پاسخ سؤالات امتحان پایان ترم

۱) بله. مثلاً به ازای هر $f: \mathbb{N} \to \{1,2\}$ تعریف کنید $G(f) = \min\{x \in \mathbb{N} : f(x)=1\}$

G به‌وضوح پوشا است.

۲) هر رابطه هم ارزی دقیقاً یک افراز را مشخص می‌کند و بالعکس. پس کافی است تعداد افرازهای مجموعهٔ $\{1,2,3\}$ را شماریم: ۵ تا می‌شود

$$P_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\},\quad P_2 = \{\{1,2,3\}\},\quad P_3 = \{\{1\},\{2,3\}\}$$

$$P_4 = \{\{1,2\},\{3\}\},\quad P_5 = \{\{1,3\},\{2\}\}$$

۳) خیر، زیرا هر زیرمجموعهٔ ناتهی از یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب چون $(A,\leq)$ می‌باید حاوی یک کوچکترین عضو باشد. پس اگر $\{a_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ و $\cdots < a_4 < a_3 < a_2 < a_1$، آنگاه B باید حاوی کوچکترین عضو باشد که نیست.

۴) بنابر قضیه ۱۰ ص ۱۴۴ ، $2^{\aleph_0} = c$. پس بنابر مثال ۴ ص ۱۳۹ ، $\aleph_0 + 2^{\aleph_0} = c$

۵) h یک‌به‌یک است: اگر $h(0.x_1x_2\cdots, 0.y_1y_2\cdots) = h(0.x'_1x'_2\cdots, 0.y'_1y'_2\cdots)$

آنگاه $0.x_1y_1x_2y_2\cdots = 0.x'_1y'_1x'_2y'_2\cdots$. پس به‌ازای هر i، $x_i = x'_i$ و $y_i = y'_i$.

h پوشا نیست: داریم $a = 0.101001\cdots \in (0,1)$ ولی $0.000\cdots = 0 \notin (0,1)$

۶) داریم $A = [0,1]$. پس $\sup A = 1$ و $\inf A = 0$

۷) اعداد ۱۵، ۲۰، ۶ هیچ‌یک از اعضای دیگر A را عاد نمی‌کند. پس ماکسیمال هستند.

اعداد ۱۵، ۱۰، ۶ توسط هیچ‌یک از اعضای دیگر A عاد نمی‌شوند. پس مینیمال هستند.

۸) رابطهٔ $\sim$ به‌وضوح انعکاسی و متقارن است. این رابطه متعدی نیست:

مثلاً $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$، $h(x) = \begin{cases} 4 & x \geq 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$، $g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$

در این صورت $f \sim g$، $g \sim h$ ولی $f \not\sim h$