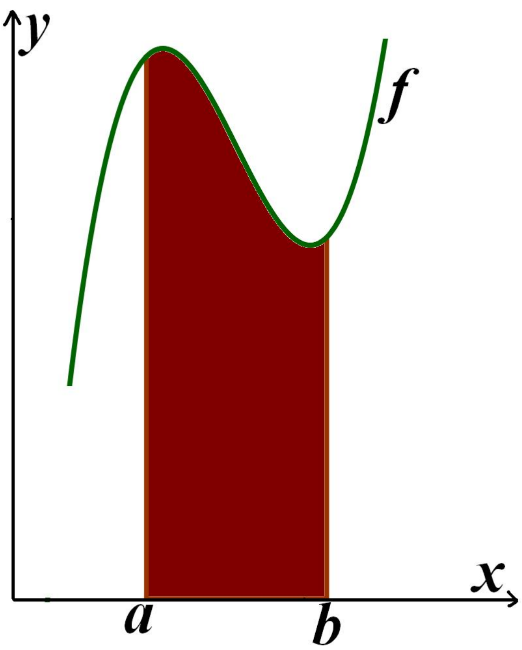
درس اول (انتگرال)



هدف کلی انتگرال محاسبه‌ی مساحت شکل‌های هندسی و مساحت زیر نمودارهای توابع است. مطابق شکل می‌خواهیم مساحت زیر نمودار تابع f را محاسبه کنیم که در شکل با رنگ قهوه‌ای نشان داده شده است. این مساحت را با نماد $\int_a^b f(x)dx$ نشان می‌دهیم علامت $\int$ در حقیقت بزرگ‌شده‌ی حرف S لاتین است که معمولاً مساحت را در ریاضی با حرف S نشان می‌دهند مقصود از a و b این است که این مساحت در بازه یا فاصله‌ی $[a,b]$ حساب می‌شود و منظور از $f(x)dx$ این است که مساحت بین نمودار تابع $f(x)$ و محور xها محاسبه می‌شود. به نماد $\int_a^b f(x)dx$ انتگرال معین نیز می‌گویند.

تعریف ۱. فرض کنید f یک تابع باشد در این صورت تابع F را تابع اولیه یا انتگرال نامعین تابع f می‌نامیم هرگاه $F'(x) = f(x)$ به عبارت دیگر مشتق تابع F برابر f باشد. (معمولاً تابع اولیه را با حروف بزرگ الفبای لاتین نشان می‌دهند.) تابع اولیه را با نماد $\int f(x)dx$ نیز نمایش می‌دهند.

مثال ۲. تابع اولیه $f(x) = ۲$ برابر $F(x) = ۲x$ است.

مثال ۳. تابع اولیه $f(x) = ۲x$ برابر $F(x) = x^۲$ است.

مثال ۴. تابع اولیه $f(x) = \cos x$ برابر $F(x) = \sin x$ است.

مثال ۵. تابع اولیه $\frac{۱}{\cos x} = f(x) = ۱ + \tan^۲ x$ برابر $F(x) = \tan x$ است.

مثال ۶. تابع اولیه $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$ برابر $F(x) = \arcsin$ است.

قضیه ۷. فرض کنیم F تابع اولیه f باشد در این‌صورت $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ این قضیه به قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مشهور است.

مثال ۸. مساحت زیر نمودار تابع $f(x) = ۲x$ را در بازه‌ی $[۲,۳]$ بیابید.

حل: چون $F(x)=x^{۲}$ بنابراین این مساحت برابر $F(۳)-F(۲)=۳^{۲}-۲^{۲}=۹-۴=۵$ است.

مثال ۹. $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos x dx=\sin(\frac{\pi}{۲})-\sin(۰)=۱-۰=۱$ توجه داشته باشید که تابع اولیه‌ی $\cos x$ برابر $\sin x$ است.

مثال ۱۰. $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}۱+\tan^{۲} x dx=\tan(\frac{\pi}{۳})-\tan(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۳}-۱$

با توجه به مثال‌های بالا مشخص می‌شود برای محاسبه‌ی مساحت باید تابع اولیه را محاسبه کنیم. یکی از روش‌های محاسبه‌ی تابع اولیه این است که فرمول‌های مشتق را به‌عکس کنیم. در جدول زیر فرمول‌های مشتق به عکس شده تا تابع اولیه یا همان انتگرال نامعین برای این توابع به دست آید.

تابع $f(x)$	تابع اولیه $F(x)$
$x^{r}\quad r\neq -۱$	$\frac{۱}{r+۱}x^{r+۱}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$۱+\tan^{۲} x=\frac{۱}{\cos^{۲} x}$	$\tan x$
$۱+\cot^{۲} x=\frac{۱}{\sin^{۲} x}$	$-\cot x$

تابع $f(x)$	تابع اولیه $F(x)$
$x^{-۱}=\frac{۱}{x}$	$\ln x$
$\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$	$\arcsin x$
$\frac{۱}{۱+x^{۲}}=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$	$\arctan x$
e^{x}	e^{x}
a^{x}	$\frac{a^{x}}{\ln a}$

در حقیقت جدول بالا فرمول‌های زیر را برای ما بیان می‌کند.

$\int x^{r}dx=\frac{۱}{r+۱}x^{r+۱}\quad r\neq -۱$	$\int x^{-۱}dx=\int\frac{۱}{x}dx=\ln x$
$\int \sin x dx=-\cos x$	$\int\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx=\arcsin x$
$\int \cos x dx=\sin x$	$\int\frac{۱}{۱+x^{۲}}dx=\int\frac{۱}{x^{۲}+۱}dx=\arctan x$
$\int ۱+\tan^{۲} x dx=\int\frac{۱}{\cos^{۲} x}dx=\tan x$	$\int e^{x}dx=e^{x}$
$\int ۱+\cot^{۲} x dx=\int\frac{۱}{\sin^{۲} x}dx=-\cot x$	$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}$

مثال ۱۱. $\int x^{۳}dx=\frac{۱}{۳+۱}x^{۳+۱}=\frac{۱}{۴}x^{۴}$

مثال ۱۲. $\int x^{۵}dx=\frac{۱}{۵+۱}x^{۵+۱}=\frac{۱}{۶}x^{۶}$

مثال ۱۳. $\int x dx=\frac{۱}{۱+۱}x^{۱+۱}=\frac{۱}{۲}x^{۲}$

مثال ۱۴. $\int\frac{۱}{x^{۳}}dx=\int x^{-۳}dx=\frac{۱}{-۳+۱}x^{-۳+۱}=\frac{۱}{-۲}x^{-۲}=\frac{۱}{-۲x^{۲}}$

مثال ۱۵. $\int\frac{۱}{x^{۵}}dx=\int x^{-۵}dx=\frac{۱}{-۵+۱}x^{-۵+۱}=\frac{۱}{-۴}x^{-۴}=\frac{۱}{-۴x^{۴}}$

مثال ۱۶. $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{۱}{۲}}dx=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}+۱}x^{\frac{۱}{۲}+۱}=\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}x^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲}{۳}\sqrt{x^{۳}}$

مثال ۱۷. $\int\sqrt[۵]{x}dx=\int x^{\frac{۱}{۵}}dx=\frac{۱}{\frac{۱}{۵}+۱}x^{\frac{۱}{۵}+۱}=\frac{۱}{\frac{۶}{۵}}x^{\frac{۶}{۵}}=\frac{۵}{۶}x^{\frac{۶}{۵}}=\frac{۵}{۶}\sqrt[۵]{x^{۶}}$

مثال ۱۸. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{-1}{2}+1}x^{\frac{-1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

مثال ۱۹. $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \int x^{\frac{-1}{5}}dx = \frac{1}{\frac{-1}{5}+1}x^{\frac{-1}{5}+1} = \frac{1}{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}$

مثال ۲۰. $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}dx = \int x^{\frac{-7}{5}}dx = \frac{1}{\frac{-7}{5}+1}x^{\frac{-7}{5}+1} = \frac{1}{\frac{-2}{5}}x^{\frac{-2}{5}} = \frac{-5}{2}x^{\frac{-2}{5}} = \frac{-5}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

مثال ۲۱. مساحت زیر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازه‌ی $[1,4]$ بیابید.

حل: چون بنابر مثال ۱۶ داریم تابع اولیه برابر $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ است و

$$F(4)-F(1)=\frac{2}{3}\sqrt{4^3}-\frac{2}{3}\sqrt{1^3}=\frac{2}{3}\sqrt{64}-\frac{2}{3}\sqrt{1}=\frac{2}{3}\times(8-1)=\frac{14}{3}$$

مثال ۲۲. مساحت زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $[1,\mathrm{e}]$ بیابید. که در آن e عدد نپر است.

حل: چون بنابر جدول داریم تابع اولیه برابر $F(x)=\ln(x)$ است و $F(\mathrm{e})-F(1)=\ln\mathrm{e}-\ln 1=1-0=1$

در پایان این درس متذکر می‌شوم که انتگرال یک تابع، منحصر به فرد نیست بنابراین در پایان انتگرال نامعین بهتر است علامت $+C$ گذاشته شود که C هر عدد حقیقی دل‌خواه می‌تواند باشد.

تمرینات

انتگرال‌های معین و نامعین زیر را حل کنید.

۱) $\int x^7 dx$ ۲) $\int \sqrt{x^5}dx$ ۳) $\int \sqrt[9]{x^5}dx$ ۴) $\int \frac{1}{\sqrt{x^5}}dx$ ۵) $\int \frac{1}{\sqrt[9]{x^5}}dx$ ۶) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}dx$

۷) $\int \frac{1}{x^9}dx$ ۸) $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ ۹) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ۱۰) $\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$ ۱۱) $\int_0^1 \mathrm{e}^x dx$ ۱۲) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$

درس دوم (قوانین انتگرال گیری)

در این بخش سه قانون مهم انتگرال‌گیری بیان می‌شود.

قانون اول: اگر عددی در تابع ضرب شود در انتگرال نیز ضرب می‌شود. یعنی $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

مثال ۲۳. $\int 5x^2dx = 5\int x^2dx = 5\times\frac{1}{3}x^3 = \frac{5}{3}x^3$

مثال ۲۴. $\int 5\sin x dx = 5\int \sin x dx = 5\times(-\cos x) = -5\cos x$

مثال ۲۵. $\int \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}dx = 8\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 8\arcsin x$

مثال ۲۶. $\int \frac{8}{1+x^2}dx = 8\int\frac{1}{1+x^2}dx = 8\arctan x$

مثال ۲۷. تابع اولیه‌ی $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ را محاسبه کنید.

حل: چون بنابر مثال ۱۶ داریم $\int\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ بنابراین می‌نویسیم $\int\frac{3}{2}\sqrt{x}dx = \frac{3}{2}\int\sqrt{x}dx = \frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \sqrt{x^3}$

قانون دوم: اگر دو یا چند تابع جمع و تفریق شوند انتگرال آن‌ها نیز جمع و تفریق می‌شود یعنی

$$\int f+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int f-g(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

مثال ۲۸. $\int x+5\,dx = \int x\,dx + \int 5\,dx = \frac{1}{2}x^2+5x$

مثال ۲۹. $\int x^3-9\,dx = \int x^3dx - \int 9\,dx = \frac{1}{4}x^4 - 9x$

مثال ۳۰. $\int e^x+\sin x\,dx = \int e^xdx + \int\sin x\,dx = e^x - \cos x$

مثال ۳۱. $\int\tan^2 x\,dx = \int 1+\tan^2 x - 1\,dx = \int 1+\tan^2 x\,dx - \int 1\,dx = \tan x - x$

مثال ۳۲. $\int\frac{x^3+2}{5}dx = \frac{1}{5}\int x^3+2dx = \frac{1}{5}\left(\int x^3dx+\int 2dx\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}x^4+2x\right) = \frac{1}{20}x^4+\frac{2}{5}x$

مثال ۳۳. $\int 5+\tan^2 x\,dx = \int 1+\tan^2 x+4\,dx = \int 1+\tan^2 x\,dx + \int 4\,dx = \tan x + 4x$

قانون سوم: این قانون که به قاعده‌ی زنجیره‌ای مشهور است به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(F(u))' = u'F'(u) = u'f(u) \Longrightarrow \int u'f(u)dx = F(u)$$

قانون بالا جدول درس اول را به جدول زیر تبدیل می‌کند.

تابع $f(x)$	تابع اولیه $F(x)$
$u'u^r \quad r \neq -1$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$
$u' \sin u$	$-\cos u$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u'(1+\tan^2 x) = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$
$u'(1+\cot^2 u) = \frac{u'}{\sin^2 u}$	$-\cot u$

تابع $f(x)$	تابع اولیه $F(x)$
$u'u^{-1} = \frac{u'}{u}$	$\ln u$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin u$
$\frac{u'}{1+u^2} = \frac{u'}{u^2+1}$	$\arctan u$
$u'e^u$	e^u
$u'a^u$	$\frac{a^u}{\ln a}$

با استفاده از این فرمول‌ها می‌توان با گرفتن قسمتی از انتگرال برابر u آن را به صورت‌های بالا تبدیل کرد.

مثال ۳۴. تابع اولیه‌ی $f(x) = 2x \sin x^2$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u = x^2$ و داریم $u' = 2x$ (u' مشتق u است.) و به دست می‌آید.

$$\int 2x \sin x^2 dx = \int u' \sin u \, dx = -\cos u = -\cos x^2$$

مثال ۳۵. تابع اولیه‌ی $f(x) = 2xe^{x^2}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u = x^2$ و داریم $u' = 2x$ و به دست می‌آید. $\int 2xe^{x^2} dx = \int u'e^u dx = e^u = e^{x^2}$

مثال ۳۶. تابع اولیه‌ی $f(x) = \sin 2x$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u = 2x$ و داریم $u' = 2$ اما عدد ۲ در تابع موجود نیست. همیشه وقتی مشتق u عدد شد می‌توانیم هم عدد هم معکوسش را در تابع ضرب کنیم تا u' به وجود بیاید.

$$\int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int u' \sin u \, dx = \frac{1}{2} \times (-\cos u) = \frac{1}{2} \times (-\cos 2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

تذکر ۳۷. مثال بالا برای توابع $\sin ax$، $\cos ax$ و e همیشه برقرار است و می‌توانیم از فرمول‌های زیر جهت این انتگرال‌ها استفاده کنیم.

$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$	$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$	$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

مثال ۳۸. تابع اولیه‌ی $f(x) = 3x^2(x^3+5)^{100}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u = x^3 + 5$ و داریم $u' = 3x^2$ و به دست می‌آید.

$$\int 3x^2(x^3+5)^{100} dx = \int u'u^{100} dx = \frac{1}{100+1} u^{100+1} = \frac{1}{101} u^{101} = \frac{1}{101}(x^3+5)^{101}$$

مثال ۳۹. تابع اولیه‌ی $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3+5)^{100}}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u = x^3 + 5$ و داریم $u' = 3x^2$ و به دست می‌آید.

$$\int \frac{3x^2}{(x^3+5)^{100}}dx = \int 3x^2(x^3+5)^{-100}dx = \int u'u^{-100}dx = \frac{1}{-100+1}u^{-100+1} = \frac{1}{-99}u^{-99}$$
$$= \frac{1}{-99}(x^3+5)^{-99} = -\frac{1}{99(x^3+5)^{99}}$$

مثال ۴۰. تابع اولیه‌ی $f(x) = \frac{3x^2}{x^3+5}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u = x^3 + 5$ و داریم $u' = 3x^2$ و به دست می‌آید.

$$\int \frac{3x^2}{x^3+5}dx = \int 3x^2(x^3+5)^{-1}dx = \int u'u^{-1}dx = \ln u = \ln(x^3+5)$$

مثال ۴۱. تابع اولیه‌ی $f(x) = 3x^2\sqrt{x^3+5}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u = x^3 + 5$ و داریم $u' = 3x^2$ و به دست می‌آید.

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+5}dx = \int 3x^2(x^3+5)^{\frac{1}{2}}dx = \int u'u^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3+5)^3}$$

مثال ۴۲. تابع اولیه‌ی $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+5}}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u = x^3 + 5$ و داریم $u' = 3x^2$ و به دست می‌آید.

$$\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx = \int 3x^2(x^3+5)^{\frac{-1}{2}} = \int u'u^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{-1}{2}+1}u^{\frac{-1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}} = 2u^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{x^3+5}$$

مثال ۴۳. تابع اولیه‌ی $f(x) = x^2(x^3+5)^{100}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u = x^3 + 5$ و داریم $u' = 3x^2$ متوجه می‌شویم برای تولید u' باید انتگرال را در اعداد ۳ و $\frac{1}{3}$ ضرب کنیم به این صورت

$$\int x^2(x^3+5)^{100} = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+5)^{100}dx = \frac{1}{3}\int u'u^{100}dx = \frac{1}{3}\times\frac{1}{100+1}u^{100+1} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{101}u^{101} = \frac{1}{303}(x^3+5)^{101}$$

مثال ۴۴. تابع اولیه‌ی $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u = e^x + 1$ و داریم $u' = e^x$ و به دست می‌آید.

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int e^x(e^x+1)^{-1}dx = \int u'u^{-1}dx = \ln u = \ln(e^x+1)$$

مثال ۴۵. تابع اولیه‌ی $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$ را به دست آورید.

حل: اگر در این مثال قرار دهیم $u = e^{2x} + 1$ آنگاه $u' = 2e^{2x}$ می‌شود که در تابع موجود نمی‌باشد بنابراین باید u تغییر پیدا کند مناسب‌ترین آن است که $u = e^x$ داریم $u' = e^x$ و به دست می‌آید.

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1}dx = \int \frac{u'}{u^2+1}dx = \arctan u = \arctan(e^x)$$

مثال ۴۶. تابع اولیه‌ی $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ را به دست آورید.

حل: اگر در این مثال قرار دهیم $u = 1 - e^{2x}$ آنگاه $u' = -2e^{2x}$ می‌شود که در تابع موجود نمی‌باشد بنابراین باید u تغییر پیدا کند مناسب‌ترین آن است که $u = e^x$ داریم $u' = e^x$ و به دست می‌آید.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx = \arcsin u = \arcsin(e^x)$$

مثال ۴۷. تابع اولیه‌ی $f(x)=x^2(x^3+5)^{100}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u=x^3+5$ و داریم $u'=3x^2$ متوجه می‌شویم برای تولید u' باید انتگرال را در اعداد ۳ و $\frac{1}{3}$ ضرب کنیم به این صورت

$$\int x^2(x^3+5)^{100}=\frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+5)^{100}dx=\frac{1}{3}\int u'u^{100}dx=\frac{1}{3}\times\frac{1}{100+1}u^{100+1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{101}u^{101}=\frac{1}{303}(x^3+5)^{101}$$

مثال ۴۸. تابع اولیه‌ی $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u=1+x^2$ و داریم $u'=2x$ متوجه می‌شویم برای تولید u' باید انتگرال را در اعداد ۲ و $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم به این صورت

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int u'u^{-1}dx=\frac{1}{2}\ln u=\frac{1}{2}\ln x^2$$

مثال ۴۹. تابع اولیه‌ی $f(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$ را به دست آورید.

حل: اگر در این مثال قرار دهیم $u=1+x^4$ آن‌گاه $u'=4x^3$ می‌شود که در تابع موجود نمی‌باشد بنابراین باید u تغییر پیدا کند مناسب‌ترین آن $u=x^2$ است که داریم $u'=2x$ و به دست می‌آید.

$$\int\frac{x}{1+x^4}dx=\int\frac{x}{1+(x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+(x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{u'}{1+u^2}dx=\frac{1}{2}\arctan u=\frac{1}{2}\arctan x^2$$

مثال ۵۰. تابع اولیه‌ی $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ را به دست آورید.

حل: اگر در این مثال قرار دهیم $u=1+x^4$ آن‌گاه $u'=4x^3$ می‌شود که در تابع موجود نمی‌باشد بنابراین باید u تغییر پیدا کند مناسب‌ترین آن $u=x^2$ است که داریم $u'=2x$ و به دست می‌آید.

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx=\frac{1}{2}\arcsin u=\frac{1}{2}\arcsin x^2$$

مثال ۵۱. تابع اولیه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u=1+\sqrt{x}$ و داریم $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ متوجه می‌شویم برای تولید u' باید انتگرال را در اعداد ۲ و $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم به این صورت

$$\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx=2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\sqrt{1+\sqrt{x}}dx=2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}dx=2\int u'u^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=2\times\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1}=2\times\frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}=2\times\frac{2}{3}\sqrt{u^3}=\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}$$

مثال ۵۲. تابع اولیه‌ی $f(x)=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u=\sqrt{x}$ و داریم $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ متوجه می‌شویم برای تولید u' باید انتگرال را در اعداد ۲ و $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم به این صورت

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx=2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\sin\sqrt{x}dx=2\int u'\sin u\ dx=2(-\cos u)=-2\cos u=$$
$$-2\cos\sqrt{x}$$

مثال ۵۳. تابع اولیه‌ی $f(x)=\tan x(1+\tan^2 x)$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u=\tan x$ و داریم $u'=1+\tan^2 x$ و به دست می‌آید.

$$\int\tan x(1+\tan^2 x)dx=\int uu'dx=\int u'u^1dx=\frac{1}{1+1}u^{1+1}=\frac{1}{2}u^2=\frac{1}{2}\tan^2 x$$

مثال ۵۴. تابع اولیه‌ی $f(x)=\tan x$ را به دست آورید.

حل: می‌دانیم $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ بنابراین قرار می‌دهیم $u=\cos x$ و داریم $u'=-\sin x$ و به دست می‌آید.

$$\int \tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{u'}{u}dx=-\ln u=-\ln\cos x$$

دقت کنید که در این مثال برای به‌دست آوردن u' دوبار انتگرال در منفی ضرب شده است.

مثال ۵۵. تابع اولیه‌ی $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $u=\sin x$ و داریم $u'=\cos x$ و به دست می‌آید.

$$\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{u'}{u^2}dx=\int u'u^{-2}dx=\frac{1}{-2+1}u^{-2+1}=\frac{1}{-1}u^{-1}=-u^{-1}=-\frac{1}{u}=-\frac{1}{\sin x}$$

مثال ۵۶. تابع اولیه‌ی $f(x)=\sin^2 x$ را به دست آورید.

حل: باید از اتحاد مثلثاتی $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ استفاده کنیم

$$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int 1-\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\left(\int 1\,dx-\int\cos 2x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)$$
$$=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$$

به طور مشابه برای به دست آوردن تابع اولیه‌ی $\cos^2 x$ از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ استفاده می‌شود.

مثال ۵۷. تابع اولیه‌ی $f(x)=\sin^3 x$ را به دست آورید.

حل: می‌نویسیم $\sin^3 x=\sin x\sin^2 x=\sin x(1-\cos^2 x)=\sin x-\sin x\cos^2 x$ بنابراین

$$\int\sin^3 x\,dx=\int\sin x-\sin x\cos^2 x\,dx=\int\sin x\,dx+\int-\sin x\cos^2 x\,dx=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$$

متذکر می‌شویم که برای حل $\int-\sin x\cos^2 x\,dx$ قرار دادیم $u=\cos x$ و درنتیجه $u'=-\sin x$ و از فرمول $\int u'u^2dx=\frac{1}{3}u^3$ استفاده کردیم.

مثال ۵۸. تابع اولیه‌ی $f(x)=\sin^4 x$ را به دست آورید.

حل: می‌نویسیم

$$\sin^4 x=(\sin^2 x)^2=\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)$$

بنابراین

$$\int\sin^4 x\,dx=\frac{1}{4}\left(\int 1\,dx-2\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{2}\left(\int 1\,dx+\int\cos 4x\,dx\right)\right)=\frac{1}{4}\left(x-\sin 2x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\right)$$

مثال ۵۹. تابع اولیه‌ی $f(x)=\sin^5 x$ را به دست آورید.

حل: می‌نویسیم

$$\sin^5 x=\sin x\sin^4 x=\sin x\,(\sin^2 x)^2=\sin x\,(1-\cos^2 x)^2$$
$$=\sin x\,(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)=\sin x-2\sin x\cos x+\sin x\cos^4 x$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x\, dx &= \int \sin x\, dx - 2\int \sin x \cos x\, dx + \int \sin x \cos^4 x\, dx\\ &= \int \sin x\, dx + 2\int \sin x \cos x\, dx - \int -\sin x \cos^4 x\, dx\\ &= -\cos x + 2\times \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{5}\cos^5 x = -\cos x + \cos^2 x - \frac{1}{5}\cos^5 x\end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه شد برای توان‌های بالاتر سینوس یا کسینوس نیز مشکلی وجود ندارد فقط قدری محاسبات طولانی‌تر خواهد شد. در مثال‌های ۳۱ و ۵۴ دیدیم $\int \tan^2 x\, dx = \tan x - x$ و $\int \tan x\, dx = -\ln\cos x$ در مثال‌های زیر برای توان‌های بالاتر تانژانت تابع اولیه‌ی آن را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۶۰. تابع اولیه‌ی $f(x) = \tan^3 x$ را به دست آورید.

حل: می‌نویسیم $\tan^3 x = \tan x \tan^2 x = \tan x(1+\tan^2 x - 1) = \tan x(1+\tan^2 x) - \tan x$ بنابراین

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x(1+\tan^2 x)\, dx - \int \tan x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln\cos x$$

یادآوری می‌کنیم که $\int \tan x(1+\tan^2 x)\, dx$ در مثال ۵۳ حل شده است.

مثال ۶۱. تابع اولیه‌ی $f(x) = \tan^4 x$ را به دست آورید.

حل: می‌نویسیم $\tan^4 x = \tan^2 x \tan^2 x = \tan^2 x(1+\tan^2 x - 1) = \tan^2 x(1+\tan^2 x) - \tan^2 x$ بنابراین

$$\int \tan^4 x\, dx = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\, dx - \int \tan^2 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - (\tan x - x) = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$$

متذکر می‌شویم که برای حل $\int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\, dx$ قرار دادیم $u = \tan x$ و درنتیجه $u' = 1+\tan^2 x$ و از فرمول $\int u'u^2 dx = \frac{1}{3}u^3$ استفاده کردیم.

مثال ۶۲. تابع اولیه‌ی $f(x) = \tan^5 x$ را به دست آورید.

حل: می‌نویسیم $\tan^5 x = \tan^3 x \tan^2 x = \tan^3 x(1+\tan^2 x - 1) = \tan^3 x(1+\tan^2 x) - \tan^3 x$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x\, dx &= \int \tan^3 x(1+\tan^2 x)\, dx - \int \tan^3 x\, dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \left(\frac{1}{2}\tan^2 x + \ln\cos x\right)\\ &= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln\cos x\end{aligned}$$

متذکر می‌شویم که برای حل $\int \tan^3 x(1+\tan^2 x)\, dx$ قرار دادیم $u = \tan x$ و درنتیجه $u' = 1+\tan^2 x$ و از فرمول $\int u'u^3 dx = \frac{1}{4}u^4$ استفاده کردیم.

در آخر این درس به یادآوری چند اتحاد مثلثاتی از درس ریاضی ۱ می‌پردازیم سپس با این فرمول‌ها تعدادی انتگرال مثلثاتی حل می‌کنیم.

$$\sin(\alpha+\theta)=\sin(\alpha)\cos(\theta)+\sin(\theta)\cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha-\theta)=\sin(\alpha)\cos(\theta)-\sin(\theta)\cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)=2\sin(\alpha)\cos(\theta)\Longrightarrow\sin(\alpha)\cos(\theta)=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta))$$

فرمول پایین خط از جمع دو فرمول بالای خط به دست آمده است. اتحاد $\sin(\alpha)\cos(\theta)=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta))$ در حل انتگرال‌های مانند مثال زیر کارا است.

مثال ۶۳. تابع اولیه‌ی $f(x)=\sin 3x\cos 5x$ را به دست آورید.

حل: طبق اتحاد مثلثاتی بالا جلوی سینوس را برابر α و جلوی کسینوس را برابر θ در نظر می‌گیریم یعنی $\alpha=3x$ و $\theta=5x$ و می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\int\sin 3x\cos 5x\,dx &= \frac{1}{2}\left(\int\sin 8x\,dx+\int\sin(-2x)\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(\int\sin 8x\,dx-\int\sin 2x\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x\end{aligned}$$

یادآوری می‌شود که همیشه می‌توانیم بنویسیم $\sin(-x)=-\sin x$ و $\cos(-x)=\cos x$ همچنین فرمول‌های تذکر ۳۷ را بار دیگر نگاه کنید.

در مثال بالا این محدودیت وجود دارد که باید یکی از عبارات سینوس و دیگری کسینوس باشد این محدودیت با اتحادهای مثلثاتی رفع می‌شود.

$$\cos(\alpha+\theta)=\cos(\alpha)\cos(\theta)-\sin(\theta)\sin(\alpha)$$
$$\cos(\alpha-\theta)=\cos(\alpha)\cos(\theta)+\sin(\theta)\sin(\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha-\theta)=2\cos(\alpha)\cos(\theta)\Longrightarrow\cos(\alpha)\cos(\theta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha-\theta))$$
$$\cos(\alpha+\theta)-\cos(\alpha-\theta)=-2\sin(\alpha)\sin(\theta)\Longrightarrow\sin(\alpha)\sin(\theta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\theta)-\cos(\alpha+\theta))$$

فرمولهای پایین خط از جمع و تفریق دو فرمول بالای خط به دست آمده‌اند. خلاصه سه اتحاد بالا و کاربرد آن‌ها در جدول زیر آمده است.

$\int\sin(\alpha)\cos(\theta)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\sin(\alpha+\theta)\,dx+\int\sin(\alpha-\theta)\,dx\right)$	$\sin(\alpha)\cos(\theta)=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta))$
$\int\cos(\alpha)\cos(\theta)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\cos(\alpha+\theta)\,dx+\int\cos(\alpha-\theta)\,dx\right)$	$\cos(\alpha)\cos(\theta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha-\theta))$
$\int\sin(\alpha)\sin(\theta)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\cos(\alpha-\theta)\,dx-\int\cos(\alpha+\theta)\,dx\right)$	$\sin(\alpha)\sin(\theta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\theta)-\cos(\alpha+\theta))$

مجدداً تاکید می‌کنم که چون $\cos(-x)=\cos x$ است اگر $\alpha-\theta$ عددی منفی شد می‌توان به جای آن قدرمطلق آن را نوشت تا عدد منفی محاسبات را سخت نکند. با حل دو مثال از دو اتحادهای مثلثاتی آخر این درس را به پایان می‌بریم.

مثال ۶۴. تابع اولیه‌ی $f(x)=\sin 3x\sin 5x$ را به دست آورید.

حل: طبق اتحاد آخر مثلثاتی بالا قرار می‌دهیم $\alpha=3x$ و $\theta=5x$ و می‌نویسیم

$$\int\sin 3x\sin 5x\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\cos 2x\,dx-\int\cos 8x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$$

مثال ۶۵. تابع اولیه‌ی $f(x) = \cos 3x \cos 5x$ را به دست آورید.

حل: طبق اتحاد وسط مثلثاتی بالا قرار می‌دهیم $\alpha = 3x$ و $\theta = 5x$ و می‌نویسیم

$$\int \cos 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\left(\int \cos 8x \, dx + \int \cos 2x \, dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

تمرینات

انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

۱) $\int 5x^4 + 3x^2 + 5 \, dx$

۲) $\int 5\sqrt[4]{x} + \frac{5}{\sqrt{x^5}} dx$

۳) $\int (2x+5)(x^2+5x)^5 dx$

۴) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}} dx$

۵) $\int \frac{\sin x}{(5+\cos x)^4} dx$

۶) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

۷) $\int \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$

۸) $\int \cot x \, dx$

۹) $\int \cot x(1+\cot^2 x) \, dx$

۱۰) $\int \cot^3 x \, dx$

۱۱) $\int \cot^4 x \, dx$

۱۲) $\int \cot^5 x \, dx$

۱۳) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

۱۴) $\int \cos^2 x \, dx$

۱۵) $\int \cos^3 x \, dx$

۱۶) $\int \cos^4 x \, dx$

۱۷) $\int \cos^5 x \, dx$

۱۸) $\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$

۱۹) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\arctan x}$

۲۰) $\int \sqrt{\frac{(\arcsin x)^5}{1-x^2}} dx$

۲۱) $\int \frac{(\ln x)^5}{x} \, dx$

۲۲) $\int \sin 5x \cos 2x \, dx$

۲۳) $\int \cos 5x \cos 2x \, dx$

۲۴) $\int \sin 5x \sin 2x \, dx$

۲۵) $\int \frac{e^x}{5+e^x} \, dx$

۲۶) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \, dx$

۲۷) $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$

۲۸) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \, dx$

درس سوم: انتگرال‌گیری از عبارات گویا (تجزیه کسرها)

برای تجزیه کسرها باید مراحل زیر را دنبال کنیم

مرحله‌ی اول: با تقسیم صورت بر مخرج، درجه‌ی صورت عبارت گویا را کم‌تر از مخرج می‌کنیم. بدیهی است اگر در عبارت گویای داده شده درجه‌ی مخرج، کم‌تر از صورت بود نیازی به تقسیم نیست. اگر درجه صورت و مخرج مساوی بود هم باید تقسیم کنیم.

مرحله‌ی دوم: مخرج را تجزیه می‌کنیم تا به چندجمله‌ای‌های درجه‌ی اول و درجه‌ی دوم تبدیل شود. سپس عبارت گویا را به صورت حاصل‌جمع عبارت‌های گویایی می‌نویسیم که مخرجشان قسمت‌های تجزیه شده‌ی مخرج است. اگر مخرج چندجمله‌ای درجه‌ی اول بود صورت کسر عدد و اگر مخرج چندجمله‌ای درجه‌ی دوم بود صورت کسر چندجمله‌ای درجه‌ی اول است.

مثال ۶۶. تابع اولیه‌ی $f(x)=\dfrac{x^4+5x^3-3x^2-8x+5}{x^3+x}$ را محاسبه کنید.

حل: پس از تقسیم کردن داریم

$$\frac{x^4+5x^3-3x^2-8x+5}{x^3+x}=x+5+\frac{-4x^2-13x+5}{x^3+x}$$

$$\begin{array}{rr|l} & x^4+5x^3-3x^2-8x+5 & x^3+x \\ \cline{3-3} - & x^4+x^2 & x+5 \\ \cline{2-2} & 5x^3-4x^2-8x+5 & \\ - & 5x^3+5x & \\ \cline{2-2} & -4x^2-13x+5 & \end{array}$$

که عملیات تقسیم را در روبه‌رو می‌بینید. بر دانشجو لازم است که روش تقسیم کردن چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را دوباره مرور کند تا اشکالی در این زمینه وجود نداشته باشد. تجزیه‌ی چندجمله‌ای x^3+x با روش فاکتورگیری برابر $x(x^2+1)$ است. چندجمله‌ای x درجه‌ی اول است پس صورت آن عددی مانند A است. چندجمله‌ای x^2+1 درجه‌ی دوم است پس صورت آن یک چندجمله‌ای درجه‌ی اول مانند $Bx+C$ می‌شود. پس می‌نویسیم:

$$\frac{-4x^2-13x+5}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x^3+x}$$

که حاصل، تساوی $\dfrac{(A+B)x^2+Cx+A}{x^3+x}=\dfrac{-4x^2-13x+5}{x^3+x}$ است. دو عبارت گویای با مخرج مساوی برابرند. در نتیجه صورت آن‌ها برابرند. یعنی

$$\begin{cases} A=5 \\ C=-13 \\ A+B=-4\Rightarrow 5+B=-4\Rightarrow B=-4-5=-9 \end{cases}$$

یعنی به دست آمده است

$$\begin{aligned}\frac{x^{۴}+۵x^{۳}-۳x^{۲}-۸x+۵}{x^{۳}+x} &= x+۵+\frac{-۴x^{۲}-۱۳x+۵}{x^{۳}+x}=x+۵+\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^{۲}+۱}=x+۵+\frac{۵}{x}+\frac{-۹x-۱۳}{x^{۲}+۱}\\ &= x+۵+\frac{۵}{x}+\frac{-۹x}{x^{۲}+۱}+\frac{-۱۳}{x^{۲}+۱}\end{aligned}$$

و در نهایت به شکل زیر تابع اولیه به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^{۴}+۵x^{۳}-۳x^{۲}-۸x+۵}{x^{۳}+x}dx &= \int x\,dx+\int ۵\,dx+۵\int\frac{۱}{x}dx-۹\int\frac{x}{x^{۲}+۱}dx-۱۳\int\frac{۱}{x^{۲}+۱}dx\\ &= \frac{۱}{۲}x^{۲}+۵x+۵\ln|x|-۹\times\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۱)-۱۳\arctan x\end{aligned}$$

تذکر ۶۷. چون دامنه‌ی تابع $\frac{۱}{x}$ برابر $\mathbb{R}$ یعنی اعداد حقیقی است. از این به بعد قرار می‌دهیم $\int\frac{۱}{x}dx=\ln|x|$ تا دامنه‌ی تابع و دامنه‌ی انتگرال تابع یکسان شود. این مطلب باید برای کلیه عبارت‌های گویا رعایت شود تا بین دامنه‌ی تابع و دامنه‌ی انتگرال تابع مغایرتی پیش نیاید.

تذکر ۶۸. اگر در هنگام تجزیه مخرج عبارت گویا عاملی دوبار تکرار شد، باید آن را دو بار بنویسیم. یک‌بار با توان یک و بار دوم با توان دو به همین صورت اگر عاملی سه بار تکرار شد سه بار با توان‌های یک، دو و سه نوشته می‌شود.

مثال ۶۹. تابع اولیه‌ی $f(x)=\frac{x^{۴}+۵x^{۳}-۳x^{۲}-۸x+۵}{x^{۳}+x^{۲}}$ را محاسبه کنید.

حل: با تقسیم کردن به دست می‌آید $f(x)=\frac{x^{۴}+۵x^{۳}-۳x^{۲}-۸x+۵}{x^{۳}+x^{۲}}=x+۴+\frac{-۷x^{۲}-۸x+۵}{x^{۳}+x^{۲}}$ و تجزیه‌ی $x^{۳}+x^{۲}$ به صورت $xx(x+۱)$ است یعنی x دوبار تکرار شده است پس می‌نویسیم.

$$\frac{-۷x^{۲}-۸x+۵}{x^{۳}+x^{۲}}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^{۲}}+\frac{C}{x+۱}=\frac{Ax(x+۱)+B(x+۱)+Cx^{۲}}{xx(x+۱)}=\frac{Ax^{۲}+A+Bx+B+Cx^{۲}}{x^{۳}+x^{۲}}$$

و با دستگاه معادلات روبرو مجهول‌ها به دست می‌آید.

$$\begin{cases}B=-۸\\ A+B=۵\Rightarrow A-۸=۵\Rightarrow A=۵+۸=۱۳\\ A+C=-۷\Rightarrow ۱۳+C=-۷\Rightarrow C=-۷-۱۳=-۲۰\end{cases}$$

و در نهایت به شکل زیر تابع اولیه به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^{۴}+۵x^{۳}-۳x^{۲}-۸x+۵}{x^{۳}+x^{۲}}dx &= \int x\,dx+\int ۴\,dx+۱۳\int\frac{۱}{x}dx-۸\int\frac{۱}{x^{۲}}dx-۲۰\int\frac{۱}{x+۱}dx\\ &= \frac{۱}{۲}x^{۲}+۴x+۱۳\ln|x|-۸\times\frac{-۱}{x}-۲۰\ln|x+۱|\end{aligned}$$

مثال ۷۰. تابع اولیه‌ی $f(x)=\frac{۱}{۱-x^{۲}}$ را محاسبه کنید.

حل: در این مثال چون درجه‌ی مخرج کوچک‌تر از درجه‌ی صورت است نیازی به تقسیم کردن نیست. تجزیه‌ی $۱-x^{۲}$ به صورت $(۱-x)(۱+x)$ است. پس می‌نویسیم.

$$\frac{۱}{۱-x^{۲}}=\frac{A}{۱-x}+\frac{B}{۱+x}=\frac{A(۱+x)+B(۱-x)}{(۱-x)(۱+x)}=\frac{A+Ax+B-Bx}{۱-x^{۲}}$$

و با دستگاه معادلات زیر مجهول‌ها به دست می‌آید.

$$\begin{cases} A - B = 0 \Rightarrow A = B \\ A + B = 1 \Rightarrow A + A = 1 \Rightarrow A = B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

و در نهایت به شکل زیر تابع اولیه به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-x^2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{2}\left(-\ln|1-x| + \ln|1+x|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) \end{aligned}$$

مثال ۷۱. تابع اولیه‌ی $f(x) = \dfrac{2x}{(1+x)(1-x)^3}$ را محاسبه کنید.

حل: در این مثال چون درجه‌ی مخرج کوچک‌تر از درجه‌ی صورت است نیازی به تقسیم کردن نیست. همچنین مخرج تجزیه شده است و $x - 1$ سه بار تکرار شده پس سه بار نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1+x)(1-x)^3} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{D}{1+x} \\ &= \frac{A(1-x)^2(1+x) + B(1-x)(1+x) + C(1+x) + D(1-x)^3)}{(1+x)(1-x)^3} \\ &= \frac{A - Ax - Ax^2 + Ax^3 + B - Bx^2 + C + Cx + D - 3Dx + 3Dx^2 - Dx^3}{(1+x)(1-x)^3} \end{aligned}$$

و با دستگاه معادلات زیر مجهول‌ها به دست می‌آید.

$$\begin{cases} A - D = 0 \Rightarrow A = D \\ -A - B + 3D = 0 \Rightarrow -A - B + 3A = 0 \Rightarrow B = 2A \\ -A + C - 3D = 2 \Rightarrow -A + C - 3A = 2 \Rightarrow C = 2 + 4A \\ A + B + C + D = 0 \Rightarrow A + 2A + 2 + 4A + A = 0 \Rightarrow 8A = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{4} = D \Rightarrow B = \frac{-1}{2} \Rightarrow C = 1 \end{cases}$$

و در نهایت به شکل زیر تابع اولیه به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(1+x)(1-x)^3}dx &= \frac{1}{4}\int \frac{-1}{1-x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{-1}{(1-x)^2}dx + \int \frac{1}{(1-x)^3}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+x}dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\frac{-1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{4}\ln|1+x| \end{aligned}$$

تمرینات

انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

۱) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 7}{x(x+3)}dx$ ۲) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 7}{(x+1)^3}dx$ ۳) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x(x^2+1)}dx$

۴) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(2x+1)}dx$ ۵) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 5x + 6}dx$ ۶) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 + 5x^2 + 6x}dx$

درس چهارم (روش تغییر متغیر)

در روش تغییر متغیر باید قسمتی از انتگرال را برابر t قرار دهیم سپس از دو طرف فرمول دیفرانسیل بگیریم و x را با t جای‌گزین کنیم. پس از حل انتگرال جدید x را با t جای‌گزین می‌کنیم. اگر $t = f(x)$ باشد، همیشه داریم $dt = f'(x)dx$ که به این عمل دیفرانسیل‌گیری گویند و موجب می‌شود که dx با dt جای‌گزین شود.

مثال ۷۲. تابع اولیه‌ی $f(x) = x\sqrt{x+1}$ را به دست آورید.

حل: معمولاً در اکثر انتگرال‌هایی که رادیکال وجود دارد برای حذف رادیکال، t را برابر رادیکال قرار می‌دهیم. قرار می‌دهیم $t = \sqrt{x+1}$ دو روش برای دیفرانسیل گیری وجود دارد.

روش اول $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}dx \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2t}dx \Rightarrow dx = 2t\,dt$

روش دوم $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

به هر حال برای جایگذاری داریم $x = t^2 - 1$ و $\sqrt{x+1} = t$ و $dx = 2t\,dt$ حال می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1}\,dx &= \int (t^2-1)t2t\,dt = \int 2t^4 - 2t^2 dt = 2\int t^4 dt - 2\int t^2 dt = 2\times\frac{t^5}{5} - 2\times\frac{t^3}{3} = \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 \\ &= \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 \end{aligned}$$

مثال ۷۳. تابع اولیه‌ی $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $t = \sqrt{x+1}$ مانند مثال قبل دیفرانسیل می‌گیریم و جای‌گذاری می‌کنیم

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{t^2-1}{t}2t\,dt = \int 2(t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) = 2\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3} - \left(\sqrt{x+1}\right)\right)$$

مثال ۷۴. تابع اولیه‌ی $f(x) = x\sqrt[5]{x+1}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $t = \sqrt[5]{x+1}$ و می‌نویسیم $t = \sqrt[5]{x+1} \Rightarrow t^5 = x+1 \Rightarrow x = t^5 - 1 \Rightarrow dx = 5t^4\,dt$ و در انتگرال جای‌گذاری می‌کنیم

$$\int x\sqrt[5]{x+1}dx = \int (t^5-1)t5t^4\,dt = \int 5t^7 - 5t^5 dt = \frac{5}{8}t^8 - \frac{5}{6}t^6 = \frac{5}{8}\left(\sqrt[5]{x+1}\right)^8 - \frac{5}{6}\left(\sqrt[5]{x+1}\right)^6$$

مثال ۷۵. تابع اولیه‌ی $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+1}}{x}$ را به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $t=\sqrt{x^3+1}$ و می‌نویسیم

$$t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow x^3=t^2-1\Rightarrow 3x^2dx=2t\,dt\Rightarrow x^2dx=\frac{2}{3}t\,dt$$

در این انتگرال به منظور به وجود آوردن x^2dx صورت و مخرج انتگرال را در x^2 ضرب می‌کنیم

$$\int\frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\times\frac{x^2}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{x^3+1}}{x^3}x^2dx=\int\frac{t}{t^2-1}\frac{2}{3}t\,dt=\frac{2}{3}\int\frac{t^2}{t^2-1}dt$$

چون به یک عبارت گویا رسیدیم صورت را به مخرج تقسیم می‌کنیم $\frac{t^2}{t^2-1}=1+\frac{1}{1-t^2}$ و بنابر مثال ۷۰ داریم $\int\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$

و در آخر $\frac{2}{3}\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=\frac{2}{3}\int 1+\frac{1}{1-t^2}=\frac{2}{3}\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^3+1}}{1-\sqrt{x^3+1}}\right|\right)$

مثال ۷۶. تابع اولیه‌ی $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

حل: در این انتگرال باید تغییر متغیر را طوری بگیریم که هر دو رادیکال حذف شوند اگر قرار دهیم $x=t^6$ عدد ۶ با هر دو فرجه‌ی رادیکال یعنی اعداد ۲ و ۳ ساده می‌شود و هر دو رادیکال حذف می‌شوند. $x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt$ و به این صورت می‌شود

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx&=\int\frac{1}{\sqrt[3]{t^6}+\sqrt{t^6}}6t^5dt=6\int\frac{t^6}{t^2+t^3}dt=6\int\frac{t^6}{t^2(t+1)}dt=6\int\frac{t^4}{t+1}dt\\&=6\int t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}dt=6\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)\\&=\frac{3t^4}{2}+2t^3+3t^2-6t+6\ln|t+1|\\&=\frac{3\left(\sqrt[6]{x}\right)^4}{2}+2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3+3\left(\sqrt[6]{x}\right)^2-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\\&=\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\end{aligned}$$

مثال ۷۷. تابع اولیه‌ی $f(x)=\frac{e^{3x}}{e^x+1}$ را به دست آورید.

حل: معمولاً انتگرال‌هایی که در آن e^x به کار رفته است با تغییر متغیر $t=e^x$ به عبارت گویا تبدیل می‌شوند. قرار می‌دهیم

$$t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx\Rightarrow dt=t\,dx\Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$$

همچنین $e^{3x}=(e^x)^3=t^3$ جای‌گذاری را به صورت زیر انجام می‌دهیم.

$$\int\frac{e^{3x}}{e^x+1}dx=\int\frac{t^3}{t+1}\frac{dt}{t}=\int\frac{t^2}{t+1}dt=\int t-1+\frac{1}{t+1}dt=\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|=\frac{e^{2x}}{2}-e^x+\ln|e^x+1|$$

مثال ۷۸. تابع اولیه‌ی $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}$ را به دست آورید.

حل: این تابع شبیه تابع $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ است که با $\arctan x$ می‌شود. به منظور به وجود آوردن $\arctan x$ قرار می‌دهیم

$$x=\tan t\Rightarrow t=\arctan x\Rightarrow dx=(\tan^2 t+1)dt$$

جای‌گذاری را به صورت زیر انجام می‌دهیم.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx&=\int\frac{1}{(\tan^2 t+1)^2}(\tan^2 t+1)dt=\int\frac{1}{\tan^2 t+1}dt=\int\cos^2 t\,dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\\&=\frac{\arctan x}{2}+\frac{\sin(2\arctan x)}{4}=\frac{\arctan x}{2}+\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{4}=\frac{\arctan x}{2}+\frac{x}{2(x^2+1)}\end{aligned}$$

لازم به توضیح است که $\cos^2 t = \dfrac{1}{\tan^2 t + 1} \Rightarrow 1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ به علاوه چون $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ می‌توان نوشت. $\sin(2\arctan x) = 2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x) = 2 \times \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

توجه داشته باشید که انتگرال‌های زیر که تا به حال حل شده جزء انتگرال‌های پرکاربرد هستند و باید به خاطر سپرده شوند.

$\int \sin^2 x \, dx = \dfrac{t}{2} - \dfrac{\sin 2t}{4}$	$\int \cos^2 x \, dx = \dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin 2t}{4}$
$\int \dfrac{1}{(x^2+1)^2} dx = \dfrac{\arctan x}{2} + \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\int \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$

مثال ۷۹. تابع اولیه‌ی $f(x) = \dfrac{1+x+2x^2+x^4}{x(x^2+1)^2}$ را به دست آورید.

حل: باید از روش تجزیه‌ی کسرها حل شود. چون درجه‌ی صورت ۴ و درجه‌ی مخرج ۵ است احتیاج به تقسیم کردن نیست. و چون x^2+1 دوبار آمده است باید در تجزیه کسر دوبار نوشته شود.

$$\begin{aligned}\frac{1+x+2x^2+x^4}{x(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x}{x(x^2+1)^2} \\ &= \frac{Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + Ex}{x(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

و با دستگاه معادلات زیر مجهول‌ها به دست می‌آید

$$\begin{cases} C = 0 \\ A + C = 1 \Rightarrow A = 1 \\ A + B = 1 \Rightarrow B = 0 \\ 2A + B + D = 2 \Rightarrow 2 + 0 + D = 2 \Rightarrow D = 0 \\ C + E = 1 \Rightarrow 0 + E = 1 \Rightarrow E = 1 \end{cases}$$

و در نهایت به شکل زیر تابع اولیه به دست می‌آید.

$$\int \frac{1+x+2x^2+x^4}{x(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x^2)^2} = \ln|x| + \frac{\arctan x}{2} + \frac{x}{2(x^2+1)}$$

مثال ۸۰. تابع اولیه‌ی $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ را به دست آورید.

حل: با تغییر متغیر $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$ به شکل زیر حل می‌شود.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{-\sin x}{-\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x - 1}(-\sin x \, dx) = \int \frac{1}{t^2-1} dt = -\int \frac{1}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+t}{1-t}\right\rvert \\ &= \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1-t}{1+t}\right\rvert = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right\rvert\end{aligned}$$

مثال ۸۱. تابع اولیه‌ی $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$ را به دست آورید.

حل: با تغییر متغیر $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$ به شکل زیر حل می‌شود.

$$\begin{aligned}\int \cos^{۲} x \sin^{۳} x \, dx &= \int \cos^{۲} x \sin^{۲} x \sin x \, dx = -\int \cos^{۲} x(۱-\cos^{۲} x)(-\sin x \, dx) \\ &= -\int t^{۲}(۱-t^{۲}) \, dt = \int -t^{۲}+t^{۴} dt = \frac{-t^{۳}}{۳}+\frac{t^{۴}}{۴} = \frac{-\cos^{۳} x}{۳}+\frac{\cos^{۴} x}{۴}\end{aligned}$$

مثال ۸۲. تابع اولیه‌ی $f(x)=\cos^{۳} x \sin^{۳} x$ را به دست آورید.

حل: با تغییر متغیر $t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x \, dx$ به شکل زیر حل می‌شود.

$$\begin{aligned}\int \cos^{۳} x \sin^{۳} x \, dx &= \int \cos^{۳} x \sin^{۲} x \sin x \, dx = -\int \cos^{۳} x(۱-\cos^{۲} x)(-\sin x \, dx) \\ &= -\int t^{۳}(۱-t^{۲}) \, dt = \int -t^{۳}+t^{۵} dt = \frac{-t^{۴}}{۴}+\frac{t^{۵}}{۵} = \frac{-\cos^{۴} x}{۴}+\frac{\cos^{۵} x}{۵}\end{aligned}$$

تمرینات

انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

۱) $\int x^{۲}\sqrt{x-۱} \, dx$ ۲) $\int \frac{\sqrt{x-۱}}{x^{۲}} dx$ ۳) $\int \frac{x^{۳}}{\sqrt{x-۱}} dx$

۴) $\int \sqrt[۳]{x+۱}(x-۱) dx$ ۵) $\int \frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt[۳]{x}} dx$ ۶) $\int \frac{e^{۲x}-۱}{e^{x}+۱} dx$

۷) $\int \frac{۱}{\cos x} dx$ ۸) $\int \sin^{۲} x \cos^{۳} x \, dx$ ۹) $\int \cos^{۲} x \sin^{۵} x \, dx$

درس پنجم (روش جزء به جزء)

فرمول این روش به صورت زیر به دست می‌آید

$$pq = pq \Rightarrow d(pq) = p\ dq + q\ dp \Rightarrow \int d(pq) = \int p\ dq + \int q\ dp \Rightarrow pq = \int p\ dq + \int q\ dp$$

و در آخر به فرمولی می‌رسیم که در کادر زیر آمده است که استفاده از آن انتگرال جزء به جزء نام دارد.

$$\boxed{\int p\ dq = pq - \int q\ dp}$$

برای استفاده از فرمول بالا قسمتی از انتگرال که انتگرال‌گیری آن ممکن است را برابر dq قرار می‌دهیم و از آن انتگرال می‌گیریم و بقیه انتگرال را برابر p می‌گیریم و از p دیفرانسیل می‌گیریم. لازم به ذکر است که برای دیفرانسیل‌گیری از تابع $y = f(x)$ قرار می‌دهیم $dy = f'(x)\ dx$ یعنی مشتق می‌گیریم سپس dx را می‌نویسیم

مثال ۸۳. تابع اولیه‌ی $f(x) = \ln x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = \ln x \Rightarrow dp = \frac{۱}{x}dx \quad \text{دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = dx \Rightarrow q = x \quad \text{انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\int \ln x\ dx = pq - \int q\ dp = x \ln x - \int x \times \frac{۱}{x}\ dx = x \ln x - \int ۱\ dx = x \ln x - x$$

مثال ۸۴. تابع اولیه‌ی $f(x) = \arctan x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = \arctan x \Rightarrow dp = \frac{۱}{۱ + x^۲}dx \quad \text{دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = dx \Rightarrow q = x \quad \text{انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\begin{aligned}\int \arctan x\ dx &= pq - \int q\ dp = x \arctan x - \int x \times \frac{۱}{۱ + x^۲}\ dx = x \arctan x - \frac{۱}{۲}\int \frac{۲x}{x^۲ + ۱}\ dx \\ &= x \arctan x - \frac{۱}{۲}\ln(x^۲ + ۱)\end{aligned}$$

انتگرال آخر از فرمول $\int \frac{u'}{u} = \ln u$ محاسبه شده است.

مثال ۸۵. تابع اولیه‌ی $f(x) = \arcsin x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = \arcsin x \Rightarrow dp = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = dx \Rightarrow q = x \quad \text{انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= pq - \int q \, dp = x \arcsin x - \int x \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

انتگرال آخر از فرمول $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = \int u' u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{-1}{2}+1} u^{\frac{-1}{2}+1} = 2u^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u}$ محاسبه شده است.

مثال ۸۶. تابع اولیه‌ی $f(x) = x \sin x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = x \Rightarrow dp = dx \quad \text{دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = \sin x \, dx \Rightarrow q = -\cos x \quad \text{انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\int x \sin x \, dx = pq - \int q \, dp = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

به طور کلی هر وقت چندجمله‌ای‌ها در کنار توابع $\sin x$، $\cos x$ و e^x بیاید باید مشابه مثال قبل حل شود.

مثال ۸۷. تابع اولیه‌ی $f(x) = x^2 \cos x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = x^2 \Rightarrow dp = 2x \, dx \quad \text{دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = \cos x \, dx \Rightarrow q = \sin x \quad \text{انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\int x \sin x \, dx = pq - \int q \, dp = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x)$$

در این مثال $\int x \sin x \, dx$ از مثال قبلی استفاده شده است اما دانشجو در برگه‌ی امتحان باید دو بار جزء به جزء را بنویسد. به همین ترتیب اگر x^3 در کنار توابع $\sin x$، $\cos x$ و e^x بیاید باید سه بار از جزء به جزء استفاده شود چون هر بار جزء به جزء یکی از توان x کم می‌کند.

مثال ۸۸. تابع اولیه‌ی $f(x) = x \tan^2 x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = x \Rightarrow dp = dx \quad \text{دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = \tan^2 x \, dx \Rightarrow q = \tan x - x \quad \text{انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\int x \tan^2 x \, dx = pq - \int q \, dp = x(\tan x - x) - \int \tan x - x \, dx = x(\tan x - x) + \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2$$

مثال ۸۹. تابع اولیه‌ی $f(x) = x \arctan x$ را حساب کنید.

حل: p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

$$p = \arctan x \Rightarrow dp = \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$

$$dq = x \, dx \Rightarrow q = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\int x\arctan x\,dx = pq-\int q\,dp=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})$$
$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)$$

انتگرال آخر با روش تجزیه کسرها حل شده است که فقط صورت به مخرج تقسیم شده است.

مثال ۹۰. تابع اولیه‌ی $f(x)=e^x\sin x$ را حساب کنید.

حل: چنین انتگرال‌هایی با دوبار جزء به جزء حل می‌شوند که در جدول زیر آمده است. p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

بار دوم	بار اول
دیفرانسیل گرفته‌ایم $p=\cos x\Rightarrow dp=-\sin x\,dx$	دیفرانسیل گرفته‌ایم $p=\sin x\Rightarrow dp=\cos x\,dx$
انتگرال گرفته‌ایم $dq=e^x\,dx\Rightarrow q=e^x$	انتگرال گرفته‌ایم $dq=e^x\,dx\Rightarrow q=e^x$

پس از دوبار جزء به جزء به صورت زیر می‌شود

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$$

یعنی پس از دوبار جزء به جزء دوباره خود انتگرال اولی ظاهر شده است. با قرار دادن $A=\int e^x\sin x\,dx$ متغیر A در یک معادله‌ی درجه‌ی اول قرار می‌گیرد و مانند زیر به دست می‌آید.

$$A=e^x\sin x-e^x\cos x-A\quad\Rightarrow\quad A+A=e^x\sin x-e^x\cos x\Rightarrow A=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{2}$$
$$\Rightarrow\int e^x\sin x\,dx=A=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{2}$$

مثال ۹۱. تابع اولیه‌ی $f(x)=e^{2x}\sin 5x$ را حساب کنید.

حل: این انتگرال مشابه انتگرال مثال قبل است فقط چند عدد اضافه دارد. p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

بار دوم	بار اول
دیفرانسیل گرفته‌ایم $p=\cos 5x\Rightarrow dp=-5\sin 5x\,dx$	دیفرانسیل گرفته‌ایم $p=\sin 5x\Rightarrow dp=5\cos 5x\,dx$
انتگرال گرفته‌ایم $dq=e^{2x}\,dx\Rightarrow q=\frac{1}{2}e^{2x}$	انتگرال گرفته‌ایم $dq=e^{2x}\,dx\Rightarrow q=\frac{1}{2}e^{2x}$

پس از دوبار جزء به جزء به صورت زیر می‌شود

$$\int e^{2x}\sin 5x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 5x-\frac{5}{2}\int e^{2x}\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 5x-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 5x+\frac{5}{2}\int e^{2x}\sin 5x\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 5x-\frac{5}{4}e^{2x}\cos 5x-\frac{25}{4}\int e^{2x}\sin 5x\,dx$$

یعنی پس از دوبار جزء به جزء دوباره خود انتگرال اولی ظاهر شده است. با قرار دادن $A=e^{2x}\sin 5x\,dx$ متغیر A در یک معادله‌ی درجه‌ی اول قرار می‌گیرد و مانند زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
A = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 5x - \frac{5}{4}e^{2x}\cos 5x - \frac{25}{4}A \quad &\Rightarrow \quad A + \frac{25}{4}A = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 5x - \frac{5}{4}e^{2x}\cos 5x \\
&\Rightarrow \quad A\left(1 + \frac{25}{4}\right) = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 5x - \frac{5}{4}e^{2x}\cos 5x \\
&\Rightarrow \quad \frac{29}{4}A = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 5x - \frac{5}{4}e^{2x}\cos 5x \\
&\Rightarrow \quad A = \frac{4}{29}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 5x - \frac{5}{4}e^{2x}\cos 5x\right) \\
&\Rightarrow \quad A = \frac{2}{29}e^{2x}\sin 5x - \frac{5}{29}e^{2x}\cos 5x
\end{aligned}$$

مثال ۹۲. تابع اولیه‌ی $f(x) = (\ln x)^2$ را حساب کنید.

حل: چنین انتگرالی با دوبار جزء به جزء حل می‌شوند که در جدول زیر آمده است. p و dq مانند زیر انتخاب می‌شود

بار دوم	بار اول
دیفرانسیل گرفته‌ایم $p = \ln x \Rightarrow dp = \frac{1}{x}dx$	دیفرانسیل گرفته‌ایم $p = (\ln x)^2 \Rightarrow dp = \frac{2}{x}\ln x\, dx$
انتگرال گرفته‌ایم $dq = dx \Rightarrow q = x$	انتگرال گرفته‌ایم $dq = dx \Rightarrow q = x$

پس از دوبار جزء به جزء به صورت زیر می‌شود

$$\begin{aligned}
\int (\ln x)^2\, dx \quad &= \quad x(\ln x)^2 - \int x \times \frac{2}{x}\ln x\, dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) \\
&= \quad x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x
\end{aligned}$$

برای حل $(\ln x)^3\, dx$ به طور مشابه سه بار انتگرال می‌گیریم که به عنوان تمرین در آخر بخش به دانشجو واگذار شده است.

مثال ۹۳. تابع اولیه‌ی $f(x) = \sin\sqrt{x}$ را حساب کنید.

حل: برای حل این انتگرال باید ابتدا آن را در $2\sqrt{x}$ ضرب و تقسیم کنیم و p و dq مانند زیر انتخاب کنیم

$$p = 2\sqrt{x} \Rightarrow dp = \frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad \text{دیفرانسیل گرفته‌ایم}$$
$$dq = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\, dx \Rightarrow q = -\cos\sqrt{x} \quad \text{انتگرال گرفته‌ایم}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin\sqrt{x}\, dx \quad &= \quad \int 2\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\, dx = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= \quad -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\, dx = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x}
\end{aligned}$$

انتگرال آخر با فرمول $\int u'\cos u\, dx = \sin u$ حل شده است. به طور مشابه $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$ و $\int \cos\sqrt{x}\, dx$ را می‌توانیم با روش این مثال حل کنیم.

تمرینات

انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

۱) $\int \operatorname{arccot} x \, dx$

۲) $\int \arccos x \, dx$

۳) $\int x \cos x \, dx$

۴) $\int x^2 \sin x \, dx$

۵) $\int x \cot^2 x \, dx$

۶) $\int x \operatorname{arccot}^2 x \, dx$

۷) $\int e^x \cos x \, dx$

۸) $\int (\ln x)^3 \, dx$

۹) $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

۱۰) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

۱۱) $\int e^{-x} \sin x \, dx$

۱۲) $\int e^{3x} \cos 6x \, dx$

۱۳) $\int x^2 \ln x \, dx$

۱۴) $\int e^{-3x} \cos 6x \, dx$

۱۵) $\int x^n \ln x \, dx$

درس ششم کاربرد انتگرال

۱) انتگرال معین

وقتی تابع اولیه‌ی یک تابع را محاسبه می‌کنیم می‌توانیم انتگرال معین آن را نیز حساب کنیم.

مثال ۹۴. انتگرال معین $\int_1^e \ln x\,dx$ را محاسبه کنید.

حل: بنابر مثال ۸۳ داریم $\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x - x$ پس می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x\,dx &= x\ln x - x|_1^e = (e\ln e - e) - (1\times\ln 1 - 1) = -(e\times 1 - e) - (1\times 0 - 1)\\ &= (e-e) - (-1) = 0 - (-1) = 1\end{aligned}$$

وقتی از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم باید اعداد انتگرال معین را نیز طبق متغیر جدید تغییر دهیم. مثال زیر را ببینید.

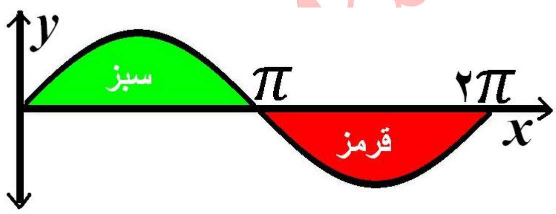
مثال ۹۵. انتگرال معین $\int_3^8 x\sqrt{x+1}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل: قرار می‌دهیم $t = \sqrt{x+1}$ وقتی $x = 3$ آنگاه $t = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ و وقتی $x = 7$ آنگاه $t = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$ یعنی اعداد انتگرال معین به ۲ و ۳ تبدیل می‌شوند. تغییر متغیر به این شکل است. $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow t^2 - 1 = x \Rightarrow 2t\,dt = dx$

انتگرال معین به این صورت می‌شود.

$$\begin{aligned}\int_3^8 x\sqrt{x+1}\,dx &= \int_2^3 (t^2-1)t2t\,dt = 2\int t^4 - t^2 = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_2^3 = 2\left(\left(\frac{3^5}{5} - \frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{2^5}{5} - \frac{2^3}{3}\right)\right)\\ &= 2\left(\left(\frac{243}{5} - \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{211}{5} - \frac{19}{3}\right) = \frac{1076}{15}\end{aligned}$$

۲) مساحت بین نمودار و محور xها



در انتگرال معین مساحت قسمت‌های زیر نمودار اعداد منفی می‌شود. به عنوان مثال در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = \sin x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ نمایش داده شده است. در انتگرال معین مساحت قسمت سبز رنگ بالای محور xها عددی مثبت محاسبه می‌شود و مساحت قسمت قرمز پایین محور xها عددی منفی محاسبه می‌شود. و چون این دو عدد هر دو برابرند در نهایت مساحت عدد صفر به دست می‌آید. یعنی

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x|_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

برای حل این مشکل باید نقاطی که تابع برابر صفر می‌شود را بدست آوریم سپس در بازه‌های مختلف مساحت را حساب کنیم و در آخر قدرمطلق مساحت‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال ۹۶. مساحت بین نمودار تابع $f(x) = \sin x$ و محور xها را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ بیابید.

حل: قرار می‌دهیم $\sin x = ۰$ و می‌دانیم که تابع سینوس در نقاط $x = ۰$، $x = \pi$ و $x = ۲\pi$ برابر صفر می‌شود پس باید مساحت را در بازه‌های $[۰, \pi]$ و $[\pi, ۲\pi]$ محاسبه کنیم. تابع اولیه‌ی $f(x) = \sin x$ برابر $F(x) = -\cos x$ است و می‌نویسیم

$$\left.\begin{array}{l} s_۱ = F(\pi) - F(۰) = (-\cos\pi) - (-\cos ۰) = (۱) - (-۱) = ۲ \\ s_۲ = F(۲\pi) - F(\pi) = (-\cos ۲\pi) - (-\cos\pi) = (-۱) - (۱) = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow s = |s_۱| + |s_۲| = |۲| + |-۲| = ۴$$

مثال ۹۷. مساحت بین نمودار تابع $x^۳ - x$ و $f(x) =$ محور xها را در بازه‌ی $[-۲, ۳]$ بیابید.

حل: ابتدا ریشه‌های $x^۳ - x = ۰$ را به دست می‌آوریم.

$$x^۳ - x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow x(x+۱)(x-۱) = ۰ \left\{\begin{array}{l} x = ۰ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{array}\right.$$

سه ریشه به دست آمده است. بنابراین با نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی $[-۲, ۳]$ جمعا پنج نقطه‌ی $\{-۲, -۱, ۰, ۱, ۳\}$ وجود دارد می‌نویسیم

$$F(x) = \frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۲}{۲} \qquad F(-۲) = \frac{(-۲)^۴}{۴} - \frac{(-۲)^۲}{۲} = ۴ - ۲ = ۲$$

$$F(-۱) = \frac{(-۱)^۴}{۴} - \frac{(۱)^۲}{۲} = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۴} \qquad F(۰) = \frac{۰^۴}{۴} - \frac{۰^۲}{۲} = ۰ - ۰ = ۰$$

$$F(۱) = \frac{۱^۴}{۴} - \frac{۱^۲}{۲} = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۴} \qquad F(۳) = \frac{۳^۴}{۴} - \frac{۳^۲}{۲} = \frac{۸۱}{۴} - \frac{۹}{۲} = \frac{۸۱ - ۱۸}{۴} = \frac{۶۳}{۴}$$

در آخر چهار مساحت را به دست می‌آوریم و قدرمطلق آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} s_۱ = F(-۱) - F(-۲) = -\frac{۱}{۴} - ۲ = -\frac{۹}{۴} \\ s_۲ = F(۰) - F(-۱) = ۰ - (-\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۴} \\ s_۳ = F(۱) - F(۰) = -\frac{۱}{۴} - ۰ = -\frac{۱}{۴} \\ s_۴ = F(۳) - F(۱) = \frac{۶۳}{۴} - (-\frac{۱}{۴}) = \frac{۶۴}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow s = |s_۱| + |s_۲| + |s_۳| + |s_۴| = \left|-\frac{۹}{۴}\right| + \left|\frac{۱}{۴}\right| + \left|-\frac{۱}{۴}\right| + \left|\frac{۶۴}{۴}\right| = \frac{۷۵}{۴}$$

مثال ۹۸. مساحت بین نمودار تابع $۳x^۲ + ۵$ و $f(x) =$ محور xها را در بازه‌ی $[۱, ۴]$ بیابید.

حل: ابتدا ریشه‌های $۳x^۲ + ۵ = ۰$ را به دست می‌آوریم. این معادله ریشه ندارد چون $\Delta < ۰$ بنابراین فقط دو نقطه‌ی $x = ۱$ و $x = ۴$ را داریم. فقط باید $|F(۴) - F(۱)|$ را محاسبه کنیم.

$$F(x) = x^۳ + ۵x \Rightarrow |F(۴) - F(۱)| = |(۴^۳ + ۵ \times ۴) - (۱^۳ + ۵ \times ۱)| = (۶۴ + ۲۰) - (۱ + ۵) = ۸۴ - ۶ = ۷۸$$

مثال ۹۹. مساحت بین نمودار تابع $۳x^۲ + ۴x$ و $f(x) =$ محور xها را در بازه‌ی $[۱, ۴]$ بیابید.

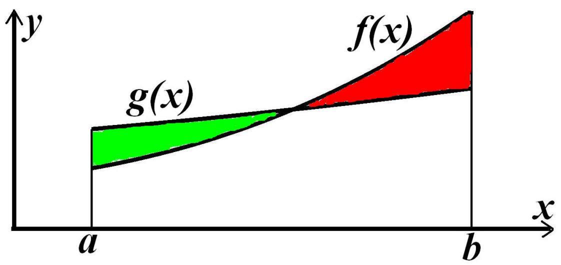
حل: ابتدا ریشه‌های $۳x^۲ + ۴x = ۰$ را به دست می‌آوریم.

$$۳x^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow x(۳x + ۴) = ۰ \left\{\begin{array}{l} x = ۰ \\ ۳x + ۴ = ۰ \Rightarrow ۳x = -۴ \Rightarrow x = \frac{-۴}{۳} \end{array}\right.$$

هیچ‌کدام از دو ریشه در بازه‌ی $[۱,۴]$ قرار ندارند بنابراین فقط دو نقطه‌ی $x=۱$ و $x=۴$ را داریم. فقط باید $|F(۴)-F(۱)|$ را محاسبه کنیم.

$$F(x)=x^۳+۲x^۲ \Rightarrow |F(۴)-F(۱)|=|(۴^۳+۲\times ۴^۲)-(۱^۳+۲\times ۱^۲)|=(۶۴+۳۲)-(۱+۲)=۹۶-۳=۹۳$$

۳) مساحت بین دو تابع



دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ مطابق شکل روبه‌رو داده شده است. می‌خواهیم مساحت بین این دو نمودار را در بازه‌ی $[a,b]$ محاسبه کنیم یعنی در شکل مقابل مساحت قسمت سبز را با قرمز جمع کنیم. برای این منظور ابتدا تابع $f-g(x)$ را حساب می‌کنیم یعنی دو تابع را از هم کم می‌کنیم سپس مانند قسمت قبل عمل می‌کنیم.

مثال ۱۰۰. مساحت بین نمودار توابع $f(x)=x$ و $g(x)=\sqrt{x}$ را در بازه‌ی $[۰,۴]$ به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $h(x)=f-g(x)=x-\sqrt{x}$ حالا ریشه‌های $x-\sqrt{x}=۰$ را به دست می‌آوریم.

$$x-\sqrt{x}=۰\Rightarrow x=\sqrt{x}\Rightarrow x^۲=x\Rightarrow x^۲-x=۰\Rightarrow x(x-۱)=۰\begin{cases}x=۰\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

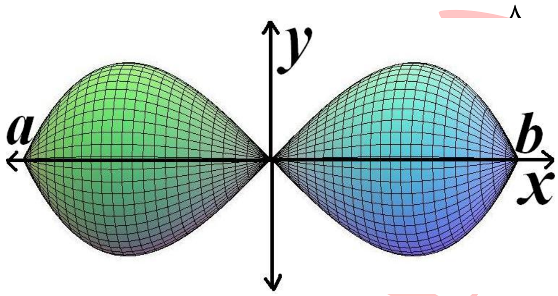
دو ریشه به دست آمده است. بنابراین با نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی $[۰,۴]$ جمعا سه نقطه‌ی $\{۰,۱,۴\}$ وجود دارد توجه داشته باشید که عدد صفر یک بار ابتدای بازه و یک بار ریشه‌ی معادله‌ی $x-\sqrt{x}=۰$ بنابراین یکبار در نظر گرفته می‌شود. تابع اولیه‌ی $h(x)=f-g(x)=x-\sqrt{x}$ تابع $H(x)=\frac{x^۲}{۲}-\frac{۲\sqrt{x^۳}}{۳}$ است. می‌نویسیم

$$H(۴)=\frac{۴^۲}{۲}-\frac{۲\sqrt{۴^۳}}{۳}=۸-\frac{۱۶}{۳}=\frac{۸}{۳}\quad H(۱)=\frac{۱^۲}{۲}-\frac{۲\sqrt{۱^۳}}{۳}=\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{۳}=-\frac{۱}{۶}\quad H(۰)=\frac{۰^۲}{۲}-\frac{۲\sqrt{۰^۳}}{۳}=۰$$

در آخر برای سه نقطه دو مساحت به دست می‌آید که با هم جمع می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} s_۱=H(۱)-H(۰)=-\frac{۱}{۶}-۰=-\frac{۱}{۶}\\ \quad ۸ \quad \left(-\frac{۱}{۶}\right)=\frac{۱۷}{۶}\end{array}\right\}\Rightarrow s=|s_۱|+|s_۲|=\left|-\frac{۱}{۶}\right|+\left|\frac{۱۷}{۶}\right|=\frac{۱۸}{۶}=۳$$

۴) حجم حاصل از دوران تابع



مطابق شکل اگر یک تابع مانند $f(x)$ حول محور xها دوران داده شود شکل مخروط مانندی به وجود می‌آید که حجم آن با فرمول $\pi\int_a^b (f(x))^۲dx$ محاسبه می‌شود.

مثال ۱۰۱. حجم حاصل از دوران تابع $f(x)=x^۳$ را حول محور xها و در بازه‌ی $[-۱,۲]$ بیابید.

حل: $$\pi\int_{-۱}^{۲}(x^۳)^۲\,dx=\pi\int_{-۱}^{۲}x^۶dx=\pi\times\left.\frac{x^۷}{۷}\right|_{-۱}^{۲}=\pi\left(\frac{۲^۷-(-۱)^۷}{۷}\right)=\pi\left(\frac{۱۲۸-(-۱)}{۷}\right)=\frac{۱۲۹\pi}{۷}$$

مثال ۱۰۲. حجم حاصل از دوران تابع $f(x)=\sin x$ را حول محور xها و در بازه‌ی $[۰,\pi]$ بیابید.

حل:
$$\begin{aligned}\pi\int_۰^\pi(\sin x)^۲\,dx=\pi\int_۰^\pi\sin^۲ x dx &= \pi\left(\frac{x}{۲}-\left.\frac{\sin ۲x}{۴}\right|_۰^\pi\right)=\pi\left((\frac{\pi}{۲}-\frac{\sin ۲\pi}{۴})-(\frac{۰}{۲}-\frac{\sin(۲\times ۰)}{۴})\right)\\ &=\pi\left((\frac{\pi}{۲}-\frac{۰}{۴})-(\frac{۰}{۲}-\frac{۰}{۴})\right)=\pi\times\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi^۲}{۲}\end{aligned}$$

۵) طول تابع

طول تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ با فرمول $\int_a^b \sqrt{۱+(f'(x))^۲}\, dx$ به دست می‌آید که در آن $f'(x)$ مشتق تابع $f(x)$ است.

مثال ۱۰۳. طول منحنی $f(x)=\frac{۲}{۳}\sqrt{x^۳}$ را در بازه‌ی $[۳,۸]$ بیابید.

حل: با مشتق‌گیری داریم $f'(x)=\sqrt{x}$ و می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{۱+(f'(x))^۲}\, dx &= \int_۳^۸ \sqrt{۱+(\sqrt{x})^۲}\, dx = \int_۳^۸ \sqrt{۱+x}\, dx = \frac{۲}{۳}\sqrt{(x+۱)^۳}\Big|_۳^۸ \\ &= \frac{۲}{۳}\left(\sqrt{(۸+۱)^۳}-\sqrt{(۳+۱)^۳}\right) = \frac{۲}{۳}(۲۷-۸) = \frac{۲}{۳}\times ۱۹ = \frac{۳۸}{۳}\end{aligned}$$

تمرینات

۱) مساحت بین تابع $f(x)=x^۲-۳x$ و محور xها را در بازه‌ی $[-۱,۲]$ بیابید.

۲) مساحت بین دو تابع $f(x)=۴$ و $g(x)=x^۲$ را در بازه‌ی $[-۳,۳]$ بیابید.

۳) حجم حاصل از دوران تابع $f(x)=\tan x$ را حول محور xها در بازه‌ی $\left[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۳}\right]$ بیابید.

۴) طول منحنی $f(x)=۳x+۵$ را در بازه‌ی $[۰,۷]$ بیابید.

درس هفتم بردار و ماتریس

تعریف ۱۰۴. به هر شئ که جهت و اندازه داشته باشد بردار گویند. بردار را معمولا با حرف $\overrightarrow{v}$ و nتایی مرتب مانند $\overrightarrow{v}=(x_۱,x_۲,x_۳,\dots,x_n)$ نشان می‌دهند. اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{v}$ را با نماد $|\overrightarrow{v}|$ نشان می‌دهند که برابر است با $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲+\dots+x_n^۲}$

مثال ۱۰۵. اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{v}=(۲,۳,۴)$ را محاسبه کنید.

حل: $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{۲^۲+۳^۲+۴^۲}=\sqrt{۴+۹+۱۶}=\sqrt{۲۹}$

تعریف ۱۰۶. ضرب نقطه‌ای دو بردار $\overrightarrow{v}=(a_۱,b_۱,c_۱)$ و $\overrightarrow{u}=(a_۲,b_۲,c_۲)$ را که با علامت $v\cdot\overrightarrow{u}$ نمایش می دهند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=a_۱a_۲+b_۱b_۲+c_۱c_۲$$

مثال ۱۰۷. اگر $\overrightarrow{v}=(۱,۲,۳)$ و $\overrightarrow{u}=(۴,۵,۶)$ آنگاه $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=۱\times۴+۲\times۵+۳\times۶=۴+۱۰+۱۸=۳۲$$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=۴\times۱+۵\times۲+۶\times۳=۴+۱۰+۱۸=۳۲$$

همان‌طور که در مثال بالا می‌بینید همیشه داریم $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ همچنین اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ باشد داریم $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\cos\theta$

مثال ۱۰۸. زاویه‌ی بین دو بردار $\overrightarrow{v}=(۱,۲,۳)$ و $\overrightarrow{u}=(۴,۵,۶)$ را به دست آوردید.

حل:
$$\left.\begin{array}{l}|\overrightarrow{v}|=\sqrt{۱^۲+۲^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۴}\\ |\overrightarrow{u}|=\sqrt{۴^۲+۵^۲+۶^۲}=\sqrt{۷۷}\\ \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=۴+۱۰+۱۸=۳۲\end{array}\right\}\Rightarrow ۳۲=\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۷۷}\cos\theta\Rightarrow\Rightarrow\cos\theta=\frac{۳۲}{\sqrt{۱۰۷۸}}=\frac{۱۶}{۵۳۹}$$

عدد بالا با ماشین‌حساب، ۱۲/۹۳۳۱ درجه می‌شود.

مثال ۱۰۹. مقدار a را طوری به دست آورید که دو بردار $\overrightarrow{v}=(۱,a,۳)$ و $\overrightarrow{u}=(۴,۵,۶)$ بر هم عمود باشند.

حل: چون زاویه‌ی θ برابر ۹۰ درجه است پس $\cos\theta=۰$ و می‌نویسیم

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}=|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\cos\theta\Rightarrow ۱\times۴+۵a+۶\times۳=|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\times۰\Rightarrow ۲۲+۵a=۰\Rightarrow a=-\frac{۲۲}{۵}$$

تعریف ۱۱۰. به هر تابع مانند $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ یک تابع برداری گویند. طول تابع برداری $f(t)$ در بازه‌ی $[a,b]$ برابر $\int_a^b |f'(t)|\,dt$ است.

مثال ۱۱۱. طول تابع برداری $f(t)=(t,\sin t,\cos t)$ را در بازه‌ی $[۲,۵]$ بیابید.

حل

$$f'(t)=(۱,\cos t,-\sin t)\ \Rightarrow\ |f'(t)|=\sqrt{۱^۲+\cos^۲ t+\sin^۲ t}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow\ \int_a^b |f'(t)|\,dt=\int_۲^۵ \sqrt{۲}\,dt=\sqrt{۲}(۵-۲)=۳\sqrt{۲}$$

یادآوری می‌کنیم همیشه $\cos^۲ t+\sin^۲ t=۱$

تعریف ۱۱۲. به هر جدول از اعداد ماتریس گویند. ماتریس را با نماد $M_{n\times m}$ نمایش می‌دهیم که در آن n تعداد سطرها و m تعداد ستون‌های ماتریس است. برای جمع و تفریق دو ماتریس باید تعداد سطرها و ستون‌های دو ماتریس برابر باشند. در این صورت مولفه‌های نظیر به نظیر را با هم جمع و تفریق می‌کنیم. وقتی تعداد سطرها و ستون‌های دو ماتریس برابر نباشند جمع و تفریق دو ماتریس تعریف نشده است.

مثال ۱۱۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۴&۵&۶\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۷&۸&۹\\۱۰&۱۱&۱۲\end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس‌های $A+B$، $A-B$ و $۵A$ را بنویسید.

حل:

$$A+B=\begin{bmatrix}۱+۷&۲+۸&۳+۹\\۴+۱۰&۵+۱۱&۶+۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸&۱۰&۱۲\\۱۴&۱۶&۱۸\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}۱-۷&۲-۸&۳-۹\\۴-۱۰&۵-۱۱&۶-۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶&-۶&-۶\\-۶&-۶&-۶\end{bmatrix}$$

$$۵A=\begin{bmatrix}۵\times۱&۵\times۲&۵\times۳\\۵\times۴&۵\times۵&۵\times۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۱۰&۱۵\\۲۰&۲۵&۳۰\end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس: برای ضرب دو ماتریس باید تعداد ستون‌های ماتریس سمت چپ با تعداد سطرهای ماتریس سمت راست برابر باشد. یعنی $A_{n\times k}\times B_{k\times m}=C_{n\times m}$ برای به دست آوردن حاصل‌ضرب دو ماتریس باید ابتدا سطرهای ماتریس سمت چپ را برابر بردارهای $\overrightarrow{v}_۱,\overrightarrow{v}_۲,\dots,\overrightarrow{v}_n$ بگیریم و ستون‌های ماتریس سمت راست را برابر بردارهای $\overrightarrow{u}_۱,\overrightarrow{u}_۲,\dots,\overrightarrow{u}_m$ در نظر بگیریم. سطر iام و ستون jام ماتریس حاصل‌ضرب برابر $\overrightarrow{v}_i\cdot\overrightarrow{u}_j$ است. یعنی حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار $\overrightarrow{v}_i$ و $\overrightarrow{u}_j$ را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۴&۵&۶\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۷&۸\\۱۰&۱۱\\-۲&-۵\end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $A\times B$ را بنویسید.

حل چون $A_{۲\times۳}$ و $B_{۳\times۲}$ ضرب امکان‌پذیر است و حاصل‌ضرب یک ماتریس ۲×۲ می‌شود.

$$\overrightarrow{v}_۱=(۱,۲,۳)\qquad \overrightarrow{v}_۲=(۴,۵,۶)\qquad \overrightarrow{u}_۱=(۷,۱۰,-۲)\qquad \overrightarrow{u}_۲=(۸,۱۱,-۵)$$

$$\overrightarrow{v}_۱\cdot\overrightarrow{u}_۱=۷+۲۰-۶=۲۱\qquad \overrightarrow{v}_۱\cdot\overrightarrow{u}_۲=۸+۲۲-۱۵=۱۵$$

$$\overrightarrow{v}_۲\cdot\overrightarrow{u}_۱=۲۸+۵۰-۱۲=۶۸\qquad \overrightarrow{v}_۲\cdot\overrightarrow{u}_۲=۳۲+۵۵-۳۰=۵۷$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۲۱&۱۵\\۶۸&۵۷\end{bmatrix}$$

دترمینان یک ماتریس: دترمینان ماتریس A با نماد $|A|$ نشان داده می‌شود. دترمینان فقط برای ماتریس‌های مربعی یعنی ماتریس‌هایی که تعداد سطرها و ستون‌هایشان برابر هستند تعریف می‌شود.

برای ماتریس ۲ × ۲

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$$

برای ماتریس ۳ × ۳

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

و همین‌طور برای ماتریس ۴ × ۴ و مرتبه‌ی بالاتر

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

مثال ۱۱۵. دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

حل:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۱ \times ۴ - ۲ \times ۳ = ۴ - ۶ = -۲$$

مثال ۱۱۶. دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

حل:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix} = ۱ \begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۹ \end{vmatrix} - ۲ \begin{vmatrix} ۴ & ۶ \\ ۷ & ۹ \end{vmatrix} + ۳ \begin{vmatrix} ۴ & ۵ \\ ۷ & ۸ \end{vmatrix} = ۱\times(۵\times۹-۶\times۸)-۲\times(۴\times۹-۶\times۷)+۳\times(۴\times۸-۷\times۵) = ۰$$

چند کاربرد از دترمینان ماتریس

۱) حل دستگاه n معادله n مجهول:

مثال ۱۱۷. دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 6x+7y=8 \end{cases}$ را حل کنید.

حل: در تمامی این دستگاه‌ها مخرج دترمینال ضرایب یعنی $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 3\times 7 - 6\times 4 = 21 - 24 = -3$ می‌شود.

برای به دست آوردن x و y به ترتیب به جای ضرایب x و y طرف راست دستگاه را قرار می‌دهیم و عدد به دست آمده را بر مخرج تقسیم می‌کنیم یعنی

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{24-30}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2 \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{35-32}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

مثال ۱۱۸. دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول $\begin{cases} 3x+4y+9z=5 \\ 6x+7y+2z=8 \\ 11x+10y+z=0 \end{cases}$ را حل کنید.

حل:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 6 & 8 & 2 \\ 11 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-128} = \frac{688}{-128} = -\frac{43}{8} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 2 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{-128} = \frac{623}{-128} \qquad \text{مخرج} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \\ 11 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -128$$

بر دانشجو لازم است که مقدار $z = \frac{27}{-128}$ را خودش محاسبه کند.

۲) **ضرب خارجی دو بردار:** ضرب خارجی یا برداری دو بردار $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ و $\vec{u} = (a_2, b_2, c_2)$ را که با علامت $\vec{v} \times \vec{u}$ نمایش می‌دهند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

که در آن، i و j و k بردارهای یکه محورهای x، y و z هستند یعنی $\mathrm{i} = (1,0,0)$، $\mathrm{j} = (0,1,0)$ و $\mathrm{k} = (0,0,1)$

حاصل ضرب برداری یک بردار می‌شود که بر دو بردار اولیه عمود است. بر خلاف ضرب نقطه‌ای، ضرب برداری خاصیت جابجایی ندارد و هنگام جابجایی قرینه می‌شود یعنی $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$ همچنین اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ باشد داریم $\vec{v} \times \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}| \sin\theta$

مثال ۱۱۹. اگر $\overrightarrow{v}=(۱,۲,۳)$ و $\overrightarrow{u}=(۴,۵,۶)$ آن‌گاه $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix}=(۱۲-۱۵,۱۲-۶,۵-۸)=(-۳,۶,-۳)$$

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix} ۴ & ۶ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} ۴ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=(۱۵-۱۲,۶-۱۲,۸-۵)=(۳,-۶,۳)$$

همان‌طور که انتظار داشتیم بردارهای $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ قرینه یکدیگرند. دقت کنید که این دو بردار بر بردارهای $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ عمودند یعنی داریم:

$$\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})=(۱,۲,۳)\cdot(۳,-۶,۳)=۳-۱۲+۹=۰$$

$$\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})=(۴,۵,۶)\cdot(۳,-۶,۳)=۱۲-۳۰+۱۸=۰$$

دقت بفرمایید که اگر این حاصل‌ضرب‌ها صفر نشد معنای آن این است که در محاسبه اشتباه شده است.

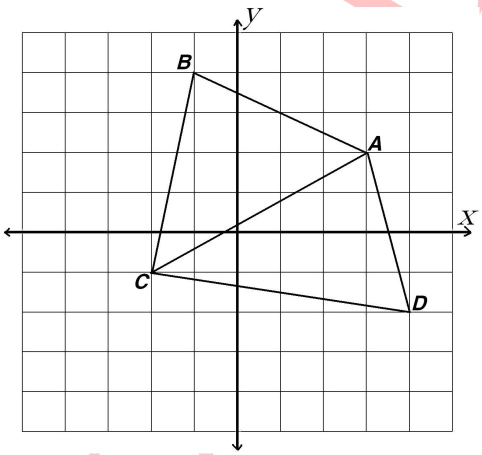
۳) محاسبه مساحت چند ضلعی‌ها در درس قبل دیدیم که یکی از روش‌های محاسبه‌ی مساحت انتگرال است به کمک دترمینان ماتریس نیز می‌توان مساحت را محاسبه کرد.

مثال ۱۲۰. مساحت مثلثی را بیابید که رئوس آن سه نقطه‌ی $A=(۱,۲)$، $B=(۳,۴)$ و $C=(-۵,-۶)$ باشد.

حل: قرار می‌دهیم $\overrightarrow{v}=A-B=(۱,۲)-(۳,۴)=(-۲,-۲)$ و $\overrightarrow{u}=A-C=(۱,۲)-(-۵,-۶)=(۶,۸)$ و داریم :

$$\text{مساحت}=\frac{\begin{vmatrix} ۶ & ۸ \\ -۲ & -۲ \end{vmatrix}}{۲}=\frac{-۱۲-(-۱۶)}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$$

در دترمینان بالا سطرها مولفه‌های بردارهای $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ هستند اگر سطرها جابجا شوند مقدار دترمینان عددی منفی می‌شود در نتیجه همیشه باید پس از به دست آوردن مساحت، قدرمطلق آن را در نظر بگیریم.



مثال ۱۲۱. مساحت چهارضلعی را بیابید که رئوس آن سه نقطه‌ی $A=(۳,۲)$، $B=(-۱,۴)$، $C=(-۲,-۱)$ ، $D=(۴,-۲)$ باشد.

حل: مطابق شکل می‌توانیم چهارضلعی را با رسم یک قطر به دو مثلث تبدیل کنیم. قدرمطلق مساحت مثلث‌ها را به دست می‌آوریم و باهم جمع می‌کنیم.

$$\overrightarrow{v}=A-B=(۳,۲)-(-۱,۴)=(۴,-۲)$$

$$\overrightarrow{u}=A-C=(۳,۲)-(-۲,-۱)=(۵,۳)$$

$$\overrightarrow{w}=A-D=(۳,۲)-(۴,-۲)=(-۱,۴)$$

$$s_۱ = \frac{\begin{vmatrix} ۴ & -۲ \\ ۵ & ۳ \end{vmatrix}}{۲} = \frac{۱۲ - (-۱۰)}{۲} = \frac{۲۲}{۲} = ۱۱ \qquad s_۲ = \frac{\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix}}{۲} = \frac{۲۰ + ۳}{۲} = \frac{۲۳}{۲} = ۱۱/۵$$

$$s = |s_۱| + |s_۲| = |۱۱| + |۱۱/۵| = ۲۲/۵$$

تمرینات

۱. اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{v} = (۵, ۲, ۶)$ و $\vec{u} = (۸, -۱, ۲)$ باشد آن‌گاه $\cos\theta$ را بیابید.

۲. مقدار a را طوری بیابید که دو بردار $\vec{v} = (۵, ۲, ۶)$ و $\vec{u} = (a, -۱, ۲)$ بر هم عمود باشند.

۳. بردار $\vec{w}$ را طوری بیابید که بر دو بردار $\vec{v} = (۵, ۲, ۳)$ و $\vec{u} = (۶, -۱, ۲)$ عمود باشد.

۴. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۵ & ۶ & -۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۶ \\ -۱ & ۶ \\ ۷ & -۲ \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس‌های $B \times A$ و $A \times B$ را بیابید.

۵. دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول $\begin{cases} -۳x + ۴y - z = ۶ \\ x + ۷y + ۳z = ۱ \\ ۵x + ۹y - ۴z = ۲ \end{cases}$ را حل کنید.

۶. مساحت چهارضلعی را بیابید که رئوس آن سه نقطه‌ی $A = (-۳, ۲)$، $B = (-۴, ۴)$، $C = (-۲, -۱)$ ، $D = (۲, -۲)$ باشد.

۷. طول تابع برداری $f(t) = (۳t, ۴t + t^۲, ۱ - t^۲)$ را در بازه‌ی $[۲, ۵]$ بیابید.

درس هشتم خط و صفحه در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^۳$

معادله‌ی خط در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^۳$: معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $p=(x_۱,y_۱,z_۱)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v}=(a,b,c)$ موازی است برابر $\frac{x-x_۱}{a}=\frac{y-y_۱}{b}=\frac{z-z_۱}{c}$ است.

مثال ۱۲۲. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p=(۱,۲,۳)$ بگذرد و با بردار $\vec{v}=(۴,۵,۶)$ موازی باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این خط بیابید.

حل: معادله‌ی خط برابر $\frac{x-۱}{۴}=\frac{y-۲}{۵}=\frac{z-۳}{۶}$ است. برای به دست آوردن نقطه‌ای دیگر روی خط x را برابر عددی غیر از یک می‌گذاریم زیرا در صورتی که x همان یک باشد دوباره نقطه‌ی $p=(۱,۲,۳)$ به دست می‌آید. می‌نویسیم:

$$x=۰\Rightarrow\frac{۰-۱}{۴}=\frac{y-۲}{۵}\Rightarrow ۵\times(-۱)=۴(y-۲)\Rightarrow ۴y-۸=-۵\Rightarrow ۴y=-۵+۸\Rightarrow ۴y=۳\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}$$
$$\Rightarrow\frac{۰-۱}{۴}=\frac{z-۳}{۶}\Rightarrow ۶\times(-۱)=۴(z-۳)\Rightarrow ۴z-۱۲=-۶\Rightarrow ۴z=-۶+۱۲\Rightarrow ۴z=۶\Rightarrow z=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

یعنی مختصات نقطه‌ی دیگر $\left(۰,\frac{۳}{۴},\frac{۳}{۲}\right)$ است.

مثال ۱۲۳. معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $p=(۱,۲,۳)$ و $q=(۵,۹,۸)$ بگذرد.

حل: قرار می‌دهیم $\vec{v}=p-q=(۱,۲,۳)-(۵,۹,۸)=(-۴,-۷,-۵)$ سپس به دل‌خواه با یکی از نقاط مثلاً p معادله‌ی خط را می‌نویسیم $\frac{x-۱}{-۴}=\frac{y-۲}{-۷}=\frac{z-۳}{-۵}$ اگر معادله‌ی خط را با نقطه‌ی q می‌نوشتیم $\frac{x-۵}{-۴}=\frac{y-۹}{-۷}=\frac{z-۸}{-۵}$ می‌شد که در ظاهر با معادله‌ی قبلی فرق می‌کند ولی اگر دانشجو نقاط روی این دو خط را به دست آورد متوجه می‌شود این نقاط با هم برابرند.

در معادله‌ی $\frac{x-x_۱}{a}=\frac{y-y_۱}{b}=\frac{z-z_۱}{c}$ نباید مخرج‌ها برابر صفر شوند در غیر این صورت معادله تعریف نشده می‌شود. البته نمی‌تواند هر سه مخرج صفر باشند ولی می‌تواند یک مخرج یا دو مخرج صفر باشند در این صورت از دو حالت خاص زیر استفاده می‌کنیم.

حالت خاص اول:

معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $p=(x_۱,y_۱,z_۱)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v}=(۰,b,c)$ موازی است برابر $x=x_۱,\ \frac{y-y_۱}{b}=\frac{z-z_۱}{c}$ است. یعنی روی تمام نقاط خط مقدار x تغییر نمی‌کند. همین طور برای $b=۰$ و $c=۰$ می‌توانیم بنویسیم.

مثال ۱۲۴. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p=(۱,۲,۳)$ بگذرد و با بردار $\vec{v}=(۴,۰,۶)$ موازی باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این خط بیابید.

حل: معادله‌ی خط برابر $y=۲$,$\frac{x-۱}{۴}=\frac{z-۳}{۶}$ است. برای به دست آوردن نقطه‌ای دیگر روی خط باید x یا z را برابر عددی دل‌خواه مثلاً $x=۲$ قرار دهیم (توجه داشته باشید که y در این خط همیشه ۲ است.)

$$\frac{x-۱}{۴}=\frac{z-۳}{۶} \Rightarrow \frac{۲-۱}{۴}=\frac{z-۳}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{z-۳}{۶} \Rightarrow ۶=۴(z-۳) \Rightarrow ۴z-۱۲=۶ \Rightarrow ۴z=۶+۱۲$$
$$\Rightarrow z=\frac{۱۸}{۴}=۴/۵$$

یعنی مختصات نقطه‌ی دیگر $(۱,۲,۴/۵)$ است.

حالت خاص دوم: معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $p=(x_۱,y_۱,z_۱)$ می‌گذرد و با بردار $\overrightarrow{v}=(۰,۰,c)$ موازی است برابر $((x_۱,y_۱,z))$ است.

یعنی در تمام نقاط x و y ثابت هستند و z هر عدد دلخواه می‌تواند باشد.

مثال ۱۲۵. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p=(۱,۲,۳)$ بگذرد و با بردار $\overrightarrow{v}=(۴,۰,۰)$ موازی باشد سپس سه نقطه‌ی دیگر روی این خط بیابید.

حل: معادله‌ی خط برابر $(x,۲,۳)$ است و سه نقطه روی خط $(۴,۲,۳)$، $(۵,۲,۳)$ و $(۶,۲,۳)$ می‌باشند.

معادلات پارامتری خط: وقتی در معادله‌ی خط قرار دهیم $\frac{x-x_۱}{a}=\frac{y-y_۱}{b}=\frac{z-z_۱}{c}=t$ معادلات زیر که معادلات پارامتری خط نام دارند به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \frac{x-x_۱}{a}=t \Rightarrow x-x_۱=at \Rightarrow x=at+x_۱ \\ \frac{y-y_۱}{b}=t \Rightarrow y-y_۱=bt \Rightarrow y=bt+y_۱ \\ \frac{z-z_۱}{c}=t \Rightarrow z-z_۱=ct \Rightarrow z=ct+z_۱ \end{cases}$$

مثال ۱۲۶. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p=(۱,۲,۳)$ بگذرد و با خط $۴x-۶=۵y+۷=۸z-۱$ موازی باشد.

حل: قرار می‌دهیم $۴x-۶=۵y+۷=۸z-۱=t$ و معادلات پارامتری خط را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ۴x-۶=t \Rightarrow ۴x=t+۶ \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}t+\frac{۶}{۴} \\ ۵y+۷=t \Rightarrow ۵y=t-۷ \Rightarrow y=\frac{۱}{۵}t-\frac{۷}{۵} \\ ۸z-۱=t \Rightarrow ۸z=t+۱ \Rightarrow z=\frac{۱}{۸}t+\frac{۱}{۸} \end{cases}$$

چون دو خط موازی هستند ضرایب t تغییر نمی‌کنند و معادله پارامتری خط به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{cases} x=\frac{۱}{۴}t+۱ \\ y=\frac{۱}{۵}t+۲ \\ z=\frac{۱}{۸}t+۳ \end{cases}$$

مثال ۱۲۷. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p=(۹,۸,۷)$ بگذرد و بر خط $\frac{z-۸}{۵}=\frac{y-۹}{۷}=\frac{x-۵}{۴}$ عمود باشد.

حل: بردار خط $\frac{z-۸}{۵}=\frac{y-۹}{۷}=\frac{x-۵}{۴}$ برابر $\overrightarrow{v}=(۴,۷,۵)$ است و معادلات پارامتری آن به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x=۴t+۵ \\ y=۷t+۹ \\ z=۵t+۸ \end{cases}$$

بردار خط عمود را برابر $\overrightarrow{w}$ می‌گیریم. این دو خط در نقطه‌ی $q=(۴t+۵, ۷t+۹, ۵t+۸)$ همدیگر را قطع می‌کنند پس دو نقطه روی خط عمود $p=(۹,۸,۷)$ و $q=(۴t+۵, ۷t+۹, ۵t+۸)$ هستند در نتیجه $\overrightarrow{w}=q-p=(۴t-۴, ۷t+۱, ۵t+۱)$ بردارهای $\overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{w}$ بر هم عمودند و ضرب نقطه‌ای آن‌ها صفر می‌شود.

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=۰\Rightarrow(۴,۷,۵)\cdot(۴t-۴, ۷t+۱, ۵t+۱)=۰\Rightarrow ۱۶t-۱۶+۴۹t+۷+۲۵t+۵=۰\Rightarrow t=\frac{۴}{۹۰}=\frac{۲}{۴۵}$$

$$\overrightarrow{w}=(۴t-۴, ۷t+۱, ۵t+۱)=\left(۴\times\frac{۲}{۴۵}-۴, ۷\times\frac{۲}{۴۵}+۱, ۵\times\frac{۲}{۴۵}+۱\right)=\left(-\frac{۱۷۲}{۴۵}, \frac{۵۹}{۴۵}, \frac{۱۱}{۹}\right)$$

معادلات پارامتری خط عمود را می‌نویسیم

$$\begin{cases} x=-\frac{۱۷۲}{۴۵}t+۹ \\ y=\frac{۵۹}{۴۵}t+۸ \\ z=\frac{۱۱}{۹}t+۷ \end{cases}$$

نقطه‌ی برخورد دو خط $q=(۴t+۵, ۷t+۹, ۵t+۸)=\left(۴\times\frac{۲}{۴۵}+۵, ۷\times\frac{۲}{۴۵}+۹, ۵\times\frac{۲}{۴۵}+۸\right)=\left(\frac{۲۳۳}{۴۵}, \frac{۴۱۹}{۴۵}, \frac{۷۴}{۹}\right)$ می‌شود.

فاصله‌ی نقطه از خط:

برای به دست آوردن فاصله‌ی نقطه‌ی p از خط l که در راستای بردار $\overrightarrow{v}$ است نقطه‌ی دل‌خواه q را روی خط l به دست می‌آوریم فاصله‌ی نقطه از خط برابر $\frac{|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{pq}|}{|\overrightarrow{v}|}$ است.

مثال ۱۲۸. فاصله‌ی نقطه‌ی $p=(۱,۶,۲)$ را از خط $\frac{x-۵}{۹}=\frac{y-۹}{۷}=\frac{z-۸}{۳}$ بیابید.

حل: $\overrightarrow{v}=(۹,۷,۳)$ و $q=(۵,۹,۸)$ و $\overrightarrow{pq}=q-p=(۵,۹,۸)-(۱,۶,۲)=(۴,۳,۶)$

$$\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{pq}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۹ & ۷ & ۳ \\ ۴ & ۳ & ۶ \end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} ۷ & ۳ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix} ۹ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} ۹ & ۷ \\ ۴ & ۳ \end{vmatrix}=(۴۲-۹, ۱۲-۵۴, ۲۷-۲۸)=(۳۳,-۴۲,-۱)$$

$$|\overrightarrow{v}|=\sqrt{۹^۲+۷^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳۹} \qquad |\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{pq}|=\sqrt{۳۳^۲+۴۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۲۸۵۴}$$

و جواب نهایی $\frac{\sqrt{۲۸۵۴}}{\sqrt{۱۳۹}}$ می‌شود. ماشین حساب آن را برابر ۴/۵۳۱۳ نشان می‌دهد.

وضعیت دو خط نسبت به یکدیگر:

دو خط در فضای سه بعدی $\mathbb{R}^۳$ نسبت به هم سه حالت دارند ۱) متقاطع ۲) موازی ۳) متنافر

تعریف ۱۲۹. دو خط را متقاطع گوییم هرگاه در یک نقطه مانند p همدیگر را قطع کنند. به عبارت دیگر نقطه‌ای مانند p روی هر دو خط باشد. دو خط متقاطع در یک صفحه قرار می‌گیرند.

تعریف ۱۳۰. دو خط را موازی گوییم هر گاه بردارهای آن‌ها با هم موازی باشند. به عبارت دیگر یکی از بردارها مضرب دیگری باشد. دو خط موازی در یک صفحه قرار می‌گیرند.

تعریف ۱۳۱. دو خط را متنافر گوییم هرگه با هم موازی نباشند و همدیگر را قطع نکنند و یا به طور معادل در یک صفحه قرار نگیرند.

مثال ۱۳۲. وضعیت دو خط $\frac{z-۸}{۶}=\frac{y-۹}{۴}=\frac{x-۵}{۲}$ و $\frac{z+۲}{۹}=\frac{y-۵}{۶}=\frac{x-۱}{۳}$ را نسبت به هم مشخص کنید.

حل: داریم $\vec{v}=(۲,۴,۶)$ و $\vec{w}=(۳,۶,۹)$ چون $\frac{۶}{۹}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$ بنابراین $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مضرب همدیگرند و دو خط موازیند.

مثال ۱۳۳. وضعیت دو خط $x-۵=y-۶=z-۷$ و $\frac{z-۹}{۲}=y-۵=\frac{x-۷}{۲}$ را نسبت به هم مشخص کنید.

حل: داریم $\vec{v}=(۱,۱,۱)$ و $\vec{w}=(۲,۱,۲)$ چون $\frac{۱}{۲}\neq\frac{۱}{۱}\neq\frac{۱}{۲}$ بنابراین $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مضرب همدیگر نیستند و دو خط موازی نیستند باید دو حالت دیگر را در نظر بگیریم معادلات پارامتری این دو خط به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x=۲t'+۷ \\ y=t'+۵ \\ z=۲t'+۹ \end{cases} \qquad \begin{cases} x=t+۵ \\ y=t+۶ \\ z=t+۷ \end{cases}$$

حالا دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول $\begin{cases} t-۲t'=۲ \\ t-t'=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+۵=۲t'+۷ \\ t+۶=t'+۵ \end{cases}$ را حل می‌کنیم که جواب آن $t=-۴$ و $t'=-۳$ است. که برای هر دو خط نقاط زیر به دست می‌آید.

$$(t+۵,t+۶,t+۷)=(-۴+۵,-۴+۶,-۴+۷)=(۱,۲,۳)$$

$$(۲t'+۷,t'+۵,۲t'+۹)=(۲\times(-۳)+۷,-۳+۵,۲\times(-۳)+۹)=(۱,۲,۳)$$

چون این دو نقطه برابر شدند پس این دو خط در نقطه‌ی $(۱,۲,۳)$ همدیگر را قطع می‌کنند و متقاطعند.

مثال ۱۳۴. وضعیت دو خط $x-۵=y-۶=z-۳$ و $\frac{z-۹}{۲}=y-۵=\frac{x-۷}{۲}$ را نسبت به هم مشخص کنید.

حل: داریم $\vec{v}=(۱,۱,۱)$ و $\vec{w}=(۲,۱,۲)$ چون $\frac{۱}{۲}\neq\frac{۱}{۱}\neq\frac{۱}{۲}$ بنابراین $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مضرب همدیگر نیستند و دو خط موازی نیستند باید دو حالت دیگر را در نظر بگیریم معادلات پارامتری این دو خط به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x=۲t'+۷ \\ y=t'+۵ \\ z=۲t'+۹ \end{cases} \qquad \begin{cases} x=t+۵ \\ y=t+۶ \\ z=t+۳ \end{cases}$$

حالا دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول $\begin{cases} t-۲t'=۲ \\ t-t'=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+۵=۲t'+۷ \\ t+۶=t'+۵ \end{cases}$ را حل می‌کنیم که جواب آن $t=-۴$ و $t'=-۳$ است. که برای هر دو خط نقاط زیر به دست می‌آید.

$$(t+۵,t+۶,t+۳)=(-۴+۵,-۴+۶,-۴+۳)=(۱,۲,-۱)$$

$$(۲t'+۷,t'+۵,۲t'+۹)=(۲\times(-۳)+۷,-۳+۵,۲\times(-۳)+۹)=(۱,۲,۳)$$

چون این دو نقطه برابر نشدند پس این دو خط متنافرند.

زاویه‌ی بین دو خط: برای محاسبه زاویه بین دو خط باید زاویه‌ی بین بردارهای آن‌ها را محاسبه کنیم.

مثال ۱۳۵. زاویه‌ی بین دو خط $x-۵ = y-۶ = z-۳$ و $\frac{x-۷}{۲} = y-۵ = \frac{z-۹}{۲}$ را محاسبه کنید.

حل: داریم $\overrightarrow{v} = (۱,۱,۱)$ و $\overrightarrow{w} = (۲,۱,۲)$ زاویه‌ی بین دو بردار را برابر θ می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}|\times|\overrightarrow{w}|\times\cos\theta \;\Rightarrow\; (۱,۱,۱)\cdot(۱,۲,۱) = \sqrt{۱^۲+۱^۲+۱^۲}\times\sqrt{۱^۲+۲^۲+۱^۲}\times\cos\theta$$

$$\Rightarrow\; ۱+۲+۱ = \sqrt{۳}\times\sqrt{۶}\times\cos\theta \Rightarrow ۴ = \sqrt{۱۸}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۴}{\sqrt{۱۸}}$$

$$\Rightarrow\; \theta = \arccos\frac{۴}{\sqrt{۱۸}}$$

ماشین‌حساب این عدد را ۱۹/۴۷۱۲ درجه نشان می‌دهد.

معادله‌ی صفحه در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^۳$:

معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی $p = (x_۱, y_۱, z_۱)$ می‌گذرد و بر بردار $\overrightarrow{v} = (a,b,c)$ عمود است برابر $a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱) = ۰$ است. در این‌جا دقت فرمایید که بردار خط موازی با آن است اما بردار صفحه بر آن عمود است از این جهت خط و صفحه با هم فرق می‌کنند.

مثال ۱۳۶. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (۱,۲,۳)$ بگذرد و بر بردار $\overrightarrow{v} = (۴,۵,۶)$ عمود باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این صفحه بیابید.

حل: معادله‌ی صفحه برابر $۴(x-۱)+۵(y-۲)+۶(z-۳) = ۰ \Rightarrow ۴x+۵y+۶z = ۴\times۱+۵\times۲+۶\times۳ \Rightarrow ۴x+۵y+۶z = ۳۲$ است. برای به دست آوردن نقطه‌ای دیگر روی صفحه x و y را دو عدد دل‌خواه مثلاً صفر می‌گذاریم و z را حساب می‌کنیم.

$$x = ۰, y = ۰ \Rightarrow ۴\times۰+۵\times۰+۶z = ۳۲ \Rightarrow ۶z = ۳۲ \Rightarrow z = \frac{۳۲}{۶} = \frac{۱۶}{۳}$$

یعنی مختصات نقطه‌ی دیگر $\left(۰,۰,\frac{۱۶}{۳}\right)$ است.

خط با دو نقطه مشخص می‌شود یعنی اگر دو نقطه از خط را داشته باشیم می‌توانیم معادله‌ی خط را بنویسیم اما برای نوشتن معادله‌ی صفحه باید سه نقطه‌ی آن را داشته باشیم.

مثال ۱۳۷. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطه‌ی $p = (۱,۲,۵)$، $q = (۳,۷,۶)$ و $r = (۹,۴,۸)$ بگذرد.

حل: بردارهای $\overrightarrow{w} = r-p$ و $\overrightarrow{u} = r-q$ در روی صفحه قرار دارند. با ضرب برداری $\overrightarrow{w}$ و $\overrightarrow{u}$ بردار عمود بر صفحه یعنی $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}$ به دست می‌آید. $\overrightarrow{u} = r-q = (۹,۴,۸)-(۳,۷,۶) = (۶,-۳,۲)$ $\qquad \overrightarrow{w} = r-p = (۹,۴,۸)-(۱,۲,۵) = (۸,۲,۳)$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ ۸ & ۲ & ۳ \\ ۶ & -۳ & ۲ \end{vmatrix} = \mathrm{i}\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۳ & ۲ \end{vmatrix} - \mathrm{j}\begin{vmatrix} ۸ & ۳ \\ ۶ & ۲ \end{vmatrix} + \mathrm{k}\begin{vmatrix} ۸ & ۲ \\ ۶ & -۳ \end{vmatrix} = (۴+۹, ۱۸-۱۶, -۲۴-۱۲) = (۱۳,۲,-۳۶)$$

حالا با هر کدام از نقاط p، q و r می‌توانیم معادله‌ی صفحه را بنویسیم بر خلاف خط هیچ فرقی از نظر شکل نمی‌کند.

$$۱۳(x-۱)+۲(y-۲)-۳۶(z-۵) = ۰ \Rightarrow ۱۳x+۲y-۳۶z = ۱۳\times۱+۲\times۲-۳۶\times۵ \Rightarrow ۱۳x+۲y-۳۶z = -۱۶۳$$

برای آزمایش جواب می‌توانیم هر سه نقطه را امتحان کنیم یعنی

$p=(۱,۲,۵)\Rightarrow ۱۳\times ۱+۲\times ۲-۳۶\times ۵=-۱۶۳$	$q=(۳,۷,۶)\Rightarrow ۱۳\times ۳+۲\times ۷-۳۶\times ۶=-۱۶۳$
$r=(۹,۴,۸)\Rightarrow ۱۳\times ۹+۲\times ۴-۳۶\times ۸=-۱۶۳$	

مثال ۱۳۸. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که دو خط موازی $\frac{z-۸}{۶}=\frac{y-۹}{۴}=\frac{x-۵}{۲}$ و $\frac{z+۲}{۹}=\frac{y-۵}{۶}=\frac{x-۱}{۳}$ در آن قرار بگیرد.

حل: این دو خط با هم موازیند یکی از بردارهای دو خط مثلاً $\overrightarrow{w'}=(۲,۴,۶)$ را در نظر می‌گیریم. بهتر است چون همه مولفه‌های این بردار بر ۲ بخش‌پذیر است بردار را بر عدد ۲ تقسیم کنیم و داریم $\overrightarrow{w}=(۱,۲,۳)$ دو نقطه‌ی $q=(۵,۹,۸)$ و $r=(۱,۵,-۲)$ را روی دو خط در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\overrightarrow{u'}=q-r=(۴,۴,۱۰)$ چون همه مولفه‌های این بردار نیز بر ۲ بخش‌پذیر است بردار را بر عدد ۲ تقسیم کنیم و داریم $\overrightarrow{u}=(۲,۲,۵)$

بردارهای $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{w}$ هر دو روی صفحه قرار دارند با ضرب برداری این دو بردار، بردار عمود بر صفحه را به دست می‌آوریم.

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۵ \end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix}=(۱۰-۶,۶-۵,۲-۴)=(۴,۱,-۲)$$

در آخر با یکی از نقطه‌های q یا r معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم. $۴(x-۵)+۱(y-۹)-۲(z-۸)=۰\Rightarrow ۴x+y-۲z=۱۳$

مثال ۱۳۹. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که دو خط متقاطع $x-۵=y-۶=z-۷$ و $\frac{x-۷}{۲}=y-۵=\frac{z-۹}{۲}$ در آن قرار بگیرد.

حل: بردارهای این دو خط $\overrightarrow{w}=(۱,۱,۱)$ و $\overrightarrow{u}=(۲,۱,۲)$ هستند این دو بردار در صفحه قرار دارند. بردار عمود بر صفحه یعنی $\overrightarrow{v}$ بر این دو بردار عمود است.

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=(۱-۲,۱-۱,۲-۱)=(-۱,۰,۱)$$

نقطه‌ی $p=(۵,۶,۷)$ بر روی خط $x-۵=y-۶=z-۷$ و درنتیجه صفحه قرار دارد. با این نقطه و بردار $\overrightarrow{v}=(-۱,۰,۱)$ معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم $-(x-۵)+۰(y-۶)+(z-۷)=۰\Rightarrow -x+z=۲$

مثال ۱۴۰. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $p=(۹,۸,۷)$ بگذرد و بر خط $\frac{x-۵}{۴}=\frac{y-۹}{۷}=\frac{z-۸}{۵}$ عمود باشد.

حل: وقتی خط بر صفحه عمود باشد بردار موازی خط، عمود بر صفحه است یعنی $\overrightarrow{v}=(۴,۷,۵)$ معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم.

$$۴(x-۹)+۷(y-۸)+۵(z-۷)=۰\Rightarrow ۴x+۷y+۵z=۱۲۷$$

فاصله‌ی نقطه از صفحه:

فاصله‌ی نقطه‌ی $q=(x_۱,y_۱,z_۱)$ تا صفحه‌ای $ax+by+cz=d$ از فرمول $\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱-d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$ به دست می‌آید.

مثال ۱۴۱. فاصله‌ی نقطه‌ی $q=(۸,۶,۲)$ را از صفحه‌ی $۳x+۴y+۵z=۹$ بیابید.

حل: $\frac{۴۹}{\sqrt{۱۰۴}}=\frac{|۳\times ۸+۴\times ۶+۵\times ۲-۹|}{\sqrt{۸^۲+۶^۲+۲^۲}}$

وضعیت دو صفحه نسبت به یکدیگر: دو صفحه در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^۳$ یا موازیند یا متقاطع وقتی موازی هستند که بردارهای آن‌ها با هم موازی باشد و در غیر اینصورت متقاطعند. وقتی دو صفحه هم‌دیگر را قطع کنند به محل برخورد آن‌ها که یک خط می‌شود که به این خط فصل مشترک دو صفحه گویند.

مثال ۱۴۲. وضعیت دو صفحه‌ی $۳x + ۶y + ۹z = ۵$ و $۲x + ۴y + ۶z = ۱$ را نسبت به هم مشخص کنید. در صورت متقاطع بودن معادله‌ی فصل مشترک آن‌ها را بیابید.

حل: داریم $\overrightarrow{v} = (۲, ۴, ۶)$ و $\overrightarrow{w} = (۳, ۶, ۹)$ چون $\frac{۶}{۹} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$ بنابراین $\overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{w}$ مضرب همدیگرند و دو صفحه موازیند.

مثال ۱۴۳. وضعیت دو صفحه‌ی $۳x + ۷y + ۹z = ۵$ و $۲x + ۴y + ۶z = ۱$ را نسبت به هم مشخص کنید. در صورت متقاطع بودن معادله‌ی فصل مشترک آن‌ها را بیابید.

حل: داریم $\overrightarrow{v} = (۲, ۴, ۶)$ و $\overrightarrow{w} = (۳, ۷, ۹)$ چون $\frac{۶}{۹} \neq \frac{۴}{۷} \neq \frac{۲}{۳}$ بنابراین $\overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{w}$ مضرب همدیگر نیستند و دو صفحه متقاطعند. برای به دست آوردن معادله‌ی خط فصل مشترک دو نقطه از این خط را به دست می‌آوریم و با کمک آن معادله‌ی خط را می‌نویسیم. یکبار قرار می‌دهیم $x = ۰$ و بار دیگر $x = ۱$ تا دو نقطه به دست آید.

$$x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۷y + ۹z = ۵ \\ ۴y + ۶z = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{۷}{۲} \\ z = -\frac{۱۳}{۶} \end{cases} \qquad x = ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۷y + ۹z = ۲ \\ ۴y + ۶z = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{۷}{۲} \\ z = -\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

دو نقطه‌ی $q = \left(۰, \frac{۷}{۲}, -\frac{۱۳}{۶}\right)$ و $r = \left(۱, \frac{۷}{۲}, -\frac{۵}{۲}\right)$ به دست آمده است. بردار موازی با خط را با تفاضل دو نقطه به دست می‌آوریم: $\overrightarrow{v} = r - q = \left(۱, \frac{۷}{۲}, -\frac{۵}{۲}\right) - \left(۰, \frac{۷}{۲}, -\frac{۱۳}{۶}\right) = \left(۱, ۰, -\frac{۱}{۳}\right)$ با استفاده از بردار و نقطه معادله‌ی خط به صورت زیر می‌شود.

$$x = -۳\left(z + \frac{۱۳}{۶}\right) \quad , \quad y = \frac{۷}{۲}$$

وضعیت خط و صفحه نسبت به یکدیگر: خط و صفحه در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^۳$ یا موازیند یا متقاطع وقتی موازی هستند که بردارهای آن‌ها بر هم عمود باشند و در غیر اینصورت متقاطعند. وقتی خطی یک صفحه را قطع کند محل برخورد آن‌ها یک نقطه می‌شود.

مثال ۱۴۴. نشان دهید خط $\frac{z-۸}{۴} = \frac{y-۹}{۳} = \frac{x-۹}{۲}$ با صفحه‌ی $۵x - ۶y + ۲z = ۱$ موازی است. فاصله‌ی این خط را از صفحه بیابید.

حل: بردار صفحه $\overrightarrow{v} = (۵, -۶, ۲)$ و بردار خط $\overrightarrow{w} = (۲, ۳, ۴)$ است. ضرب نقطه‌ای این دو بردار $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = ۵ \times ۲ + (-۶) \times ۳ + ۲ \times ۴ = ۰$ عدد صفر است پس این دو بردار بر هم عمودند و خط و صفحه موازی هستند. برای به دست آوردن فاصله‌ی خط از صفحه فاصله نقطه $(۹, ۹, ۸)$ روی خط را تا صفحه محاسبه می‌کنیم که برابر $\frac{۲}{\sqrt{۷}} = \frac{۶}{\sqrt{۶۳}} = \frac{|۵ \times ۹ + (-۶) \times ۹ + ۲ \times ۸ - ۱|}{\sqrt{۵^۲ + (-۶)^۲ + ۲^۲}}$ است.

مثال ۱۴۵. نشان دهید خط $\frac{z-۸}{۵} = \frac{y-۹}{۳} = \frac{x-۹}{۲}$ با صفحه‌ی $۵x - ۶y + ۲z = ۱$ متقاطع است. نقطه‌ی تقاطع خط و صفحه را بیابید.

حل: بردار صفحه $\overrightarrow{v} = (۵, -۶, ۲)$ و بردار خط $\overrightarrow{w} = (۲, ۳, ۵)$ است. ضرب نقطه‌ای این دو بردار $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = ۵ \times ۲ + (-۶) \times ۳ + ۲ \times ۵ = ۲$ عدد صفر نمی‌شود پس این دو بردار بر هم عمود نیستند و خط و صفحه متقاطع هستند. برای به دست آوردن نقطه‌ی تقاطع معادلات پارامتری خط را می‌نویسیم و در معادله‌ی صفحه جای‌گزین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = ۲t + ۹ & \Rightarrow x = ۲ \times (-۳) + ۹ = ۳ \\ y = ۳t + ۹ & \Rightarrow y = ۳ \times (-۳) + ۹ = ۰ \\ z = ۵t + ۸ & \Rightarrow z = ۵ \times (-۳) + ۸ = -۷ \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x = ۲t + ۹ & \Rightarrow ۵(۲t + ۹) - ۶(۳t + ۹) + ۲(۵t + ۸) = ۱ \\ y = ۳t + ۹ & \Rightarrow ۱۰t - ۱۸t + ۱۰t = ۱ - ۴۵ + ۵۴ - ۱۶ \\ z = ۵t + ۸ & \Rightarrow ۲t = -۶ \Rightarrow t = -۳ \end{cases}$$

نقطه‌ی تقاطع $(۳, ۰, -۷)$ شد.

زاویه‌ی بین دو صفحه:

برای محاسبه زاویه بین دو صفحه باید زاویه‌ی بین بردارهای آن‌ها را محاسبه کنیم.

مثال ۱۴۶. زاویه‌ی بین دو صفحه‌ی $۲x + ۴y = ۹$ و $z - y = ۶$ را محاسبه کنید.

حل: داریم $\vec{v} = (۲, ۴, ۰)$ و $\vec{w} = (۰, -۱, ۱)$ زاویه‌ی بین دو بردار را برابر θ می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \times |\vec{w}| \times \cos\theta \quad \Rightarrow \quad (۲, ۴, ۰) \cdot (۰, -۱, ۱) = \sqrt{۲^۲ + ۴^۲ + ۰^۲} \times \sqrt{۰^۲ + (-۱)^۲ + ۱^۲} \times \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad -۴ = \sqrt{۲۰} \times \sqrt{۲} \times \cos\theta \Rightarrow -۴ = \sqrt{۴۰}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{-۴}{\sqrt{۴۰}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \arccos\frac{-۴}{\sqrt{۴۰}}$$

ماشین‌حساب این عدد را ۱۲۹/۲۳۱۵ درجه نشان می‌دهد.

زاویه‌ی بین خط و صفحه:

وقتی θ زاویه‌ی بین بردارهای خط و صفحه باشد زاویه‌ی بین خط و صفحه برابر $\frac{\pi}{۲} - \theta$ است.

مثال ۱۴۷. زاویه‌ی بین صفحه‌ی $۲x + ۴y = ۹$ و خط $z = y = z$ را محاسبه کنید.

حل: داریم $\vec{v} = (۲, ۴, ۰)$ و $\vec{w} = (۱, ۱, ۱)$ زاویه‌ی بین دو بردار را برابر θ می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \times |\vec{w}| \times \cos\theta \quad \Rightarrow \quad (۲, ۴, ۰) \cdot (۱, ۱, ۱) = \sqrt{۲^۲ + ۴^۲ + ۰^۲} \times \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲} \times \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad ۲ + ۴ + ۰ = \sqrt{۲۰} \times \sqrt{۳} \times \cos\theta \Rightarrow ۶ = \sqrt{۶۰}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۶}{\sqrt{۶۰}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \arccos\frac{۶}{\sqrt{۶۰}}$$

ماشین‌حساب این عدد را ۳۹/۲۳۱۵ درجه نشان می‌دهد. بنابراین زاویه‌ی بین خط و صفحه $۵۰/۷۶۸۵ = ۹۰ - ۳۹/۲۳۱۵$ درجه است.

تمرینات

۱. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (۵, ۶, -۱)$ بگذرد و با بردار $\vec{v} = (۲, -۵, ۶)$ موازی باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این خط بیابید.

۲. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (۵, ۶, -۱)$ بگذرد و با بردار $\vec{v} = (۲, ۰, ۶)$ موازی باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این خط بیابید.

۳. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (۱, ۶, -۱)$ بگذرد و با بردار $\vec{v} = (۲, ۰, ۰)$ موازی باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این خط بیابید.

۴. معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $p = (۵, ۶, -۱)$ و $r = (۱, ۲, ۶)$ بگذرد.

۵. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (۱, ۴, ۳)$ بگذرد و با خط $x - ۶ = y + ۷ = ۱ - z$ موازی باشد.

۶. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (۱, ۴, ۳)$ بگذرد و بر خط $z - ۱ = y + ۷ = x - ۶$ عمود باشد.

۷. فاصله‌ی نقطه‌ی $p = (۱, ۶, ۲)$ را از خط $x = ۵, y = z$ بیابید.

۸. وضعیت دو خط $x - ۴ = y - ۶ = z - ۷$ و $\frac{x - ۷}{۲} = y - ۵ = \frac{z - ۹}{۲}$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۹. می‌دانیم دو خط $x + ۳ = y - ۱ = z + ۷$ و $x - ۱ = y - ۵ = ۲z + ۳$ متقاطعند نقطه‌ی تقاطع این دو خط را بیابید.

۱۰. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطه‌ی $p = (۱, -۲, ۵)$، $q = (۳, ۶, ۶)$ و $r = (۹, ۲, ۸)$ بگذرد.

۱۱. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که شامل دو خط موازی $۲x + ۳ = y - ۱ = ۳z$ و $۲x = y = ۳z$ باشد.

۱۲. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که شامل دو خط متقاطع $x + ۳ = y - ۱ = z + ۷$ و $x - ۱ = y - ۵ = ۲z + ۳$ باشد.

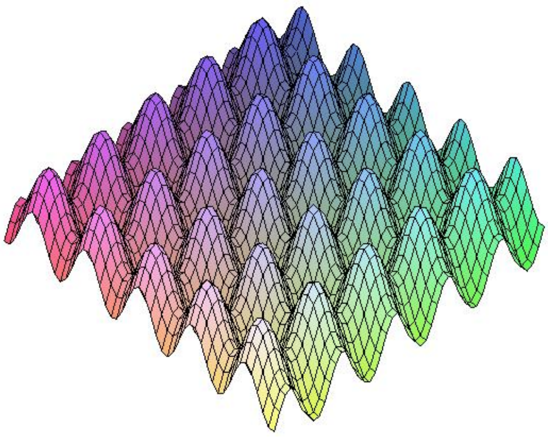
۱۳. فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع $۲x + ۳y + ۴z = ۱$ و $x + ۲y - z = ۵$ را بیابید.

۱۴. محل برخورد خط $x - ۱ = y - ۵ = z + ۳$ و صفحه‌ی $۲x + y + z = ۱۶$ را بیابید.

۱۵. زاویه‌ی بین خط $x - ۱ = y - ۵ = z + ۳$ و صفحه‌ی $۲x + y + z = ۱۶$ را بیابید.

۱۶. فاصله‌ی نقطه‌ی $p = (۱, ۶, ۲)$ را از صفحه‌ی $x + ۵y - z = ۱۶$ بیابید.

درس نهم توابع حقیقی



به هر تابع مانند $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ توابع حقیقی گویند. این توابع یک نقطه را می‌گیرند و به عدد طبیعی تبدیل می‌کنند. در این درس ما فقط با توابع $f:\mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ کار می‌کنیم این توابع به این دلیل اهمیت دارند که شکل‌های سه‌بعدی در فضا هستند. به عنوان مثال شکل تابع $f(x,y) = \sin x + \cos y$ در روبه‌رو کشیده شده است که معادله‌ی شانه تخم‌مرغ نام دارد امروزه برای تهیه بسیاری از تجهیزات صنعتی و غیره ابتدا با استفاده از این توابع این شکل‌ها را ترسیم می‌کنند.

مشتق توابع حقیقی: مشتق تابع حقیقی $f(x,y)$ یک بردار است. این بردار را گرادیان تابع f گویند و با نماد ∇f نمایش دهند و می‌نویسیم $\nabla f = (f_x, f_y)$ که در آن به f_x مشتق نسبت به متغیر x گویند و برای به دست آوردن آن y را عدد ثابت در نظر می‌گیریم سپس نسبت به x همانند توابع یک متغیره که در درس ریاضی (۱) داشتیم مشتق می‌گیریم. به طور مشابه برای به دست آوردن f_y متغیر x را ثابت در نظر می‌گیریم و نسبت به y مشتق می‌گیریم. بردار گرادیان را با نماد $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ نیز نشان داده می‌شود.(عبارت $\frac{\partial f}{\partial x}$ رند f به رند x یا تغییرات f نسبت به x خوانده می‌شود.) در جدول زیر گرادیان چند تابع به عنوان مثال محاسبه شده است.

تابع	f_x	f_y
$f(x,y) = x + y + ۶$	۱	۱
$f(x,y) = x^۲ + y + ۶$	$۲x$	۱
$f(x,y) = xy$	y	x
$f(x,y) = x^۲y^۴$	$۲xy^۴$	$۴x^۲y^۳$
$f(x,y) = \frac{x}{y}$	$\frac{۱}{y}$	$\frac{-x}{y^۲}$
$f(x,y) = \frac{x^۲}{y^۳}$	$\frac{۲x}{y^۳}$	$\frac{-۲x^۲}{y^۴}$
$f(x,y) = x\sin y$	$\sin y$	$x\cos y$
$f(x,y) = \sin(xy)$	$y\cos(xy)$	$x\cos(xy)$
$f(x,y) = x\sin(xy)$	$\sin(xy) + xy\cos(xy)$	$x^۲\cos(xy)$

تابع	f_x	f_y
$f(x,y)=\sin\left(\frac{x}{y}\right)$	$\frac{۱}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$	$\frac{-x}{y^۲}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$
$f(x,y)=\sqrt{xy}$	$\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{y}{x}}$	$\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{x}{y}}$
$f(x,y)=x\sqrt{y}$	$\sqrt{y}$	$\frac{x}{۲\sqrt{y}}$
$f(x,y)=x\arctan y$	$\arctan y$	$\frac{x}{۱+y^۲}$
$f(x,y)=x\arctan(xy)$	$\arctan(xy)+\frac{xy}{۱+x^۲y^۲}$	$\frac{x^۲}{۱+x^۲y^۲}$
$f(x,y)=xe^y$	e^y	xe^y
$f(x,y)=e^{xy}$	ye^{xy}	xe^{xy}
$f(x,y)=xe^{xy}$	$e^{xy}+xye^{xy}$	$x^۲e^{xy}$
$f(x,y)=x\ln y$	$\ln y$	$\frac{x}{y}$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر شکل‌های سه‌بعدی: یکی از کاربردهای مشتق به دست آوردن معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر شکل‌های سه‌بعدی است برای این منظور باید تمامی فرمول را یک طرف تساوی بیاوریم سپس بردار مشتق همان بردار عمود بر شکل است.

مثال ۱۴۸. معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر شکل $xy+xz=y^۲-۱$ را در نقطه‌ی $q=(۱,۲,۳)$ بیابید.

حل: ابتدا باید تمامی فرمول را یک طرف تساوی بیاوریم که می‌شود. $xy+xz-y^۲+۱=۰$ بردار مشتق برابر $(y+z,x-۲y,x)$ نقطه‌ی $q=(۱,۲,۳)$ را در مشتق جای‌گزین می‌کنیم بردار عمود بر شکل برابر $\vec{v}=(۲+۳,۱-۲\times۲,۱)=(۵,-۳,۱)$ می‌شود و در آخر:

$$\frac{x-۱}{۵}=\frac{y-۲}{-۳}=z-۳ \qquad \text{معادله‌ی خط عمود}$$

$$۵(x-۱)-۳(y-۲)+(z-۳)=۰ \qquad \text{معادله‌ی صفحه‌ی مماس}$$

مثال ۱۴۹. معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر تابع $f(x,y)=x^۲y$ را در نقطه‌ی $q=(۲,۳)$ بیابید.

حل: قرار می‌دهیم $z=x^۲y$ تمامی فرمول را یک طرف تساوی می‌آوریم که می‌شود. $z-x^۲y=۰$ بردار مشتق برابر $(-۲xy,-x^۲,۱)$ نقطه‌ی $q=(۲,۳)$ را در مشتق جای‌گزین می‌کنیم بردار عمود بر شکل برابر $\vec{v}=(-۲\times۲\times۳,-۲^۲,۱)=(-۱۲,-۴,۱)$ می‌شود. چون $f(۲,۳)=۲^۲\times۳=۱۲$ نقطه‌ی تماس $(۲,۳,۱۲)$ است و در آخر.

$$\frac{x-۲}{-۱۲}=\frac{y-۳}{-۴}=z-۱۲ \qquad \text{معادله‌ی خط عمود}$$

$$-۱۲(x-۲)-۴(y-۳)+(z-۱۲)=۰ \qquad \text{معادله‌ی صفحه‌ی مماس}$$

مشتق دوم و نقاط ماکزیمم، مینیمم و زینی:

تعریف ۱۵۰. اگر از مشتق اول تابع دوباره مشتق بگیریم مشتق دوم حاصل می‌شود در حقیقت مشتق دوم تابع $f(x,y)$ ماتریس زیر است که در آن همیشه داریم $f_{xy} = f_{yx}$

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

مثال ۱۵۱. مشتقات اول و دوم تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۳ + ۵x + ۶y + xy$ را بیابید.

حل:

$$f_y = ۳y^۲ + ۶ + x \Rightarrow \begin{cases} f_{yx} = ۱ \\ f_{yy} = ۶y \end{cases} \qquad f_x = ۲x + ۵ + y \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = ۲ \\ f_{xy} = ۱ \end{cases}$$

مثال ۱۵۲. مشتقات اول و دوم تابع $g(x,y) = x \arctan y$ را بیابید.

حل:

$$g_y = \frac{x}{۱ + y^۲} \Rightarrow \begin{cases} g_{yx} = \dfrac{۱}{x^۲ + ۱} \\ g_{yy} = -\dfrac{۲xy}{(۱ + y^۲)^۲} \end{cases} \qquad g_x = \arctan y \Rightarrow \begin{cases} g_{xx} = ۰ \\ g_{xy} = \dfrac{۱}{x^۲ + ۱} \end{cases}$$

مثال ۱۵۳. مشتقات اول و دوم تابع $h(x,y) = x^۲ \ln y$ را بیابید.

حل:

$$h_y = \frac{x^۲}{y} \Rightarrow \begin{cases} h_{yx} = \dfrac{۲x}{y} \\ h_{yy} = -\dfrac{x^۲}{y^۲} \end{cases} \qquad h_x = ۲x \ln y \Rightarrow \begin{cases} h_{xx} = ۲ \ln y \\ h_{xy} = \dfrac{۲x}{y} \end{cases}$$

تعریف ۱۵۴. نقطه‌ای از تابع که مشتق وجود ندارد یا مشتق برابر صفر باشد نقطه‌ی بحرانی نام دارد.

آزمون مشتق دوم: فرض کنیم مشتق دوم تابع $f(x,y)$ ماتریس $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ باشد در این صورت برای یک نقطه‌ی بحرانی چهار حالت اتفاق می‌افتد.

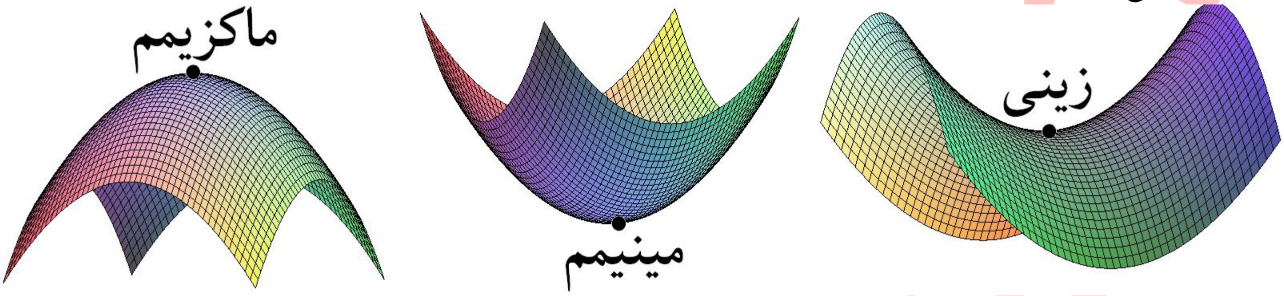
حالت اول: اگر دترمینان ماتریس عددی منفی باشد آنگاه نقطه‌ی بحرانی یک نقطه زینی (شبیه زین اسب) است.

حالت دوم: اگر دترمینان ماتریس عددی مثبت باشد و قطر اصلی ماتریس نیز اعدادی مثبت باشند یعنی $f_{xx} > ۰$ و $f_{yy} > ۰$ آنگاه نقطه‌ی بحرانی مینیمم (چاله) است.

حالت سوم: اگر دترمینان ماتریس عددی مثبت باشد و قطر اصلی ماتریس نیز اعدادی منفی باشند یعنی $f_{xx} < ۰$ و $f_{yy} < ۰$ آنگاه نقطه‌ی بحرانی ماکزیمم (قله) است.

حالت چهارم: اگر دترمینان ماتریس صفر باشد آزمون بی‌نتیجه است.

در شکل زیر انواع نقاط بحرانی کشیده شده است.



مثال ۱۵۵. می‌دانیم نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y)=\cos x+\cos y$ است. با استفاده از آزمون مشتق دوم نوع نقطه‌ی بحرانی را مشخص کنید.

حل: ابتدا بررسی می‌کنیم که مشتق در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ برابر صفر باشد.

$$\begin{cases} f_x=-\sin x \\ f_y=-\sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x=-\sin\circ=\circ \\ f_y=-\sin\circ=\circ \end{cases}$$

ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\cos x & \circ \\ \circ & -\cos y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\cos\circ & \circ \\ \circ & -\cos\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & \circ \\ \circ & -۱ \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر ۱ است و قطر اصلی عددی منفی است پس این نقطه ماکزیمم است.

مثال ۱۵۶. می‌دانیم نقطه‌ی (π,π) یک نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y)=\cos x+\cos y$ است. با استفاده از آزمون مشتق دوم نوع نقطه‌ی بحرانی را مشخص کنید.

حل: ابتدا بررسی می‌کنیم که مشتق در نقطه‌ی (π,π) برابر صفر باشد.

$$\begin{cases} f_x=-\sin x \\ f_y=-\sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x=-\sin\pi=\circ \\ f_y=-\sin\pi=\circ \end{cases}$$

ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\cos x & \circ \\ \circ & -\cos y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\cos\pi & \circ \\ \circ & -\cos\pi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & ۱ \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر ۱ است و قطر اصلی عددی مثبت است پس این نقطه مینیمم است.

مثال ۱۵۷. می‌دانیم نقطه‌ی $(\pi,\circ)$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y)=\cos x+\cos y$ است. با استفاده از آزمون مشتق دوم نوع نقطه‌ی بحرانی را مشخص کنید.

حل: ابتدا بررسی می‌کنیم که مشتق در نقطه‌ی $(\pi,\circ)$ برابر صفر باشد.

$$\begin{cases} f_x = -\sin x \\ f_y = -\sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = -\sin \pi = 0 \\ f_y = -\sin 0 = 0 \end{cases}$$

ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \pi & 0 \\ 0 & -\cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر ۱– است نقطه‌ی $(\pi, 0)$ یک نقطه‌ی زینی است.

مثال ۱۵۸. نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x, y) = xy$ را مشخص کنید سپس نوع این نقطه‌ی بحرانی را تعیین کنید.

حل: ابتدا مشتق را برابر صفر می گذاریم تا نقطه‌ی بحرانی به دست بیاید

$$\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

نقطه‌ی $(0, 0)$ بحرانی است. ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر ۱– است نقطه‌ی $(0, 0)$ یک نقطه‌ی زینی است.

مثال ۱۵۹. نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x + y$ را مشخص کنید سپس نوع این نقطه‌ی بحرانی را تعیین کنید.

حل: ابتدا مشتق را برابر صفر می گذاریم تا نقطه‌ی بحرانی به دست بیاید

$$\begin{cases} f_x = 2x + y + 1 \\ f_y = 2y + x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + x + 1 = 0 \\ 2y + x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + x = -1 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

توجه داشته باشید که دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول بالا با روش ماتریس به سادگی حل می‌شود.

$$\text{مخرج} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad \text{صورت}x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad \text{صورت}y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

نقطه‌ی $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ بحرانی است. ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر ۳ است و قطر اصلی عددی مثبت است پس این نقطه مینیمم است.

مثال ۱۶۰. نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^3-3x+y^2+2x$ را مشخص کنید سپس نوع این نقاط بحرانی را تعیین کنید.

حل: ابتدا مشتق را برابر صفر می گذاریم تا نقاط بحرانی به دست بیایند

$$\begin{cases} f_x=3x^2-3 \\ f_y=2y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-3=0 \\ 2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2=3 \\ 2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

نقاط $(1,-1)$ و $(-1,-1)$ بحرانی هستند. ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

این ماتریس برای نقطه‌ی $(1,-1)$ برابر $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ می‌شود. چون دترمینان ماتریس برابر ۱۲ است و قطر اصلی عددی مثبت است پس نقطه‌ی $(1,-1)$ مینیمم است.

برای نقطه‌ی $(-1,-1)$ ماتریس مشتق دوم برابر $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ چون دترمینان ماتریس برابر -12 است نقطه‌ی $(-1,-1)$ یک نقطه‌ی زینی است.

مثال ۱۶۱. نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^2y$ را مشخص کنید سپس نوع این نقاط بحرانی را تعیین کنید.

حل: ابتدا مشتق را برابر صفر می گذاریم تا نقاط بحرانی به دست بیایند

$$\begin{cases} f_x=2xy \\ f_y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy=0 \\ x^2=0 \end{cases}$$

همه‌ی نقاط به صورت $(0,y)$ بحرانی هستند. ماتریس مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس برابر صفر است آزمون مشتق دوم بی‌نتیجه است.

تمرینات

۱. مشتق توابع زیر را حساب کنید و در جدول بنویسید.

تابع	f_x	f_y
$f(x,y)=x^{۲}+y^{۲}+۶xy$		
$f(x,y)=\dfrac{\sin y}{x}$		
$f(x,y)=\cos(x^{۲}y)$		
$f(x,y)=x^{۲}\arcsin y$		
$f(x,y)=\dfrac{x^{۴}}{y}$		
$f(x,y)=\dfrac{(\sin x)^{۲}}{y^{۳}}$		
$f(x,y)=x^{۲}\cos y$		
$f(x,y)=\tan(xy)$		
$f(x,y)=x\tan(xy)$		
$f(x,y)=\arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$		
$f(x,y)=\sqrt[۵]{xy}$		
$f(x,y)=x\sqrt[۵]{y}$		
$f(x,y)=x^{۲}\arctan\sqrt{y}$		
$f(x,y)=x\arctan\sqrt{xy}$		
$f(x,y)=x^{۲}e^{y}$		
$f(x,y)=x^{۲}e^{xy}$		
$f(x,y)=xe^{xy^{۲}}$		
$f(x,y)=\dfrac{x}{\ln y}$		

۲. معادله‌ی خط عمود و صفحه مماس بر شکل $xyz+z^{۲}y-۶xy^{۲}=-۳$ را در نقطه‌ی $(۲,۳,۵)$ بیابید.

۳. معادله‌ی خط عمود و صفحه مماس بر تابع $f(x,y)=۲x^{۳}y$ را در نقطه‌ی $(۲,۳)$ بیابید.

۴. می‌دانیم نقطه‌ی $\left(\frac{\pi}{۲},۰\right)$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y)=\sin x+\cos y$ است. نوع نقطه‌ی بحرانی را مشخص کنید.

۵. نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x,y)=۶x^{۲}-y^{۲}+۴xy+۶x+y$ را مشخص کنید سپس نوع این نقطه‌ی بحرانی را تعیین کنید.

۶. نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^{۳}-۶x-y^{۲}+۲x$ را مشخص کنید سپس نوع این نقاط بحرانی را تعیین کنید.