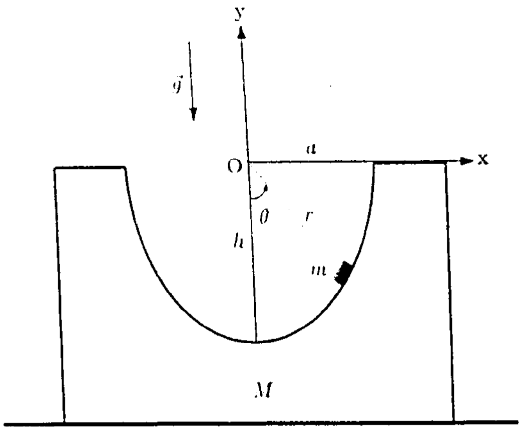
نام : علی	 **باشگاه دانش پژوهان جوان**	**زمان پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه**
نام خانوادگی : فتحی		**تاریخ آزمون: ۹۳/۵/۲۲**
المپیاد:فیزیک(امتحان دوم)		

مسئله ی) ۱

امتحان دوم دوره تابستانی المپیاد فیزیک ۹۳



مسئله‌ی ۱) در دستگاه شکل مقابل جرم کوچک m از حال سکون در زاویه $\theta = \pi/2$ رها می‌شود و در صفحه‌ی قائم داخل کاسه‌ای به جرم M سر می‌خورد. زاویه θ به سمت راست امتداد قائم مثبت و به سمت چپ آن منفی است. سطح اتکای کاسه با میزی که روی آن قرار دارد، افقی است و کلیه سطوح بدون اصطکاک هستند. سطح ظرف طوری تراش خورده است که طول r نشان داده شده در شکل تابع معین $r(\theta)$ است که $r(0) = h$، $r(\pi/2) = a$ و $r(\theta)$ تابعی زوج است.

a) نیروی عمودی سطح در پایین‌ترین نقطه کاسه $(\theta = 0)$ را بر حسب پارامترهایی که از تابع $r(\theta)$ در آن نقطه به دست می آید، حساب کنید. (۵ نمره)

یادآوری: شعاع انحنای خمی با معادلات پارامتری $x = x(u)$ و $y = y(u)$ در هر نقطه از رابطه

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|y''x' - x''y'|}$$

به دست می آید که علامتهای $'$ و $''$ به ترتیب نشان دهنده مشتق‌های اول و دوم نسبت به پارامتر مسیر u هستند.

b) بسامد نوسان‌های کوچک دستگاه حول وضعیت تعادل پایدار را حساب کنید. (۳/۵ نمره)

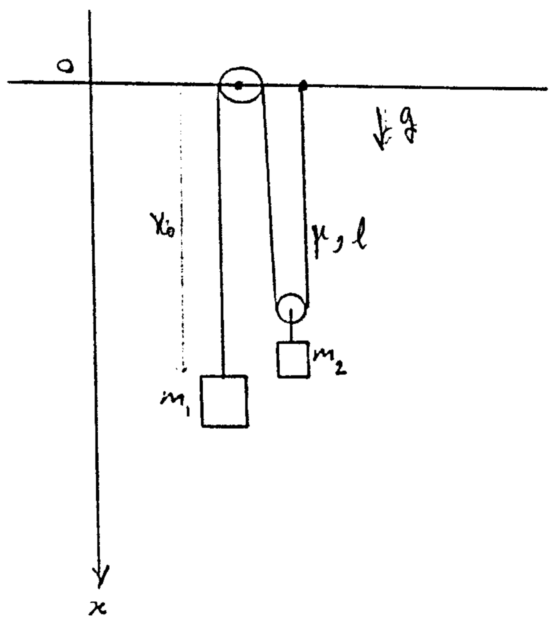
c) برای حالت خاص $r(\theta) = (h - a)\cos\theta + a$ جواب قسمت‌های a و b را حساب کنید. (۱/۵ نمره)

طرح از دکتر شیرزاد

ادامه سوالات در صفحه بعد

مسئله ی) ۲

مسئله‌ی 2) در دستگاه شکل زیر جرم نخ μ، طول نخ l و جرم و شعاع قرقره‌ها ناچیز است. جرم m_1 از مکان اولیه $x = x_0$ و از حال سکون رها می‌شود و هر نوع اتلاف انرژی قابل چشمپوشی است. در این مسئله شما مجاز هستید از توابع مشخصی که بر حسب پارامترهای داده شده تعریف می‌کنید در بیان جواب‌ها استفاده کنید.



a) سرعت و شتاب جرم m را در هر لحظه بر حسب x به دست آورید. (۳ نمره)

b) نیروی کل سقف نگهدارنده دستگاه را در هر لحظه بر حسب x به دست آورید. (۱/۵ نمره)

c) چه شرطی برقرار باشد تا دستگاه یک نقطه تعادل داشته باشد. (۱/۵ نمره)

d) با فرض آنکه $m_1 = m$، $m_2 = 3m$ و $\mu = 2m/3$ و دستگاه از وضعیت تعادل طوری شروع به حرکت کند که جرم m_1 به سمت بالا برود، سرعت جرم m_1 هنگام رسیدن به انتهای مسیر چقدر است و در چه مدتی نصفه دوم مسیرش را طی می‌کند؟ محاسبه را تا آنجا که امکان‌پذیر است ادامه دهید و جوابها را ساده کنید. (۴ نمره)

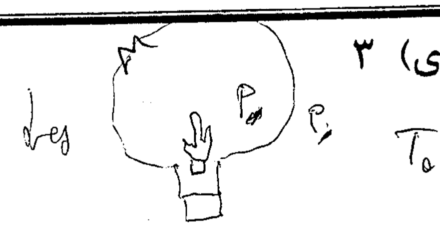
ممکن است این انتگرال به کار آید

$$\int \frac{(\sqrt{u+a})du}{u} = 2\sqrt{u+a} - 2\sqrt{a}\tanh^{-1}(\sqrt{1+u/a})$$

طرح از دکتر شیرزاد

ادامه سوالات در صفحه بعد

مسئله ی) ۳



در این مسئله می‌خواهیم مدلِ ساده‌ای از یک بالن را بررسی کنیم. بالن مثلِ یک بادکنکِ بزرگ است که محفظه‌ای برای حملِ مسافر از آن آویزان شده است. یک مشعل، گازِ درونِ بالن را گرم می‌کند. جنسِ بالن، نایلن است و نمی‌تواند اختلافِ فشاری بینِ گازِ درونِ بالن و هوای بیرون تحمل کند. نیروی ارشمیدس باعث می‌شود بالن بالا برود. در این مسئله از حجمِ مسافران و محفظه‌شان در مقابلِ حجمِ بالن صرف‌نظر می‌کنیم. شتابِ گرانشِ زمین g است و فرض می‌کنیم با ارتفاع تغییر نمی‌کند.

در کلِ این مسئله، هوای بیرون و گازِ درون بالن را گازهای ایده‌آل فرض می‌کنیم، که رابطه‌ی $P\mu = \rho R T$ برایشان برقرار است. در این رابطه، P فشار، μ جرمِ مولی، ρ چگالی، T دما و R یک ثابتِ معلوم است. برای سادگی فرض کنید هوا فقط از یک گاز تشکیل شده و جرم مولی‌اش مقدارِ معلومِ μ_a است. جرمِ مولی گازِ درونِ بالن هم مقدارِ معلومِ μ_b است. در این مسئله، فرض کنید دمای جوِ زمین با ارتفاع تغییر نمی‌کند، و همه جا T_0 است. فشارِ جو در سطحِ زمین را با P_0 نشان می‌دهیم، که مقدارش معلوم است.

در ابتدا فرض کنید بالن روی زمین است و چگالی هوا در سطحِ زمین $\rho_a(0)$ و معلوم است.

الف) فرض کنید مجموعِ جرمِ محفظه و مسافران M باشد. فرض کنید چگالی گازِ درونِ بالن در این لحظه، $\rho_b(0)$ و معلوم است. حداقل مقدارِ حجمِ بالن چه قدر باشد (بر حسبِ $(M, \rho_a(0), \rho_b(0)$) که بالن از سطحِ زمین جدا شود؟ (۱ نمره)

از این جا به بعد، حجمِ بالن را با V نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم همیشه ثابت می‌ماند، و جزوِ داده‌های مسئله است.

ب) با فرضِ ایستایی جَو، فشارِ جو را در ارتفاعِ z از سطحِ زمین بر حسبِ P_0, μ_a, g, R, T_0, z بیابید. ایستایی یعنی هر المان از جَو را که در نظر بگیریم، وزنش با اختلاف فشار بالا و پایین خنثی می‌شود. (۲ نمره)

پ) فرض کنید می‌خواهیم بالن با سرعتِ خیلی کمی بالا برود، به طوری که در هر لحظه بتوان نیروی وزنش را با نیروی بالابرنده مساوی گرفت. دمای گازِ درونِ بالن را بر حسبِ ارتفاع برای این منظور بیابید. (۲ نمره)

ت) فرض کنید گازِ درونِ بالن را حداکثر بتوان تا دمای T_{max} بالا برد. با توجه به این محدودیت دمایی، بیشینه‌ی ارتفاعی که می‌توانیم با این روش بالن را بالا ببریم، چه‌قدر است؟ (۱ نمره)

ادامه سوالات در صفحه بعد

ادامه مسئله ی) ۳

حالا فرض کنید در هر ارتفاع، دما را α برابرِ دمایی که در قسمتِ «پ» یافتید، تنظیم کنیم که $\alpha > 1$ مقداری ثابت است.

ث) شتابِ بالن را بر حسبِ ارتفاع بیابید. (۲ نمره)

ج) سرعتِ بالن را بر حسبِ ارتفاع بیابید. (۳ نمره)

فرض کنید $\alpha = 1 + \epsilon$ که در آن ϵ ثابتی مثبت و خیلی کوچک است. همچنین فرض کنید ارتفاع پرواز بالن به قدری کوچک است که بتوانیم فشار هوا را با یک تابع خطی به صورت $P = P_0(1 + \beta z)$ بر حسب ارتفاع تقریب بزنیم. ادامه ی محاسبات را تا مرتبه‌ی غالب نسبت به ϵ و تا مرتبه ی مناسب نسبت به βz که تقریب بیان شده صحیح باشد، انجام دهید.

چ) سرعت بالن را بر حسب ارتفاع تا مرتبه‌ی تقریب های ذکر شده محاسبه کنید. (۱ نمره)

ح) اگر بالن در زمان صفر و از حالت سکون از سطح زمین شروع به حرکت کند، رابطه‌ای بین ارتفاع z بالن و زمان حرکت بیابید. (۲ نمره)

خ) زمانی را که طول می‌کشد بالن به بیشینه‌ی ارتفاع به دست آمده در بخش «ت» برسد،محاسبه کنید. (۱ نمره)

راهنمایی: انتگرال‌های زیر ممکن است مفید باشند.

$$\int \frac{du}{u\,(u+a)} = \frac{1}{a}\ln\frac{u}{u+a} \;+\; \text{ثابت}$$

$$\int \frac{du}{u+a} = \ln(u+a) \;+\; \text{ثابت}$$

ادامه سوالات در صفحه بعد

مسئله ی) ۴

برای انتگرال‌هایی که با آنها روبرو می‌شوید، شاید راهنمایی‌هایی که در پایان سوال آمده کمک کند.

در این سوال می‌خواهیم بستگی کمیت‌های ترمودینامیکی در جو را با فرض معادله‌ی حالت وان‌دروالس بررسی کنیم.

شتاب گرانش، g، را مستقل از ارتفاع می‌گیریم.

فرض می‌کنیم جو را به لایه‌های کوچکی تقسیم کرده‌ایم و در هر لایه فشار، دما و چگالی تنها به ارتفاع آن لایه از سطح زمین بستگی دارد. ارتفاع از سطح زمین را با z نشان می‌دهیم. به این ترتیب از این پس داریم: $P(z)$، $\rho(z)$ و $T(z)$.

الف) (۰.۵ نمره)فرض کنید هر لایه از جو تعادل مکانیکی دارد. قانون دوم نیوتون را برای هر لایه بنویسید.

معادله‌ی حالت وان‌دروالس چنین است:

$$(P + a\frac{n^2}{V^2})(V - nb) = nRT \qquad (1)$$

که در آن P فشار، n تعداد مول گاز، V حجم، T دما، R ثابت گازهای کامل است. a و b ثوابتی هستند که از کمیت‌های ترمودینامیک مستقل‌اند و تنها به جنس گاز برمی‌گردند.

ب) (۰.۵ نمره) در معادله‌ی حالت وان‌دروالس حجم و تعداد مول را حذف کنید و معادله‌ی حالت را برحسب چگالی و جرم مولی، M، بنویسید.

فرض کنید بر هر لایه از جو معادله‌ی حالت وان‌دروالس حاکم است و ثوابت a، b و جرم مولی گاز مستقل از ارتفاع هستند. برای به دست آوردن بستگی کمیت‌ها به ارتفاع، مساله را در دو حالت حل می‌کنیم: هم‌دما بودن جو و بی‌دررو بودن.

ج) (۳ نمره) با فرض ثابت بودن دمای جو، T، معادله‌ای جبری(و نه دیفرانسیلی!) برای $\rho(z)$ بنویسید که از حل آن چگالی بر حسب ارتفاع به دست بیاید. چگالی در سطح زمین را $\rho(0)$ بگیرید.

به طور معمول گفته می‌شود که کمیت‌های a و b کوچک‌اند. اما این کمیت‌ها بُعد فیزیکی دارند!

د) (۱ نمره) با استفاده از آنچه در قسمت ج) یافتید (یا روشی دیگر) به طور جداگانه مشخص کنید که کمیت‌های a و b نسبت به چه کمیت‌های فیزیکی کوچک هستند. اگر لازم شد، چگالی نوعی گاز را مقدار آن در سطح زمین بگیرید.

ادامه سوالات در صفحه بعد

ادامه مسئله ی) ۴

انرژی گاز واندرواس به این شکل است:

$$U = \frac{3}{2}nRT - a\frac{n^2}{V} \qquad (2)$$

ه) (۱ نمره) برای فرآیند بی‌دررویی که گاز واندروالس طی می‌کند، تابعی بر حسب چگالی و دما بنویسد که در طی فرآیند ثابت باشد.

و) (۱ نمره) برای یک فرآیند بی‌دررو با استفاده از قسمت و) دما را از معادله‌ی حالت حذف کنید و فشار را به عنوان تابعی از چگالی و ثوابت بنویسید. دما در سطح زمین را $T(0)$ و چگالی در سطح زمین را $\rho(0)$ بگیرید.

ز) (۳ نمره) فرض کنید رابطه‌ی قسمت و) برای جو برقرار است. معادله‌ای جبری(و نه دیفرانسیلی!) برای $\rho(z)$ بنویسید که از حل آن چگالی بر حسب ارتفاع به دست بیاید. دما در سطح زمین را $T(0)$ و چگالی در سطح زمین را $\rho(0)$ بگیرید.

راهنمایی برای انتگرال گیری

شما می‌توانید برای انتگرال گیری از توابع جبری که به شکل کسر ظاهر می‌شوند، از تجزیه‌ی کسری استفاده کنید، برای مثال:

$$r \neq s, n \in N \Longrightarrow \frac{1}{(x-r)(x-s)^n} = \frac{A}{x-r} + \frac{B_1}{(x-s)} + \frac{B_2}{(x-s)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(x-s)^n} \qquad (3)$$

که ثوابت، A_1 و B_1 تا B_n باید تعیین شوند.

اگر $(s \in R)$ داریم:

$$\int dx \frac{x^{\frac{2}{3}}}{(1-sx)^{\frac{8}{3}}} = \frac{3}{5}\frac{x^{\frac{5}{3}}}{(1-sx)^{\frac{5}{3}}} \qquad (4)$$

$$\int dx \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(1-sx)^{\frac{8}{3}}} = \frac{3}{10}x^{\frac{2}{3}}\frac{(5-3sx)}{(1-sx)^{\frac{5}{3}}} \qquad (5)$$

طرح از ایمان مهیایه

« باآرزوی موفقیت شما »

a)

مسئله ① آزمون دوم :

پایستگی تکانه : $MV + m(V + h\dot\theta(0)) = 0 \Rightarrow (m+M)V + mh\dot\theta(0) = 0$

سرعت m در θ=0

$$\Rightarrow V = \frac{-m}{m+M} h\dot\theta(0)$$

پایستگی انرژی : $\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m(V + h\dot\theta(0))^2 = mgh \Rightarrow 2mgh = \frac{Mm^2}{(m+M)^2}h^2\dot\theta^2(0) + \frac{mM^2}{(m+M)^2}h^2\dot\theta^2(0)$

$$\Rightarrow 2mgh = \frac{Mm}{M+m}h^2\dot\theta^2(0) \Rightarrow \dot\theta^2(0) = \frac{2(m+M)g}{Mh} \Rightarrow \dot\theta(0) = -\sqrt{\frac{2(m+M)g}{Mh}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{m}{M+m} h\sqrt{\frac{2(m+M)g}{Mh}}$$

$$y = -r\cos\theta \Rightarrow \dot y = r\sin\theta\,\dot\theta - r'\dot\theta\cos\theta \Rightarrow \ddot y = (r\sin\theta - r'\cos\theta)\ddot\theta + (r'\sin\theta - r''\cos\theta)\dot\theta^2 + (r\cos\theta + r'\sin\theta)\dot\theta^2$$

$$\Rightarrow \ddot y_{\substack{(\theta=0)\\(r'=0)}} = -r''(0)\dot\theta^2_{(0)} + r(0)\dot\theta^2(0) = (h - r''(0))\dot\theta^2(0)$$

$$m\ddot y(0) = N - mg \Rightarrow N = m\left[g + (h - r''_0)\frac{2(m+M)g}{Mh}\right] = \boxed{mg\left[1 + 2\frac{h - r''_0}{h}\left(\frac{m+M}{M}\right)\right]}$$

راه دوم :
$$\begin{cases} x = r\sin\theta \Rightarrow x' = r'\sin\theta + r\cos\theta \\ y = -r\cos\theta \Rightarrow y' = r\sin\theta - r'\cos\theta \Rightarrow y'' = r\cos\theta + 2r'\sin\theta - r''\cos\theta \end{cases} \Rightarrow R_0 = \frac{x_0'^2}{y_0''} = \frac{h^2}{h - r_0''}$$

$$m\frac{(h^2\dot\theta_0^2)}{R} = N - mg \Rightarrow N = mg\left[1 + 2\frac{h - r_0''}{h}\left(\frac{m+M}{M}\right)\right]$$

---

b)
$$\begin{cases} \dot x_{rel} = (r'\sin\theta + r\cos\theta)\dot\theta \\ \dot y = (r\sin\theta - r'\cos\theta)\dot\theta \end{cases}$$

پایستگی تکانه : $MV + m(V + \dot x_{rel}) = 0$

فرض: m از θ₀ رها شود

$$\Rightarrow V = \frac{-m}{m+M}\dot x_{rel} = \frac{-m}{m+M}(r'\sin\theta + r\cos\theta)\dot\theta \xrightarrow[\text{مرتبه 1}]{}$$

$$\begin{cases} \sin\theta = \theta \\ \cos\theta = 1 - \theta^2/2 \\ r(\theta) = h + \frac{1}{2}r_0''\theta^2 \Rightarrow r' = r_0''\theta \end{cases}$$

$$\Delta y = r\cos\theta - r(\theta_0)\cos\theta_0 = \left(h + \frac{1}{2}r_0''\theta^2\right)\left(1 - \theta^2/2\right) - \left(h + \frac{1}{2}r_0''\theta_0^2\right)\left(1 - \frac{\theta_0^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{1}{2}(r_0'' - h)(\theta^2 - \theta_0^2)$$

$$V = \frac{-m}{m+M}h\dot\theta \quad \Rightarrow mg\frac{1}{2}(r_0'' - h)(\theta^2 - \theta_0^2) = \frac{1}{2}M\frac{m^2}{(m+M)^2}h^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}mv_m^2$$

$$v_m^2 = \dot y^2 + (V + \dot x_{rel})^2 \overset{\text{مرتبه دوم}}{=} (V + \dot x_{rel})^2 = \left(\frac{M}{m+M}h\dot\theta\right)^2$$

$$\Rightarrow mg(r_0'' - h)(\theta^2 - \theta_0^2) = \frac{Mm^2}{(m+M)^2}h^2\dot\theta^2 + \frac{M^2m}{(M+m)^2}h^2\dot\theta^2 = \frac{Mm}{M+m}h^2\dot\theta^2$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} 2mg(r_0'' - h)\theta\dot\theta = \frac{2Mm}{m+M}h^2\dot\theta\ddot\theta \Rightarrow 2g(r_0'' - h)\theta = \frac{M}{m+M}h^2\ddot\theta \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2(m+M)g(h - r_0'')}{Mh^2}}}$$

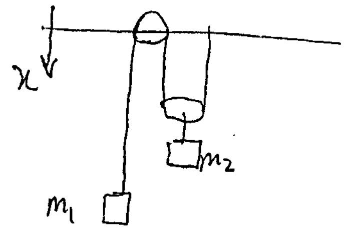
c) $r=(h-a)\cos\theta+a \Rightarrow r'=(a-h)\sin\theta \Rightarrow r''=(a-h)\cos\theta \Rightarrow r_0''=a-h$

$$\Rightarrow N=mg\left[1+2\frac{h-r_0''}{h}\left(\frac{m+M}{M}\right)\right]=\boxed{mg\left[1+2\frac{2h-a}{h}\left(\frac{m+M}{M}\right)\right]}$$

$$\boxed{f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2(m+M)g(2h-a)}{h^2}}}$$

a)

$$x_1+2x_2=l \Rightarrow x_2=\frac{l-x_1}{2} \Rightarrow \dot{x}_2=-\frac{\dot{x}_1}{2}=-\frac{\dot{x}}{2}$$



$$\cancel{-m_1 g x_0} \neq \cancel{-m_1 g x_1}$$

$$-m_1 g x_0-\frac{m_2}{2}g(l-x_0)-\mu\left(\frac{x_0}{l}\right)g\left(\frac{x_0}{2}\right)-\mu\left(\frac{l-x_0}{2l}\right)g\left(\frac{l-x_0}{4}\right)\times 2$$

$$=-m_1 g x_1-\frac{m_2}{2}g(l-x_1)-\mu\left(\frac{x_1}{l}\right)g\left(\frac{x_1}{2}\right)-\mu\left(\frac{l-x_1}{2l}\right)g\left(\frac{l-x_1}{4}\right)\times 2+\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{8}m_2\dot{x}^2+\frac{1}{2}\mu\left(\frac{l+x}{2l}\right)\dot{x}^2$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2\left[\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{8}m_2+\frac{l+x}{4l}\mu\right]=m_1 g(x-x_0)-m_2 g\left(\frac{x-x_0}{2}\right)+\frac{\mu g}{2}\left(\frac{x^2-x_0^2}{l}\right)+\frac{\mu g}{4l}\left((l-x)^2-(l-x_0)^2\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \dot{x}^2=\frac{m_1 g(x-x_0)-\frac{m_2 g}{2}(x-x_0)+\frac{3\mu g}{4l}(x^2-x_0^2)-\frac{\mu g}{2}(x-x_0)}{\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{8}+\frac{l+x}{4l}\mu}:=f(x)}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}=\frac{d\dot{x}^2}{2dx}=\boxed{\frac{f'(x)}{2}}$$

---

b) تکانه $P=m_1\dot{x}-\frac{m_2}{2}\dot{x}+\frac{\mu}{l}\left(\frac{3x-l}{2}\right)\dot{x}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt}=m_1\ddot{x}-\frac{m_2}{2}\ddot{x}+\frac{\mu}{l}\left(\frac{3x-l}{2}\right)\ddot{x}+\frac{3}{2}\frac{\mu}{l}\dot{x}^2=m_1 g+m_2 g+\mu g-F$$

$$\boxed{\Rightarrow F=(m_1+m_2+\mu)g-\left(m_1-\frac{m_2}{2}+\frac{\mu}{l}\left(\frac{3x-l}{2}\right)\right)\frac{f'(x)}{2}-\frac{3\mu}{2l}f(x)}$$

---

c) $\ddot{x}\big|_{x=x_0}=0 \quad : \forall x_0 \qquad \Rightarrow f'(x_0)=0$

$$f'(x)=\frac{\left(m_1 g-\frac{m_2 g}{2}+\frac{3}{2}\mu g\, x/l-\frac{\mu g}{2}\right)\left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{8}+\frac{l+x}{4l}\mu\right)-\frac{\mu}{4l}\left(\quad f(x)\ \text{صورت}\right)}{\left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{8}+\frac{l+x}{4l}\mu\right)^2}$$

$$f'(x_0)=0 \Rightarrow m_1-\frac{m_2}{2}+\frac{3\mu}{2}\cdot\frac{x_0}{l}-\frac{\mu}{2}=0 \Rightarrow x_0=\frac{2l}{3\mu}\left(\frac{\mu}{2}+\frac{m_2}{2}-m_1\right)$$

$$0<x_0<l \Rightarrow \boxed{\begin{cases}2m_1<\mu+m_2\\ m_2<2m_1+2\mu\end{cases}\ \text{شروط}}$$

d) $\begin{cases} 2m < 3m + {}^{2m}/_3 \\ 3m < 2m + (2m/3)\times 2 \end{cases}$ ✓

$$\Rightarrow x_0 = \frac{2l}{3\mu} \times 5/6\, m = \quad 5/6\, l$$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{-m_1 g(\tfrac{5}{6}l) + m_2 g/2(\tfrac{5}{6}l) - 3\frac{\mu g}{4l}(\tfrac{5}{6}l)^2 + \frac{\mu g}{2}(\tfrac{5}{6}l)}{\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{8} + \frac{\mu}{4}} =$$

$$= \frac{gl}{3} \frac{10m_2 - 20m_1 - 25/2\,\mu + 10\mu}{m_2 + 4m_1 + 2\mu} = \frac{gl}{3} \times \frac{25m/3}{25m/3} = gl/3 \Rightarrow \boxed{\dot{x}(0) = -\sqrt{gl/3}}$$

$$f(x) = g \frac{(x - \tfrac{5}{6}l) - \tfrac{3}{2}(x - \tfrac{5}{6}l) + \tfrac{1}{2l}(x^2 - \tfrac{25}{36}l^2) - \tfrac{1}{3}(x - \tfrac{5}{6}l)}{\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{6}(1 + \tfrac{x}{l})}$$

$$\Rightarrow f(x) = gl \frac{\tfrac{1}{2}(\tfrac{x^2}{l^2} - \tfrac{25}{36}) - \tfrac{5}{6}(x/l - 5/6)}{7/8 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{x}{6l}} = gl \frac{3(\tfrac{x^2}{l^2} - \tfrac{25}{36}) - 5(x/l - 5/6)}{\tfrac{25}{4} + x/l}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{gl}\sqrt{\frac{3(x^2/l^2 - \tfrac{25}{36}) - 5(x/l - 5/6)}{\tfrac{25}{4} + x/l}}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{gl}\, T = \int_{5/12\, l}^{0} \frac{\sqrt{x/l + \tfrac{25}{4}}\; dx}{\sqrt{3(x^2/l^2 - \tfrac{25}{36}) - 5(x/l - 5/6)}}$$

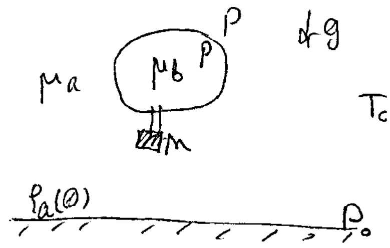
$$\Rightarrow T = \sqrt{l/g} \int_0^{5/12} \frac{\sqrt{x + 25/4}\; dx}{\sqrt{3(x^2 - 25/36) - 5(x - 5/6)}} = \sqrt{l/g} \int_0^{5/12} \frac{\sqrt{x + 25/4}\; dx}{\sqrt{3}\sqrt{x - 5/6}\sqrt{x + 5/6 - 5/3}}$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{l/g} \int_0^{5/12} \frac{\sqrt{x + 25/4}}{\sqrt{3}(x - 5/6)} dx = \sqrt{\frac{l}{3g}} \int_0^{5/12} \frac{\sqrt{(x - 5/6) + \tfrac{85}{12}}}{(x - 5/6)} dx$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{l}{3g}} \int_{-5/6}^{-5/12} \frac{\sqrt{u + \tfrac{85}{12}}\; du}{u} = 2\sqrt{\frac{l}{3g}} \left\{ \sqrt{\tfrac{85}{12} - \tfrac{5}{12}} - \sqrt{\tfrac{85}{12} - \tfrac{5}{6}} - \sqrt{\tfrac{85}{12}} \tanh^{-1}\sqrt{\frac{\tfrac{85}{12} - \tfrac{5}{12}}{85/12}} + \sqrt{\tfrac{85}{12}} \tanh^{-1}\sqrt{\frac{85/12 - 5/6}{85/12}} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \sqrt{\frac{4l}{3g}} \left\{ 2\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \tfrac{5}{2} - \sqrt{\tfrac{85}{12}} \tanh^{-1}\sqrt{\tfrac{16}{17}} + \sqrt{\tfrac{85}{12}} \tanh^{-1}\sqrt{\tfrac{15}{17}} \right\}}$$

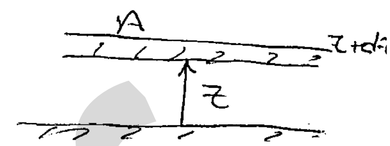
مسئلهٔ ۳ آزمون :



الف) $\rho_a(0)Vg = \rho_b(0)Vg + Mg$

$$\Rightarrow \boxed{V_{min} = \frac{M}{\rho_a(0)-\rho_b(0)}}$$

ب)



$$P(z)A - P(z+dz)A = \rho(z)A\,dz\,g$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{dP}{dz} = -\rho g \\ P\mu_a = \rho RT_0 \Rightarrow \rho = \frac{P\mu_a}{RT_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{-\mu_a g\,dz}{RT_0} \Rightarrow \boxed{P = P_0 e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}}}$$

$$, \quad \rho_a(z) = \rho_a(0)e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}} = \frac{P_0\mu_a}{RT_0}e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}}$$

ج) $\rho_a(z)Vg = \rho_b(z)Vg + Mg \Rightarrow \rho_b(z) = \rho_a(z) - \frac{M}{V} = \frac{P(z)\mu_b}{RT(z)}$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{\frac{\mu_b}{R}P(z)}{\rho_a(z)-\frac{M}{V}} = \frac{\frac{\mu_b P_0}{R}e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}}}{\frac{P_0\mu_a}{RT_0}e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}} - \frac{M}{V}} = \boxed{\frac{T_0}{\frac{\mu_a}{\mu_b} - \frac{MRT_0}{P_0\mu_b V}e^{\frac{\mu_a g z}{RT_0}}}} \quad \ldots$$

د) $$\frac{T_0}{T_{max}} = \frac{\mu_a}{\mu_b} - \frac{MRT_0}{\mu_b P_0 V}e^{\frac{\mu_a g z_m}{RT_0}} \Rightarrow \cancel{z_m = \frac{RT_0}{\mu_a g}\ln\left[\frac{MRT_0}{\mu_a P_0 V}(1-\right.}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_m = \frac{RT_0}{\mu_a g}\ln\left[\frac{\mu_a P_0 V}{MRT_0}\left(1 - \frac{\mu_b T_0}{\mu_a T_{max}}\right)\right]}$$

ه) $$\rho_b(z) = \frac{P(z)\mu_b}{\alpha R\,T(z)} = \frac{\mu_b P_0 e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}}}{\alpha RT_0}\left(\frac{\mu_a}{\mu_b} - \frac{MRT_0}{P_0\mu_b V}e^{\frac{\mu_a g z}{RT_0}}\right) =$$

$$= \frac{\mu_a P_0}{\alpha RT_0}e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}} - \frac{M}{\alpha V} \Rightarrow (M + \rho_b(z)V)\ddot{z} = \rho_a(z)Vg - Mg - \rho_b(z)Vg$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = g\frac{(1-\frac{1}{\alpha})\left(\frac{\mu_a P_0}{RT_0}e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}} - \frac{M}{V}\right)}{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mu_a P_0}{RT_0}e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}} - \frac{M}{V}\right) + \frac{M}{V}} \Rightarrow \ddot{z} = g(\alpha-1) - g(\alpha-1)\frac{\alpha\frac{M}{V}}{\alpha\frac{M}{V} + \left(\frac{\mu_a P_0}{RT_0}e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}} - \frac{M}{V}\right)}$$

ج) $$\ddot{z} = g(\alpha-1)\left[1-\frac{\alpha M/V}{\alpha M/V+\left(\frac{\mu_a P_0}{RT_0}e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}}-M/V\right)}\right] = \frac{dV^2}{2dz}$$

$$\Rightarrow V^2 = 2g(\alpha-1)\int_0^z\left\{1-\frac{\alpha M/V}{\alpha M/V+\left(\frac{\mu_a P_0}{RT_0}e^{-\frac{\mu_a g z}{RT_0}}-M/V\right)}\right\}dz$$

$$\Rightarrow V^2 = 2g(\alpha-1)z - 2g\alpha\int_0^z(\alpha-1)\frac{M}{V}\,\frac{\frac{RT_0}{\mu_a P_0}e^{+\frac{\mu_a g z}{RT_0}}\,dz}{\frac{(\alpha-1)RT_0 M}{\mu_a P_0 V}e^{\frac{\mu_a g z}{RT_0}}+1}$$

$$\Rightarrow V^2 = 2g(\alpha-1)z - 2g\alpha\cdot\frac{RT_0}{\mu_a g}\int_0^z\frac{d\left[1+\frac{(\alpha-1)RMT_0}{\mu_a P_0 V}e^{\frac{\mu_a g z}{RT_0}}\right]}{\left[1+\frac{(\alpha-1)RMT_0}{\mu_a P_0 V}e^{\frac{\mu_a g z}{RT_0}}\right]}$$

$$\Rightarrow V^2 = 2g(\alpha-1)z - \frac{2\alpha RT_0}{\mu_a}\ln\left[\frac{1+\frac{(\alpha-1)MRT_0}{\mu_a P_0 V}e^{\frac{\mu_a g z}{RT_0}}}{1+\frac{(\alpha-1)MRT_0}{\mu_a P_0 V}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{V(z) = \sqrt{2g(\alpha-1)z - \frac{2\alpha RT_0}{\mu_a}\ln\left[\frac{1+\frac{(\alpha-1)MRT_0}{\mu_a P_0 V}e^{\frac{\mu_a g z}{RT_0}}}{1+\frac{(\alpha-1)MRT_0}{\mu_a P_0 V}}\right]}}$$

ح) $\alpha = 1+\epsilon$, $P = P_0(1+\beta z)$, $\beta = \frac{-\mu_a g}{RT_0}$ (β ∴ کوچک است βz)

$$\rho_a(z) = \frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)$$

$$T(z) = \alpha\,\frac{P(z)\mu_b/R}{\rho_a(z)-M/V} = (1+\epsilon)\frac{\frac{\mu_b P_0}{RT_0}(1+\beta z)}{\frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)-M/V}T_0$$

$$\Rightarrow \rho_b(z) = \frac{\mu_b P(z)}{RT(z)} = \frac{1}{(1+\epsilon)}\left(\frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)-M/V\right)$$

$$\Rightarrow \left(M/V+\rho_b(z)\right)V\ddot{z} = \rho_a(z)Vg - M/V\,Vg - \rho_b(z)Vg \Rightarrow \ddot{z} = g\,\frac{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\left(\frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)-M/V\right)}{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}M/V+\frac{1}{1+\epsilon}\frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = g\epsilon\,\frac{\frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)-M/V}{\frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)+\epsilon M/V} = \frac{dV^2}{2dz} = g\epsilon\left[1-(1+\epsilon)\frac{M/V}{\frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)+\epsilon M/V}\right]$$

$$\Rightarrow V^2 = 2g\epsilon z - 2g\epsilon(1+\epsilon)\frac{M}{V}\times\frac{RT_0}{\beta P_0\mu_a}\int_0^z\frac{d\left[\epsilon M/V+\frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)\right]}{\left[\epsilon M/V+\frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)\right]}$$

$$\Rightarrow V^2 = 2g\epsilon z - 2g\epsilon(1+\epsilon)\frac{M}{V}\cdot\frac{RT_0}{\beta P_0\mu_a}\ln\left[\frac{\epsilon M/V+\frac{P_0\mu_a}{RT_0}+\frac{P_0\mu_a\beta}{RT_0}z}{\epsilon M/V+\frac{P_0\mu_a}{RT_0}}\right] = 2g\epsilon z - 2g\epsilon(1+\epsilon)\frac{M}{V}\cdot\frac{RT_0}{\beta P_0\mu_a}\times\frac{\frac{P_0\mu_a\beta z}{RT_0}}{\frac{P_0\mu_a}{RT_0}+\epsilon M/V}$$

$$\Rightarrow V^2 = 2g\epsilon z - 2g\epsilon\frac{M}{V}\times\frac{RT_0 z}{P_0\mu_a} = 2g\epsilon z\left(1-\frac{MRT_0}{VP_0\mu_a}\right)$$

$$\Rightarrow \beta V^2 = 2g\epsilon(\beta z) - 2g\epsilon(1+\epsilon)\frac{M}{V}\int \frac{d(1+\beta z)}{\epsilon\frac{M}{V} + \frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)}$$

$$\Rightarrow \beta V^2 = 2g\epsilon(\beta z) - 2g\epsilon(1+\epsilon)\frac{M}{V}\times\frac{RT_0}{P_0\mu_a}\ln\left[\frac{\epsilon\frac{M}{V} + \frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z)}{\epsilon\frac{M}{V} + \frac{P_0\mu_a}{RT_0}}\right]$$

$$\xRightarrow{\epsilon \text{ کوچک}} \beta V^2 = 2g\epsilon(\beta z) - 2g\epsilon\cdot\frac{M}{V}\cdot\frac{RT_0}{P_0\mu_a}\ln(1+\beta z)$$

$$\Rightarrow \beta V^2 = 2g\epsilon(\beta z)\left(1 - \frac{MRT_0}{P_0\mu_a V}\right) = \frac{-\mu_a g}{RT_0}V^2$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{2\epsilon MR^2T_0^2}{P_0\mu_a^2 V}\left(1 - \frac{P_0\mu_a V}{MRT_0}\right)\beta z$$

$$\Rightarrow V = \frac{dz}{dt} = \boxed{\frac{RT_0}{\mu_a}\sqrt{\frac{2M\epsilon}{P_0 V}\left(1 - \frac{\mu_a V P_0}{MRT_0}\right)\beta z}}$$

ج) $V = \sqrt{2g\epsilon\left(1 - \frac{MRT_0}{VP_0\mu_a}\right)}\sqrt{z} = \frac{dz}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{2\sqrt{z}} = dt\sqrt{\frac{g\epsilon}{2}\left(1 - \frac{MRT_0}{P_0V\mu_a}\right)} = d\sqrt{z}$$

$$\Rightarrow \sqrt{z} = t\sqrt{\frac{g\epsilon}{2}\left(1 - \frac{MRT_0}{\mu_a P_0 V}\right)} \Rightarrow \boxed{z = \frac{g\epsilon}{2}\left(1 - \frac{MRT_0}{\mu_a P_0 V}\right)t^2}$$

چ) $T(z) = \dfrac{\frac{\mu_b}{R}P(z)}{\rho_a(z) - \frac{M}{V}} = \dfrac{\frac{\mu_b}{RT_0}P_0(1+\beta z)}{\frac{P_0\mu_a}{RT_0}(1+\beta z) - \frac{M}{V}}T_0 = T_{max} \Rightarrow \dfrac{T_0}{T_{max}} = \dfrac{\mu_a}{\mu_b} - \dfrac{MRT_0}{\mu_b P_0 V(1+\beta z)}$

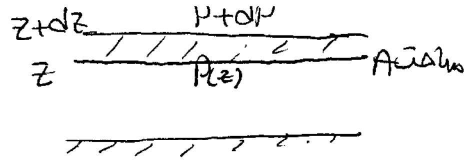
$$\Rightarrow (1+\beta z) = \frac{MRT_0}{\mu_b P_0 V\left(\frac{\mu_a}{\mu_b} - \frac{T_0}{T_m}\right)} = \frac{MRT_0}{\mu_a P_0 V\left(1 - \frac{\mu_b T_0}{\mu_a T_{max}}\right)}$$

$$\Rightarrow \beta\frac{g\epsilon}{2}\left(1 - \frac{MRT_0}{\mu_a P_0 V}\right)t^2 = \frac{MRT_0}{\mu_a P_0 V}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\mu_b T_0}{\mu_a T_m}} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2RT_0}{\mu_a\epsilon g^2\left(1 - \frac{MRT_0}{\mu_a P_0 V}\right)} - \frac{2MR^2T_0^2}{\mu_a^2 P_0 V\epsilon g^2\left(1 - \frac{\mu_b T_0}{\mu_a T_m}\right)\left(1 - \frac{MRT_0}{\mu_a P_0 V}\right)}}}$$

مسئله ④ آزمون دوم :

الف)



$$P(z)A - P(z+dz)A = \rho(z) g A\, dz \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho(z) g}$$

ب) $n = \frac{m}{M} = \frac{\rho V}{M} \Rightarrow \frac{n}{V} = \frac{\rho}{M}$

$$\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)\left(1 - \frac{n}{V}b\right) = \frac{n}{V}RT \Rightarrow \boxed{\left(P + a\frac{\rho^2}{M^2}\right)\left(1 - \frac{\rho}{M}b\right) = \frac{\rho RT}{M}}$$

ج) $P = \frac{\rho RT}{M - \rho b} - a\frac{\rho^2}{M^2} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = \frac{d\rho}{dz}\left\{\frac{RT(M-b\rho)+b\rho RT}{(M-b\rho)^2} - 2a\frac{\rho}{M^2}\right\} = \left\{\frac{MRT}{(M-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{M^2}\right\}\frac{d\rho}{dz} = -\rho g$

$$\Rightarrow -g\,dz = \frac{MRT\, d\rho}{\rho(M-b\rho)^2} - \frac{2a}{M^2}d\rho \Rightarrow -gz = MRT\int_{\rho(0)}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho(M-b\rho)^2} - \frac{2a}{M^2}(\rho - \rho_0)$$

$$\frac{1}{\rho(M/b - \rho)^2} = \frac{b}{M}\,\frac{(M/b - \rho) + \rho}{\rho(M/b-\rho)^2} = \frac{b}{M}\cdot\frac{1}{\rho(M/b-\rho)} + \frac{b}{M}\,\frac{1}{(M/b-\rho)^2} =$$

$$= \left(\frac{b}{M}\right)^2 \frac{\rho + M/b - \rho}{\rho(M/b-\rho)} + \frac{b}{M}\cdot\frac{1}{(M/b-\rho)^2} = \left(\frac{b}{M}\right)^2\cdot\frac{1}{M/b-\rho} + \left(\frac{b}{M}\right)^2\frac{1}{\rho} + \left(\frac{b}{M}\right)\frac{1}{(M/b-\rho)^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho(M-b\rho)^2} = \frac{1}{M^2}\ln\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{M^2}\ln\left(\frac{\rho - M/b}{\rho_0 - M/b}\right) + \frac{b}{Mb^2}\left(\frac{1}{M/b - \rho} - \frac{1}{M/b - \rho_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{-gz = -\frac{2a}{M^2}(\rho - \rho_0) + \frac{RT}{M}\ln\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{RT}{M}\ln\left(\frac{b\rho - M}{b\rho_0 - M}\right) + \frac{RT}{M - b\rho} - \frac{RT}{M - b\rho_0}}$$

د) $b\rho_0 \ll M \Rightarrow \boxed{b \ll \frac{M}{\rho_0}} \leftarrow$ از روی داده

$$\frac{2a\rho_0}{M^2} \ll \frac{RT}{M} \Rightarrow \boxed{a \ll \frac{MRT}{\rho_0}}$$

ه) $U = \frac{3}{2}nRT - a\frac{n^2}{V} \Rightarrow dU = \frac{3}{2}nR\,dT + a\frac{n^2}{V^2}dV = -P\,dV = -\frac{\rho RT}{M - \rho b}dV + a\frac{\rho^2}{M^2}dV$

$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{2}R\,dT - a\frac{\rho}{M}\cdot\frac{d\rho}{\rho} =$

h) $P = \frac{\rho RT}{M-b\rho} - a\frac{\rho^2}{M^2}$, $V = \frac{Mn}{\rho} \Rightarrow dV = \frac{-Mn}{\rho^2}d\rho$

$$U = \frac{3}{2}nRT - a\frac{n^2}{V} = \frac{3}{2}nRT - a\frac{n\rho}{M} \Rightarrow dU = \frac{3}{2}nRdT - a\frac{n}{M}d\rho = -PdV$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}RdT - \frac{a}{M}d\rho = \frac{M}{\rho^2}\cdot\frac{\rho RT}{M-b\rho}d\rho - \frac{M}{\rho^2}\cdot a\frac{\rho^2}{M^2}d\rho$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}RdT = \left(\frac{a}{M} + \frac{MRT}{\rho(M-b\rho)} - \frac{a}{M}\right)d\rho = \frac{MRT}{\rho(M-b\rho)}d\rho \Rightarrow \frac{3}{2}\frac{dT}{T} = \frac{d\rho}{\rho(1-\frac{b}{M}\rho)} = \frac{\frac{b}{M}\rho + (1-\frac{b}{M}\rho)}{\rho(1-\frac{b}{M}\rho)}d\rho$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\frac{dT}{T} = \frac{b}{M}\frac{d\rho}{1-\frac{b}{M}\rho} + \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{3}{2}\ln\frac{T}{T_0} = \ln\frac{\rho}{\rho_0} - \ln\frac{\rho - M/b}{\rho_0 - M/b}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\left(\frac{b\rho_0 - M}{b\rho - M}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{M-b\rho}{\rho}T^{3/2} = const.}$$

g) $T = T_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{b\rho_0 - M}{b\rho - M}\right)^{2/3}$

$$\boxed{\Rightarrow P = RT_0\left(\frac{-b\rho_0+M}{\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{\rho}{-b\rho+M}\right)^{5/3} - a\frac{\rho^2}{M^2}}$$

i) $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ $\qquad \frac{dP}{dz} = \frac{d\rho}{dz}\left\{RT_0\left(\frac{-b\rho_0+M}{\rho_0}\right)^{2/3}\times\frac{5}{3}\left(\frac{\rho}{-b\rho+M}\right)^{2/3}\times\frac{+M}{(-b\rho+M)^2} - 2a\frac{\rho}{M^2}\right\} = -\rho g$

$$\Rightarrow -g\,dz = +\frac{5}{3}MRT_0\left(\frac{-b\rho_0+M}{\rho_0}\right)^{2/3}\frac{d\rho}{\rho^{1/3}(b\rho-M)^{8/3}} - \frac{2a}{M^2}d\rho$$

$$\Rightarrow gz = \frac{2a}{M^2}(\rho-\rho_0) + \frac{-5}{3}MRT_0\left(\frac{-b\rho_0+M}{\rho_0}\right)^{2/3}\times\frac{3}{10M^{8/3}}\times\rho^{2/3}\frac{(5-3\frac{b}{M}\rho)}{(1-\frac{b}{M}\rho)^{5/3}}$$

$$\boxed{\Rightarrow -gz = \frac{2a}{M^2}(\rho_0-\rho) + \frac{RT_0}{2M}\left(\frac{M-b\rho_0}{\rho_0}\right)^{2/3}\frac{\rho^{2/3}(5M-3b\rho)}{(M-b\rho)^{5/3}}}$$