

مرحله‌ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال‌های ۲۴ تا ۳۵ در چند دسته‌ی سؤالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.
- نمره‌دهی به همه‌ی سؤال‌ها یکسان می‌باشد. جواب درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سوال به شکل تصادفی است.

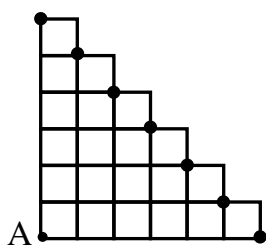
۱	۰	۰
۰	۱	۱
۰	۰	۰

(۱) فرید یک جدول 3×3 به صورت مقابل دارد. او به رشید اجازه داده هر چند باری که خواست اعداد موجود در دو خانه‌ی مجاور را جابه‌جا کند. دو خانه مجاورند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. با این حرکات رشید به چند جدول مختلف می‌تواند برسد؟

- (۱) ۳۵ - ۱ (۲) ۳۵ (۳) ۷۲ (۴) ۹۰ (۵) ۸۴

(۲) می‌خواهیم آهنگی با نت‌های موسیقی بسازیم با این شرط‌ها که فقط از نت‌های «سل»، «لا» و «سی» استفاده کنیم، بعد از هیچ نت «سل» ای بلافاصله نت «سی» نیاید و طول آهنگ دقیقاً ۳ نت باشد. با فرض اینکه می‌توان از نت تکراری استفاده کرد به چند طریق می‌توان چنین آهنگی ساخت؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۵ (۳) ۲۴ (۴) ۲۱ (۵) ۲۷



(۳) می‌خواهیم از نقطه‌ی A در شکل مقابل به یکی از نقاطی برویم که با دایره‌ی بزرگ مشخص شده‌اند. با فرض اینکه فقط می‌توانیم به سمت راست یا بالا حرکت کنیم، چند مسیر مختلف وجود دارد؟

- (۱) 2^6 (۲) $\frac{12!}{2 \times 6! \times 6!}$ (۳) ۲۵ (۴) $\frac{10!}{2 \times 5! \times 5!}$ (۵) $\frac{12!}{6! \times 6!}$

(۴) یگانه یک جدول شطرنجی سیاه-سفید با ابعاد 19×19 دارد که سطرهایش را از بالا به پایین و ستون‌هایش را از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۱۹ شماره‌گذاری کرده است. سپس در هر یک از خانه‌های جدول حاصل ضرب شماره‌ی سطر و شماره‌ی ستونی را که در آن قرار دارد یادداشت می‌کند. با فرض اینکه خانه‌ی بالا-چپ جدول سیاه باشد، مجموع اعدادی که در خانه‌های سیاه نوشته شده، چند است؟

- (۱) 2×90^2 (۲) 2×100^2 (۳) 2×95^2 (۴) $90^2 + 100^2$ (۵) $2 \times 90^2 + 95$

(۵) رستم اعداد ۰ تا ۳۱ را در مبنای ۲ روی یک کاغذ می‌نویسد. او چندبار رقم ۱ را نوشته است؟ برای مثال برای نوشتن عدد ۵ در مبنای ۲، دوبار رقم ۱ را می‌نویسیم.

- (۱) ۸۰ (۲) ۶۴ (۳) ۶۲ (۴) ۴۰ (۵) ۷۲

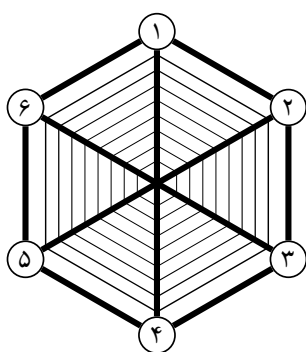
(۶) کوچکترین عدد طبیعی مانند n را در نظر بگیرید که به ازای هر $2 \leq i \leq 10$ ، باقیمانده‌ی تقسیم آن بر i برابر $i - 1$ باشد. ضرب ارقام عدد n چند است؟

- (۱) ۱۸۱۴۴ (۲) ۷ (۳) ۹۰ (۴) ۰ (۵) ۱۶۳۲۹۶

(۷) ۱۵ شتر در یک صف پشت سرهم ایستاده‌اند. می‌دانیم که وزن هر شتر عددی طبیعی از ۱ تا ۱۵ است و ممکن است وزن دو شتر یکسان باشد. هر شتر مجموع وزن خود و دو برابر وزن نفر جلویی‌اش را حساب می‌کند به جز نفر اول صف که شتری در جلوی‌اش نیست. در کمال تعجب شترها متوجه می‌شوند که همه‌ی ۱۴ عدد محاسبه شده بر ۱۵ بخش‌پذیر است. وزن این ۱۵ شتر چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) $15!$ (۲) 2^{14} (۳) ۱۵ (۴) ۲۲۵ (۵) $15^2 - 1$

مرحله‌ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور



۸) شش عنکبوت با شماره‌های ۱ تا ۶ روی تار عنکبوتی به شکل روبرو زندگی می‌کنند. هر عنکبوت دقیقاً با سه عنکبوت دیگر همسایه است. برای مثال عنکبوت ۱ با عنکبوت‌های ۲ و ۴ و ۶ همسایه است. در ابتدای روز هر عنکبوت روی در خانه‌اش، شماره‌اش را می‌نویسد. سپس در هر ساعت هر کدام از عنکبوت‌ها عدد نوشته شده روی در خانه‌اش را پاک می‌کند و به جای آن مجموع اعداد همسایه‌هایش را می‌نویسد. مثلاً بعد از گذشت یک ساعت روی در خانه‌ی عنکبوت شماره‌ی ۲ عدد ۹ نوشته می‌شود. پس از گذشت ۴ ساعت، مجموع اعداد نوشته شده روی همه‌ی خانه‌ها چند است؟

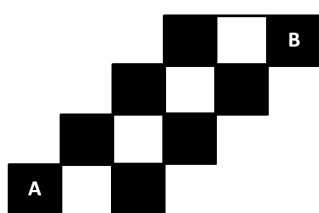
۱۳۹۹ (۵)

۱۹۲۹ (۴)

۱۷۰۱ (۳)

۱۸۶۹ (۲)

۱۹۱۹ (۱)



۹) مهشید قطعه‌ای از صفحه‌ی شطرنج را به شکل روبرو بریده است. او می‌خواهد مهره‌ی شاه را از خانه‌ی A به خانه‌ی B ببرد به طوری که:

- کمترین تعداد خانه را طی کند.
- تعداد خانه‌های سیاه مسیر دو برابر تعداد خانه‌های سفید آن باشد (خانه‌های A و B هم جزء مسیر هستند).

مهره‌ی شاه در هر حرکت خود می‌تواند از یک خانه به خانه‌ی دیگر برود، به شرطی که این دو خانه در حداقل یک نقطه اشتراک داشته باشند. مثلاً از خانه‌ی A مستقیماً می‌توان به خانه‌های راست و بالا-راست آن رفت. مهشید به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۳ (۵)

۱۶ (۴)

۱ (۳)

۰ (۲)

۸ (۱)

۱۰) دو تا ظرف داریم که در اولی یک لیتر آب و در دومی یک لیتر گلاب وجود دارد. از ظرف اول یک لیوان آب برمی‌داریم، به ظرف گلاب اضافه می‌کنیم و کاملاً هم می‌زنیم تا مخلوط شوند. بعد از ظرف دوم یک لیوان محلول آب و گلاب برمی‌داریم، به ظرف آب اضافه می‌کنیم و کاملاً هم می‌زنیم. درصد آب در ظرف اول و درصد گلاب در ظرف دوم را مقایسه کنید.

- ۱) مساوی هستند
- ۲) درصد آب در ظرف اول بیشتر است
- ۳) به حجم لیوان ربط دارد
- ۴) حتی با دانستن حجم لیوان هم نمی‌شود گفت
- ۵) درصد گلاب در ظرف دوم بیشتر است

۱۱) یک جدول 10×10 داریم. می‌خواهیم تعدادی از خانه‌های آن را رنگ کنیم به طوری که شرط زیر برقرار باشد:

- به ازای هر پوشش این جدول با مستطیل‌های 1×2 ، تعداد مستطیل‌های 1×2 که هر دو خانه‌ی آن‌ها رنگ شده است حداکثر ۲۵ باشد.

توجه کنید که در هر پوشش باید هر خانه‌ی جدول توسط دقیقاً یک مستطیل 1×2 پوشانده شود. همچنین مستطیل‌های 1×2 می‌توانند به صورت افقی یا عمودی قرار بگیرند و هرکدام باید دقیقاً دو خانه را پوشش دهند. با این شرایط حداکثر چند خانه را می‌توانیم رنگ کنیم؟

۷۵ (۵)

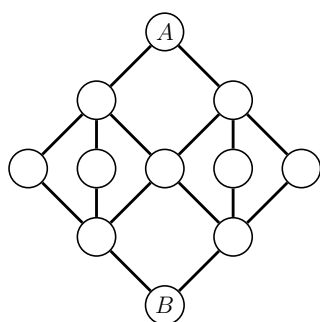
۶۰ (۴)

۸۰ (۳)

۵۰ (۲)

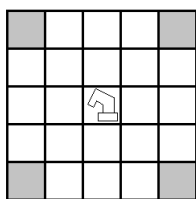
۵۱ (۱)

مرحله‌ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور



۱۲) شکل مقابل چند جزیره را نشان می‌دهد که با تعدادی پل به هم متصل شده‌اند. حمید و رشید در ساعت ۱۲ ظهر در جزیره A هستند. آن‌ها باید به کشتی‌ای که در ساحل جزیره B لنگر انداخته و در ساعت ۴ بعدازظهر حرکت می‌کند برسند. حرکت از ابتدای یک پل به انتهای آن یک ساعت زمان می‌برد و یک پل در هر لحظه می‌تواند وزن یک نفر را تحمل کند و اگر در یک لحظه هم حمید و هم رشید روی آن باشند، پل فرو می‌ریزد. چند حالت مختلف برای مسیر حرکت این دو وجود دارد به طوری که هر دوی آن‌ها به کشتی جزیره B برسند؟

- ۱۲ (۱) ۲۰ (۲) ۱۶ (۳) ۳۶ (۴) ۲۸ (۵)



۱۳) خیکوله مهری شطرنج جدیدی به اسم «خیل» اختراع کرده است. حرکت این مهره مانند فیل‌های معمولی است با این تفاوت که خانه‌هایی را روی صفحه شطرنج تهدید می‌کند که دقیقاً دو خانه‌ی قطری (هم از نظر تعداد سطر و هم از نظر تعداد ستون) با آن فاصله داشته باشند. به چند طریق می‌توان در یک صفحه‌ی شطرنج 8×8 دو مهره‌ی خیل متمایز قرار داد که یکدیگر را تهدید نکنند؟

- ۱۳ (۱) ۱۸۷۲ (۲) ۳۸۸۸ (۳) ۱۱۴۴ (۴) ۱۹۴۰ (۵) ۲۲۸۸

۱۴) در هر یک از خانه‌های یک جدول 4×4 یکی از اعداد صفر یا یک را می‌نویسیم. سپس در کنار هر سطر حاصل جمع اعداد آن سطر را می‌نویسیم. سپس t را برابر حاصل ضرب اعداد کنار سطرها قرار می‌دهیم. به ازای چند حالت از جدول اولیه مقدار t برابر صفر می‌شود؟

- ۱۴ (۱) $2^{16} - 15$ (۲) $2^{15} - 1$ (۳) 2^{15} (۴) $2^{15} + 1$ (۵) $2^{16} - 15$

۱۵) خالوخیکول برای خیکوله یک عروسک خریده است و خیکوله آن‌را دور یک دایره با صد جایگاه قرار داده است. فرض کنید در ثانیه‌ی اول عروسک در خانه‌ی شماره‌ی یک قرار دارد. ویژگی این عروسک این است که در هر ثانیه دو عروسک مانند خودش از جایش بیرون می‌آیند، یکی به ده خانه جلوتر می‌پرد و دیگری به یک خانه عقب‌تر. بنابراین در ثانیه‌ی دوم در هر یک از خانه‌های ۱، ۱۱ و ۱۰۰ یک عروسک قرار دارد. عروسک‌های جدید نیز به این روند ادامه می‌دهند (ممکن است در یک خانه بیش از یک عروسک قرار بگیرد). عروسک‌ها در ثانیه‌ی چندم تمامی صد خانه‌ی جدول را اشغال می‌کنند؟

- ۱۵ (۱) ۱۹ (۲) ۱۷ (۳) ۲۰ (۴) ۱۸ (۵) ۲۱

۱۶) در یک تورنومنت ۱۵ پینگ‌پنگ‌باز حضور دارند و هر دونفر دقیقاً یکبار با هم بازی می‌کنند. به یک ۳تایی از این بازیکنان، «ضایع» می‌گوییم هرگاه اولی، دومی را برده باشد، دومی، سومی را برده باشد و سومی اولی را برده باشد. حداکثر چند ۳تایی ضایع در این مسابقات وجود دارد؟

- ۱۶ (۱) ۱۴۰ (۲) ۳۱۵ (۳) ۴۵۵ (۴) ۲۸۰ (۵) ۴۲۰

۱۷) می‌خواهیم هشت توپ یکسان را در سه کیسه‌ی یکسان قرار دهیم به طوری که هیچ توپی بیرون کیسه‌ها نباشد و همچنین در هر کیسه تعداد فردی توپ وجود داشته باشد. با فرض اینکه کیسه‌ها می‌توانند در داخل یکدیگر قرار گیرند، به چند طریق این کار ممکن است؟ توجه کنید که اگر کیسه‌ی a درون کیسه‌ی b باشد، توپ‌های درون کیسه‌ی a برای کیسه‌ی b هم شمرده می‌شود.

- ۱۷ (۱) ۱۶ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۰ (۵) ۸

مرحله‌ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

۲۳) رشید به تازگی با دو نوع دستگاه به نام‌های کفگیر و سفگیر آشنا شده است که به صورت زیر عمل می‌کنند:

- دستگاه کفگیر عدد x را به عنوان ورودی گرفته و $\lfloor x/2 \rfloor$ را به عنوان خروجی بر می‌گرداند.
- دستگاه سفگیر عدد x را به عنوان ورودی گرفته و $\lceil x/2 \rceil$ را به عنوان خروجی بر می‌گرداند.

رشید ۱۳۹۱ دستگاه در یک ردیف پشت سر هم قرار داده است به طوری که دستگاه i ام کفگیر است اگر i عددی اول باشد و در غیر این صورت سفگیر است. برای مثال دستگاه اول و چهارم سفگیر هستند و دستگاه دوم و سوم کفگیر هستند.

حال رشید یک عدد طبیعی به عنوان ورودی به دستگاه اول می‌دهد، سپس خروجی این دستگاه وارد دستگاه دوم می‌شود، خروجی دستگاه دوم وارد دستگاه سوم می‌شود و به همین ترتیب تا دستگاه ۱۳۹۱ ام که خروجی نهایی را تولید می‌کند. به ازای چند عدد به عنوان ورودی دستگاه اول، خروجی نهایی برابر با یک می‌شود؟

۱۳۹۰ (۱) ۱۹۳۳۴۹۰ (۲) ۲۱۳۹۱ (۳) ۲۱۳۹۰ (۴) ۱۳۹۱ (۵)

سؤال‌های ۲۴ تا ۳۵ در چند دسته‌ی سؤال‌ی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.

۱۰۰ انسان و لیستی از نام‌های ۱۰۰ حیوان وجود دارد. هر انسان نام دقیقاً ۱۰ حیوان را می‌داند و نام هر حیوان را دقیقاً ۱۰ انسان می‌دانند. هیچ دو انسانی دقیقاً ۱۰ نام مشابه را نمی‌دانند. آن‌ها می‌خواهند نام حیوانات را روی تخته بنویسند و از نوشتن نام‌های تکراری پرهیز کنند. برای این منظور تعدادی بازی طراحی کرده‌اند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید.

۲۴) در بازی «نویسی می‌بازی» انسان‌ها در یک صف قرار می‌گیرند و هر کس در نوبت خود نام حیواناتی را که می‌داند و هنوز روی تخته نیستند، روی تخته می‌نویسد. هرکس در نوبت خود نتواند نام حیوانی را به تخته اضافه کند بازنده است.

وقتی نوبت همه انسان‌ها تمام شد تعداد بازنده‌ها چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

۸۹ (۱) ۸۲ (۲) ۹۰ (۳) ۸۰ (۴) ۸۱ (۵)

۲۵) در بازی «بنویس ولی می‌بازی» انسان‌ها در یک صف قرار می‌گیرند و هر کس در نوبت خود نام حیواناتی را که می‌داند و هنوز روی تخته نیستند، روی تخته می‌نویسد و اگر حداقل نام یکی از حیواناتی را که می‌داند قبلاً روی تخته نوشته باشند، می‌بازد.

وقتی نوبت همه انسان‌ها تمام شد تعداد بازنده‌ها چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

۸۱ (۱) ۹۹ (۲) ۸۰ (۳) ۱۰ (۴) ۹۰ (۵)

۲۶) در بازی «ببازی نمی‌نویسی» انسان‌ها در یک صف قرار می‌گیرند و هر کس در نوبت خود اگر حداقل نام یکی از حیواناتی را که می‌داند قبلاً روی تخته نوشته باشند، می‌بازد و چیزی روی تخته نمی‌نویسد. در غیر این صورت نام حیواناتی را که می‌داند روی تخته می‌نویسد.

وقتی نوبت همه انسان‌ها تمام شد، تعداد حیوانات روی تخته چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

۱ (۱) ۹۰ (۲) ۱۰ (۳) ۹۱ (۴) ۹ (۵)

مرحله‌ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

نازخیکول یک کیسه شامل ۲۲ تیله سفید و ۳۳ تیله سیاه دارد. تا زمانی که بیش از ۱ تیله در کیسه وجود داشته باشد، در هر مرحله نازخیکول بدون نگاه کردن به تیله‌ها دو تیله را به صورت تصادفی از کیسه خارج می‌کند و با توجه به رنگ آن‌ها، یکی از اعمال زیر را انجام می‌دهد:

- اگر هر دو تیله سفید بودند، هر دو تیله را دور می‌اندازد.
 - اگر هر دو تیله سیاه بودند، یک تیله را دور می‌اندازد و دیگری را به کیسه باز می‌گرداند.
 - اگر یک تیله سفید و یک تیله سیاه بود، تیله سفید را به کیسه بر می‌گرداند و تیله سیاه را دور می‌اندازد.
- با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

(۲۷) حداقل و حداکثر چند مرحله طول می‌کشد تا نازخیکول متوقف شود (زمانی که حداکثر ۱ تیله در کیسه وجود داشته باشد)؟

- (۱) ۴۵، ۴۳ (۲) ۴۴، ۴۴ (۳) ۴۵، ۴۴ (۴) ۴۴، ۴۳ (۵) ۴۳، ۴۳

(۲۸) کدام گزاره در مورد حالت نهایی درست است؟

- (۱) در حالت پایانی حتماً یک تیله سیاه در کیسه وجود دارد
- (۲) کیسه حتماً خالی می‌شود
- (۳) در صورت خالی نشدن کیسه، رنگ تیله پایانی حتماً سیاه است
- (۴) در حالت پایانی حتماً یک تیله سفید در کیسه وجود دارد
- (۵) هیچکدام

یک جایگشت از اعداد ۱ تا n یک لیست از اعداد ۱ تا n است که هر عدد دقیقاً یک بار در آن ظاهر شده است. برای مثال $\langle ۱, ۵, ۳, ۴, ۲ \rangle$ یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۵ است. رنگ‌آمیزی معتبر برای یک جایگشت، رنگ‌آمیزی‌ای است که شرایط زیر را داشته باشد:

- دو عدد مجاور هم در جایگشت هم‌رنگ نباشند.
- دو عدد که اختلاف آن‌ها برابر با ۱ است هم‌رنگ نباشد.

عدد رنگی یک جایگشت برابر است با حداقل تعداد رنگ‌های متفاوتی که برای رنگ‌آمیزی معتبر اعداد آن جایگشت لازم است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

(۲۹) عدد رنگی جایگشت $\langle ۱, ۵, ۲, ۴, ۶, ۳ \rangle$ چند است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۵ (۵) ۳

(۳۰) در میان تمام جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۶ عدد رنگی چند جایگشت برابر با ۲ است؟

- (۱) ۶۲۵ (۲) ۳۶ (۳) ۰ (۴) ۱۲۵ (۵) ۷۲

(۳۱) بیشترین عدد رنگی بین همه جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۷ چند است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۴ (۵) ۵

مرحله‌ی اول بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور

تپلوس‌ها موجوداتی هستند که بین هر جفت از آن‌ها یک رابطه‌ی دو طرفه‌ی دوستی یا دشمنی برقرار است. ویژگی جالب این موجودات این است که به ازای هر سه تپلوس دلخواهی، یا هر سه با هم دوستاند یا دو نفرشان که با هم دوستاند، هر دو با نفر سوم دشمن‌اند.

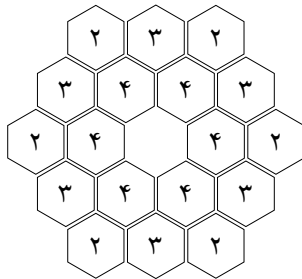
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

(۳۲) جمشید سیاره‌ای متعلق به تپلوس‌ها کشف کرده است که در آن دقیقاً ۱۲ رابطه‌ی دشمنی وجود دارد. حداقل چند تپلوس در این سیاره زندگی می‌کند؟

- ۹ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۸ (۵)

(۳۳) تحقیقات اخیر جمشید نشان می‌دهد که در سیاره‌ی جدید، ۹ تپلوس با نام‌های T_1 تا T_9 زندگی می‌کنند. همچنین او فهمیده است که T_1 و T_2 با هم دشمن، T_3 و T_4 با هم دشمن و T_5 و T_6 با هم دشمن‌اند. با این اطلاعات روابط دوستی و دشمنی بین این ۹ تپلوس به چند شکل مختلف می‌تواند باشد؟

- ۱۳ (۱) ۳۲ (۲) ۵۶ (۳) ۲۸ (۴) ۶۴ (۵)



شکل روبرو کشور خیکولند را نشان می‌دهد که از ۱۸ قبیله تشکیل شده و قلمروی هر قبیله به شکل یک ۶-ضلعی است. طبق یک آیین دیرینه صبح روز مرحله‌ی اول هر قبیله به تعدادی از همسایه‌های خود حمله می‌کند. در شکل عدد روی قلمروی هر قبیله نشان دهنده‌ی تعداد قبایلی است که این قبیله به آن‌ها حمله خواهد کرد. دو قبیله همسایه‌اند اگر و تنها اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. یک قبیله تنها نامیده می‌شود اگر از طرف همه‌ی همسایه‌های خود مورد حمله قرار بگیرد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

(۳۴) حداقل چند قبیله‌ی تنها وجود دارد؟

- ۶ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) ۱۸ (۵)

(۳۵) حداکثر چند قبیله‌ی تنها وجود دارد؟

- ۱۵ (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۱۸ (۴) ۱۳ (۵)