

فصل ۹

تبدیل تنش صفحه ای

تحلیل تنش

۱. تعیین نقطه بحرانی

۲. تعیین نیروهای داخلی در آن نقطه

۳. تعیین تنش ها در آن نقطه

۴. جمع تنش های همسان:

فصل ۸

$$\sigma_{\text{total}} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \dots \quad ۱.$$

$$\tau_{\text{total}} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots \quad ۲.$$

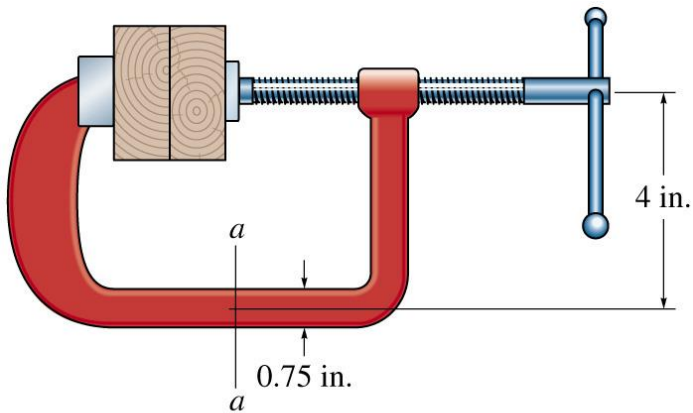
۵. خلاصه کردن تنش ها روی المان تنش

۶. ممکن است لازم باشد تا از تبدیل تنش یا دایره مور برای پیدا

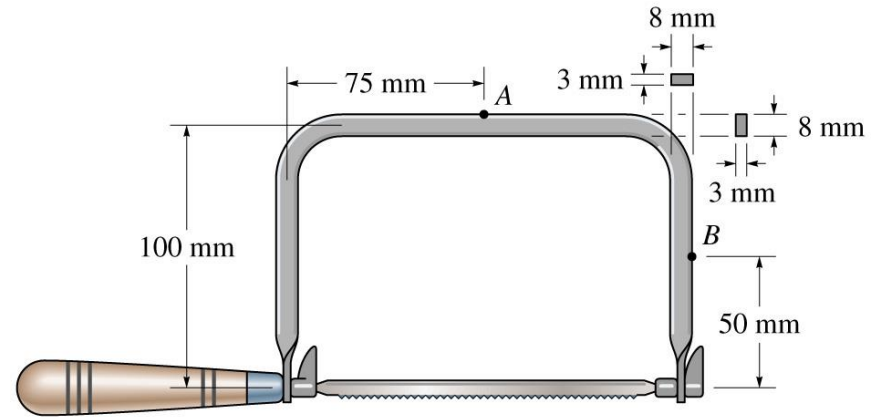
۲ کردن تنش های ماکزیمم استفاده شود.

فصل ۹

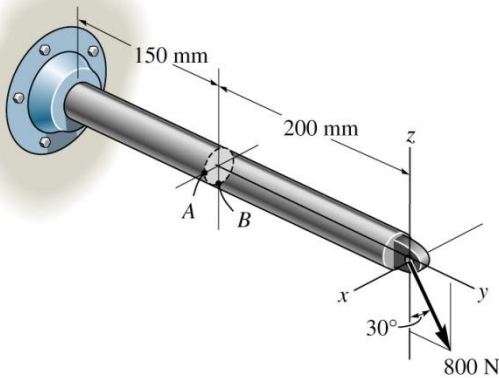
یادآوری از فصل ۸ - قبلا مراحل ۱ تا ۵ را انجام داده اید.



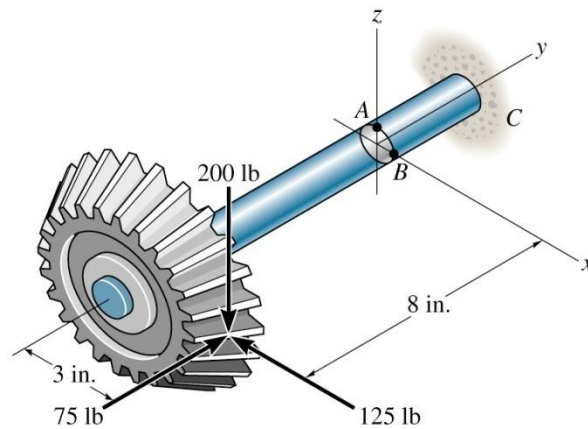
Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.



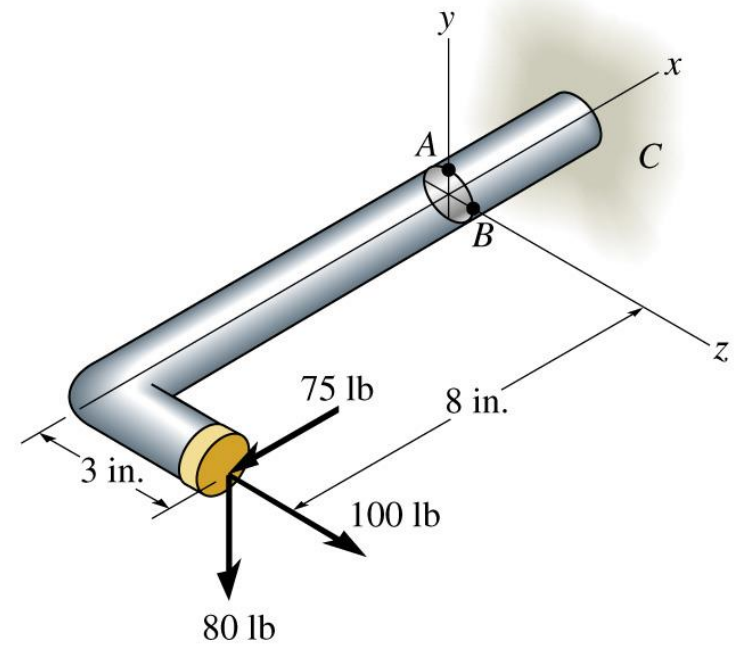
Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

اکنون باید مراحل زیر را انجام دهیم:

یافتن تنش ها در یک نقطه با استفاده از معادلات مقاومت مصالح

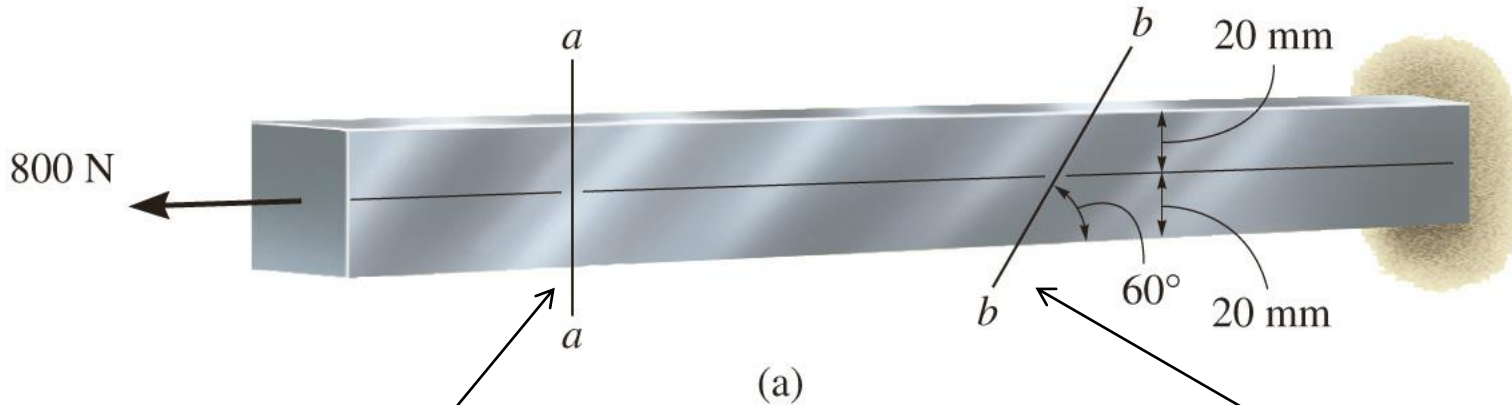
خلاصه کردن این تنش ها روی یک المان تنش اولیه یا المان تنش تراز شده

مرحله 6

باید تنش های ماکزیمم را در آن نقطه پیدا کنیم. تنش های اعمال شده می تواند در **صفحات مورب** یا **زاویه دار دیگری** نیز رخ دهد.

مقایسه تنش های ماکزیمم با حدود مجاز ماده تشکیل دهنده آیا قطعه ایمن است یا خواهد شکست؟؟

مرحله ۶) تنش‌ها روی صفحات دیگر به چه معنی است؟؟؟ واقعیت این است که موضوع جدیدی نیست. مثال (۱-۱۰) از فصل اول را یادآوری میکنیم



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc

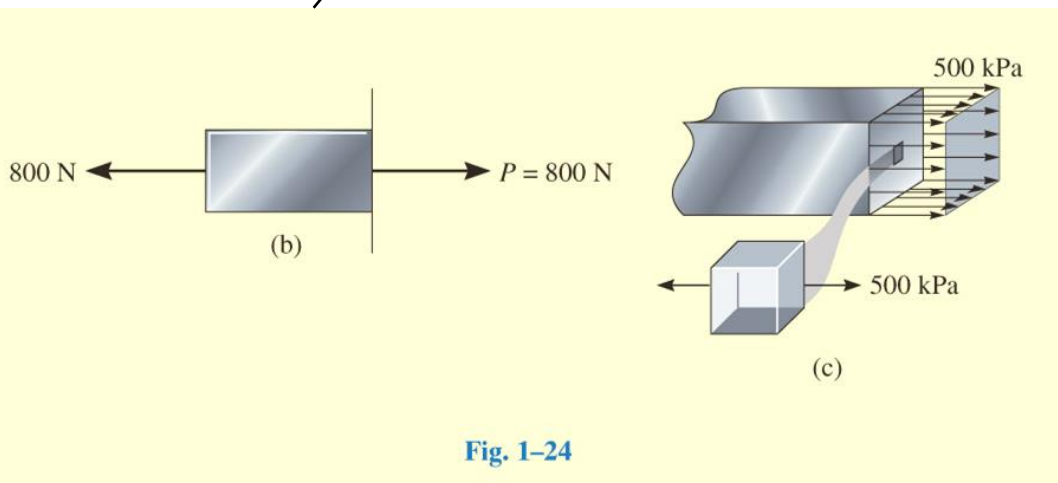
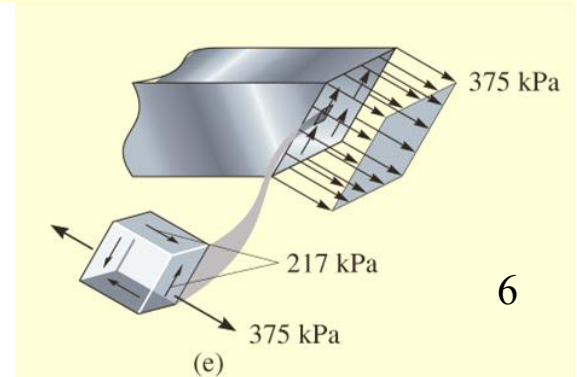
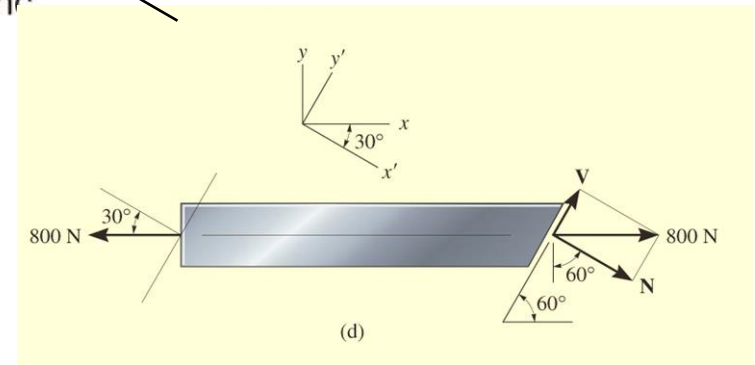
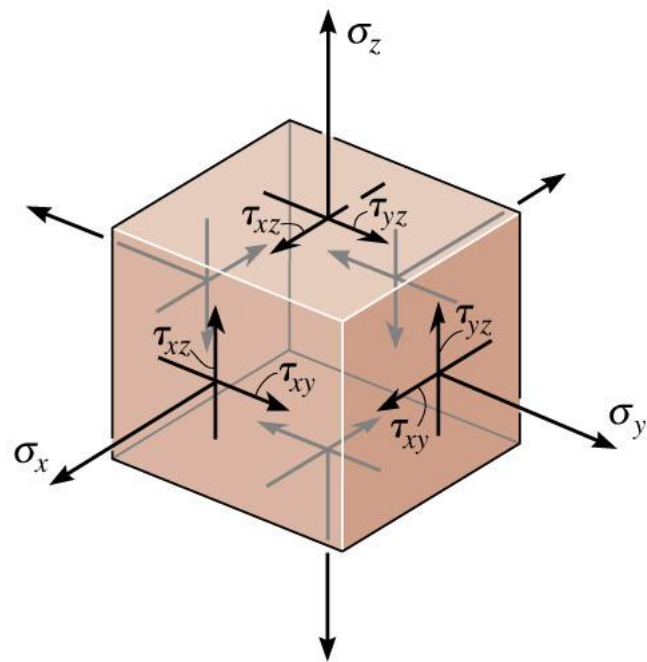


Fig. 1-24



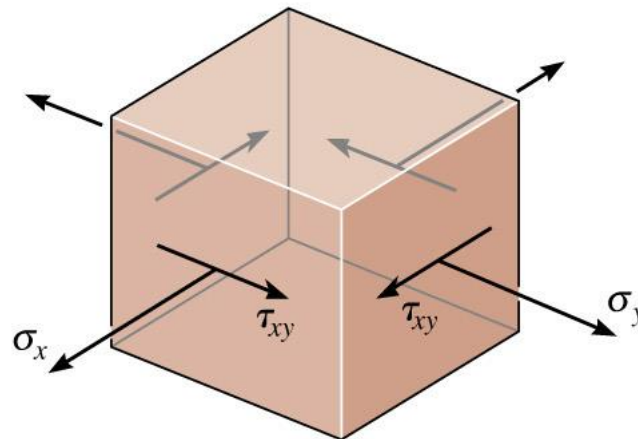
اکنون به جای بررسی تنش ها روی صفحات ، تنش ها را در یک نقطه بررسی میکنیم

۹-۱: المان های تنش



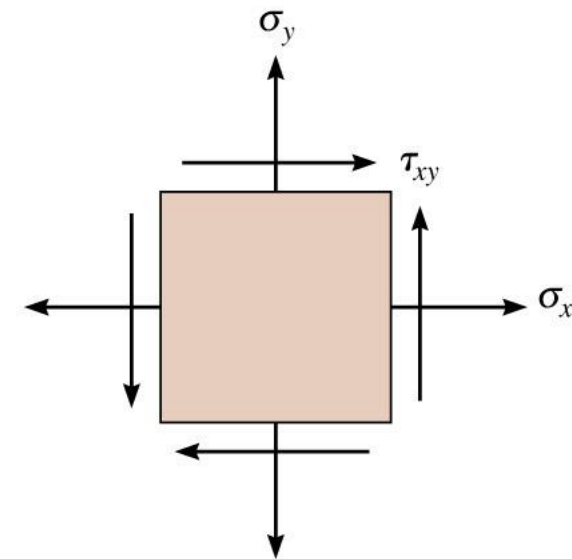
General state of stress

(a)



Plane stress

(b)



Plane stress
(two dimensional view)

(c)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

الف) در حالت کلی در یک نقطه ۶ تنش مستقل (۳ تنش نرمال و ۳ تنش برشی) میتواند وجود داشته باشد.

بسیاری از مسائل مهندسی فقط شامل سه تنش مستقل هستند که به آنها تنش صفحه ای می گوییم.

وضعیت تنش ها برای تنش صفحه ای را میتوان روی یک المان دو بعدی به صورت خلاصه نشان داد.

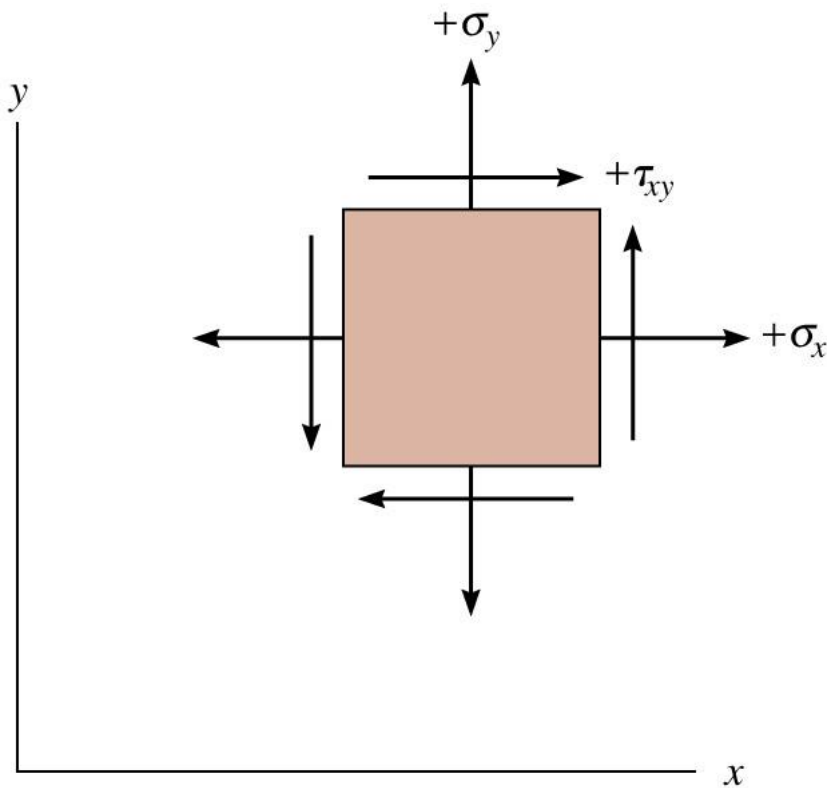
۹-۲: تبدیل تنش صفحه ای:

در این دوره: بررسی تعادل نیروها در ۲ بعدی

در ارشد: تعادل نیروها در سه بعدی با استفاده از ماتریس ها و تانسورها (حل مسئله مقدار ویژه)

استخراج معادلات تبدیل تنش صفحه ای:

الف) وضعیت تنش صفحه ای داده شده است

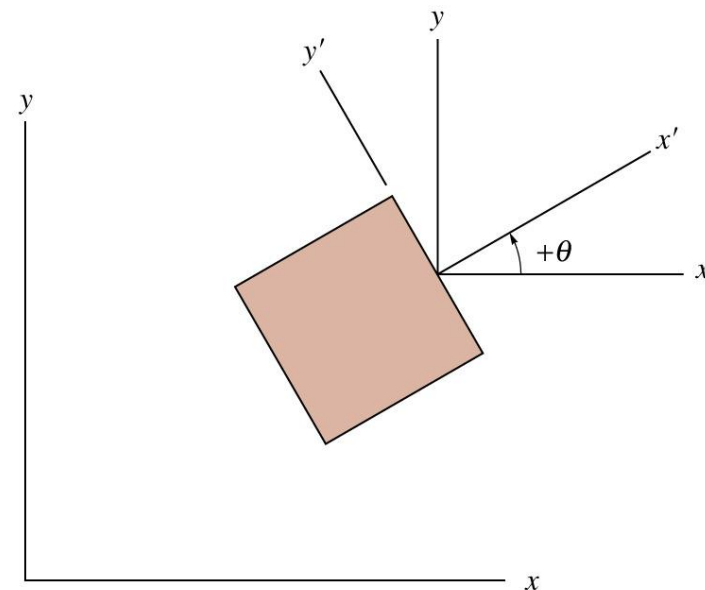


(a)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

توجه کنید: جهت های مثبت تنش مطابق شکل فوق هستند.

ب) تنش های جدید در چرخش المان به اندازه θ چقدر است؟



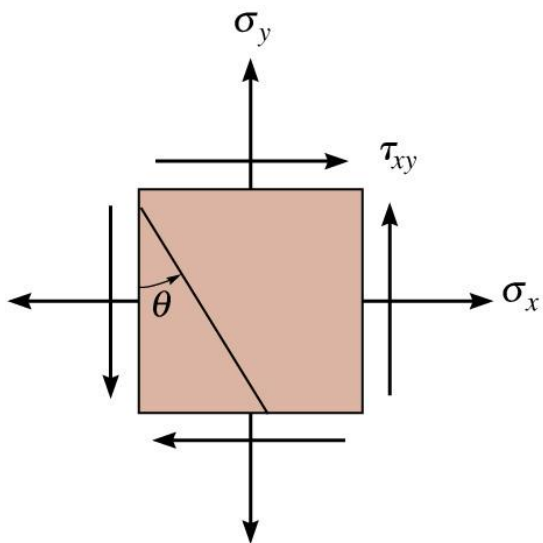
(b)

Positive Sign Convention

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

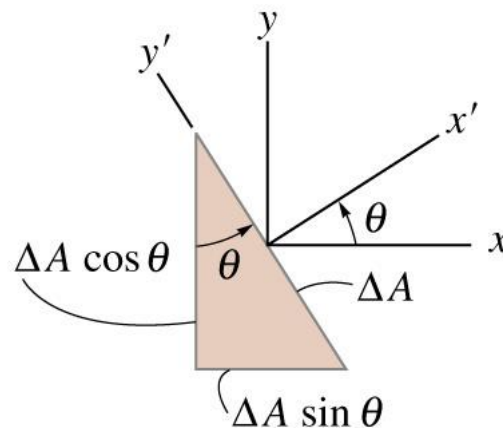
توجه: زوایای مثبت (پادساعتگرد) مطابق شکل بالا می باشد.

راه حل آسان است. المان را برش بزنی و نیروها را در جهت X و Y جمع کنی.



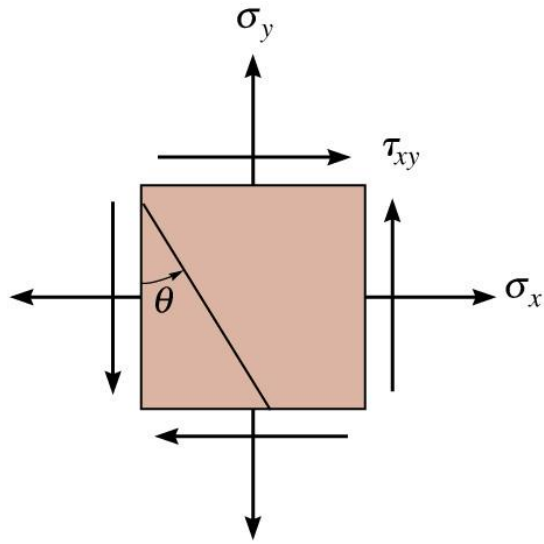
(a)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

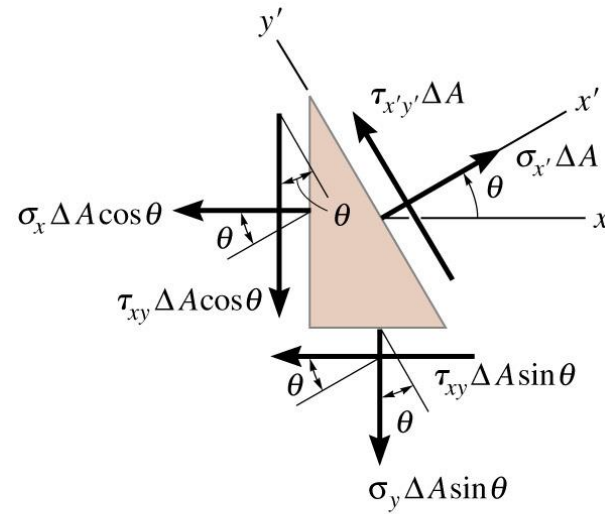


(b)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.



(a)



(c)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

$$+ \sum F_{X'} = 0$$

$$\sigma_{x'} \Delta A - (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \cos \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \sin \theta - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \sin \theta - (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \cos \theta = 0$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (9.1)$$

$$+ \sum F_{y'} = 0$$

$$(9.2)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

جایگذاری $\theta = \theta + 90$ به جای θ در معادله ۹-۱:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (9.3)$$

EXAMPLE 9.2

The state of plane stress at a point is represented by the element shown in Fig. 9–7a. Determine the state of stress at the point on another element oriented 30° clockwise from the position shown.

Solution

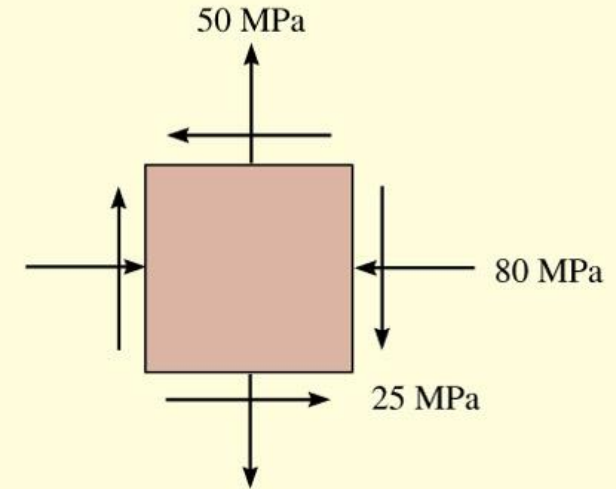
This problem was solved in Example 9.1 using basic principles. Here we will apply Eqs. 9–1 and 9–2. From the established sign convention, Fig. 9–5, it is seen that

$$\sigma_x = -80 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -25 \text{ MPa}$$

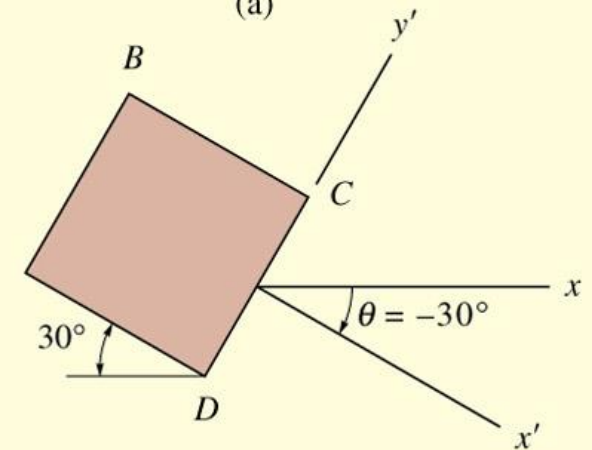
Plane CD. To obtain the stress components on plane *CD*, Fig. 9–7b, the positive x' axis is directed outward, perpendicular to *CD*, and the associated y' axis is directed along *CD*. The angle measured from the x to the x' axis is $\theta = -30^\circ$ (clockwise). Applying Eqs. 9–1 and 9–2 yields

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2} \cos 2(-30^\circ) + (-25) \sin 2(-30^\circ) \\ &= -25.8 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Ans.



(a)



(b)

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= -\frac{-80 - 50}{2} \sin 2(-30^\circ) + (-25) \cos 2(-30^\circ) \\ &= -68.8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Ans.

The negative signs indicate that $\sigma_{x'}$ and $\tau_{x'y'}$ act in the negative x' and y' directions, respectively. The results are shown acting on the element in Fig. 9-7d.

Plane BC. In a similar manner, the stress components acting on face BC , Fig. 9-7c, are obtained using $\theta = 60^\circ$. Applying Eqs. 9-1 and 9-2,* we get

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2} \cos 2(60^\circ) + (-25) \sin 2(60^\circ) \\ &= -4.15 \text{ MPa}\end{aligned}$$

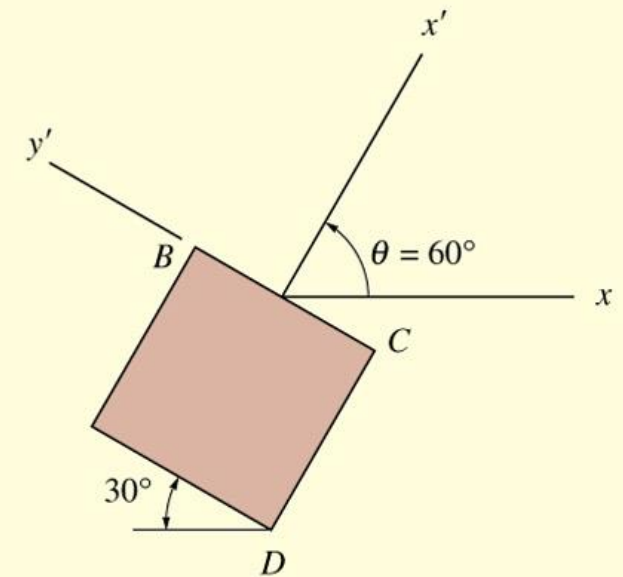
Ans.

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= -\frac{-80 - 50}{2} \sin 2(60^\circ) + (-25) \cos 2(60^\circ) \\ &= 68.8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

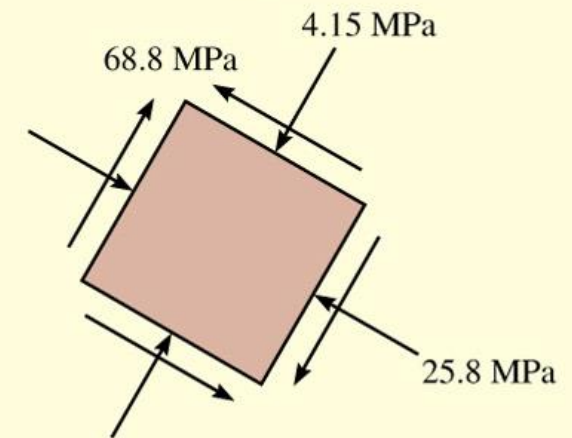
Ans.

Here $\tau_{x'y'}$ has been computed twice in order to provide a check. The negative sign for $\sigma_{x'}$ indicates that this stress acts in the negative x' direction, Fig. 9-7c. The results are shown on the element in Fig. 9-7d.

* Alternatively, we could apply Eq. 9-3 with $\theta = -30^\circ$ rather than Eq. 9-1.



(c)



(d)

Fig. 9-7

۹-۳: تنش های اصلی و تنش های برشی ماکزیمم صفحه ای

- تنش های ماکزیمم در یک نقطه چه هستند؟
- آیا تنش های ماکزیمم از تنش های نشان داده شده روی
المان تنش اولیه متفاوت هستند؟

یادآوری تنش نرمال در زاویه جدید θ :

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (9.1)$$

به دنبال محاسبه تنش ماکزیمم هستیم بنابراین:

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0$$

این معادله را حل میکنیم تا θ را بیابیم:

$$\tan 2\theta_P = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \quad (9.4)$$

این زاویه موقعیت صفحه اصلی است.

سپس معادله ۴-۹ را در معادله ۱-۹ قرار میدهم تا:

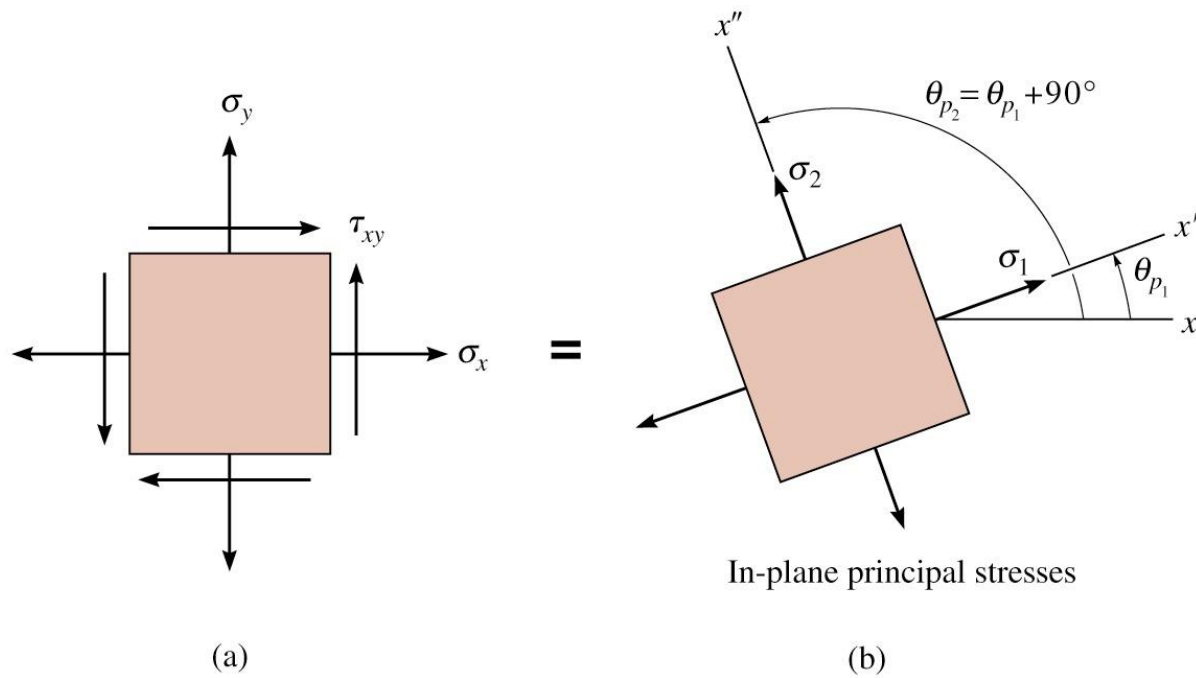
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + / - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9.5)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2$$

بیشترین مقدار
تنش اصلی

کمترین مقدار
تنش اصلی

به طور خلاصه



تنش اصلی / صفحه اصلی:

توجه کنید که تنش های برشی در صفحه اصلی صفر هستند.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9.5)$$

$$\tan 2\theta_P = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \quad (9.4)$$

به روش مشابه برای یافتن صفحه تنش برشی ماکزیمم خواهیم داشت:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (9.2)$$

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0$$

این معادله را برای یافتن زاویه حل میکنیم و سپس معادله ۹-۲ را در آن جایگذاری میکنیم:

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \quad (9.6)$$

$$\tau_{\max \text{ in plane}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9.7)$$

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (9.8)$$

نکته:

۱) روی صفحه تنش برشی ماکزیمم، تنش نرمال صفر نیست اما مقدار آن برابر تنش میانگین مطابق معادله ۹-۸ است

۲) صفحات تنش برشی ماکزیمم را میتوات با چرخاندن یک المان به اندازه ۴۵ درجه از موقعیت المان تنش اصلی ماکزیمم بدست آورد.

$$\tan 2\theta_P = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

تنش اصلی ماکزیمم

$$\tan 2\theta_S = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

$$\tau_{\max \text{ in plane}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

تنش برشی ماکزیمم

نکات مهم

- تنش های اصلی، تنش های نرمال ماکزیمم و مینیمم را معرفی می کنند. این تنش ها روی المات تنش اصلی نشان داده می شوند.
- وقتی موقعیت تنش بوسیله تنش های اصلی نشان داده میشود، تنش برشی روی المان وارد نمیشود
- وضعیت تنش در نقطه را میتوان همچنین بر حسب صفحه تنش برشی ماکزیمم ارائه کرد. در این مورد یک تنش نرمال میانگین روی المان وجود خواهد داشت. این المان به المان تنش برشی صفحه ای ماکزیمم معروف است
- المان تنش برشی صفحه ای ماکزیمم ، ۴۵ درجه با المان تنش اصلی زاویه دارد.

EXAMPLE 9.3

When the torsional loading T is applied to the bar in Fig. 9–11*a*, it produces a state of pure shear stress in the material. Determine (a) the maximum in-plane shear stress and the associated average normal stress, and (b) the principal stress.

Solution

From the established sign convention,

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = -\tau$$

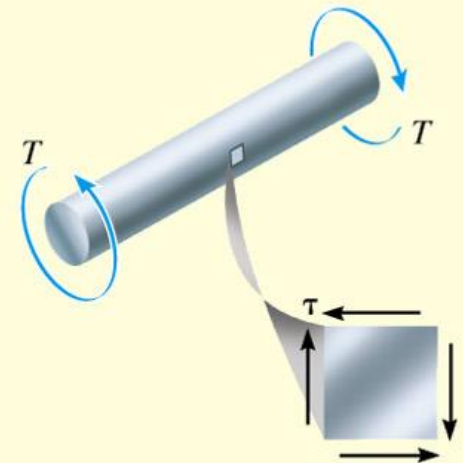
Maximum In-Plane Shear Stress. Applying Eqs. 9–7 and 9–8, we have

$$\tau_{\text{in-plane}}^{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\tau)^2} = \pm\tau \quad \text{Ans.}$$

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0 \quad \text{Ans.}$$

Thus, as expected, the maximum in-plane shear stress is represented by the element in Fig. 9–11*a*.

Through experiment it has been found that materials that are *ductile* will *fail* due to *shear stress*. As a result, if a torque is applied to a bar made from mild steel, the maximum in-plane shear stress will cause it to fail as shown in the adjacent photo.



(a)



Principal Stress. Applying Eqs. 9-4 and 9-5 yields

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{-\tau}{(0 - 0)/2}, \theta_{p2} = 45^\circ, \theta_{p1} = 135^\circ$$

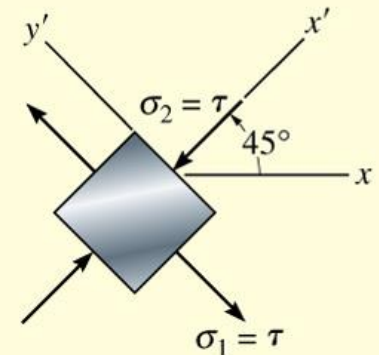
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0 \pm \sqrt{(0)^2 + \tau^2} = \pm\tau \quad \text{Ans.}$$

If we now apply Eq. 9-1 with $\theta_{p2} = 45^\circ$, then

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = 0 + 0 + (-\tau) \sin 90^\circ = -\tau$$

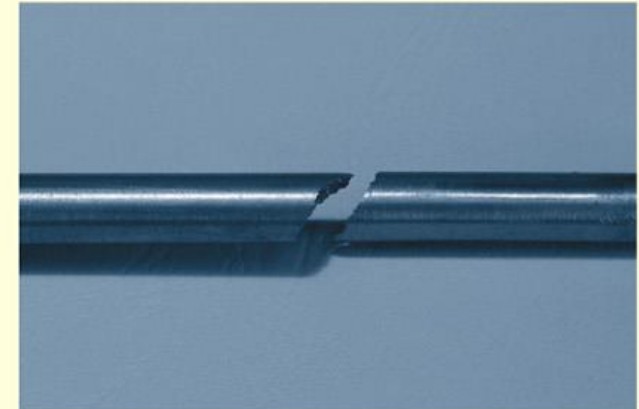
Thus, $\sigma_2 = -\tau$ acts at $\theta_{p2} = 45^\circ$ as shown in Fig. 9-11b, and $\sigma_1 = \tau$ acts on the other face, $\theta_{p1} = 135^\circ$.

Materials that are *brittle* fail due to *normal stress*. That is why when a brittle material, such as cast iron, is subjected to torsion it will fail in tension at a 45° inclination as seen in the adjacent photo.

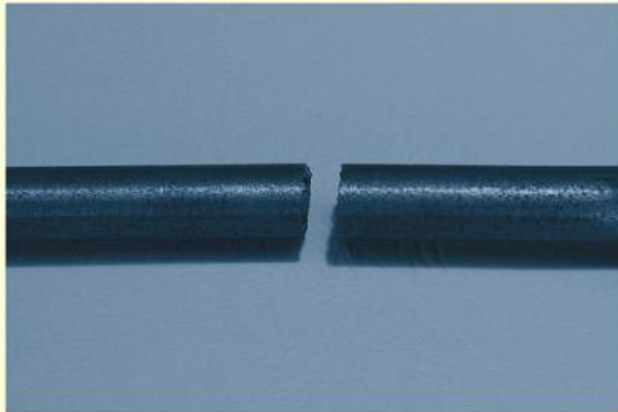
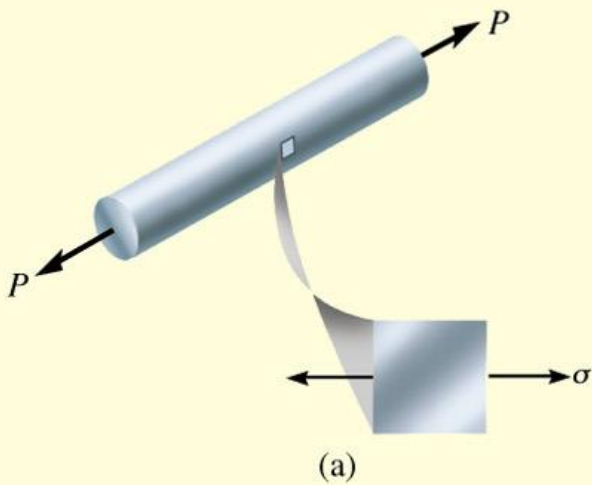


(b)

Fig. 9-11



EXAMPLE 9.4



When the axial loading P is applied to the bar in Fig. 9–12a, it produces a tensile stress in the material. Determine (a) the principal stress and (b) the maximum in-plane shear stress and associated average normal stress.

Solution

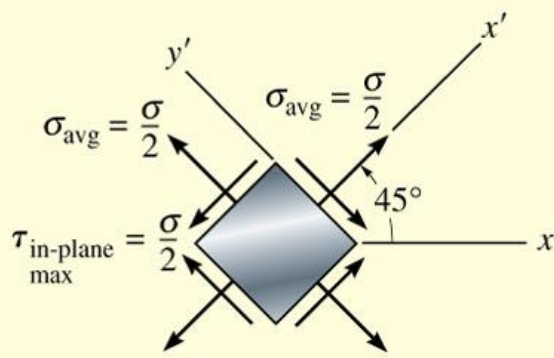
From the established sign convention,

$$\sigma_x = \sigma \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

Principal Stress. By observation, the element orientated as shown in Fig. 9–12a illustrates a condition of principal stress since no shear stress acts on this element. This can also be shown by direct substitution of the above values into Eqs. 9–4 and 9–5. Thus,

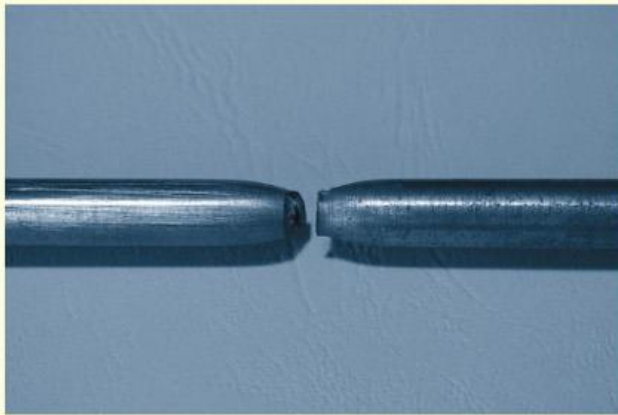
$$\sigma_1 = \sigma \quad \sigma_2 = 0 \quad \text{Ans.}$$

Since experiments have shown that normal stress causes brittle materials to fail, then if the bar is made from *brittle material*, such as cast iron, it will cause failure as shown in the adjacent photo.



(b)

Fig. 9-12



Maximum In-Plane Shear Stress. Applying Eqs. 9-6, 9-7, and 9-8, we have

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(\sigma - 0)/2}{0}; \theta_{s1} = 45^\circ, \theta_{s2} = 135^\circ$$

$$\tau_{\text{in-plane}}^{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma - 0}{2}\right)^2 + (0)^2} = \pm \frac{\sigma}{2} \quad \text{Ans.}$$

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma + 0}{2} = \frac{\sigma}{2} \quad \text{Ans.}$$

To determine the proper orientation of the element, apply Eq. 9-2.

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = -\frac{\sigma - 0}{2} \sin 90^\circ + 0 = -\frac{\sigma}{2}$$

This negative shear stress acts on the x' face, in the negative y' direction as shown in Fig. 9-12b.

If the bar is made from a *ductile material* such as mild steel then shear stress will cause it to fail when it is subjected to *tension*. This can be noted in the adjacent photo, where within the region of necking, shear stress has caused “slipping” along the steel’s crystalline boundaries, resulting in a plane of failure that has formed a *cone* around the bar oriented at approximately 45° as calculated above.

EXAMPLE 9.5

The state of plane stress at a point on a body is shown on the element in Fig. 9–13*a*. Represent this stress state in terms of the principal stresses.

Solution

From the established sign convention, we have

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 90 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

Orientation of Element. Applying Eq. 9–4, we have

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{60}{(-20 - 90)/2}$$

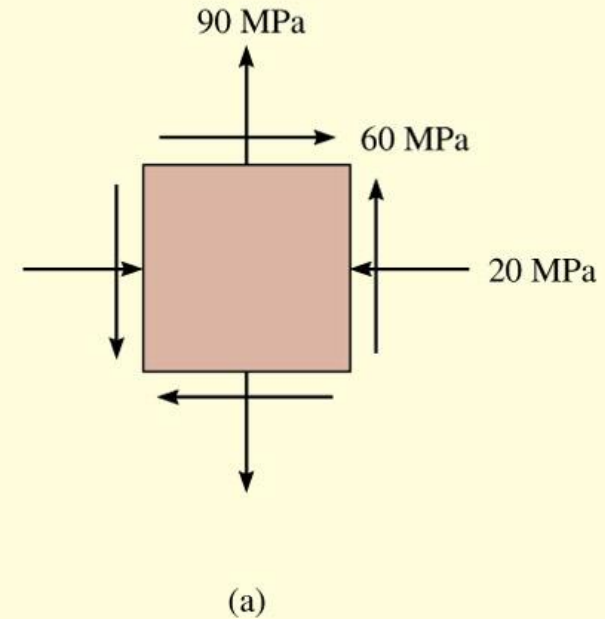
Solving, and referring to this root as θ_{p_2} , as will be shown below, yields

$$2\theta_{p_2} = -47.49^\circ \quad \theta_{p_2} = -23.7^\circ$$

Since the difference between $2\theta_{p_1}$ and $2\theta_{p_2}$ is 180° , we have

$$2\theta_{p_1} = 180^\circ + 2\theta_{p_2} = 132.51^\circ \quad \theta_{p_1} = 66.3^\circ$$

Recall that θ is measured positive *counterclockwise* from the x axis to the outward normal (x' axis) on the face of the element, and so the results are shown in Fig. 9–13*b*.



Principal Stresses. We have

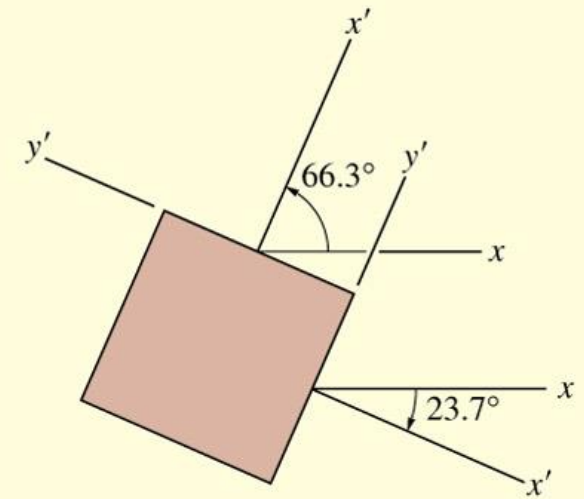
$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{-20 + 90}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2} \\ &= 35.0 \pm 81.4 \\ \sigma_1 &= 116 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= -46.4 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Ans.
Ans.

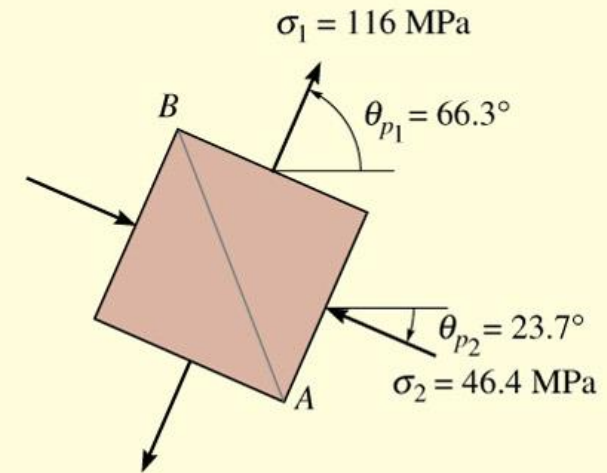
The principal plane on which each normal stress acts can be determined by applying Eq. 9-1 with, say, $\theta = \theta_{p_2} = -23.7^\circ$. We have

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{-20 + 90}{2} + \frac{-20 - 90}{2} \cos 2(-23.7^\circ) + 60 \sin 2(-23.7^\circ) \\ &= -46.4 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Hence, $\sigma_2 = -46.4 \text{ MPa}$ acts on the plane defined by $\theta_{p_2} = -23.7^\circ$, whereas $\sigma_1 = 116 \text{ MPa}$ acts on the plane defined by $\theta_{p_1} = 66.3^\circ$. The results are shown on the element in Fig. 9-13c. Recall that no shear stress acts on this element.



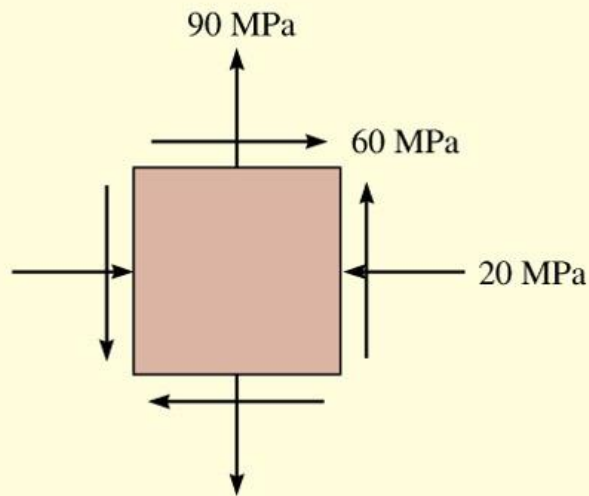
(b)



(c)

Fig. 9-13

EXAMPLE 9.6



(a)

The state of plane stress at a point on a body is represented on the element shown in Fig. 9–14*a*. Represent this stress state in terms of the maximum in-plane shear stress and associated average normal stress.

Solution

Orientation of Element. Since $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = 90$ MPa, and $\tau_{xy} = 60$ MPa, applying Eq. 9.6, we have

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(-20 - 90)/2}{60}$$

$$2\theta_{s_2} = 42.5^\circ \quad \theta_{s_2} = 21.3^\circ$$

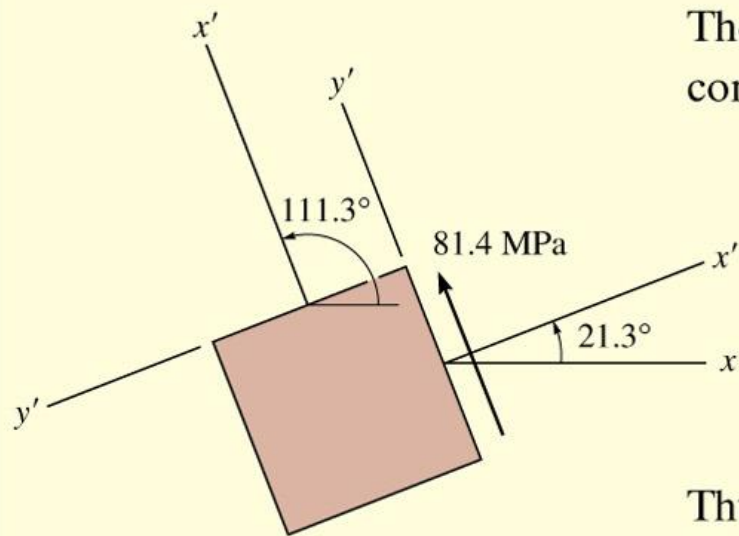
$$2\theta_{s_1} = 180^\circ + 2\theta_{s_2} \quad \theta_{s_1} = 111.3^\circ$$

Note that these angles shown in Fig. 9–14*b* are 45° away from the principal planes of stress, which was determined in Example 9.5.

Maximum In-Plane Shear Stress. Applying Eq. 9–7,

$$\begin{aligned} \tau_{\text{in-plane}}^{\max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2} \\ &= 81.4 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Ans.



(b)

The proper direction of $\tau_{\text{in-plane}}^{\text{max}}$ on the element can be determined by considering $\theta = \theta_{s_2} = 21.3^\circ$, and applying Eq. 9-2. We have

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= -\left(\frac{-20 - 90}{2}\right) \sin 2(21.3^\circ) + 60 \cos 2(21.3^\circ) \\ &= 81.4 \text{ MPa}\end{aligned}$$

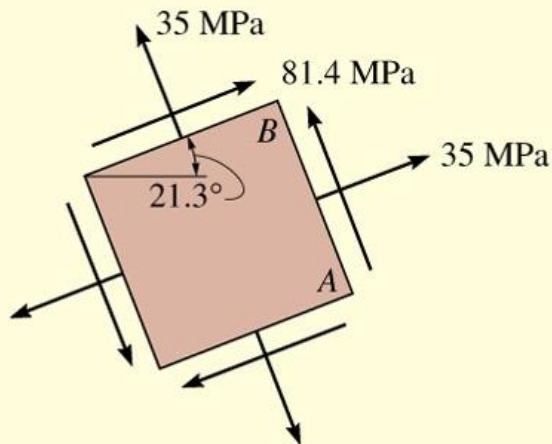
Thus, $\tau_{\text{in-plane}}^{\text{max}} = \tau_{x'y'}$ acts in the *positive* y' direction on this face ($\theta = 21.3^\circ$), Fig. 9-14b. The shear stresses on the other three faces are directed as shown in Fig. 9-14c.

Average Normal Stress. Besides the maximum shear stress, as calculated above, the element is also subjected to an average normal stress determined from Eq. 9-8; that is,

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa} \quad \text{Ans.}$$

This is a tensile stress. The results are shown in Fig. 9-14c.

Fig. 9-14



(c)