



به نام خدا

دبیرستانی کنکوری



www.fera.ir

www.forum.fera.ir

پاسخ به کلیه ی سوالات
شما در انجمن سایت :

هر آنچه که یک دانش پژوه بدان نیاز دارد

دکتری

ابتدایی

۵

۱

۱۰

ش

۴

آزمون سراسری

کارشناس ارشد

متوسطه اول

کارشناسی

www.fera.ir

۱- عدد شش رقمی $\overline{aaabbb}$ همواره بر کدام عدد بخش پذیر است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۲۷ (۳) ۳۷ (۴) ۴۷

۲- عدد ۹۷ در مبنای b به صورت $(۲۴۱)_b$ نوشته می شود، اگر عدد $۸!$ را در مبنای b بنویسیم، چند صفر متوالی در سمت راست عدد وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳- در تقسیم a بر b ، خارج قسمت ۱۹ و باقی مانده ۱۰ است. اگر a مضرب ۸ باشد، مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۴- در یک تقسیم، مقسوم برابر ۶۵۰ و خارج قسمت برابر ۱۲ است. مجموع ارقام بزرگ ترین مقدار باقی مانده کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۷

۵- باقی مانده ی تقسیم a بر ۱۵ برابر ۷ است. باقی مانده ی تقسیم $۵ - ۹a - a^2$ بر ۱۵ چند است؟

- (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۴

۶- بزرگ ترین عدد K که $۶۱, ۶۰ \mid ۷۲^K$ چند می باشد؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۴۰ (۴) ۴۱

۷- به ازای چند عدد طبیعی a ، $۷۲۰ = [a, ۶۰]$ می باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۳

۸- اگر $A = \{x \in \mathbb{N} : ۱۵ \mid x\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{N} : x < ۶۰۰, ۱۲ \mid x\}$ باشد، $A \cap B$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۹- تعداد عددهای صحیح n که به ازای آن ها رابطه ی $\frac{a^3 + 2a + 7}{a} \in \mathbb{N}$ برقرار باشد، چند است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰- اگر a و b و c سه عدد طبیعی باشند به طوری که $b \mid a$ ، $a \mid b + c$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $b \mid c$ (۲) $c \mid b$ (۳) $a \mid c$ (۴) $c \mid a$

۱۱- چند نقطه روی منحنی به معادله ی $yx = x^2 + 2y + 1$ وجود دارد که هر دو مؤلفه ی آن اعدادی طبیعی باشند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش تر از ۲

۱۲- اختلاف دو عدد اول برابر $\overline{abv}$ است. حاصل ضرب ارقام عدد بزرگ تر کدام است؟

- (۱) $7ab$ (۲) $9ab$ (۳) $18ab$ (۴) $14ab$

۱۳- باقی مانده ی ۸۳ و ۱۰۷ بر عدد طبیعی b برابر با ۵ و ۳ است. رقم دهگان ماکزیمم مقدار عدد b کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴- کدام یک از مجموعه های زیر خوش ترتیب نیست؟

- (۱) $\left\{ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} : x, y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$ (۲) $\left\{ x + \frac{2}{x} : x \in \mathbb{N} \right\}$
 (۳) $\{\text{Log } x : x \in \mathbb{N}\}$ (۴) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 10x \geq 0\}$

۱۵- به ازای چند عدد طبیعی n ، کوچک تر از ۱۰۰، دو عدد $5n + 4$ و $9n + 7$ نسبت به هم اول هستند؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۹۳ (۳) ۹۶ (۴) ۹۹

۱۶- کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی ۱۲ برابر تفاضل آنهاست. اگر مجموع دو عدد ۱۱۲ باشد، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۱۷- عدد ۹۷ در مبنای b به صورت $(241)_b$ نوشته می شود، اگر عدد $8!$ را در مبنای b بنویسیم، چند صفر متوالی در سمت راست عدد وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۸- باقی مانده ی تقسیم 2^{30} بر ۱۷ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۱۳ (۴) ۱۶

۱۹- چند عدد دورقمی وجود دارد که اگر به علاوه ی ۳ شود، مضرب ۷ می شود و اگر یک واحد از آن کم شود، مضرب ۳ می شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۲۰- رقم یکان عدد $10^{1390} + 2^{1390} + \dots + 1^{1390}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۹

۲۱- اعداد صحیح a و b در معادله ی $13a + 25b = 10$ صدق می کنند. باقی مانده ی $3b + b^2$ بر ۱۳ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۵

۲۲- به ازای کدام مقدار x عدد $27x + 5$ در $8[3]$ قرار دارد؟

- (۱) ۸۹ (۲) ۹۰ (۳) ۹۱ (۴) ۹۲

۲۳- باقی مانده ی $2^{330} - 5^{330}$ در تقسیم به عدد ۱۳۳ چند است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۵

۲۴- اگر p عددی اول باشد به طوری که $(b, p^5) = p^3$ و $(a^2, p^3) = p^2$ باشد، حاصل (ab^2, p^{10}) کدام است؟

- (۱) p^3 (۲) p^4 (۳) p^7 (۴) p^{10}

۲۵- اگر $5a + 17$ مضرب ۱۱ باشد، باقی مانده ی a بر ۱۱ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۶- نسبت دو عدد $\frac{7}{8}$ و کوچک ترین مضرب مشترک آن دو عدد ۶۷۲ است، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را

d بنامیم، حاصل $(d, 18)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱۸

۲۷- به ازای چند عدد طبیعی مانند رابطه ی $ab = 108$ برقرار است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۵

۲۸- اگر باقی مانده های تقسیم اعداد A و B بر ۱۲ و ۱۵ به ترتیب برابر ۱ و ۲ و خارج قسمت های این تقسیم ها به ترتیب q ، q' باشد، خارج قسمت تقسیم $15 - 4B + 5A$ بر ۳۰ کدام است؟

- (۱) $2q + 2q'$ (۲) $2q + 2q' - 1$ (۳) $2q + 2q' - 2$ (۴) $q + q' - 2$

۲۹- باقی مانده ی $1387^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2$ بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

۳۰- به ازای چند مقدار n ، عدد $n^6 - 1$ اول است؟

- (۱) بیش تر از ۲ (۲) ۲ (۳) یک (۴) صفر

۳۱- مجموع مربعات ۱۳۸۷ عدد اول متمایز و بزرگ تر از ۳ بر ۲۴ چه باقی مانده ای دارد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۳

۳۲- مجموعه ی $\{vm + 14n - 100 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ چند عنصر کوچک تر از ۱۰۰ دارد؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۳۳- اگر برای اعداد طبیعی a ، b داشته باشیم $(a, b) + [a, b] = 7$ ، آن گاه $a + b$ کدام است؟

- (۱) همواره ۶ (۲) ۶ یا ۷ (۳) ۵ یا ۶ (۴) ۵ یا ۷

۳۴- هرگاه $4 \equiv 3x^7 + 12x^9 + 15x^{49}$ ، آن گاه عدد صحیح x به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $x = vk$ (۲) $x = vk + 1$ (۳) $x = vk + 2$ (۴) $x = vk - 3$

۳۵- چند عدد اول p وجود دارد که برای آن، $11 + 2^p$ بر p بخش پذیر باشد؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) هیچ (۴) بی شمار

۳۶- چند عدد پنج رقمی به صورت $\overline{ab \cdot ab}$ وجود دارد که مضرب ۹۹ است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۷ (۳) ۱۰ (۴) ۹

۳۷- باقی مانده ی تقسیم 7^{100} بر ۴۵ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۹ (۳) ۳۶ (۴) ۴۱

۳۸- اگر p و q دو عدد اول و $p^2 - q = ۳۶$ باشد، باقی مانده ی تقسیم p^q بر q کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۱۱

۳۹- در تقسیم a بر b ، خارج قسمت ۱۹ و باقی مانده ی ۱۰ است. اگر a مضرب ۸ باشد، مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۴۰- رقم یکان $3^{n+1} + 4^n$ به ازای مقادیر طبیعی n ، چند مقدار متفاوت دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۱- چند مقدار طبیعی و دو رقمی a وجود دارد به طوری که دو عدد $3n + ۳$ و $3n + a$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، نسبت به هم، اول باشند؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۴۲- اگر p و q دو عدد اول متمایز و A و B به ترتیب مجموعه ی مضرب های طبیعی p و q باشند، آنگاه کوچک ترین عضو مجموعه ی $A \cap B$ چند شمارنده ی طبیعی دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۴۳- چند عدد اول مانند P وجود دارد به طوری که $4 + 7P$ مربع کامل باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) بی شمار

۴۴- به ازای چند عدد صحیح n ، ب.م.م دو عدد $n^2 - n$ و $n^2 + n$ برابر ۹ است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) هیچ

۴۵- اگر عدد ۹ رقمی $\overline{aaabbbccc}$ بر ۹۹ تقسیم پذیر باشد، کدام عدد زیر همواره بر ۳۳ تقسیم پذیر است؟

- (۱) $\overline{aabb}$ (۲) $\overline{aacc}$ (۳) $\overline{cba}$ (۴) $\overline{cab}$

۴۶- اگر $A = (\overline{abc})_3 + (\overline{cba})_7$ ، آنگاه A بر کدام یک از اعداد زیر الزاماً بخش پذیر نیست؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۱۰

۴۷- در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه و خارج قسمت اعدادی اول و باقیمانده برابر ۱۱ است. خارج قسمت این تقسیم کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۴۸- در مورد اعداد طبیعی a و b ، $(b < a)$ ، رابطه‌ی $(a, b)^2 + (-3a, -3b) = 18$ برقرار است. اگر $a = 24$ باشد آنگاه b چند مقدار متمایز می‌تواند قبول کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۹- برای سه عدد اول و متمایز $(r > p > q)$ رابطه‌ی $(p^2 - q^2) \mid pqr$ برقرار است. مجموع این سه عدد اول در تقسیم بر ۴ چه باقیمانده‌ای دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۰- چند عدد صحیح مانند n وجود دارد به گونه‌ای که $1 + n^4$ بر $1 + n$ تقسیم پذیر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۱- اگر a ، b و c اعدادی طبیعی باشند به طوری که $a \mid b$ و $b^2 \mid ac$ ، آنگاه همواره:

- (۱) $c \mid b$ (۲) $b \mid c$ (۳) $c \mid a$ (۴) $c \mid ab$

۵۲- چند نقطه با مختصات صحیح بر منحنی به معادله‌ی $xy - y + x^2 - 3x = 0$ وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۳- بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی $A = \{n \in \mathbb{N} : 25 \mid 3^n + 4^n, n \leq 100\}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۹۹ (۳) ۹۸ (۴) ۹۷

۵۴- اگر $a - b \mid a + b$ ، آنگاه کدام نتیجه در حالت کلی نمی‌تواند درست باشد؟

- (۱) $a - b \mid 2a$ (۲) $a - b \mid 4a + b$ (۳) $a - b \mid 3a + b$ (۴) $a - b \mid 2b$

۵۵- مجموعه‌ی $\{n \in \mathbb{N} : 2^{n+1} \mid 2^{24} - 1\}$ دارای چند عضو است؟

- (۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۵۶- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی که مضرب ۱۸ بوده و مربع آن بر ۲۴۵ بخش پذیر باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۵ (۳) ۹ (۴) ۸

۵۷- باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد طبیعی a و $3a$ بر عدد طبیعی b به ترتیب برابر ۱۷ و ۶ هستند. b کدام است؟

- (۱) ۳۹ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴) ۴۸

۵۸- اگر $(abc)_7 = (\overline{abc})_9$ باشد، آنگاه حاصل $(acb)_{11}$ کدام است؟ ($a, c \neq 0$)

- (۱) ۲۶۴ (۲) ۳۹۶ (۳) ۴۹۵ (۴) ۶۳۸

۵۹- چند عدد به صورت $\overline{3yx152}$ بر ۳۶ بخش پذیر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۱

۶۰- اگر $n = 2^5 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$ ، آن گاه n چند مقسوم علیه طبیعی دارد که بر ۱۲۰ بخش پذیر باشند؟
 (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۴۰ (۴) ۱۰۸

۶۱- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ و $ab + [a, b] = 72$ ، حاصل $a + b$ کدام است؟
 (۱) ۲۸ (۲) ۲۱ (۳) ۱۴ (۴) ۷

۶۲- در تقسیم عدد ۵۰۰ بر چند عدد طبیعی، خارج قسمت برابر ۱۰ می باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۵۰

۶۳- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $[a, b] + ab = 700$ ، $\frac{a}{b} = \frac{14}{10}$ باشد، حاصل (a, b) کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۴- مجموع ارقام بزرگترین عدد دو رقمی x که در معادله $3x \equiv 17 \pmod{12}$ صدق می کند، کدام است؟
 (۱) ۱۷ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶

۶۵- باقی مانده ی تقسیم عدد $12^{2012} \times 13^{91}$ بر عدد ۱۱ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۹

۶۶- رقم یکان $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۸

۶۷- اگر معادله ی هم نهشتی $11 \equiv 5a + 6 \pmod{3a-1}$ فاقد جواب باشد کدام گزینه برای عدد طبیعی a درست است؟ ($k \in W$)
 (۱) $a = 23k + 8$ (۲) $a = 23k + 7$ (۳) $a = 11k + 8$ (۴) $a = 11k + 7$

۶۸- هر گاه $2x + 7$ و $11x + 5$ در Z_7 ، در یک دسته ی هم ارزی قرار داشته باشند، باقی مانده ی تقسیم $x^3 - 1$ بر ۷ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۹- رقم وسط کوچکترین عدد طبیعی سه رقمی a ، برای آن که دو رابطه ی $15|a-1$ و $24|a-1$ برقرار باشند، کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۰- اگر $5x + 6y \equiv 3 \pmod{7}$ و $2x + 3y \equiv 4 \pmod{7}$ ، آن گاه x به کدام صورت است؟ ($x, y, k \in Z$)
 (۱) $7k$ (۲) $7k + 3$ (۳) $7k - 5$ (۴) $7k - 1$

۷۱- اگر $a \equiv 7 \pmod{11}$ و $b \equiv 2 \pmod{11}$ ، $5a \equiv 2b \pmod{11}$ ، آن گاه باقی مانده ی تقسیم b بر ۱۱ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

۷۲- اگر a و b دو عدد صحیح هم علامت باشند، آن گاه کدام یک از موارد زیر همواره درست است؟

- (۱) $(a-b)^2 \equiv a^2 - b^2 \pmod{ab}$ (۲) $(a-b)^3 \equiv (a^2 + b^2)ab \pmod{ab}$
 (۳) $(a-b)^3(a+b)^2 \equiv a^5 + b^5 \pmod{ab}$ (۴) $(a-b)^2(a+b)^3 \equiv a^5 - b^5 \pmod{ab}$

۷۳- کوچک ترین عدد طبیعی a برای این که عبارت $a \equiv 0 \pmod{9+31+9}$ درست باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۵

۷۴- اگر P عددی اول و مخالف ۳ باشد، آن گاه برای عدد $A = 11 \overbrace{11 \dots 1}^P$ کدام درست است؟

- (۱) همواره عدد A بر P بخش پذیر است.
 (۲) به ازای تعداد نامحدودی برای P ، عدد A بر P بخش پذیر است.
 (۳) فقط به ازای تعداد محدودی برای P ، عدد A بر P بخش پذیر است.
 (۴) عدد A به ازای هیچ مقدار P ، بر P بخش پذیر نیست.

۷۵- اگر n و k دو عدد صحیح باشند، آن گاه کدام یک از معادلات زیر در مجموعه ی اعداد صحیح فاقد جواب است؟

- (۱) $n^2 = 8k$ (۲) $n^2 = 8k + 1$ (۳) $n^2 = 8k + 3$ (۴) $n^2 = 8k + 4$

۷۶- برای چند عدد طبیعی n رابطه ی $2n^2 - 3n + 3 \mid 2n + 1$ برقرار است؟

- (۱) هیچ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

۷۷- خارج قسمت تقسیم ۷۸۷ بر چند عدد طبیعی برابر ۱۰ است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

۷۸- اگر A مجموعه مضارب طبیعی عدد ۳ بوده و $S \subset A$ و S فاقد عضو ابتدا باشد، در این صورت S چند زیرمجموعه دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۸ (۴) بی شمار

۷۹- خارج قسمت و باقی مانده ی تقسیم ۴۴- بر ۱۷ به ترتیب q و r هستند. باقی مانده ی تقسیم q بر r کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۷ (۳) -۳ (۴) ۴

۸۰- برای دو عدد صحیح a, b ($a \neq 0$) اگر $a^3 \mid b^2$ ، آن گاه کدام رابطه ی زیر همواره درست نیست؟

- (۱) $a \mid b$ (۲) $a^2 \mid b$ (۳) $a^4 \mid b^5$ (۴) $a \mid b^2$

۸۱- عدد صحیح a مضرب ۱۷ نبوده و باقی مانده ی تقسیم a بر ۱۷، یک واحد کمتر از مکعب خارج قسمت می باشد. مجموع ارقام a کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۸۲- در یک تقسیم، باقی مانده برابر ۸ است. با افزودن k واحد به مقسوم با ثابت ماندن مقسوم علیه، خارج قسمت یک واحد افزایش یافته و باقی مانده برابر ۲ گردیده است. k چند عدد طبیعی یک رقمی می تواند باشد؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۸۳- بزرگترین مقدار طبیعی n که به ازای آن $5n + 8 - 3n^2$ بر $3 + n$ بخش پذیر باشد کدام است؟

- (۱) ۴۷ (۲) ۳۰ (۳) ۵۸ (۴) ۶۰

۸۴- اگر $13|a + 3b + k$ و $13|5a + 2b + 17$ ، آن گاه کمترین مقدار طبیعی k کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۳

۸۵- در یک تقسیم مقدار مقسوم ۱۲ برابر باقی مانده است و باقی مانده بیشترین مقدار ممکن خود را دار می باشد. مقسوم علیه کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۸۶- اگر عدد $m(222101)$ را در پایه ی ۹ به صورت $q(abc)$ نمایش دهیم، آن گاه $a - b + c$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۷- برای تعیین اول بودن یک عدد طبیعی، آن عدد را بر عامل های اول مشخصی تقسیم می کنیم. در کدام یک از گزینه های زیر تعداد عامل های اول مورد بررسی برای اول بودن هر سه عدد یکسان است؟

- (۱) ۴۷، ۶۷، ۸۷ (۲) ۲۳، ۴۳، ۵۳ (۳) ۵۹، ۷۹، ۸۹ (۴) ۱۰۷، ۱۲۷، ۱۳۷

۸۸- مجموعه ی $A = \{42a + 36b + 11\}$ چند عضو طبیعی دورقمی دارد؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

۸۹- چند جفت عدد اول p و q وجود دارد که در رابطه ی $16 = 13p - q^2$ صدق کنند؟

- (۱) بی شمار (۲) دو (۳) یک (۴) هیچ

۹۰- عدد $16!$ را به صورت $12^k \times q$ نوشته ایم. بیشترین مقدار k کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۹۱- عدد 45000 چند مقسوم علیه طبیعی مضرب ۱۸ دارد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰

۹۲- هرگاه $n^2 - n$ یک عدد طبیعی دورقمی باشد و $3|4(n^2 - n)$ ، آن گاه چند جواب برای n یاف می شود؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۹۳- معادله ی $ab + a + b = n$ به ازای هیچ مقدار طبیعی a و b برقرار نیست. n کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۸ (۳) ۳۳ (۴) ۳۸

۹۴- اگر مجموع دو عدد طبیعی برابر ۶۸ و کوچک ترین مضرب مشترک این دو عدد ۶۰ برابر بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک آنها باشد، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱۷

۹۵- تعداد صفرهای مقابل عدد $\binom{50}{20} + \binom{50}{30}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۶- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۱، باقی مانده از مربع خارج قسمت به اندازه ی ۱۳۲ واحد کم تر است. مجموع ارقام a کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۹۷- اگر p یک عدد اول بزرگ تر از ۳ باشد کدام یک از اعداد زیر الزاماً مرکب نیست؟

- (۱) $3p + 1$ (۲) $2^p + 1$ (۳) $2p + 5$ (۴) $p^2 + 2$

۹۸- اگر دو عدد $n^2 + 1$ و $n^3 + 4$ نسبت به هم اول نباشند، آنگاه بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک آنها کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۷ (۳) ۱۹ (۴) ۲۳

۹۹- به ازای چند عدد صحیح n ، رابطه های $n \mid 24$ و $n \mid 4800$ برقرار است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۴۸ (۳) ۳۰ (۴) ۲۴

۱۰۰- چند عدد طبیعی دو رقمی مانند a وجود دارد به طوری که کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد a و ۱۰ بر ۲۰ بخش پذیر باشد؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۳۹ (۳) ۲۲ (۴) ۲۱

۱- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. عدد مورد نظر را می توان به صورت $\overline{aaa} + 1000\overline{aaa} + \overline{bbb}$ نوشت، ضمناً $\overline{aaa} = a$:
 $\overline{bbb} + 1000\overline{aaa} = 111b + 1000 \times 111a = 111(b + 1000a) = 3 \times 37(\overline{a00b})$
 این عدد همواره بر ۳ و ۳۷ بخش پذیر است.

۲- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(241)_b = 97 \Rightarrow 2b^2 + 4b + 1 = 97 \Rightarrow b(b+2) = 48 = 6 \times 8 \Rightarrow b = 6$$

در مبنای b هر صفر سمت راست عدد، نمایش گر یک عامل b در آن عدد است، بنابراین باید بزرگ ترین عدد k که در رابطه ی $8! \mid 6^k$ صدق می کند را به دست آوریم.

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots$$

توان عدد اول p در $n!$ برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} 8! \text{ در } 2 \text{ توان} &= 4 + 2 + 1 + 0 = 7 \\ 8! \text{ در } 3 \text{ توان} &= 2 + 0 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8! \text{ در } 6 \text{ توان} = \min \{2 \text{ توان و } 3 \text{ توان}\} = 2$$

پس تعداد صفرهای جلوی $8!$ در مبنای ۶ برابر ۲ است.

۳- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. طبق فرض $a = b \times 19 + 10$ ، چون باقی مانده کوچک تر از مقسوم علیه است، پس $b > 10$ و چون a مضرب ۸ است می توان نتیجه گرفت:

$$19b + 10 \equiv 0 \Rightarrow 3b \equiv -10 \equiv 6 \Rightarrow b \equiv 2 \Rightarrow b = 8k + 2$$

چون $b > 10$ ، پس $b_{\min} = 18$ بنابراین $a_{\min} = 18 \times 19 + 10 = 352$ که مجموع ارقام آن ۱۰ است.

۴- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} 650 = 12b + r, \quad 0 \leq r < b \\ r = 650 - 12b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 \leq 650 - 12b < b \Rightarrow \left. \begin{aligned} 650 - 12b \geq 0 \\ 650 - 13b < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b \leq \frac{650}{12} \Rightarrow b \leq 54 \\ b > \frac{650}{13} \Rightarrow b > 50 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 51 \leq b \leq 54$$

بزرگ ترین مقدار باقی مانده به ازای کم ترین مقدار b حاصل می شود، در نتیجه:

$$b = 51 \Rightarrow r = 650 - 12 \times 51 = 38 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 11$$

۵- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a \equiv 15 \Rightarrow a^2 - 9a - 5 \equiv 49 - 63 - 5 = -19 \equiv 11$$

۶- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر $61 \mid 72^K$ ، آنگاه $5^61 \times 3^61 \times 2^{122} \mid 2^{3K} \times 3^{2K}$ و لذا $3K \leq 122$ و $2K \leq 61$ که نتیجه می شود: $K \leq 30$.

۷- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. چون $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ و $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ ، لذا $[a, 60] = 720$ اگر و تنها اگر $a = 2^4 \times 3^2 \times 5^x$ که x برابر ۰ یا ۱ باشد، پس برای a ، ۲ انتخاب وجود دارد.

۸- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. A مجموعه ی مضارب ۱۵ و B مجموعه ی مضارب کوچک تر از ۶۰۰ عدد ۱۲ است. اگر x عضوی از $A \cap B$ باشد، یعنی هم بر ۱۲ و هم بر ۱۵ بخش پذیر و از ۶۰۰ نیز کم تر است.

$$\left. \begin{matrix} 12|x \\ 15|x \end{matrix} \right\} \Rightarrow [12, 15] | x : 60|x$$

تعداد مضارب طبیعی ۶۰ کوچک تر از ۶۰۰ برابر است با: $\left[\frac{599}{60} \right] = 9$

توجه ۱: توجه کنید که از $\left\{ \begin{matrix} m|x \\ n|x \end{matrix} \right\}$ می توانیم نتیجه بگیریم $[m, n] | x$ ، که در آن $[m, n]$ ک.م.م m و n است.

توجه ۲: تعداد مضارب K از ۱ تا n برابر است با: $\left[\frac{n}{K} \right]$

۹- گزینه ی ۳ پاس صحیح است. داریم:

$$\frac{a^3 + 2a + 7}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 + 2 + \frac{7}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a|7 \Rightarrow a = 7, a = -7, a = 1, a = -1$$

بازای $a = -1$ عدد حاصل عضو $\mathbb{N}$ نمی شود، پس ۳ تای دیگر قابل قبول است.

۱۰- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. از تعریف عاد کردن استفاده می کنیم. می دانیم اگر $a|b$ ، آنگاه $b = aq$ است، پس داریم:

$$\left. \begin{matrix} a|b+c \Rightarrow b+c=aq \\ b|a \Leftrightarrow a=bq' \end{matrix} \right\} \Rightarrow b+c=bqq' \Rightarrow c=bqq'-b \Rightarrow c=b(\underbrace{qq'-1}_k) \Rightarrow c=bk : b|c$$

۱۱- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. منحنی را به صورت y بر حسب x درمی آوریم:

$$xy = x^2 + 2y + 1 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 1}{x - 2} \Rightarrow x - 2 | x^2 + 1 \xrightarrow{x=2} x - 2 | 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 10 \\ x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow y = 10 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x - 2 = -5 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

توجه داشته باشید که در جواب معادلات فوق در دو حالت آخر $y = -2$ شده است که واضح است عدد طبیعی نیست.

۱۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. این را می دانیم همه ی اعداد اول به جز ۲، فرد هستند. در این جا اختلاف دو عدد اول برابر abv شده است که abv یک عدد سه رقمی فرد است. بنابراین یکی از این دو عدد باید ۲ باشد. دیگری را p می نامیم. داریم:

$$p - 2 = \overline{abv} \Rightarrow p = \overline{abv} + 2 \Rightarrow p = \overline{ab9}$$

سؤال از ما حاصل ضرب اقام عدد بزرگ تر یعنی همین p را خواسته است. p از سه رقم ۹، a و b تشکیل شده است. حاصل ضرب این سه رقم در گزینه ی ۲ وجود دارد.

۱۳- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} 107 = bq' + 3 \text{ و } 0 \leq 3 < b \\ 83 = bq + 5 \text{ و } 0 \leq 5 < b \end{array} \right\} \xrightarrow{-} 24 = b \overbrace{(q' - q)}^{+} \Rightarrow bt = 24 = 1 \times 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \times 13 \xrightarrow{b > 5} b_{\max} = 26$$

۱۴- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. برای حل گزینه ی (۱) ابتدا $\frac{x}{y} = t$ را در نظر می گیریم.

$$\left\{ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} : x, y \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} = \left\{ \left(t + \frac{1}{t} \right) \in \mathbb{R} \right\} = [-\infty - 2] \cup (2, +\infty)$$

$$\text{گزینه ی (۲)} \left\{ x + \frac{2}{x} : x \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 3, 3, \frac{11}{3}, \frac{9}{2}, \dots \right\}$$

$$\text{گزینه ی (۳)} \{ \log x : x \in \mathbb{N} \} = \{ 0, \log 2, \log 3, \dots \}$$

$$\text{گزینه ی (۴)} = \mathbb{N} - \{1, 2, 3, \dots, 9\} = \{10, 11, 12, \dots\}$$

۱۵- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر $(5n+4, 9n+7) = d$ آن گاه d هر دو عدد $9n+7$ و $5n+4$ را عاد می کند.

$$d | 5n+4 \xrightarrow{\times 9} d | 45n+36 \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = 1$$

$$d | 9n+7 \xrightarrow{\times (-5)} d | -45n-35$$

بنابراین به ازای تمام اعداد طبیعی این دو عدد نسبت به هم اول اند، پس گزینه ی (۴) صحیح است.

۱۶- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر دو عدد a و b و b م م آن ها را d بنامیم:

$$a = a'd, b = b'd, (a', b') = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} m.c.k = c = a'b'd \\ \text{تفاضل} = a - b = (a' - b')d \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{a'b'}{a' - b'} = \frac{12}{1}$$

چون a' و b' نسبت به هم اول اند، پس $a'b'$ و $a' - b'$ هم نسبت به هم اول اند. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} a'b' = 12 \\ a' - b' = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a' = 4, b' = 3$$

$$a + b = 112 \Rightarrow (a' + b')d = 112 \Rightarrow 7d = 112 \Rightarrow d = 16$$

۱۷- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. $(241)_b = 97 \Rightarrow 2b^2 + 4b + 1 = 97 \Rightarrow b(b+2) = 48 = 6 \times 8 \Rightarrow b = 6$

در مبنای b هر صفر سمت راست عدد، نمایش گر یک عامل b در آن عدد است، بنابراین باید بزرگترین عدد k که در رابطه ی $6^k | 8!$ صدق می کند را به دست آوریم.

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

توان عدد اول p در $n!$ برابر است با:

$$\left. \begin{array}{l} 8! \text{ در } 2 = 4 + 2 + 1 + 0 = 7 \\ 8! \text{ در } 3 = 2 + 0 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 8! \text{ در } 6 = \min \{ \text{توان } 2 \text{ و } \text{توان } 3 \} = 2$$

پس تعداد صفرهای جلوی $8!$ در مبنای ۶ برابر ۲ است.

۱۸- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$2^4 \equiv -1 \Rightarrow 2^{30} = (2^4)^7 \times 2^2 \equiv (-1)^7 \times 4 \equiv -4 \equiv 13$$

۱۹- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

۴ عدد دو رقمی به شکل زیر وجود دارد که به ازای $k = 1, 2, 3, 4$ به دست می آیند.

$$\left. \begin{array}{l} 7|a+3 \Rightarrow a \equiv -3 \equiv 4 \\ 3|a-1 \Rightarrow a \equiv 1 \equiv 4 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 21k + 4$$

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m,n]}$$

توجه:

۲۰- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم $a^{rk+r} \equiv a^r$ که $r = 1, 2, 3, 4$ پس:

$$1390^4 \equiv 2 \Rightarrow 1^{1390} + \dots + 10^{1390} \equiv 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 \equiv \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \equiv 5$$

$$(1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ می دانیم:})$$

۲۱- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$13a + 25b = 10 \Rightarrow 13a + 25b \equiv 10 \Rightarrow -b \equiv -3 \Rightarrow b \equiv 3 \Rightarrow b^2 + 3b \equiv 9 + 9 \equiv 5$$

۲۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} 27x+5 \in [3]_{\wedge} \Rightarrow 27x+5 \equiv 3 \\ 27 \equiv 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x \equiv -2 \Rightarrow 3x \equiv 6 \xrightarrow{(3,8)=1} x \equiv 2 \Rightarrow x = 8k + 2$$

۲۳- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم اگر n زوج باشد، $a+b|a^n - b^n$ داریم:

$$5^{330} - 2^{330} = (5^3)^{110} - (2^3)^{110} \Rightarrow 5^3 + 2^3 | (5^3)^{110} - (2^3)^{110} \Rightarrow 133 | 5^{330} - 2^{330}$$

۲۴- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. داریم:

$$(a^2, p^3) = p^2 \Rightarrow a \text{ یک عامل } p \text{ دارد} \quad (I)$$

$$(b, p^5) = p^3 \Rightarrow b \text{ سه عامل } p \text{ دارد} \quad (II)$$

از I و II می توان نتیجه گرفت که ab^2 دارای ۷ عامل p است؛ پس داریم:

$$(ab^2, p^{10}) = p^7$$

۲۵- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر $5a + 17$ مضرب ۱۱ باشد، می توان نوشت بنابراین داریم:

$$5a + 17 \equiv 11 \Rightarrow 5a \equiv -17 \equiv 5$$

$$\xrightarrow{\div 5} a \equiv 1 \xrightarrow{\text{در ۳ ضرب می کنیم.}} 3a \equiv 3$$

$$(5, 11) = 1$$

۲۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. داریم که $\frac{a}{b} = \frac{7}{8}$ است و $[a, b] = 672$ است، پس:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{7}{8} \xrightarrow{\text{چون } (a', b') = 1 \text{ است}} \begin{cases} a' = 7 \\ b' = 8 \end{cases}$$

$$[a > b] = a'b'd = 672 \xrightarrow{} 7 \times 8d = 672 \Rightarrow d = 12$$

پس حاصل $(d, 18)$ برابر است با: $(12, 18) = 6$

۲۷- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. از $ab = 108$ می توان نتیجه گرفت که $a | 108$. پس a مقسوم علیه 108 است. داریم:

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد 108 برابر است با:

$$(2 + 1)(3 + 1) = 12$$

پس ۱۲ مقدار طبیعی برای a داریم.

توجه: تعداد مقسوم علیه مثبت عدد $N = P_1^{\alpha_1} \times \dots \times P_n^{\alpha_n}$ برابر است با:

$$(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$$

۲۸- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. قضیه ی تقسیم را یادتان هست؟ $a = bg + r$ داریم:

$$\begin{cases} A = 12q + 1 \xrightarrow{\times 5} 5A = 60q + 5 \\ B = 15q' + 2 \xrightarrow{\times 4} 4B = 60q' + 8 \end{cases}$$

جمع دو رابطه

$$\xrightarrow{} 5A + 4B - 15 = 60q + 60q' - 2$$

منهای ۱۵

$$= 30(2q + 2q' - 1) + 28$$

خارج قسمت

توجه: باقی مانده باید حتماً بزرگ تر یا مساوی صفر باشد.

۲۹- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم باقی مانده ی مربع هر عدد در تقسیم بر ۸ برابر ۱ است، پس باقی مانده ی هر

کدام از عددهای $1^2, 3^2, 5^2, \dots, 1387^2$ بر ۸ برابر ۱ است داریم:

$$1^2 \equiv 1, 3^2 \equiv 1, 5^2 \equiv 1, \dots, 1387^2 \equiv 1$$

$$\xrightarrow{+} 1^2 + 3^2 + \dots + 1387^2 \equiv 1 + 1 + \dots + 1 \equiv 694 \equiv 6$$

$$\frac{1387 + 1}{2} = 694$$

۳۰- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. در تجزیه ی $n^6 - 1$ داریم:

$$n^6 - 1 = (n - 1)(n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$$

بنابراین اگر قرار است این عدد اول باشد یا $n - 1$ باید برابر ۱ باشد یا $n^5 + \dots + 1$. چون سر و کارمان با اعداد صحیح است، $n^5 + \dots + 1$ برابر ۱ نمی شود، پس $n - 1$ باید برابر ۱ شود. داریم $n = 2 \Rightarrow n - 1 = 1$ به ازای $n = 2$ حاصل $n^6 - 1$ برابر ۶۳ می شود که یک عدد اول نیست، پس هیچ مقداری برای n وجود ندارد که $n^6 - 1$ اول می شود.

۳۱- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. باید یادتان باشد که مربع هر عدد اول بزرگ تر از ۳ می شود به صورت $24q + 1$ نوشت.

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \dots + P_{1387}^2 = (24q_1 + 1) + (24q_2 + 1) + \dots + (24q_{1387} + 1) =$$

$$24(q_1 + q_2 + \dots + q_{1387}) + 1 + 1 + \dots + 1 = 24k + 1387$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{تا } 1387}$

باقی مانده ی $24k$ در تقسیم بر ۲۴ برابر صفر است، پس فقط لازم است باقی مانده ی ۱۳۸۷ را بر ۲۴ پیدا کنیم.

$$\begin{matrix} 24 \\ 1387 \end{matrix} \equiv 19$$

۳۲- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. عنصرهای مجموعه ی داده شده به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} x = 7m + 14n - 100 = 7(m + 2n) - 100 = 7k - 100 \\ x < 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < 7k - 100 < 100 \Rightarrow 14/2 < k < 29/0.00 \Rightarrow k = \begin{cases} 15 \\ 16 \\ . \\ . \\ 29 \end{cases}$$

پس این مجموعه ۱۴ عضو دارد.

۳۳- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. داریم:

$$(a, b) + [a, b] = 7 \Rightarrow d + a'b'd = 7 \Rightarrow d(1 + a'b') = 7 = 1 \times 7$$

$$\begin{cases} d = 1 \\ 1 + a'b' = 7 \Rightarrow a'b' = 6 \Rightarrow \begin{cases} a' = 2 \\ b' = 3 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 6 \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین حاصل $a + b$ برابر $a'd + b'd = 2 + 3 = 5$ یا برابر $1 + 6 = 7$ می شود.

۳۴- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر x عددی صحیح باشد، آنگاه طبق نتیجه ی قضیه ی فرما داریم:

$$x^7 \equiv x \pmod{7} \xrightarrow{\text{توان } 7} x^{49} \equiv x^7 \equiv x \pmod{7}$$

$$15x^{49} + 12x^7 + 3x \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 15x + 12x + 3x \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 30x \equiv 4 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 4 \pmod{7} \xrightarrow{(2, 7) = 1} x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 2, k \in \mathbb{Z}$$

۳۵- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. واضح است که p نمی تواند برابر ۲ باشد. پس $p \neq 2$ و داریم:

$$\text{فرما: } \begin{cases} 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \\ (p, 2) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} 2^p \equiv 2 \pmod{p} \Rightarrow 2^p + 11 \equiv 13 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 13$$

۳۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. این عدد مضرب اعداد ۹ و ۱۱ است.

$$\begin{cases} N \equiv 0 \pmod{9} : a + b + 0 + a + b \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow 2(a + b) \equiv 0 \pmod{9} : a + b \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow a + b = \begin{cases} 9 \\ 18 \end{cases} \\ N \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow N \equiv b - a + 0 - b + a \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

همواره برقرار

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 9 \Rightarrow \begin{array}{r} a \mid 9 \quad 8 \quad 7 \quad \dots \quad 1 \\ b \mid 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad 8 \end{array} \\ a + b = 18 \Rightarrow a = b = 9 \text{ (دسته ۱)} \end{cases}$$

پس برای ارقام a و b ، ۱۰ دسته جواب دارد، به عبارتی ۱۰ عدد پنج رقمی مطلوب وجود دارد.

۳۷- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. چون $45 = [5, 9]$ ، بنابراین یکبار باقی مانده ی 7^{100} را بر ۵ و یکبار باقی مانده ی آن را بر ۹ به دست می آوریم، سپس آن ها را مساوی می کنیم.

$$\text{فرما: } 7^4 \equiv 1 \pmod{5} \xrightarrow{\text{توان ۲۵}} 7^{100} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$7^{100} \equiv (-2)^{100} \equiv (2^{23})^{33} \times 2^9 \equiv (-1)^{33} \times 2^9 \equiv -2 + 18 \equiv 16$$

چون 7^{100} در پیمانه ی ۵ و ۹ برابر ۱۶ است، پس در پیمانه ی ک.م.م آن ها هم ۱۶ می باشد، پس $7^{100} \equiv 16$.

توجه: اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $a \equiv b \pmod{n}$ باشد، آنگاه $a \equiv b \pmod{[m, n]}$.

۳۸- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$p^2 - q = 36 \Rightarrow q = p^2 - 36 \Rightarrow q = (p-6) \times (p+6) \Rightarrow \begin{cases} p-6=1 \Rightarrow p=7 \\ q=p+6 \Rightarrow q=13 \end{cases}$$

↑

$$\text{عدد اول } q \Rightarrow p^q = 7^{13} \equiv 7$$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a^p \equiv a \pmod{p} \quad (p \text{ عدد اول})$$

۳۹- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. طبق فرض $a = b \times 19 + 10$ چون باقی مانده ی کوچک تر از مقسوم علیه است، پس $b > 10$ و چون a مضرب ۸ است می توان نتیجه گرفت:

$$19b + 10 \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow 3b \equiv -10 \pmod{8} \Rightarrow 3b \equiv 6 \pmod{8} \Rightarrow b \equiv 2 \pmod{8} \Rightarrow b = 8k + 2$$

چون $b > 10$ ، پس $b_{\min} = 18$ بنابراین $a_{\min} = 18 \times 19 + 10 = 352$ که مجموع ارقام آن ۱۰ است.

۴۰- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. برای تعیین رقم یکان به جای توان، باقی مانده ی تقسیم آن بر ۴ را می گذاریم و اگر باقی مانده صفر شد به جایش ۴ را می گذاریم یعنی همواره به جای n یکی از اعداد $\{1, 2, 3, 4\}$ را می توان در $4^{n+1} + 3^n$ قرار داد، پس یکی از ۴ حالت زیر رخ می دهد:

$$4^1 + 3^0 \equiv 4 + 1 \equiv 5 \quad 4^2 + 3^0 \equiv 16 + 1 \equiv 17 \equiv 1 \quad 4^3 + 3^0 \equiv 64 + 1 \equiv 65 \equiv 1 \quad 4^4 + 3^0 \equiv 256 + 1 \equiv 257 \equiv 1$$

بنابراین به ازای تمام مقادیر طبیعی n فقط ۳ حالت برای رقم یکان رخ می دهد.

توجه: $a^{4k+r} \equiv a^r, r \in \{1, 2, 3, 4\}$

۴۱- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. $(3n + a, 7n + 3) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 3n + a \\ d \mid 7n + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 21n + 7a \\ d \mid 21n + 9 \end{cases}$

$$\Rightarrow d \mid 7a - 9$$

$$\begin{cases} 7a - 9 = 1 \Rightarrow a = \frac{10}{7} \notin \mathbb{N} \\ 7a - 9 = -1 \Rightarrow a = \frac{8}{7} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

برای آن که همواره $d = 1$ باشد، باید $7a - 9 = \pm 1$ باشد:

پس هیچ a ای یافت نمی شود.

$$A = \{p, 2p, 3p, \dots\}$$

$$B = \{q, 2q, 3q, \dots\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{pq, 2pq, \dots\} \Rightarrow \min(A \cap B) = pq$$

شمارنده های طبیعی عدد pq عبارت اند از: $1, p, q, pq$ یعنی ۴ شمارنده ی طبیعی دارد. (توجه کنید که چون $\emptyset \neq A \cap B \subseteq \mathbb{N}$ ، مجموعه ی $A \cap B$ طبق اصل خوش ترتیبی دارای عضو ابتدا است.)

$$7P + 4 = k^2 \Rightarrow 7P = k^2 - 4$$

$$\Rightarrow 7P = (k - 2)(k + 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k - 2 = 7 \Rightarrow k = 9 \\ k + 2 = P \Rightarrow P = 11 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} k + 2 = 7 \Rightarrow k = 5 \\ k - 2 = P \Rightarrow P = 3 \end{cases}$$

پس دو عدد اول ۳ و ۱۱ چنین خاصیتی دارند.

۴۴- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$(a + 1, a - 1) = \begin{cases} 2 & \text{اگر } a \text{ فرد} \\ 1 & \text{اگر } a \text{ زوج} \end{cases}$$

نکته: اگر a یک عدد صحیح باشد.

$$(n^2 - n, n^2 + n) = 9 \Rightarrow |n| (n - 1, n + 1) = 9$$

داریم:

پس $|n| \times 1 = 9$ یا $|n| \times 3 = 9$. حالت اول امکان پذیر نیست، اما در حالت دوم داریم $|n| = 9$ یعنی n فرد است که با $(n - 1, n + 1) = 1$ تناقض دارد، پس معادله فاقد جواب است.

۴۵- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$N \mid \overline{aaabbbccc} : N \equiv_{99} \cdot \Rightarrow \begin{cases} N \equiv_{9} \cdot \\ N \equiv_{11} \cdot \end{cases}$$

$$\begin{cases} N \equiv_{9} \cdot \text{مجموع ارقام} \equiv 3a + 3b + 3c \equiv 0 : a + b + c \equiv 0 \Rightarrow 3 \mid \overline{cba} \\ N \equiv_{11} \cdot \text{تفاضل ارقام، یک در میان از راست به چپ} \equiv \cancel{c} - \cancel{c} + c - \cancel{b} + b - b + \cancel{a} - \cancel{a} + a \equiv 0 : c - b + a \equiv 0 : 11 \mid \overline{cba} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [3, 11] \mid \overline{cba} : 33 \mid \overline{cba}$$

۴۶- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = (\overline{abc})_3 + (\overline{cba})_9 = (c + 3b + 9a) + (a + 9b + 49c)$$

$$= 50c + 10b + 10a = 10(5c + b + a)$$

$\Rightarrow 10 \mid A \Rightarrow$ بر ۲ و ۵ و ۱۰ بخش پذیر است.

۴۷- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$a = bq + 11 \xrightarrow{\text{عدد اول : } a > 2} (a - 11) = \text{عددی زوج}$$

$$\Rightarrow bq = \text{عددی زوج} \xrightarrow{\text{عدد اول : } b > 11} q \Rightarrow q = 2$$

۴۸- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر $(a, b) = d$ باشد آنگاه داریم:

$$(a, b)^2 = d^2, (-3a, -3b) = |-3| (a, b) = 3d$$

پس با توجه به فرض داریم:

$$d^2 + 3d - 18 = 0 \Rightarrow (d + 6)(d - 3) = 0 \xrightarrow{d > 0} d = 3$$

$$\begin{cases} (a, b) = 3 \Rightarrow b = 3b' \\ a = 24 \\ b < a \end{cases} \Rightarrow (24, 3b') = 3$$

$$\Rightarrow (\underline{8, b'}) = 1, b' < 8 \quad (*)$$

از آنجا که b طبیعی است، با توجه به $(*)$ تنها مقادیر ۱، ۳، ۵ و ۷ برابر b' قابل قبول است، پس مقادیر قابل قبول b عبارتند از: ۳ و ۹ و ۱۵ و ۲۱.

۴۹- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. به راحتی می توان نشان داد که $p^2 - q^2$ نسبت به هر دو عدد اول p و q اول است، پس $(p^2 - q^2, pq) = 1$ داریم:

$$\begin{cases} p^2 - q^2 \mid pqr \\ (p^2 - q^2, pq) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} p^2 - q^2 \mid r$$

$$\xrightarrow{\text{عدد اول } r, p^2 - q^2 \neq 1} r = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) \quad (*)$$

چون r عددی اول است، پس با توجه به $(*)$ نتیجه می شود که $p - q = 1$ یعنی اعداد اول p و q متوالی اند، در نتیجه:

لذا: $p = 3, q = 2, r = p + q = 5$

مجموع این سه عدد اول برابر ۱۰ خواهد بود که در تقسیم بر ۴، باقیمانده ی ۲ می آورد.

۵۰- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) \Rightarrow n + 1 \mid n^4 - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} n+1 \mid n^4 - 1 \\ n+1 \mid n^4 + 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} n+1 \mid 2 \Rightarrow n+1 = \pm 1, \pm 2 \Rightarrow n = 0, -2, 1, -3$$

۵۱- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. برای اعداد طبیعی a ، b و c طبق فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} a \mid b \xrightarrow{\times c} ac \mid bc \\ b^2 \mid ac \end{cases} \Rightarrow b^2 \mid bc \xrightarrow{\div b} b \mid c$$

اعداد $a = 1$ ، $b = 2$ و $c = 4$ مثال نقضی برای نادرستی سه گزینه ی دیگر هستند.

۵۲- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$xy - y + x^2 - 3x = 0 \Rightarrow y(x - 1) = 3x - x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 3x}{1 - x}$$

برای آن که y مقدار صحیحی باشد باید صورت کسر بر مخرج کسر تقسیم پذیر باشد.

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x \quad | \quad -x + 1 \\ -(-x^2 - x) \quad | \quad -x + 2 \\ \hline -2x \quad | \quad -x + 2 \\ -(-2x + 2) \quad | \quad -2 \\ \hline -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2 - 3x}{-x + 1} = -x + 2 + \frac{-2}{-x + 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x + 1 \mid -2 \Rightarrow -x + 1 = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 2 \end{cases} \quad \text{۴ جواب :}$$

۴ نقطه با مختصات های صحیح روی منحنی مذکور وجود دارد:

$$(0, 0), (2, 2), (-1, 2), (3, 0)$$

۵۳- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. توجه: $a + b \mid a^k + b^k$ (فرد k)

$$25 = 3^2 + 4^2 \quad \text{و} \quad 25 \mid 3^n + 4^n \Rightarrow 3^2 + 4^2 \mid 3^n + 4^n$$

$$\Rightarrow 3^2 + 4^2 \mid \left(3^2\right)^{\frac{n}{2}} + \left(4^2\right)^{\frac{n}{2}} \Rightarrow \frac{n}{2} = \text{فرد}$$

چون $n \leq 100$ ، بنابراین $n = 98$ بزرگ ترین عضو مجموعه ی A است.

۵۴- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a-b \mid a+b \\ a-b \mid a-b \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع و تفاضل}} \begin{cases} a-b \mid 2a \\ a-b \mid 2b \end{cases} \quad \text{گزینه ی (۱) و گزینه ی (۴)}$$

$$\begin{cases} a-b \mid a+b \\ a-b \mid 2a \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} a-b \mid 3a+b \quad \text{گزینه ی (۳)}$$

$$\text{مثال نقض برای گزینه ی «۲»} : \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b \mid a+b \\ a-b \nmid (2a+b) \end{cases}$$

۵۵- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ آن گاه با شرط زوج بودن عدد طبیعی n داریم:

$$a+b \mid a^n - b^n$$

$$2^{n+1} \mid \left(2^n \right)^{\frac{24}{n}} - 1 \Rightarrow \frac{24}{n} = \text{عدد طبیعی و زوج} \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

پس شش مقدار قابل قبول داریم.

۵۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} n = 18q \\ n^2 = 245k = 7^2 \times 5 \times k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 18q = 3^2 \times 2 \times q \\ n^2 = 7^2 \times 5^2 \times m^2 : n = 7 \times 5 \times m \end{cases} \Rightarrow n = 3^2 \times 2 \times 5 \times 7 \times k' : \text{Min}(n) = 630$$

۵۷- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. مطابق فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} a = bq + 17, 17 < b & (1) \\ 3a = bq' + 6, 6 < b & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = b(3q) + 51 \\ 3a = bq' + 6 \end{cases} \Rightarrow b(3q) + 51 = bq' + 6$$

$$\Rightarrow b(q' - 3q) = 45 \Rightarrow b \mid 45 \xrightarrow{b > 17} b = 45$$

۵۸- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$(\overline{abc})_v = (\overline{cba})_q \Rightarrow 49a + 7b + c = 81c + 9b + a \Rightarrow b = 8(3a - 5c) \Rightarrow b \text{ مضرب } 8$$

$$0 \leq b \leq 6 \Rightarrow b = 0, a = 5, c = 3$$

$$(acb)_{11} = (530)_{11} = 5 \times 11^2 + 3 \times 11 = 638$$

$$۳۶ = [۴, ۹]$$

۵۹- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \overline{۳yx۱۵۲}^9 = ۳ + y + x + ۱ + ۵ + ۲ = ۰ : x + y = -۲ \Rightarrow x + y = \begin{cases} ۷ \\ یا \\ ۱۶ \end{cases} \\ \overline{۳yx۱۵۲}^4 = ۵۲ = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۷ \Rightarrow x, y = ۰, ۷ / ۱, ۶ / ۲, ۵ / ۳, ۴ \\ یا \\ ۱۶ \Rightarrow x, y = ۸, ۸ / ۷, ۹ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ۱۱ = کل حالات $\Rightarrow$ هر کدام ۲ حالت غیر از ۸ و ۸ $\Rightarrow$

۶۰- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$۱۲۰ = ۲^3 \times ۳ \times ۵$$

با تجزیه ی ۱۲۰ به عوامل اول داریم:

برای به دست آوردن تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد n که بر ۱۲۰ بخش پذیر هستند، کافی است تعداد مقسوم

علیه های طبیعی عدد $m = \frac{n}{۱۲۰}$ را به دست آوریم. لذا داریم:

$$m = ۲^2 \times ۳^3 \times ۵^2 \times ۷^2$$

تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد m برابر است با:

$$(۲+۱)(۳+۱)(۲+۱)(۲+۱) = ۱۰۸$$

توجه:

$$\begin{cases} N = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_n^{\alpha_n} \\ P_i \text{ عدد اول} \end{cases} \Rightarrow T(N) = \text{تعداد مقسوم علیه مثبت} = (\alpha_1 + ۱)(\alpha_2 + ۱) \dots (\alpha_n + ۱)$$

۶۱- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. برای دو عدد طبیعی a و b که $(a, b) = d$ است، داریم:

$$a = a'd, b = b'd, (a', b') = ۱, [a, b] = a'b'd$$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{۳}{۴} \end{cases}$$

$$ab + [a, b] = ۷۲ \Rightarrow a'b'd^2 + a'b'd = ۷۲$$

$$\begin{cases} (a', b') = ۱ \\ \xrightarrow{a' = ۳, b' = ۴} \\ \Rightarrow a'b'd(d+۱) = ۷۲ \xrightarrow{a' = ۳, b' = ۴} d(d+۱) = ۶ \Rightarrow d = ۲ \end{cases}$$

$$a + b = (a' + b')d = (۳ + ۴) \times ۲ = ۱۴$$

۶۲- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a = bq + r \Rightarrow \begin{cases} ۵۰۰ = ۱۰ \times b + r \text{ و } ۰ \leq r < b \\ r = ۵۰۰ - ۱۰b \end{cases} \Rightarrow ۰ \leq ۵۰۰ - ۱۰b < b \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} b = ۴۶, \dots, ۵۰$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'd}{b'd} = \frac{۱۴}{۱۰} = \frac{۷}{۵} \Rightarrow a' = ۷, b' = ۵$$

۶۳- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$[a, b] + ab = d(a'b') + d^2(a'b') = ۳۵(d^2 + d) = ۷۰۰ \Rightarrow d^2 + d = ۲۰ \Rightarrow d = ۴$$

۶۴- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$12x \equiv 3 \pmod{17} \Rightarrow 4x \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow 4x \equiv -16 \pmod{17} \Rightarrow x \equiv -4 \pmod{17} \Rightarrow x = 17k - 4$$

$17 = \text{مجموع ارقام} \rightarrow 98 = \text{بزرگترین عدد دو رقمی}$

۶۵- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$1391^{2012} \equiv 5^{2012} \equiv 5^2 \equiv 3 \pmod{11}$$

فرما $5^{10} \equiv 1 \pmod{11} \rightarrow 5^{2010} \equiv 1$

۶۶- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. مجموع جملات عبارت S را براساس فرمول مجموع جملات دنباله ی هندسی به دست می آوریم:

$$S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} = \frac{2(1 - 2^{101})}{1 - 2} = 2^{101} - 2$$

$$a^{k+r} \equiv a^r \pmod{11}, 1 \leq r \leq 4 \Rightarrow 2^{101} \equiv 2^1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{101} - 2 \equiv 0 \pmod{11}$$

از طرفی:

۶۷- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم شرط وجود جواب برای معادله ی سیاله ی فرض سؤال، آن است که $11 \mid (5a+6, 3a-1)$:

$$(5a+6, 3a-1) = d \rightarrow \begin{cases} d \mid 3a-1 \\ d \mid 5a+6 \end{cases} \xrightarrow[\times 3]{\times -5} d \mid 23 \Rightarrow d = \begin{cases} 1 \\ 23 \end{cases} \text{ یا}$$

اگر ب.م.م این دو عدد ۱ باشد، آنگاه $11 \mid 1$ که قابل قبول نیست. پس باید ب.م.م آنها ۲۳ باشد که در این صورت داریم:

$$(5a+6, 3a-1) = 23 \Rightarrow 23 \mid 3a-1 \Rightarrow 3a-1 \equiv 0 \pmod{23} \Rightarrow 3a \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 3a \equiv 1+23 \pmod{23} \xrightarrow{\div 3} a \equiv 8 \pmod{23}$$

$\Rightarrow a = 23k + 8, k \in \mathbb{W}$

۶۸- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$[2x+7] = [11x+5] \Rightarrow 11x+5 \equiv 2x+7 \pmod{7} \Rightarrow 9x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 2x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow x^3 - 1 \equiv (1)^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

۶۹- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 15 \mid a-1 \Rightarrow a-1 \equiv 0 \pmod{15} \\ 24 \mid a-1 \Rightarrow a-1 \equiv 0 \pmod{24} \end{cases} \Rightarrow a-1 \equiv 0 \pmod{[15, 24]} \Rightarrow a-1 \equiv 0 \pmod{120}$$

$\Rightarrow a \equiv 1 \pmod{120} \Rightarrow a = 120k + 1 \xrightarrow{k=1} a = 121 \Rightarrow \text{رقم وسط} = 2$

۷۰- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\equiv 4 \pmod{5} \xrightarrow{+} \cancel{2x} + 4y \equiv \cancel{4} \pmod{5} : 2y \equiv 1 \pmod{5} \rightarrow y \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 2x + 3y \equiv 4 \pmod{5} \\ 5x + 6y &\equiv 3 \pmod{7} \\ \div 2 &\xrightarrow{\quad} x \equiv 2 \pmod{7} : x = 7k + 2 = 7k' - 5 \end{aligned}$$

۷۱- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 3a \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow 15a \equiv 35 \pmod{11} \Rightarrow 6b \equiv 35 \pmod{11} \Rightarrow 6b \equiv 24 \pmod{11} \Rightarrow b \equiv 4 \pmod{11} \\ 5a \equiv 2b \pmod{11} \Rightarrow 15a \equiv 6b \pmod{11} \end{cases}$$

۷۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} (۱) \text{ گزینه ی } (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod{11} \\ (۲) \text{ گزینه ی } (a-b)(a^2 + b^2) &= a^3 + ab^2 - a^2b - b^3 \equiv a^3 - b^3 \pmod{11} \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3ab(a-b) - b^3 \equiv a^3 - b^3 \pmod{11} \\ (۳) \text{ گزینه ی } (a-b)^3(a+b)^2 &\equiv (a^3 - b^3)(a^2 + b^2) = a^5 + a^3b^2 - a^2b^3 - b^5 \equiv a^5 - b^5 \pmod{11} \\ (۴) \text{ گزینه ی } (a-b)^2(a+b)^3 &\equiv (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^5 + a^2b^3 + a^3b^2 + b^5 \equiv a^5 + b^5 \pmod{11} \end{aligned}$$

با توجه به موارد بالا، تنها گزینه ی (۲) درست است.

۷۳- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$31 \equiv -2 \pmod{11} \Rightarrow \begin{cases} 31^5 \equiv (-2)^5 \equiv 1 \pmod{11} \\ 31^4 \equiv (-2)^4 \equiv 5 \pmod{11} \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب}} 31^9 \equiv 5 \pmod{11} \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} 9 \equiv -2 \pmod{11} &\Rightarrow 9^5 \equiv (-2)^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (9^5)^6 \equiv 1 \pmod{11} \xrightarrow{(۲), (۱)} 9^{31} + 31^9 + a \equiv 9 + 5 + a \equiv 3 + a \pmod{11} \\ a \in \mathbb{N} &\xrightarrow{\quad} a_{\min} = 8 \end{aligned}$$

۷۴- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$P \mid \overbrace{11 \dots 1}^P \Rightarrow P \mid \frac{10^P - 1}{9} \Rightarrow P \mid 10^P - 1 \quad (۱)$$

$$P \mid 10^P - 10 \quad (۲)$$

از طرفی بنابر نتیجه ی قضیه فرما داریم:

$$(۱), (۲) \Rightarrow \begin{cases} P \mid 10^P - 1 \\ P \mid 10^P - 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} P \mid 9 \Rightarrow P=3$$

با توجه به فرض، هیچ مقداری برای P وجود ندارد که عدد A بر P بخش پذیر شود.

۷۵- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر $n=2q+1$ آن گاه:

$$n^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4q(q+1) + 1 = 8k + 1$$

اگر $n=2q$ آن گاه:

$$\begin{cases} q=2q' \Rightarrow n=4q' \Rightarrow n^2=16q'^2=8k \\ q=2q'+1 \Rightarrow n=4q'+2 \Rightarrow 16q'^2 + 16q' + 4 = 8(2q'^2 + 2q') + 4 = 8k + 4 \end{cases}$$

۷۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 2n+1 \mid (2n+1)n \Rightarrow 2n+1 \mid 2n^2+n \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2n+1 \mid 4n-3 \\ 2n+1 \mid 2n^2-3n+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2n+1 \mid 4n-3 \\ 2n+1 \mid 4n+2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2n+1 \mid 5 \Rightarrow n=-3, -1, 0, 2$$

فقط $n=2$ عددی طبیعی و قابل قبول برای این مسئله است.

۷۷- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \forall \lambda \forall = a \times 10 + r \\ a \in \mathbb{N} \\ 0 \leq r < a \end{cases} \xrightarrow{\div a} \frac{\forall \lambda \forall}{a} = 10 + \frac{r}{a}$$

طبق فرض داریم:

$$0 \leq \frac{r}{a} < 1 \xrightarrow{\quad} 10 \leq \frac{\forall \lambda \forall}{a} < 11 \Rightarrow \begin{cases} 10a \leq \forall \lambda \forall \Rightarrow a \leq \forall \lambda / 10 \\ \frac{\forall \lambda \forall}{11} < a \Rightarrow a \geq \forall \lambda / 11 \end{cases}$$

$\forall$ مقدار طبیعی برای a وجود دارد که عبارتند از $72, 73, \dots$ و 78 .

۷۸- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. A دارای عضو ابتدا است و از اعداد طبیعی ساخته شده پس خوش ترتیب است. هر زیرمجموعه از آن در صورت عضو داشتن دارای عضو ابتدا است پس در صورتی عضو ابتدا ندارد که عضوی نداشته باشد. پس حاصل $\{\}$ است که $2^0 = 1$ زیرمجموعه دارد.

۷۹- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$۴۴ = ۱۷ \times ۲ + ۱۰ : -۴۴ = ۱۷ \times (-۲) - ۱۰$$

$$\begin{cases} a = -۲۴ \\ b = ۱۷ \end{cases} \Rightarrow -۴۴ = +۱۷ \times (-۳) + ۷ : \begin{cases} q = -۳ \\ r = ۷ \end{cases} \Rightarrow -۳ = ۷ \times (-۱) + ۴$$

۸۰- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$a^3 | b^2 \Rightarrow a \times a^2 | b^2 \Rightarrow \begin{cases} a | b^2 \\ a^2 | b^2 \Rightarrow a | b \Rightarrow a^4 | b^4 \Rightarrow a^4 | b^4 \times b \Rightarrow a^4 | b^5 \end{cases}$$

پس رابطه های گزینه ی ۱، ۳ و ۴ همواره درست هستند ولی رابطه ی گزینه ی ۲ در حالت کلی نتیجه نمی شود.

۸۱- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. در تقسیم a بر ۱۷، اگر q خارج قسمت و r باقی مانده باشد، داریم:

$$a = ۱۷q + r, \quad r \neq ۰, \quad ۰ \leq r < ۱۷ \Rightarrow ۰ < r < ۱۷$$

$$r = q^3 - ۱ \Rightarrow ۰ < q^3 - ۱ < ۱۷ \Rightarrow ۱ < q^3 < ۱۸ \Rightarrow q = ۲$$

$$\Rightarrow a = ۱۷(۲) + ۷ \Rightarrow a = ۴۱ \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۵$$

$$a = bq + ۸$$

۸۲- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$a + k = b(q + ۱) + ۲ \Rightarrow bq + ۸ + k = bq + b + ۲ \Rightarrow b = k + ۶$$

$$r < b \Rightarrow ۸ < k + ۶ \Rightarrow k > ۲$$

بنابراین k می تواند مقادیر ۳ تا ۹ را بپذیرد.

۸۳- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} n + ۳ | ۳n^2 - ۵n + ۸ \\ \times (۳n) \\ n + ۳ | n + ۳ \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} n + ۳ | ۱۴n - ۸$$

$$\left. \begin{array}{l} n + ۳ | ۱۴n^2 - ۸ \\ \times (۱۴) \\ n + ۳ | n + ۳ \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} n + ۳ | ۵۰$$

$$(n + ۳)_{\max} = ۵۰ \Rightarrow n_{\max} = ۴۷$$

۸۴- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} ۱۳ | a + ۳b + k \\ \times ۵ \\ ۱۳ | ۵a + ۱۵b + ۵k \end{array} \right\} \Rightarrow ۱۳ | ۱۳b + ۵k - ۱۷$$

$$۱۳ | ۱۳ \Rightarrow ۱۳ | ۱۳b \Rightarrow ۱۳ | ۵k - ۱۷ \Rightarrow ۵k - ۱۷ = ۱۳q \Rightarrow k = \frac{۱۳q + ۱۷}{۵}$$

$$q = ۱ \Rightarrow k = ۶$$

روش دوم:

$$۵k - ۱۷ \equiv ۰ : ۱۳ \Rightarrow ۵k \equiv ۱۷ \equiv ۳۰ \xrightarrow{\div ۵} k \equiv ۶$$

۸۵- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a = bq + r \Rightarrow 12r = bq + r \Rightarrow 11r = bq$$

با توجه به این که باقی مانده بیشترین مقدار خود را دارد، پس: $r = b - 1$ یا $b = r + 1$.

$$11r = (r + 1)q \Rightarrow \frac{r}{r+1} = \frac{q}{11} \Rightarrow q = 10 \quad (\text{چون } q, r \text{ اعداد صحیح هستند.})$$

اکنون می توانیم رابطه ی تقسیم را به شکل زیر بنویسیم:

$$12r = (r + 1) \times 10 + r \Rightarrow r = 10 \Rightarrow b = 11$$

۸۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. چون $9 = 3^2$ ، پس برای پیدا کردن نمایش $3(222101)$ در پایه ی ۹، دورقم دورقم از سمت راست جدا می کنیم و آن را به صورت معادل در پایه ی ۹ نمایش می دهیم:

$$(222101)_3 \xrightarrow{\text{جداسازی از راست}} \begin{cases} (01)_3 = 0 \times 3 + 1 \times 3^0 = 1 \\ (21)_3 = 2 \times 3 + 1 \times 3^0 = 7 \\ (22)_3 = 0 \times 3 + 2 \times 3^0 = 8 \end{cases}$$

$$(222101)_3 = (871)_9 \Rightarrow a - b + c = 8 - 7 + 1 = 2$$

۸۷- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. سه عدد ۵۹، ۷۹، ۸۹ همگی بین $7^2 = 49$ و $11^2 = 121$ قرار دارند، بنابراین کافی است برای بررسی اول بودن، آن ها را به ۴ عامل اول کوچک تر یا مساوی ۷ یعنی ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم.

۸۸- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر $d = (a, b)$ و $m, n \in \mathbb{Z}$ در این صورت $ma + nb$ مضربی از d است و برعکس هر مضربی از d به صورت $ma + nb$ نوشته می شود:

$$(42, 36) = 6 \Rightarrow 42a + 36b = 6k \Rightarrow 42a + 36b + 11 = 6k + 11$$

$$10 \leq 6k + 11 < 100 \Rightarrow -1 \leq 6k < 89 \Rightarrow -\frac{1}{6} \leq k < \frac{89}{6}$$

$$\Rightarrow 0 \leq k \leq 14 \Rightarrow \text{تعداد} = (14 - 0) + 1 = 15$$

۸۹- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$q^2 - 13p = 16 \Leftrightarrow q^2 - 16 = 13p \Leftrightarrow (q - 4)(q + 4) = 13p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q - 4 = 13 \\ q + 4 = p \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} q + 4 = 13 \\ q - 4 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 17 \\ p = 21 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} q = 9 \\ p = 5 \end{cases}$$

پس هیچ دو جفت مرتبی از اعداد اول با ویژگی گفته شده وجود ندارد.

۹۰- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$16! \begin{cases} \text{تعداد عوامل } 2 & \left[\frac{16}{2} \right] + \left[\frac{16}{4} \right] + \left[\frac{16}{8} \right] + \left[\frac{16}{16} \right] = 15 \\ \text{تعداد عوامل } 3 & \left[\frac{16}{3} \right] + \left[\frac{16}{9} \right] = 5 + 1 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 16! = 2^{15} \times 3^6 \times q = (2^2 \times 3)^6 \times 2^3 q = 12^6 \times q' \Rightarrow \max(k) = 6$$

۹۱- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر عدد a را به صورت $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ (اعداد اول متمایز) تجزیه کنیم در این صورت تعداد مقسوم علیه های طبیعی a برابر است با:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$$

در این مسئله اگر n مقسوم علیه ۴۵۰۰۰ باشد:

$$\left. \begin{aligned} n | 45000 \\ n = 18q \end{aligned} \right\} \Rightarrow 18q | 45000 \Rightarrow q | 2500 = 5^4 \times 2^2$$

$$q = \text{تعداد مقسوم علیه های طبیعی} = (4 + 1)(2 + 1) = 15$$

۹۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. بنابر لم اقلیدس، اگر $a | bc$ و $(a, b) = 1$ ، آن گاه $a | b$. در این سؤال می توانیم بنویسیم:

$$3 | 4(n^2 - n), (3, 4) = 1 \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} 3 | n^2 - n$$

$$\Rightarrow n^2 - n = n(n - 1) = 3k \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (*)$$

از آن جا که $10 \leq n(n - 1) \leq 99$ ، پس کافی است حاصل ضرب عددهای طبیعی متوالی که در این نابرابری صدق می کنند را مشخص کنیم. به وضوح برای $4 \leq n \leq 10$ نابرابری داده شده درست است ولی بنابر $(*)$ باید عدد مورد نظر مضرب ۳ باشد که تنها برای مقادیری از n که به صورت $3k$ یا $3k + 1$ باشند، برقرار است. بنابراین n می تواند یکی از اعداد ۴، ۶، ۷، ۹ و ۱۰ باشد.

۹۳- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. معادله ی $ab + a + b = n$ را با افزودن یک به دو طرف معادله می توان به صورت زیر نوشت:

$$ab + a + b + 1 = n + 1 \Rightarrow a(b + 1) + (b + 1) = n + 1 \Rightarrow (a + 1)(b + 1) = n + 1$$

حال اگر $n + 1$ یک عدد اول باشد، نمی توان هم برای a و هم برای b یک مقدار طبیعی پیدا کرد.

$$n = 28 \Rightarrow (a + 1)(b + 1) = 29 \xrightarrow{a > b} \begin{cases} a = 28 \\ b = 0 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

۹۴- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر d بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک و D کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد a و b باشد، آن گاه می توانیم a و b را به صورت $a = a'd$ و $b = b'd$ که $(a', b') = 1$ و $D = a'b'd$ را به صورت بنویسیم. داریم:

$$D = 60d \Rightarrow a'b' = 60 \xrightarrow{(a', b') = 1} \begin{cases} a' = 60 \text{ و } b' = 1 \\ a' = 20 \text{ و } b' = 3 \\ a' = 15 \text{ و } b' = 4 \\ a' = 12 \text{ و } b' = 5 \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$a + b = 68 \Rightarrow (a' + b')d = 68 \Rightarrow a' + b' | 68$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول $a' = 12$ ، $b' = 5$ است یعنی $d = 4$ می باشد.

۹۵- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم $\binom{50}{20} = \binom{50}{30}$ ، بنابراین باید تعداد صفرهای مقابل عدد $2\binom{50}{20}$ را بیابیم

که معادل است با تعداد عامل های ۵ در $\binom{50}{20}$ با توجه به این که $\binom{50}{20} = \frac{50!}{30!20!}$ داریم:

$$50! \text{ در } 5 = \left\lfloor \frac{50}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{25} \right\rfloor = 12$$

$$30! \text{ در } 5 = \left\lfloor \frac{30}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{25} \right\rfloor = 7$$

$$20! \text{ در } 5 = \left\lfloor \frac{20}{5} \right\rfloor = 4$$

بنابراین تعداد عامل های ۵ در $\binom{50}{20}$ برابر است با $12 - (7 + 4) = 1$ یعنی تنها یک صفر مقابل عدد

$$\binom{50}{20} + \binom{50}{30}$$
 وجود دارد.

۹۶- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. طبق داده های سؤال می توانیم ببینیم:

$$\begin{cases} a = 31q + r \text{ و } 0 \leq r < 31 \Rightarrow a = 31q + q^2 - 132 \text{ و } 0 \leq q^2 - 132 < 31 \\ r = q^2 - 132 \end{cases}$$

چون $0 \leq r < 31$ ، پس خواهیم داشت:

$$0 \leq q^2 - 132 < 31 \Rightarrow 132 \leq q^2 < 163 \Rightarrow \sqrt{132} \leq q < \sqrt{163} \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} q = 12$$

$$\Rightarrow a = 31 \times 12 + 144 - 132 = 384 \Rightarrow a \text{ مجموع ارقام} = 15$$

۹۷- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. چون p عدد اول بزرگ تر از ۳ است پس p فرد است و به صورت $p = 6k \pm 1$ نوشته

$$3p + 1 = 3(6k + 1) + 1 = 18k + 4 = 2k' \Rightarrow \text{مرکب} \quad \text{می شود در نتیجه:}$$

$$3p + 1 = 3(6k - 1) + 1 = 18k - 2 = 2k'' \Rightarrow \text{مرکب}$$

$$p^{p+1} = (2+1)(2^{p-1} + 2^{p-2} + \dots + 1) = 2k'' \Rightarrow \text{مرکب}$$

$$p^2 + 2 = (6k \pm 1)^2 + 2 = 36k^2 \pm 12k + 3 = 3q \Rightarrow \text{مرکب}$$

گزینه ی ۳ به طور مثال به ازای $p = 7$ عدد اول می شود.

۹۸- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $(n^3 + 4 \text{ و } n^2 + 1) = d$. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} d | n^2 + 1 &\Rightarrow d | n(n^2 + 1) = n^3 + n \\ d | n^3 + 4 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{(-)} d | (n^3 + n) - (n^3 + 4) = n - 4 \Rightarrow d | (n - 4)(n + 4) = n^2 - 16$$

$$\left. \begin{aligned} d | n^2 - 16 \\ d | n^2 + 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} d | (n^2 + 1) - (n^2 - 16) = 17 \xrightarrow{d \neq 1} d = 17$$

۹۹- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$24 \mid n \Rightarrow n = 24q$$

$$n \mid 4800 \xrightarrow{n=24q} 24q \mid 4800 \xrightarrow{\div 24} q \mid 200 \Rightarrow q \mid 2^3 \times 5^2$$

$$D(200) = (3+1)(2+1) = 12$$

تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد ۲۰۰ برابر است با:

$$2D(200) = 2 \times 12 = 24$$

تعداد مقسوم علیه های صحیح عدد ۲۰۰ برابر است با:

توجه: اگر $N = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_n^{\alpha_n}$ باشد، تعداد مقسوم علیه برابر است با:

$$D(N) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$$

۱۰۰- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که $10 = 5 \times 2$ و $20 = 5 \times 2^2$ ، پس شرط لازم و کافی برای این که

$[a, 10]$ بر ۲۰ بخش پذیر باشد این است که a مضرب ۴ باشد پس $a = 4k$

$$10 \leq 4k \leq 99 \Rightarrow 3 \leq k \leq 24 \Rightarrow \text{تعداد اعداد مورد نظر} = 22$$