله به صورت زیر است:

$$y_{p_1} = \frac{c}{F(-a^2)} \sin ax$$

$$y_{p_2} = \frac{c}{F(-a^2)} \cos ax$$

مشروط بر اینکه $\lambda = ia$ ریشه معادله‌ی مشخصه نباشد ($F(-a^2) \neq 0$)

مثال: جواب خصوصی معادلات زیر را بیابید:

1) $\underbrace{(D^2 - 2)}_{F(D^2)}\, y = \cos 2x \quad \rightarrow F(D) = D - 2$

$y_p = -\frac{1}{4}\cos 2x$

۲) $\underbrace{(D^4+2D^2-1)}_{F(D^2)}\, y = 2\sin x$ $F(D) = D^2+2D-1$

$y_p = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\sin x = -\sin x$

تذکر: اگر در معادلات دیفرانسیل $F(D)y = c\sin ax$ یا $F(D) = c\cos ax$ ، ia ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه باشد یا $F(D)$ شامل توان های فرد D نیز باشد برای یافتن جواب خصوصی معادله‌ی فوق می توان با استفاده از فرمول اویلر معادله‌ی زیر را حل نمود.

$F(D)y = ce^{iax}$

جواب خصوصی این معادله به فرم تابع مختلط می باشد. بنابراین اگر در معادله‌ی اولیه عبارت سمت راست $\cos ax$ باشد قسمت حقیقی جواب بدست آمده، جواب معادله‌ی اولیه است. در غیر این صورت قسمت موهومی جواب بدست آمده جواب معادله‌ی $F(D)y = c\sin ax$ می باشد.

مثال: جواب خصوصی معادله‌ی $(D^2+4)y = \sin 2x$ را بیابید.

$y_p = \frac{1}{D^2+4}\sin 2x$

$(D^2+4)y = e^{2ix} \longrightarrow y_p = \frac{1}{(D-2i)(D+2i)}e^{2ix} = \frac{xe^{2ix}}{4i} = \frac{x}{4i}(\cos 2x + i\sin 2x)$

$$= \frac{1}{4i}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x = -\frac{1}{4}i\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{x}{4}\cos 2x$$

مثال: جواب خصوصی معادلهٔ $(D^2+2D-2)y=\sin x$ را بیابید.

$$(D^2+2D-2)y = e^{ix} \rightarrow y_p = \frac{e^{ix}}{-3+2i} = \frac{(-3-2i)}{13}(\cos x + i\sin x)$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{2}{13}\cos x - \frac{3}{13}\sin x$$

قضیه: اگر $F(D)$ یک چندجمله‌ای از D باشد و $u(x)$ تابعی دلخواه باشد که به اندازهٔ کافی مشتق‌پذیر است

داریم:

$$\frac{1}{F(D)}x\,u(x) = x\frac{1}{F(D)}u(x) - \frac{F'(D)}{[F(D)]^2}u(x)$$

برهان:

$$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}x\,u(x)\right] = x\,u(x)$$ سمت چپ

$$F(D)\left[x\frac{1}{F(D)}u(x)\right] - \frac{F'(D)}{F(D)}u(x) = x\,u(x) + \frac{F'(D)}{F(D)}u(x) - \frac{F'(D)}{F(D)}u(x) = x\,u(x)$$

$$\left[a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_{n-1}D^{n-1} + D^n\right]\left(x\frac{1}{F(D)}v\right) = a_0 x\frac{1}{F(D)}v + a_1\left(\frac{1}{F(D)}v + xD\frac{1}{F(D)}v\right)$$

$$+ a_2\left(2D\frac{1}{F(D)}v + xD^2\frac{1}{F(D)}v\right) + a_3\left(3D^2\frac{1}{F(D)}v + xD^3\frac{1}{F(D)}v\right) + \dots +$$

$$\left(nD^{n-1}\frac{1}{F(D)}v + xD^n\frac{1}{F(D)}v\right) = xF(D)\frac{1}{F(D)}v + \frac{F'(D)}{F(D)}v$$

مثال: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$(D^2+2D+3)\,y = x e^{2x}\cos x$$

$$y_p = e^{2x}\frac{1}{F(D+2)}\,x\cos x = e^{2x}\frac{1}{\underbrace{D^2+6D+11}_{R(D)}}\,x\cos x = e^{2x}\left[x\frac{1}{R(D)}\cos x - \frac{2D+6}{[R(D)]^2}\cos x\right]$$

حل معادلات دیفرانسیل در حالات خاص

۱) معادلاتی به فرم $F(x, y'') = 0$ و در حالت کلی $F(x, y^{(n)}) = 0$ به راحتی و با انتگرال گیری های متوالی قابل حل است.

۲) معادلاتی به فرم $F(x, y', y'') = 0$ که فاقد تابع مجهول می باشند را با تغییر متغیر زیر می توان به معادله ی مرتبه اول تبدیل نمود:

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = p'$$

$$F(x, p, p') = 0 \Rightarrow p = f(x, c) \Rightarrow y = \int f(x, c) + c_1$$

به طور کلی اگر معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n فاقد تابع تا مشتقات مرتبه ی m-1 آن باشد داریم:

$$F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(m)} = p \Rightarrow y^{(m+1)} = p' \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = p^{(n-m)}$$

$$\Rightarrow F(x, p, p', \dots, p^{(n-m)}) = 0$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

1) $y'' + x(y')^2 = 0$ $\qquad y' = p \Rightarrow p' + xp^2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p^2} = -x\,dx \Rightarrow p = \frac{2}{x^2 - c^2} \Rightarrow y = \int \frac{2}{x^2 - c^2} = \frac{1}{c} \ln\left(\frac{x-c}{x+c}\right) + c_1$$

۲) $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$ $y^{(4)} = p$

$$xp' - p = 0 \to xp' = p \to \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \to p = cx$$

$$\to y^{(4)} = cx \to y^{(3)} = c\frac{x^2}{2} + c_1 \to y^{(2)} = \frac{cx^3}{6} + c_1 x + c_2 \to$$

$$y' = \frac{cx^4}{24} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3 \to y = \frac{cx^5}{120} + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x$$

۳) اگر معادله‌ی دیفرانسیل به فرم $F(y, y', y'') = 0$ باشد آن گاه می‌توان نوشت:

$$y' = p \to y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \times \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

$$\to F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

مثال: $yy'' + (y+1)(y')^2 = 0$

$$yp\frac{dp}{dy} + (y+1)p^2 = 0 \to p\left(y\frac{dp}{dy} + (y+1)p\right) = 0 \to \begin{cases} p = 0 \to y = c_1 \\ \frac{dp}{p} = -\frac{(y+1)}{y}dy \end{cases}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{(y+1)}{y}dy \to \ln p = -y - \ln y + c_2 \to py = ce^{-y}$$

$$\to y'y = ce^{-y} \to ye^y dy = c\,dx \to e^y(y-1) = cx + c_2$$

۴) معادله‌ی مرتبه‌ی دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x)$$

اگر در معادله‌ی فوق شرط $p'' - q' + r = 0$ برقرار باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y' + \left(q(x) - p'(x)\right)y\right] = f(x)$$

زیرا:

$$\cancel{p'y'} + py'' + (q' - p'')y + (q - \cancel{p'})y' = f(x) \rightarrow$$

$$py'' + \underbrace{q'y}_{} + qy' - \underbrace{p''y}_{} = f(x) \rightarrow py'' + qy' + ry = f(x)$$

داریم:

$$p(x)\,y' + \left(q(x) - p'(x)\right)y = \int f(x) + c$$

که معادله‌ی فوق مرتبه اول است.

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\underbrace{(x^2 - 2x)}_{p(x)}y'' + \underbrace{4(x-1)}_{q(x)}y' + \underbrace{2}_{r(x)}y = e^{2x}$$

$$p'' - q' + r = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}\left[(x^2 - 2x)y' + \left(4(x-1) - 2x + 2\right)y\right] = e^{2x}$$

$$\rightarrow (x^2 - 2x)y' + (2x - 2)y = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{4}\frac{e^{2x}}{x^2 - 2x} + \frac{c_1}{x - 2} + \frac{c_2}{x^2 - 2x}$$

۵) اگر معادله‌ی $F(x,y,y',y'')=0$ دارای خاصیت همگن بودن بصورت زیر باشد:

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^{n}F(x,y,y',y'')$$

آنگاه با انتخاب $y=e^{\int z(x)dx}$ معادله به یک معادله‌ی مرتبه اول تبدیل می‌شود.

مثال: معادله‌ی $yy''-(y')^{2}-4xy^{2}=0$ را حل کنید.

$$y=e^{\int z(x)dx}\Rightarrow y'=z(x)e^{\int z(x)dx}\Rightarrow y''=\left[z'(x)+z^{2}(x)\right]e^{\int z(x)dx}$$

$$e^{2\int z(x)dx}\left[z'(x)+z^{2}(x)-z^{2}(x)-4x\right]=0\longrightarrow z'=4x\rightarrow z(x)=2x^{2}+c$$

$$\rightarrow y=e^{\int(2x^{2}+c)dx}=e^{x^{3}+cx+c_1}=c^{*}e^{x^{3}+cx}$$

معادله‌ی کشی - اویلر

فرم کلی معادله‌ی کشی - اویلر از مرتبه‌ی n عبارتست از:

$$x^{n}y^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1xy'+a_0y=r(x)$$

یا: $(ax+b)^{n}y^{(n)}+a_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1(ax+b)y'+a_0y=r(x)$

با تغییر متغیر $x=e^{t}$ ($ax+b=e^{t}$) معادله به فرم معادله‌ی دیفرانسیل خطی از مرتبه‌ی n با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

$x^2y'' + a_1 x y' + a_0 y = r(x)$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{1}{x}$

$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \underbrace{\left(\frac{d^2y}{dt^2} \times \frac{1}{x}\right)}_{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)}\frac{1}{x} \rightarrow x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$

$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = r(x) \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - 1)\frac{dy}{dt} + a_0 y = r(e^t)$

برای حل معادله‌ی همگن می‌توان نوشت :

$\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_0 = 0$

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ حقیقی $\rightarrow y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$

۲) $\lambda_1 = \lambda_2$ حقیقی $\rightarrow y = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} = c_1 x^{\lambda} + c_2 (\ln x) x^{\lambda}$

۳) $\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib \rightarrow y = e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)$

$\rightarrow y = x^a\left(c_1 \cos(b \ln x) + c_2 \sin(b \ln x)\right)$

یادآوری مفهوم سری:

اگر $\{a_n\}_{n\geq 0}$ دنباله‌ای در اعداد حقیقی باشد آن‌گاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ را یک سری عددی گوییم. شرط لازم همگرایی این سری آن است که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

تذکر: برای بررسی همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ می‌توان از آزمون زیر استفاده نمود:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{یا} \quad l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

۱) $0 < l < 1 \rightarrow$ سری همگرا

۲) $l > 1 \rightarrow$ سری واگرا

۳) $l = 1 \rightarrow$ در مورد همگرایی یا واگرایی نمی‌توان صحبت نمود

سری توانی: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای در اعداد حقیقی باشد و $x_0 \in \mathbb{R}$ عددی ثابت باشد. سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ را

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

یک سری توانی حول x_0 می‌نامند.

شعاع همگرایی: اگر عدد $R \geq 0$ موجود باشد بطوریکه سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n (x-x_0)^n}_{c_n}$ به ازای $|x-x_0| < R$ همگرا و به ازای $|x-x_0| > R$ واگرا باشد، R را شعاع همگرایی سری می‌نامند.

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$\rightarrow |x-x_0| < \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}_{R}$$

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ یا $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

تذکر: به ازای $|x-x_0| = R$ نمی‌توان در مورد همگرایی یا واگرایی سری توانی صحبت نمود و باید بطور مستقیم سری را در نقاط $x = x_0 \pm R$ مورد بررسی قرار گیرد.

مثال: شعاع همگرایی سری توانی زیر چیست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} n}_{a_n} (x-\underset{x_0}{2})^n \qquad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1} n}{(-1)^{n+2}(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

$$\rightarrow |x-2| < 1 \rightarrow 1 < x < 3$$

سری به ازای $x=1$ و $x=3$ واگراست. (زیرا شرط لازم همگرایی برای آن برقرار نیست)

تعریف: سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ را همگرای مطلق گوییم هرگاه $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ همگرا باشد.

تذکر: هر سری همگرای مطلق همگراست اما عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow$ همگراست ولی همگرای مطلق نیست

قضیه: اگر شعاع همگرایی سری سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ برابر با R باشد آن گاه سری های مشتق و انتگرال سری

مذکور یعنی سری های مشتق $\leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$, $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$

سری انتگرال $\leftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$

نیز دارای شعاع همگرایی R می باشند.

سری تیلور و مک لورن:

اگر $f(x)$ در بازه ی (x_0-R, x_0+R) از هر مرتبه ای مشتق پذیر باشد آن گاه در این بازه می توان نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\eta_n)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = 0$ که η_n بین x و x_0 قرار دارد. به سری فوق سری تیلور گویند.

سری تیلور به ازای $x_0=0$ سری مک لورن نامیده می شود.

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری های توانی

هدف در این بخش حل معادلات دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی با ضرایب متغیر بصورت زیر می باشد:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \qquad (1)$$

تعریف (نقطه ی عادی و منفرد):

در معادله‌ی (۱) نقطه‌ی x_0 که $P(x_0)\neq 0$ را یک نقطه‌ی عادی یا معمولی معادله می‌نامند. از طرف دیگر هرگاه $P(x_0)=0$ آن گاه x_0 را یک نقطه‌ی منفرد (تکین) معادله می‌نامند.

اگر x_0 یک نقطه‌ی عادی معادله‌ی (۱) باشد آن گاه این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

که در آن

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \quad , \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$$

قضیه: هرگاه x_0 یک نقطه‌ی عادی معادله دیفرانسیل $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ باشد (یعنی $p(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $q(x)=\frac{R(x)}{P(x)}$ در x_0 تحلیلی می‌باشند) آن گاه جواب عمومی معادله‌ی مذکور را می‌توان برحسب یک سری توانی حول x_0 به صورت زیر نوشت:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

که در آن a_0 و a_1 دو ثابت دلخواه می‌باشند و y_1 و y_2 دو سری جواب مستقل برای معادله‌ی اولیه‌اند که در x_0 تحلیلی می‌باشد. همچنین شعاع همگرایی سری‌های $y_1(x)$ و $y_2(x)$ برابر با مینیمم شعاع همگرایی سری‌های توابع $p(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $q(x)=\frac{R(x)}{P(x)}$ می‌باشد.

۵ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \rightarrow a_n = b_n$

Year.......Month.......Day....... Subject:.......................................

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$y'' + y = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (چون $x_0 = 0$ نقطه‌ی عادی معادله است)

$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0 \rightarrow (n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0$

$\rightarrow a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)} \qquad n = 0, 1, \dots$

برای n های زوج داریم:

$a_2 = \frac{-a_0}{2} \qquad a_4 = \frac{-a_2}{12} = \frac{a_0}{24} = \frac{a_0}{4!}$

$a_6 = \frac{-a_4}{5 \times 6} = \frac{-a_0}{6!}$

$\rightarrow a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!}$

برای n های فرد داریم:

$a_3 = \frac{-a_1}{2 \times 3} \qquad a_5 = \frac{-a_3}{4 \times 5} = \frac{a_1}{5!}$

$a_7 = -\frac{a_1}{7!} \qquad a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!}$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \right) + a_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = a_0 \cos x + a_1 \sin x$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$

که a_0 و a_1 دلخواه‌اند

SOBHAN

Year.......Month.......Day.......　　　　Subject:.......................................

مثال: جواب معادله‌ی دیفرانسیل زیر را برحسب سری توانی حول $x_0 = 1$ بیان کنید.

(معادله‌ی ایری)

$$y'' - xy = 0 \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{(x-1)}_{X}^{n} \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} - (X+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = 0 \longrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} X^{n} - (X+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = 0 \longrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} X^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = 0$$

$$\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n+2) a_{n+2} - a_n\right) X^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} X^n$$

X^0 ضریب $\rightarrow 2a_2 - a_0 = 0 \rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2}$

X ضریب $\rightarrow 6a_3 - a_1 = a_0 \rightarrow a_3 = \frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{6}$

X^2 ضریب $\rightarrow 12a_4 - a_2 = a_1 \rightarrow a_4 = \frac{a_1}{12} + \frac{a_2}{12} = \frac{a_1}{12} + \frac{a_0}{24}$

X^3 ضریب $\rightarrow 20a_5 - a_3 = a_2 \rightarrow a_5 = \frac{a_2}{20} + \frac{a_3}{20} = \frac{a_0}{40} + \frac{a_0}{120} + \frac{a_1}{120} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}$

$$y(x) = a_0 + a_1 X + \frac{a_0}{2} X^2 + \left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{6}\right) X^3 + \left(\frac{a_1}{12} + \frac{a_0}{24}\right) X^4 + \left(\frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}\right) X^5$$

$$+ \cdots \longrightarrow y(x) = a_0 \left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots\right]$$

SOBHAN

$$+ a_1 \left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots\right] \qquad R = \infty$$

Year.......Month.......Day.......　　Subject:..................................

تعریف (نقطه‌ی تکین منظم و نامنظم):

نقطه‌ی x_0 تکین منظم معادله‌ی $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ می‌باشد هرگاه توابع $(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$ و

$(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$ در x_0 تحلیلی باشند. هر نقطه‌ی تکین معادله که منظم نباشد را نامنظم گویند.

مثال) نقاط تکین معادله‌ی دیفرانسیل زیر را مشخص نمایید.

1) $(1-x^2)y''-2xy'+\nu(\nu+1)y=0$

2) $2x(x-2)^2y''+3xy'+(x-2)y=0$

1) $x=\pm1$ نقاط تکین معادله می‌باشند.

$p(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$　　$q(x)=\frac{\nu(\nu+1)}{1-x^2}$

$x=-1 \Rightarrow (x+1)p(x)=\frac{-2x}{1-x}$ در $x=-1$ تحلیلی

$(x+1)^2q(x)=\frac{\nu(\nu+1)(1+x)}{1-x}$ در $x=-1$ تحلیلی

$x=-1$ نقطه‌ی تکین منظم معادله است و به همین ترتیب می‌توان نشان داد $x=1$ نیز تکین منظم معادله می‌باشد.

2) $x=0,2$ نقاط تکین معادله می‌باشند. واضح است که $x=0$ تکین منظم معادله است زیرا توابع $xp(x)$ و $x^2q(x)$

که $p(x)=\frac{3}{2(x-2)^2}$ و $q(x)=\frac{1}{2x(x-2)}$ در $x=0$ تحلیلی می‌باشند.

SOBHAN

Year.......Month.......Day....... Subject:......................................

اما $x=2$ تکین نامنتظم معادله است. زیرا $(x-2)\,p(x)$ در $x=2$ تحلیلی نیست.

مثال: $(x-\frac{\pi}{2})^2 y'' + \cos x\, y' + \sin x\, y = 0$ نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی تکین معادله است.

$$p(x) = \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2} \qquad q(x) = \frac{\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}$$

$$(x-\frac{\pi}{2})\,p(x) = \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{3!} - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{5!} + \dots$$

لذا $(x-\frac{\pi}{2})\,p(x)$ در $x=\frac{\pi}{2}$ تحلیلی است. همچنین $(x-\frac{\pi}{2})^2 q(x)$ نیز در $x=\frac{\pi}{2}$ تحلیلی است.

بنابراین $x=\frac{\pi}{2}$ تکین منتظم معادله می‌باشد.

سری جواب معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دوم خطی حول نقطه‌ی تکین منتظم

می‌توان ثابت نمود معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ دارای جوابی به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$ * می‌باشد

که $a_0 \neq 0$ مشروط بر این که $x=0$ نقطه‌ی تکین منتظم معادله باشد.

به سری * سری تعمیم یافته‌ی توانی یا سری فروبنیوس گویند.

$$x^2 y'' + x\,(x\,p(x))\,y' + x^2 q(x)\,y = 0 \qquad **$$

با توجه به این که $x\,p$ و $x^2 q(x)$ در $x=0$ تحلیلی‌اند می‌توان نوشت:

$$x\,p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

با جایگذاری سری * در معادله ** داریم:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n} + (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n}\right)$$

$$+ (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0$$

$n=0 \Rightarrow (r(r-1) a_0 + p_0 r a_0 + q_0 a_0) x^r +$ بقیه جملات $= 0$

$$\Rightarrow (r(r-1) + p_0 r + q_0) a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

a_0^*

به معادله فوق معادله شاخص گفته می‌شود.

فرض کنید $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$

$$a_0 F(r) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[F(r+n) a_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left((r+k) p_{n-k} + q_{n-k}\right) \right] x^{r+n} = 0$$

لذا از تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$F(r+n) a_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left((r+k) p_{n-k} + q_{n-k}\right) = 0 \qquad \forall n \geq 1 \qquad (1)$$

از رابطه بازگشتی فوق می‌توان ضرایب سری فروبنیوس y را محاسبه نمود. در واقع a_n برحسب a_0 تا a_{n-1}

مشخص می‌شود. می‌توان گفت تمام a_n ها برحسب a_0 قابل محاسبه اند مشروط بر این که

$F(r+n) \neq 0 \qquad \forall n \geq 1$

برای تعیین r باید معادله‌ی شاخص حل شود. حالات زیر را می‌توان برای ریشه‌های این معادله در نظر گرفت:

۱) فرض کنید r_1, r_2 ریشه‌های حقیقی معادله‌ی شاخص مورد نظر باشند با توجه به این که $r_1 > r_2$ لذا به ازای

هیچ $n \geq 1$، $r_1 + n \neq r_2$ و در نتیجه:

$\forall n \geq 1 \; ; \; F(r_1+n) \neq 0$

بنابراین به ازای r_1 سری فروبنیوس y عبارت است از

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)\, x^{r_1+n}$$

$$= x^{r_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right) \; ; \; x>0$$

که $a_n(r_1)$ از رابطه‌ی بازگشتی ① به ازای $r=r_1$ حاصل می‌شود.

برای یافتن جواب دوم معادله اگر $r_1 - r_2$ مساوی هیچ عدد صحیح مثبتی نباشد می‌توان نوشت:

$$y_2 = x^{r_2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n\right)$$

که می‌توان $a_n(r_2)$ را از رابطه‌ی بازگشتی ① به ازای $r=r_2$ محاسبه نمود. زیرا $F(r_2+n) \neq 0$

$\forall n \geq 1$.

۲) اگر معادله‌ی شاخص دارای ریشه‌ی مضاعف $r_1 = r_2 = r$ باشد آن گاه یک جواب معادله عبارتست از:

($a_n(r)$ از رابطه بازگشتی ۱ بدست می‌آید) $y_1 = x^r\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\, x^n\right)$

برای یافتن جواب دوم به روش کاهش مرتبه فرض می‌کنیم $y_2 = v y_1$. $y_2 = \ln x\, y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r)\, x^{n+r}$

۳) اگر $n \geq 1$ موجود باشد که $r_1 - r_2 = n$ آن گاه یک جواب معادله‌ی دیفرانسیل اولیه به ازای $r = r_1$

بصورت زیر است:

$$y_1 = x^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)\, x^n\right)$$

به روش کاهش مرتبه می‌توان نشان داد که جواب دوم عبارتست از:

$$y_2 = c y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(r_2)\, x^n$$

فرض کنید معادله‌ی شاخص برای معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + P(x) y' + q(x) y = 0$ دارای دو ریشه‌ی $r_1 > r_2$ باشد

بطوریکه عدد طبیعی N موجود باشد که $r_1 - r_2 = N$. ($x_0 = 0$ نقطه‌ی منظم معادله است.)

$$r(r-1) + P_0 r + q_0 = 0$$

یک جواب معادله عبارتست از: $y_1(x) = x^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)$

برای یافتن جواب دوم معادله که مستقل خطی با y_1 باشد به روش کاهش مرتبه فرض می‌کنیم، $y_2 = u(x)\, y_1$

با جایگذاری y_2 در معادله‌ی اولیه می‌توان نوشت:

$$\left(u''y_1 + y_1''u + 2u'y_1'\right) + p(x)\left(u'y_1 + y_1'u\right) + q(x)\,u\,y_1 = 0$$

$$\rightarrow u'' + 2\left(\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)u' = 0 \qquad \mu = e^{\int\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)dx} = y_1^2 e^{\int p(x)dx}$$

$$u' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx} = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{x p(x)}{x}\,dx}$$

$$x p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

$$u' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int\left(\frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \cdots\right)dx} = \frac{1}{y_1^2} e^{-\left(p_0 \ln x + p_1 x + p_2\frac{x^2}{2} + \cdots\right)}$$

$$\rightarrow u' = \frac{1}{x^{2r_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^2} e^{-p_0 \ln x}\, e^{-\left(p_1 x + p_2\frac{x^2}{2} + \cdots\right)} =$$

$$\frac{1}{x^{2r_1 + p_0}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^2} e^{-\left(p_1 x + p_2\frac{x^2}{2} + \cdots\right)}$$

$$r_1 - r_2 = N$$

$$r_1 + r_2 = 1 - p_0$$

$$r_1 - N$$

$$\rightarrow 2r_1 + p_0 = N + 1$$

$$u' = \frac{1}{x^{N+1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^2} e^{-\left(p_1 x + p_2\frac{x^2}{2} + \cdots\right)}$$

$g(x)$

واضح است که $g(x)$ در $x=0$ تحلیلی است و $g(0)=1$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

$$\Rightarrow U' = \frac{1}{x^{N+1}}\left(1+b_1 x+b_2 x^2+\cdots\right) = \frac{1}{x^{N+1}} + \frac{b_1}{x^N} + \cdots + \frac{b_N}{x} + b_{N+1} + \cdots$$

$$\Rightarrow U(x) = \frac{x^{-N}}{-N} + b_1\frac{x^{-N+1}}{-N+1} + \cdots + b_N \ln x + b_{N+1} x + \cdots$$

$$\Rightarrow y_2 = b_N(\ln x)\, y_1 + \left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) x^{r_1}\left(\frac{x^{-N}}{-N} + b_1\frac{x^{-N+1}}{-N+1} + \cdots + b_{N+1} x\right)$$

با فاکتورگیری از x^{-N} در پرانتز دوم می‌توان نوشت:

$$y_2 = c\ln x\, y_1 + x^{\overset{=r_2}{(r_1-N)}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\frac{1}{-N} + \frac{b_1 x}{-N+1} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow y_2 = c\ln x\, y_1 + x^{r_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right)$$

اگر $N=0$ ($r_1 - r_2 = 0$) نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود.

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

نقاط تکین معادله عبارتند از: $x=0, -1$

$$p(x) = \frac{3+x}{2x(1+x)} \qquad q(x) = -\frac{1}{2(1+x)}$$

با توجه به این که $xp(x)$ و $x^2q(x)$ در $x=0$ تحلیلی هستند لذا $x=0$ تکین منظم معادله است. معادله‌ی شاخص

برای جواب معادله حول $x=0$ عبارتست از:

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \frac{3}{2} = p_0 \qquad \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = 0 = q_0$$

$$r(r-1) + \frac{3}{2}r + 0 = 0 \rightarrow r_1 = 0 \quad , \quad r_2 = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 = x^0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$$

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)$$

شعاع همگرایی سری های توانی داخل پرانتز حداقل به اندازه ی شعاع همگرایی سری های توابع $xp(x)$ و $x^2q(x)$ در $x=0$ می باشند.

واضح است که توابع $(x+1)p(x)$ و $(x+1)^2q(x)$ در نقطه ی $x=-1$ تحلیلی می باشند. لذا $x=-1$ تکین منظم معادله است.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -1} (x+1)p(x) = -1 = p_0 \\ &\lim_{x \to -1} (x+1)^2 q(x) = 0 = q_0 \end{aligned}\right\} \quad r(r-1) - r + 0 = 0 \longrightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 0$$

$$y_1 = (x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$$

$$y_2 = c \ln x\, y_1 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x+1)^n$$

مثال: معادله ی دیفرانسیل $2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$ را حول $x=0$ بصورت یک سری حل کنید. $x_0 = 0$ تکین منظم معادله است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} = 0$$

$$n=0 \longrightarrow 2(r-1)r\,a_0 - r a_0 + a_0 = 0 \longrightarrow \underset{\neq 0}{a_0}\left(2r^2-2r-r+1\right)=0$$

$$\longrightarrow 2r^2-3r+1=0 \qquad r=1,\ r_2=\frac{1}{2}$$

$$\left(2(r-1)r\,a_0 - r a_0 + a_0\right)x^r + \sum_{n\geq 1}^{\infty}\left(\left[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1\right]a_n + a_{n-1}\right)x^{r+n}=0$$

$$\longrightarrow \left[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1\right]a_n + a_{n-1} = 0 \ ;\ n\geq 1$$

$$\longrightarrow a_n = \frac{-a_{n-1}}{(r+n-1)(2r+2n-1)} \ ;\ n\geq 1$$

$$r_1=1 \longrightarrow a_n = \frac{-a_{n-1}}{n(2n+1)} \ ;\ n\geq 1 \qquad a_1=\frac{-a_0}{3\times 1},\ a_2=\frac{a_0}{2\times1\times3\times5}$$

$$a_3=\frac{-a_2}{3\times 7}=\frac{-a_0}{(1\times2\times3)\times(3\times5\times7)},\ \ldots$$

$$\longrightarrow a_n=(-1)^n\frac{a_0}{n!\,(3\times5\times\cdots\times(2n+1))} \ ;\ n\geq 1$$

$$\longrightarrow y_1(x) \overset{a_0=1}{=} x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(3\times5\times\cdots\times(2n+1))}x^n\right)$$

$$r_2=\frac{1}{2} \longrightarrow a_n=\frac{-a_{n-1}}{(n-\frac{1}{2})(2n)}=\frac{-a_{n-1}}{n(2n-1)} \ ;\ n\geq 1$$

$$a_1=\frac{-a_0}{1},\quad a_2=\frac{-a_1}{2\times3}=\frac{a_0}{1\times2\times3},\quad a_3=\frac{-a_0}{(1\times2\times3)\times(3\times5)}$$

$$a_n=(-1)^n\frac{a_0}{n!\,(3\times5\times\cdots\times(2n-1))} \xrightarrow{a_0=1}$$

$$y_2=x^{\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{x^n}{3\times5\times\cdots\times(2n-1)}\right) \qquad y(x)=c_1y_1+c_2y_2$$

SOBHAN

شعاع همگرایی $r=\infty$

برای این که جواب های سری برای $x<0$ نیز قابل محاسبه باشد، x را می توان به $|x|$ تبدیل کرد.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را توسط یک جواب بصورت یک سری حول $x=0$ حل کنید.

$$x^2y'' - xy' + (x^2+1)y = 0$$

$x=0$ تکین منتظم معادله است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} = 0$$

x^r ضریب $\rightarrow r(r-1)a_0 - ra_0 + a_0 = 0 \rightarrow r(r-1) - r + 1 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 1$

x^{r+1} ضریب $\rightarrow r(r+1)a_1 - (r+1)a_1 + a_1 = 0 \rightarrow r^2 a_1 = 0 \xrightarrow{r \neq 0} a_1 = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\Big((r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1\Big) a_n + a_{n-2}\right] x^{r+n} = 0 \longrightarrow$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{\underbrace{(r+n)(r+n-2)+1}_{(r+n-1)^2}} \quad ; n \geq 2$$

$$r = 1 \rightarrow a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2} \quad ; \quad n \geq 2 \qquad\qquad a_n = 0 \quad ; \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^2 4^2}, \quad a_6 = -\frac{a_0}{2^2 4^2 6^2} \qquad a_n = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} a_0}{(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times n)^2} \; ; n = 2, 4, 6 \dots$$

$$a_n = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} a_0}{(2^{\frac{n}{2}})^2 \left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2} \quad ; \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

$$y_1 = x\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right)$$

$$y_2 = (\ln x) y_1 + x\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \longrightarrow y_2' = (\ln x) y_1' + \frac{1}{x} y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^n$$

$$y_2'' = \frac{2}{x} y_1' + (\ln x) y_1'' - \frac{1}{x^2} y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n\, b_n x^{n-1}$$

$$\longrightarrow 2xy_1' + \underbrace{x^2 \ln x\, y_1''} - y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) b_n x^{n+1} \underbrace{- x \ln x\, y_1'} - y_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^{n+1}$$

$$\underbrace{+ (1+x^2)\Big[\ln x\, y_1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1}\Big] = 0$$

$$\longrightarrow 2xy_1' - 2y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+3} = 0$$

$$2xy_1' = 2x\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+1)(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right) \longrightarrow 2xy_1' - 2y_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m)(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$\longrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m)(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m}(m!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+3} = 0$$

$$\longrightarrow b_1 x^2 + 4 b_2 x^3 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2}) x^{n+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m)(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$b_1 = 0 \quad , \quad 4b_2 + \frac{(-4)}{4\times 1} = 0 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{4}$$

به ازای n های فرد باید داشته باشیم

$$n^2 b_n + b_{n-2} = 0 \quad ; \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

$$b_n = -\frac{b_{n-2}}{n^2} \longrightarrow b_n = 0 \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left((2m)^2 b_{2m} + b_{2m-2}\right)x^{2m+1} + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{(4m)(-1)^m\, x^{2m+1}}{(m!)^2\, 2^{2m}} = 0$$ و به ازای n های زوج :

$$\rightarrow 4m^2 b_{2m} + b_{2m-2} + \frac{4m(-1)^m}{(m!)^2\, 2^{2m}} = 0 \quad ; \quad m = 2, 4, \ldots$$

$$b_4 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{8}{4\times 16}\right)\times\frac{1}{16} = -\frac{3}{2^3\times 4^2} \qquad b_6 = \frac{11}{3^3\times 2^9}$$

$$y_2 = (\ln x)\, y_1 + x\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2^3\times 4^2}x^4 + \cdots\right)$$

مثال: جواب عمومی معادله‌ی زیر را در همسایگی صفر بدست آورید.

$$4x^2y'' - 8x^2y' + (4x^2+1)y = 0 \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

$$4\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n} - 8\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{r+n} + 4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{r+n+2} = 0$$

$$\rightarrow 4r(r-1)+1 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$$

x^{r+1} ضریب : $4(r+1)ra_1 - 8r(a_0) + a_1 = 0 \rightarrow a_1 = a_0$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\left[4(r+n)(r+n-1)+1\right]a_n - 8(r+n-1)a_{n-1} + 4a_{n-2}\right)x^{r+n} = 0$$

$$\rightarrow a_n = \frac{8(r+n-1)a_{n-1}}{4(r+n)(r+n-1)+1} - \frac{4a_{n-2}}{4(r+n)(r+n-1)+1}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{8(n-\frac{1}{2})a_{n-1}}{4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})+1} - \frac{4a_{n-2}}{4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})+1} \longrightarrow$$

$$a_n = \frac{(2n-1)a_{n-1}}{n^2} - \frac{a_{n-2}}{n^2} \quad ; n \geq 2$$

$$a_2 = \frac{3a_1}{4} - \frac{a_0}{4} = \frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = \frac{5a_2}{9} - \frac{a_1}{9} = \frac{5\frac{a_0}{2} - a_0}{9} = \frac{a_0}{3!}$$

$$a_4 = \frac{7a_3 - a_2}{16} = \frac{7\frac{a_0}{3!} - \frac{a_0}{2}}{16} = \frac{a_0}{4!}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{a_0}{n!} \quad ; \; n = 2, 3, \ldots$$

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x^{\frac{1}{2}} e^x \qquad y_2 = u y_1$$

با روش کاهش مرتبه :

$$4x^2(u''y_1 + \underbrace{y_1''u} + 2u_1'y_1') - 8x^2(u'y_1 + \underbrace{y_1'u}) + \underbrace{(4x^2+1)uy_1} = 0$$

$$\left(u'' + 2u'\frac{y_1'}{y_1}\right) 4x^2 + 8x^2u' = 0 \rightarrow u'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} - 2\right)u' = 0 \rightarrow$$

$$\mu = y_1^2 e^{-2x} \qquad \rightarrow u = \int\left(\frac{1}{y_1^2} e^{+2x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{xe^{2x}} e^{2x}\right)dx = \ln x$$

$$\rightarrow y_2 = (\ln x)\, x^{\frac{1}{2}} e^x$$

جواب عمومی : $c_1y_1 + c_2y_2$

مثال: دو جواب مستقل خطی از معادله‌ی $xy'' + 2y' + xy = 0$ را حول $x=0$ بیابید.

$x=0$ تکین منظم $\qquad x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0 \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)\,a_n x^{r+n} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)\,a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} = 0$$

$$\rightarrow r(r-1)+2r=0 \rightarrow r_1=0\ ,\ r_2=-1$$

$$r(r+1)a_1 + 2(r+1)a_1 = 0 \xrightarrow{r=0} a_1 = 0$$

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(r+n)(r+n-1)+2(r+n)} \xrightarrow{r=0} a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n+1)} \longrightarrow$$

$$a_n = 0 \qquad n = 3, 5, 7, \dots$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{6} = -\frac{a_0}{3!}$$

$$\longrightarrow a_n = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\, a_0}{(n+1)!} \qquad n = 2, 4, \dots$$

$$a_4 = \frac{a_0}{5!}$$

$$y_1 = x^0\Big(\underbrace{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m}}_{\frac{\sin x}{x}}\Big) \rightarrow y_1 = \frac{\sin x}{x}$$

به روش کاهش مرتبه:

$$y_2 = u\,y_1$$

داریم:

$$y_2 = \frac{\cos x}{x}$$

با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی حاصل برای a_n می‌توان به ازای $r_2=-1$ نیز y_2 را محاسبه نمود. ($0 \times a_1 = 0$)

⑨ انتگرال تبدیل لاپلاس

اگر $f(t)$ در شرایط وجود تبدیل لاپلاس صدق کند آنگاه داریم:

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du$$

که در آن $\qquad F(s) = L\{f(t)\}$

مثال: تبدیل لاپلاس $f(t) = \dfrac{1-\cos 2t}{t}$ را محاسبه کنید و سپس انتگرال $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos t - \cos 2t}{t}\,dt$ را محاسبه کنید.

$$L\left\{\frac{\overset{f(t)}{\boxed{1-\cos 2t}}}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4} = \ln\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\Bigg|_s^\infty = \ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$$

$$L\left\{\frac{\cos t - \cos 2t}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{u}{u^2+1} - \frac{u}{u^2+4}\right) du = \frac{1}{2}\ln\frac{u^2+1}{u^2+4}\Bigg|_s^\infty$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2+4}$$

$s=0 \rightarrow I = \ln 2$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$e^t\int_0^t e^{-2t}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)dt \qquad\qquad L\left\{\int_0^t e^{-2t}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)dt\right\} = F_1(s)$$

$$L\left\{\int_0^t e^{-2t}\,\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt\right\} = \frac{F_2(s)}{s} \qquad\qquad F_2(s) = L\left\{e^{-2t}\,\frac{1-e^{-t}}{t}\right\}$$

Year.......Month.......Day.......   Subject:.......................................

$$L\left\{e^{-2t}\,\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = F_2(s+2)$$

$$F_2(s) = L\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du = \ln\frac{u}{u+1}\Big|_s^{\infty} = \ln\left(\frac{s+1}{s}\right)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی :

فرض کنید $y_1(t)$ ، $y_2(t)$ ، ..... ، $y_n(t)$ توابعی از متغیر مستقل t باشند. دستگاه زیر را یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می نامند.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

اگر در دستگاه روبرو توابع f_1 تا f_n برحسب y_1 تا y_n خطی باشند، دستگاه را خطی می گوییم.

روش های حل : ۱- حذفی   ۲- عملگر D   ۳- تبدیل لاپلاس   ۴- مقادیر ویژه

۱- روش حذفی : در این روش با حذف توابع مجهول و مشتقات این توابع معادله ای بدست می آوریم که فقط شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن باشد و با حل این معادله یکی از توابع مجهول بدست می آید و سپس سایر توابع مجهول را محاسبه می کنیم.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} y_1'' + 2y_1 + 4y_2 = e^t \\ y_2'' - y_1 - 3y_2 = -t \end{cases}$$

با دو بار مشتق گیری از معادله اول داریم:

$$y_1^{(4)} + 2y_1'' + 4y_2'' = e^t$$

$$\Rightarrow y_2'' = \frac{1}{4}\left(e^t - 2y_1'' - y_1^{(4)}\right)$$

همچنین از معادله اول داریم:

$$y_2 = \frac{1}{4}\left(e^t - y_1'' - 2y_1\right)$$

با جایگذاری y_2 و y_2'' در معادله‌ی دوم می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{4}\left(e^t - 2y_1'' - y_1^{(4)}\right) - y_1 - \frac{3}{4}\left(e^t - y_1'' - 2y_1\right) = -t$$

$$\Rightarrow y_1^{(4)} - y_1'' - 2y_1 = 4t - 2e^t$$

$$y_1(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} + c_3\cos t + c_4\sin t + e^t - 2t$$

$$y_2 = \frac{1}{4}\left(e^t - y_1'' - 2y_1\right) = -c_1 e^{\sqrt{2}t} - c_2 e^{-\sqrt{2}t} - \frac{c_3}{4}\cos t - \frac{c_4}{4}\sin t - \frac{e^t}{2} + t$$

۲- روش اپراتورها: در این روش معادلات دستگاه برحسب عملگر D بازنویسی می‌شوند و سپس با استفاده از دستور کرامر، جواب های دستگاه محاسبه می‌شود. نکته‌ی مهم در این روش ارتباط میان ثابت های بدست آمده در جواب هاست که باید به نحو درستی مشخص شوند.

مثال: دستگاه معادلات همگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases} \qquad x(t),\ y(t) = ? \qquad D = \frac{d}{dt}$$

$$\begin{cases} Dx - 3x - 4y = 0 \\[2ex] Dy + 3y - 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (D-3)x - 4y = 0 \\[2ex] -4x + (D+3)y = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & D+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-3 & -4 \\ -4 & D+3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{D^2-25} \rightarrow (D^2-25)\,x(t) = 0 \rightarrow$$

$$x''(t) - 25x(t) = 0 \rightarrow x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-5t}$$

$$y(t) = \frac{\begin{vmatrix} D-3 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-3 & -4 \\ -4 & D+3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{D^2-25} \rightarrow y''(t) - 25y = 0 \rightarrow y(t) = c_3 e^{5t} + c_4 e^{-5t}$$

$$5c_1 e^{5t} - 5c_2 e^{-5t} - 3(c_1 e^{5t} + c_2 e^{-5t}) - 4(c_3 e^{5t} + c_4 e^{-5t}) = 0$$

$$\rightarrow 5c_1 - 3c_1 - 4c_3 = 0 \rightarrow 2c_1 = 4c_3 \rightarrow c_1 = 2c_3$$

$$-5c_2 - 3c_2 - 4c_4 = 0 \rightarrow 8c_2 = -4c_4 \Rightarrow c_4 = -2c_2$$

Year.......Month.......Day....... Subject:......................................

مثال:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y - x = e^{t} + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt} + z + 2y = e^{t} + 2 \\ \dfrac{dz}{dt} + \dfrac{dx}{dt} - x + z = e^{t} + 3 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{t^2}{2} e^{t} - 1 + c_1 e^{t}$$

$$y(t) = \frac{e^{t}}{4} + c_2 e^{-2t}$$

$$z(t) = \frac{1}{4} e^{t} + 2 + c_3 e^{-t}$$

۳- روش تبدیل لاپلاس:

در این روش از هریک از معادلات دستگاه، تبدیل لاپلاس گرفته و سپس از دستگاه معادلات جبری حاصل، تبدیلات لاپلاس توابع مجهول را به دست آورده و سپس به کمک تبدیل معکوس خود توابع را محاسبه می‌کنیم.

مثال:

$$\begin{cases} y_2'' - 4y_1 = -4e^{t} \\ y_1'' - y_1 = 3y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_1'(0) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(0) = 1 \\ y_2'(0) = 2 \end{cases}$$

$$s^2 Y_2(s) - s\, y_2(0) - y_2'(0) - 4Y_1(s) = -\frac{4}{s-1}$$

$$s^2 Y_1(s) - s(y_1(0)) - y_1'(0) - Y_1(s) = 3Y_2(s)$$

$$Y_1(s) = \frac{2s-3}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} \qquad y_1(t) = L^{-1}\{Y_1(s)\} = e^{t} + e^{2t}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s-2} \qquad y_2(t) = L^{-1}\{Y_2(s)\} = e^{2t}$$

SOBHAN

Year.......Month.......Day....... Subject:....................................

۴- روش مقادیر ویژه

فرم کلی دستگاهی شامل n معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول بصورت زیر است:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}\, y_1(t) + \cdots + a_{1n}\, y_n(t) + g_1(t)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21}\, y_1(t) + \cdots + a_{2n}\, y_n(t) + g_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = a_{n1}\, y_1(t) + \cdots + a_{nn}\, y_n(t) + g_n(t)$$

$$\frac{dY}{dt} = A(t)\, Y + g(t) \qquad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

دستگاه فوق را همگن گوییم هرگاه $g(t) = 0$

اگر Y_1 تا Y_n جواب‌های دستگاه همگن $Y' = AY$ باشد تعریف می‌کنیم:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & & y_2^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)} & & y_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ Y_1 \end{array}$$

رونسکین جواب‌های Y_1 تا Y_n را دترمینان ماتریس Y تعریف می‌کنیم:

$$W(Y_1, \ldots, Y_n) = \det Y$$

اگر V_1 تا V_p مستقل خطی باشند آن‌گاه ماتریس V را ماتریس اساسی می‌نامند.

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت

دستگاه $Y' = AY$ را که در آن درایه های ماتریس A ثابت و مستقل از t باشند را دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت می نامیم. جواب های دستگاه $Y' = AY$ را به فرم $Y = Xe^{\lambda t}$ (عدد λ، بردار X) در نظر می گیریم. با جایگذاری جواب فوق در معادلات دستگاه می توان نوشت:

$$\lambda X e^{\lambda t} = A(Xe^{\lambda t}) \rightarrow AX = \lambda X \rightarrow (A - \lambda I)X = 0$$

بنابراین $Y = Xe^{\lambda t}$ جواب دستگاه $Y' = AY$ می باشد هرگاه λ مقدار ویژه ی A و X بردار ویژه ی متناظر با λ باشد.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

با فرض این که λ_1 تا λ_n مقادیر ویژه ی A و X_1 تا X_n بردارهای ویژه ی متناظر با این مقادیر ویژه باشند، جواب های زیر برای دستگاه $Y' = AY$ حاصل می شود.

$$Y_1 = X_1 e^{\lambda_1 t}, \ \ldots, \ Y_n = X_n e^{\lambda_n t}$$

رونسکین جواب های Y_1 تا Y_n برای دستگاه $Y' = AY$ به صورت زیر حاصل می شود:

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} & \cdots & x_1^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_n^{(2)} e^{\lambda_2 t} & \cdots & x_n^{(n)} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \downarrow \quad\quad & \quad \downarrow \quad & \quad\quad\quad \downarrow \\ Y_1 \quad\quad & \quad Y_2 \quad & \quad\quad\quad Y_3 \end{matrix} \end{array} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ \vdots & & \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

استقلال خطی بردارهای ویژه‌ی X_1 تا X_n استقلال خطی جواب های Y_1 تا Y_n را نتیجه می دهد. در این حالت

جواب عمومی دستگاه $Y' = AY$ عبارتست از: $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n$

مثال: دستگاه $Y' = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} Y$ را حل کنید.

$$\begin{cases} y_1'(t) = -3y_1 + \sqrt{2}\, y_2 \\ y_2'(t) = \sqrt{2}\, y_1 - 2y_2 \end{cases} \qquad \det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} -3-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\to \lambda^2 + 5\lambda + 6 - 2 = 0 \to \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \to (\lambda + 4)(\lambda + 1) = 0$$

$$\to \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \qquad AX_1 = -4X_1 \to (A + 4I)X_1 = 0$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}}_{X_1} = 0 \to X_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$AX_2 = -X_2 \to (A + I)X_2 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} X_2 = 0 \to X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

X_1 و X_2 مستقل خطی اند. پس جواب دستگاه برابر است با:

$$c_1 \underbrace{X_1 e^{\lambda_1 t}}_{y_1} + c_2 \underbrace{X_2 e^{\lambda_2 t}}_{y_2} = \begin{bmatrix} c_1 \\ -\frac{c_1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} e^{-4t} + \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2\sqrt{2} \end{bmatrix} e^{-t} \longrightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t} \\ y_2(t) = -\frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{-4t} + c_2\sqrt{2}\, e^{-t} \end{cases}$$

مثال: دستگاه $y' = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{A} y$ را حل کنید.

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) + y_3(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = y_1(t) + y_2(t) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}}_{\det(A-\lambda I)} = 0 \rightarrow \begin{array}{l}\lambda_1 = 2\\ \lambda_2 = -1\\ \lambda_3 = -1\end{array}$$

$$AX_1 = 2X_1 \rightarrow X_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad AX_2 = -X_2 \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

X_1 و X_2 و X_3 مستقل خطی اند.

$$y = c_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-t} + c_3\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}e^{-t}$$

این مثال نشان می دهد که ممکن است مقادیر ویژه ی یک ماتریس تکراری باشند اما بتوان بردارهای ویژه ی مستقل خطی متناظر با آن ها یافت.

مقادیر ویژه ی تکراری :

در حالتی که ماتریس A در دستگاه $y' = Ay$ دارای مقدار ویژه ی تکراری باشد و بردارهای ویژه ی متناظر با آن مستقل خطی نباشند سایر جواب ها را به فرم $xte^{\lambda t}$ و $xt^2e^{\lambda t}$ و ... جستجو می کنیم.

مثال: دستگاه $y' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} y$ را حل کنید.

$$\det(A-\lambda I)=0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$AX = 2X \rightarrow (A-2I)X = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow y_1 = X_1 e^{2t} \qquad y_2 = tX_1 e^{2t} + Ue^{2t}$$

با جایگذاری y_2 در دستگاه داریم:

$$X_1 e^{2t} + \cancel{2tX_1 e^{2t}} + 2Ue^{2t} = A(\cancel{tX_1 e^{2t}} + Ue^{2t}) \rightarrow$$

$$AU - 2U = X_1 \rightarrow (A-2I)U = X_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow U = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow y_2 = tX_1 e^{2t} + Ue^{2t}$$

جواب عمومی: $y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}$

تذکر: در حالتی که دستگاه دارای ماتریس ضرایب ۳×۳ با سه مقدار ویژه تکراری باشد $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

فقط یک بردارهای ویژه مستقل خطی نباشند $\to y_1 = X_1 e^{\lambda t}$, $y_2 = X_1 t e^{\lambda t} + U e^{\lambda t}$

فرم سه جواب مستقل خطی دستگاه بصورت زیر است. $y_3 = X_1 t^2 e^{\lambda t} + U t e^{\lambda t} + V e^{\lambda t}$

مقادیر ویژه‌ی مختلط

اگر معادله‌ی مشخصه $\det(A - \lambda I) = 0$ دارای ریشه مختلط $\alpha + i\beta$ باشد آن گاه لزوماً $\alpha - i\beta$ نیز ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه می‌باشد. بنابراین اگر X_1 بردار ویژه‌ی متناظر با $\alpha + i\beta$ باشد، آن گاه $\bar{X}_1$ بردار ویژه‌ی متناظر با $\alpha - i\beta$ است. بنابراین دو جواب دستگاه $Y' = AY$ عبارتند از:

$$Y_1 = X_1 e^{(\alpha + i\beta)t} \qquad Y_2 = \bar{X}_1 e^{(\alpha - i\beta)t}$$

تعریف می‌کنیم:

$$U = \frac{Y_1 + Y_2}{2} , \qquad V = \frac{Y_1 - Y_2}{2i}$$

واضح است که U و V جواب‌های حقیقی دستگاه $Y' = AY$ می‌باشند. بنابراین $c_1 U + c_2 V$ قسمتی از جواب عمومی دستگاه را تشکیل می‌دهد.

مثال: دستگاه $Y' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} Y$ را حل کنید.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \to \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) + 1 = 0 \to \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i \end{cases}$$

$$AX_1 = \left(-\tfrac{1}{2} + i\right) X_1 \rightarrow \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \rightarrow X_2 = \bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)t} \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}-i\right)t}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}(\cos t + i \sin t) \\ e^{-\frac{1}{2}t}(-\sin t + i \cos t) \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} \cos t \\ -e^{-\frac{1}{2}t} \sin t \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} \sin t \\ e^{-\frac{1}{2}t} \cos t \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow Y = c_1 U + c_2 V$$

$$y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t\right)$$

$$y_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(-c_1 \sin t + c_2 \cos t\right)$$

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول ناهمگن

۱) روش تغییر پارامتر: هدف یافتن جواب خصوصی دستگاه $y' = A(t)y + g(t)$ می‌باشد.

فرض کنید y_1 ، y_2 ، ... ، y_n جواب های مستقل خطی دستگاه همگن $y' = A(t)y$ باشد. ماتریس اساسی

Y عبارت است از: $Y = \left[y_1 \,\vdots\, y_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, y_n \right]$. تعریف می‌کنیم: $Y_p = Y\,u(t)$

که در آن برای $u(t)$ با جای‌گذاری Y_p در معادله اولیه حاصل می‌شود.

$$\cancel{Y'(t)}u(t) + Y(t)\,u'(t) = A(t)\cancel{Y(t)}\,u(t) + g(t)$$

$$\rightarrow Y(t)\,u'(t) = g(t) \rightarrow u'(t) = [Y(t)]^{-1} g(t) \rightarrow$$

$$u(t) = \int [Y(t)]^{-1} g(t)\,dt + c$$

بنابراین $Y_p = Y(t) \int [Y(t)]^{-1} g(t)\,dt$

مثال: جواب خصوصی دستگاه زیر را با روش تغییر پارامتر به دست آورید.

$$y' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \qquad y' = Ay$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow (\lambda+2)(\lambda+2) - 1 = 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{matrix}$$

$$AX_1 = -X_1 \rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad AX_2 = -3X_2 \rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{-t} \qquad y_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{-3t}$$

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

ماتریس اساسی

$$Y = \begin{bmatrix} \underset{\downarrow\, y_1}{\begin{matrix} e^{-t} \\ e^{-t}\end{matrix}} & \underset{\downarrow\, y_2}{\begin{matrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t}\end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \int \frac{1}{-2e^{-4t}} \begin{bmatrix} -e^{-3t} & -e^{-3t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} t + \frac{3}{2} t e^{t} - \frac{3}{2} e^{t} + c_1 \\ \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} t e^{3t} + \frac{1}{6} e^{3t} + c_2 \end{bmatrix}$$

$$y_p = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t + \frac{3}{2} t e^{t} - \frac{3}{2} e^{t} + c_1 \\ \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} t e^{3t} + \frac{1}{6} e^{3t} + c_2 \end{bmatrix}$$

جواب عمومی دستگاه: $y = y_g + y_p$

۲) روش ضرایب نامعین:

این روش را می‌توان برای دستگاه $y' = Ay + g$ به کار برد مشروط براین که A ماتریس با درایه‌های ثابت (مستقل از t) و درایه‌های بردار g یکی از توابع نمایی، چندجمله‌ای، مثلثاتی یا ترکیبی از آن‌ها باشد.

مثال: دستگاه $y' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}$ را با روش ضرایب نامعین حل کنید.

$$y' = Ay + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} t$$

$$y_p = Wte^{-t} + Ue^{-t} + Vt + z$$

که در آن w، u، v و z بردارهای ثابت اند. با جایگذاری y_p در معادله می‌توان نوشت:

$$We^{-t} - Wte^{-t} - Ue^{-t} + V = A(Wte^{-t} + Ue^{-t} + Vt + z)$$

$$+ \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} t \rightarrow -(W+AW)te^{-t} + (W-U-AU)e^{-t} - AVt$$

$$+ (V - Az) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} t$$

$$\begin{cases} AW = -W \rightarrow W = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \\ AU + U = W - \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \rightarrow (A+I)U = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} \\ -AV = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} \rightarrow V = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \\ Az = V \rightarrow z = \begin{bmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{5}{3}\end{bmatrix} \end{cases}$$

$$y_p = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} te^{-t} + \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} t + \begin{bmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

تابع گاما (Γ)

برای $x>0$ تابع Γ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad ; x>0$$

تذکر: برای $x \le 0$ مقدار انتگرال واگراست.

می‌توان نشان داد برای $x>0$:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

برهان:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \underbrace{t^x}_{u}\,\underbrace{e^{-t}dt}_{dv} = \cancel{-t^x e^{-t}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

$$= x \underbrace{\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt}_{\Gamma(x)} = x\,\Gamma(x)$$

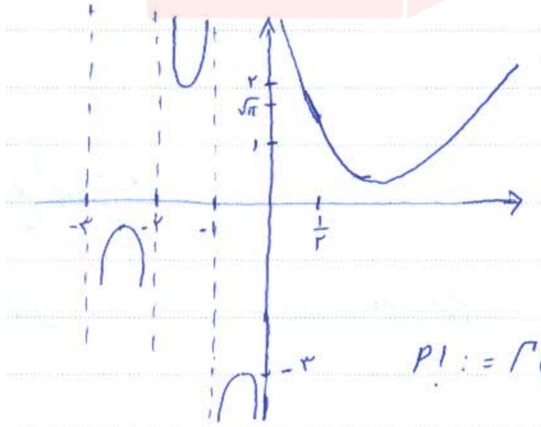
تذکر: برای اعداد طبیعی n داریم:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

تذکر: برای اعداد غیرصحیح و منفی $\Gamma(x)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad x<0 \text{ و غیرصحیح}$$

$y=\Gamma(x)$



تذکر: برای اعداد غیرصحیح p تعریف می‌کنیم: $p! := \Gamma(p+1)$

معادله‌ی بسل

معادله‌ی بسل مرتبه‌ی p بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0 \qquad x_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x p(x) = x\left(\frac{1}{x}\right) \\ x^2 q(x) = x^2\left(\frac{x^2 - p^2}{x^2}\right) \end{array}\right\} \text{در } x_0 = 0 \text{ تحلیلی اند}$$

بنابراین $x=0$ نقطه‌ی تکین منظم معادله است .

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2}$$

$$- p^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0$$

$$\left(r(r-1) a_0 + r a_0 - p^2 a_0\right)(x^r) = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} r^2 - p^2 = 0 \rightarrow r_1 = p, \quad r_2 = -p$$

ضریب x^{r+1} , $\quad r(r+1) a_1 + (r+1) a_1 - p^2 a_1 = 0$

$$\rightarrow \left((r+1)^2 - p^2\right) a_1 = 0 \quad (*)$$

$$\left[\sum_{n=2}^{\infty} \left[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - p^2\right] a_n + a_{n-2}\right] x^{r+n}$$

$$\rightarrow a_n = - \frac{a_{n-2}}{(r+n)^2 - p^2} \quad ; \quad n \geq 2 \quad (**)$$

می‌توان فرض کرد $p \geq 0$

(*)

$$r_1 = p \rightarrow (2p+1)\, a_1 = 0 \rightarrow a_1 = 0 \xrightarrow{(**)} a_3 = a_5 = \cdots = 0$$

$$a_0 := \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$ تعریف می‌کنیم.

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2p+2)} = \frac{-a_0}{4(p+1)} = \frac{-1}{2^p \Gamma(p+1)\, 2^2 (p+1)} = -\frac{1}{2^p \Gamma(p+2)\, 2^2}$$

$$a_2 = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{p+2} \frac{1}{1!\, \Gamma(p+2)}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4(2p+4)} = \frac{-a_2}{2^3 (p+2)} = (-1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{p+4} \left(\frac{1}{2!\, \Gamma(p+3)}\right)$$

$$a_{2n} = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{p+2n} \frac{1}{n!\, \Gamma(p+(n+1))}$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{p+2n} = \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \Gamma(p+(n+1))} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}_{J_p(x)}$$

$J_p(x)$ تابع بسل نوع اول از مرتبه p

اگر P عدد صحیح نباشد و هم چنین مضرب فردی از $\frac{1}{2}$ نیز نباشد، جواب دوم معادله‌ی بسل متناظر با $r_2=-p$ به صورت زیر است که مستقل با $J_p(x)$ است.

$$J_{-p}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(-p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\text{جواب عمومی معادله‌ی بسل}=y(x)=c_1J_p(x)+c_2J_{-p}(x)$$

$J_p(x)$ در $x=0$ تحلیلی است و شعاع همگرایی آن ∞ است اما $J_{-p}(x)$ در $x=0$ بی‌کران است.

تذکر: اگر P مضرب فردی از $\frac{1}{2}$ باشد نیز $y(x)=c_1J_p(x)+c_2J_{-p}(x)$ جواب عمومی معادله‌ی بسل است.

یافتن جواب معادله‌ی بسل در حالتی که P عدد صحیح است.

فرض کنید $p=m$ که $m\in\mathbb{Z}$. در این حالت $J_m(x)$ و $J_{-m}(x)$ وابسته‌ی خطی اند و لذا نمی‌توانند پایه‌ای برای جواب عمومی معادله‌ی بسل باشند.

$$J_{-m}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\underbrace{\Gamma(n-m+1)}_{(n-m)!}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{(n+m)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2m}$$

$$=(-1)^mJ_m(x)\longrightarrow\quad J_m(x)\text{ و }J_{-m}(x)\ \text{وابسته‌ی خطی}$$

درحالتی که p صحیح باشد می توان فرض کرد $p=0$ یا $p=m$ که $m \neq 0$.

اگر $p=0$ ، یک جواب معادله‌ی بسل $J_0(x)$ می باشد و جواب دوم بصورت زیر است :

$$y_2 = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

$$J_0(x) = \sum \frac{(-1)^n}{\underbrace{n!\,\Gamma(n+1)}_{(n!)^2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

با جای گذاری y_2 در معادله‌ی بسل داریم :

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}(m!)^2} H_m x^{2m}$$

که در آن $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$

$Y_0(x)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$Y_0(x) = a\left(y_2(x) + bJ_0(x)\right)$$

پس در حالت $p=0$ جواب عمومی برابر است با :

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$$

که در آن $a = \frac{2}{\pi}$ و $b = \gamma - \ln 2$ ، $\gamma = \lim_{m\to\infty}(H_m - \ln m) = 0.5772$ ثابت اویلر

به $Y_0(x)$ تابع بسل نوع دوم مرتبه صفر گویند.

در حالتی که $p=m$ عددی صحیح و نامنفی باشد یک جواب معادله ی بسل عبارتست از $J_m(x)$ و جواب دوم به فرم زیر در نظر گرفته می شود:

$$y_2(x) = c\,J_m(x)\ln x + x^{-m}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

با جای گذاری $y_2(x)$ در معادله ی بسل می توان ضریب c و دنباله ی $\{b_n\}$ را مشخص نمود. در این حالت نیز جواب دوم بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$Y_m(x) = a\left(y_2(x) + b\,J_m(x)\right) \qquad a=\frac{2}{\pi}\ ,\ b=\gamma-\ln 2$$

$$Y_m(x) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)J_m(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n+H_{n+m}}{n!\,(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$\to$ تابع بسل نوع دوم مرتبه m

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \qquad \lim_{p\to m} Y_p(x) = Y_m$$

تعریف می شود:

و جواب عمومی معادله ی بسل برای هر p برابر است با:

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x)$$

تابع بسل نوع اول مرتبه p

تابع بسل نوع دوم مرتبه p

خواص تابع بسل

۱) اگر $J_p(x)$ نمایانگر تابع بسل نوع اول مرتبه p باشد داریم:

الف) $$\frac{d}{dx}\left(x^{p}J_p(x)\right) = x^{p}J_{p-1}(x)$$

ب) $$\frac{d}{dx}\left(x^{-p}J_p(x)\right) = -x^{-p}J_{p+1}(x)$$

اثبات الف): می‌دانیم

$$J_p = \left(\frac{x}{2}\right)^{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\rightarrow x^{p}J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2n+2p}}{2^{2n+p}\,n!\,\Gamma(p+n+1)}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{p}J_p(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+2p)\,x^{2n+2p-1}}{2^{2n+p}\,n!\,\Gamma(p+n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2n+2p-1}}{2^{2n+p-1}\,n!\,\Gamma(p+n)} = x^{p}\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}_{J_{p-1}}$$

$$= x^{p}J_{p-1}(x)$$

اثبات ب) نیز مشابه الف) می‌باشد.

۲) الف) $x^p J_p'(x) + p x^{p-1} J_p(x) = x^p J_{p-1}(x) \rightarrow J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x)$

ب) $x^{-p} J_p'(x) - p x^{-p-1} J_p(x) = -x^{-p} J_{p+1}(x) \rightarrow$

$$J_p'(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)$$

با استفاده از دو رابطه ی فوق می توان رابطه ی بازگشتی زیر را میان توابع بسل نوع اول بدست آورد.

$$\frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p+1}(x) + J_{p-1}(x)$$

تذکر: می توان نشان داد که

1) $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$

2) $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

اثبات ۱) :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \underbrace{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+1\right)}_{(n+\frac{1}{2})!}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+1\right) = n+\frac{1}{2}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \cdots$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) = \underbrace{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}}_{n+1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 1}{2^{n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n+1)!}{(2n)(2n-2)\cdots(2)\,2^{n+1}}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{2^n \, n! \; 2^{n+1}} \sqrt{\pi} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} \, n!} \sqrt{\pi}$$

$$\rightarrow J_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, \cancel{n!} \, 2^{2n+1}}{\cancel{n!} \, (2n+1)! \, \sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1} (-1)^n}{x (2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin x}$$

به طور مشابه برای اثبات رابطه دوم باید ثابت کنیم:

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n)!}{2^{2n} \, n!} \sqrt{\pi}$$

تذکر: با استفاده از رابطه بازگشتی میان توابع بسل نوع اول و با دانستن این که $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ و $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$ می توان به ازای هر m صحیح $J_{m+\frac{1}{2}}(x)$ ها را محاسبه نمود.

$$\frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p+1}(x) + J_{p-1}(x)$$

$$p = \frac{1}{2} \rightarrow J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}} - J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

$$p = -\frac{1}{2} \rightarrow J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\frac{1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\frac{\cos x}{x} - \sin x\right)$$

$$p = \frac{3}{2} \rightarrow J_{\frac{5}{2}}(x) = \cdots$$

تذکر: لیوویل ثابت کرد تنها $J_{m+\frac{1}{2}}(x)$ ها به ازای m های صحیح برحسب توابع مقدماتی می‌توان نوشت.

۴) انتگرال توابع بسل:

با انتگرال گیری از روابط ۱ می‌توان نوشت:

$$\int x^{p} J_{p-1}(x)\,dx = x^{p} J_{p}(x) + c$$

$$\int x^{-p} J_{p+1}(x)\,dx = -x^{-p} J_{p}(x) + c$$

مثال: $\int J_{3}(x)\,dx$ را محاسبه کنید.

$$\int \overbrace{x^{2}}^{u}\,\overbrace{\left(x^{-2} J_{3}(x)\right)dx}^{dv} \overset{\text{جزء به جزء}}{=\!=\!=} x^{2}\left(-x^{-2} J_{2}(x)\right) + \int x^{-2}(2x)\, J_{2}(x)\,dx$$

$$= -J_{2}(x) + 2\int x^{-1} J_{2}(x)\,dx = -J_{2}(x) + 2\left(-x^{-1} J_{1}(x)\right) + c$$

$$\rightarrow \int J_{3}(x)\,dx = -J_{2}(x) - \frac{2}{x} J_{1}(x) + c$$

معادلات قابل تبدیل به معادله‌ی بسل

برخی از معادلات دیفرانسیل را می‌توان با تغییر متغیر مناسب به معادله‌ی بسل تبدیل کرد.

مثال: 1) $x^{2}y'' + xy' + (\lambda^{2}x^{2} - p^{2})y = 0$

$z = \lambda x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\underbrace{\frac{dz}{dx}}_{\lambda} \qquad z^{2}\frac{d^{2}y}{dz^{2}} + z\frac{dy}{dz} + (z^{2} - p^{2})y = 0$

۲) $4x^2y'' + 4xy' + (x - p^2)y = 0$ $\qquad z = \sqrt{x}$

۳) $x^2y'' + xy' + 4(x^4 - p^2) = 0$ $\qquad z = x^2$

۴) $xy'' + (1+2p)y' + xy = 0$ $\qquad y = x^{-p}u$

که u تابعی از x است.

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + xy = 0$ را با تغییر متغیر زیر حل کنید.

$y = x^{\frac12}u$ و $z = \frac{2}{3}x^{\frac32}$

$$y' = \frac12 x^{-\frac12}u + x^{\frac12}u' \Rightarrow y'' = -\frac14 x^{-\frac32}u + \frac12 x^{-\frac12}u' + \frac12 x^{-\frac12}u' + x^{\frac12}u''$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac14 x^{-\frac32}u + x^{-\frac12}u' + x^{\frac12}u''$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = x^{\frac12}\frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac12 x^{-\frac12}\frac{du}{dz} + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)x$$

$$\Rightarrow -\frac14 x^{-\frac32}u + x^{-\frac12}\left(x^{\frac12}\frac{du}{dz}\right) + x^{\frac12}\left(\frac12 x^{-\frac12}\frac{du}{dz} + x\frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

$$+ x\left(x^{\frac12}u\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}\frac{du}{dz} + \frac{3}{2} z \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{3}{2} z U - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{z}\right) U = 0$$

$$\rightarrow z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right) u = 0$$ معادله بسل به ازای $p = \frac{1}{3}$