



educo.ir

دانلود سوالات آزمون‌های مختلف

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز اول

۱.  $n$  عددی طبیعی بزرگ‌تر از یک و  $p$  عددی اول است که  $n \mid p - 1$  و  $n \mid n^3 - 1$ . نشان دهید  $4p - 3$  مربع کامل است.

۲. در مثلث  $ABC$ ،  $\angle A = 6^\circ$ . نقطه‌ی متغیر  $D$  روی پاره‌خط  $BC$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $O_1$  مرکز دایره‌ی محیطی مثلث  $ABD$  و  $O_2$  مرکز دایره‌ی محیطی مثلث  $ACD$  باشد. محل تقاطع  $BO_1$  و  $CO_2$  را  $M$  و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث  $DO_1O_2$  را  $N$  می‌نامیم. ثابت کنید خط  $MN$  از نقطه‌ی ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۳. کهکشان راه دوغی (!) بیش از یک میلیون ستاره دارد. نشان دهید، هر لحظه، فاصله‌های دویبه‌دوی این ستاره‌ها شامل دست‌کم ۷۹ عدد متمایز است. (هر ستاره را یک نقطه فرض کنید.)

به نام او

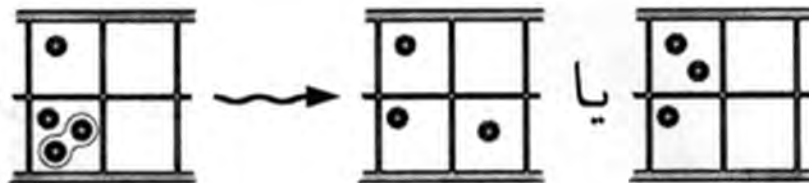
مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز دوم

۴. در برخی از خانه‌های یک جدول  $2 \times n$  تعدادی مهره قرار دارد.



اگر در خانه‌ای بیش از یک مهره باشد، می‌توانیم دو مهره از آن خارج کنیم و در عوض یک مهره در خانه‌ی سمت راستش و یا یک مهره در خانه‌ی بالایی‌اش قرار دهیم.



فرض کنید که در ابتدا دست‌کم  $2^n$  مهره در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می‌توان مهره‌ها را طوری جابه‌جا کرد که یک مهره به خانه‌ی انتهایی که در شکل با ستاره مشخص شده است، برسد.

۵.  $BC$  قطر یک دایره و  $XY$  وتری عمود بر  $BC$  است. نقاط  $M$  و  $P$  به ترتیب روی  $XY$  و  $CY$  یا امتداد آن‌ها به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که  $CY \parallel PB$  و  $CX \parallel MP$ . محل تقاطع  $PB$  و  $CX$  را  $K$  می‌نامیم. ثابت کنید  $PB \perp MK$ .

۶. تمام توابع  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  را بیابید که برای هر  $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$(x + y)f(f(x)y) = x^y f(f(x) + f(y))$$

منظور از  $\mathbb{R}^+$  مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است. (توجه کنید که صفر عددی مثبت نیست!)