

# آزمون جامع ریاضی برای هر دو رشته تجربی و ریاضی (زمان ۵۰ دقیقه) (سیزدهم اردیبهشت ۹۵)

- ۱- داده‌های آماری در ۹ طبقه دسته‌بندی شده‌اند، فراوانی تجمعی نسبی در دسته چهارم و پنجم به ترتیب  $۰/۲۸$  و  $۰/۴۰$  است. در نمودار دایره‌ای، زاویه مربوط به دسته پنجم چند درجه است؟
- $۴۳/۲$  (۴)                       $۴۲/۶$  (۳)                       $۴۱/۴$  (۲)                       $۴۰/۵$  (۱)
- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

فراوانی مطلق      فراوانی تجمعی

$$F_5 = F_4 + f_5 \rightarrow \frac{f_5}{N} = \frac{F_5}{N} - \frac{F_4}{N}$$

$$\Rightarrow F_{c4} = 0/28 \text{ و } F_{c5} = 0/4 \text{ و } \frac{f_5}{N} = F_{c5} - F_{c4} = 0/12$$

$$a_5 = \frac{f_5}{N} \times 360 = 0/12 \times 360 = \frac{12}{100} \times 360 = 43/2$$

- ۲- اگر ۲۰ داده‌ی آماری را دو برابر کرده و سپس ۷ واحد از هر کدام کم کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید،  $۱/۵$  برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع داده‌های قبلی کدام است؟
- $۴۲۰$  (۴)                       $۳۵۰$  (۳)                       $۲۸۰$  (۲)                       $۲۱۰$  (۱)
- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

ضریب تغییرات جدید  $CV_2$       ضریب تغییرات قبلی  $CV_1$

اگر میانگین داده‌های اصلی  $\bar{X}$  و انحراف معیار  $\sigma$  باشد، آن‌گاه:

$$CV_1 = \frac{\sigma}{\bar{X}} \quad CV_2 = \frac{2\sigma}{2\bar{X} - 7}$$

$$CV_2 = 1/5 CV_1 \Rightarrow \frac{2\sigma}{2\bar{X} - 7} = \frac{3}{2} \times \frac{\sigma}{\bar{X}} \Rightarrow \bar{X} = 10/5$$

$$\frac{\sum x_i}{N} = \bar{X} \Rightarrow \sum x_i = N \times \bar{X} = 20 \times 10/5 = 210$$

- ۳- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد موردنظر  $a$  و  $b$  از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟
- $۴۰$  (۴)                       $۳۶$  (۳)                       $۲۴$  (۲)                       $۲۰$  (۱)
- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

حالت‌های کلی

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{-} \frac{3}{-} \frac{b}{-} \frac{2}{-} \frac{1}{-} \rightarrow 3! \times 2 \\ \frac{3}{-} \frac{a}{-} \frac{2}{-} \frac{b}{-} \frac{1}{-} \rightarrow 3! \times 2 \\ \frac{3}{-} \frac{2}{-} \frac{a}{-} \frac{1}{-} \frac{b}{-} \rightarrow 3! \times 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 36$$

جابه‌جایی  $a$  و  $b$   $\rightarrow 3! \times 2$

- ۴- شش گوی یکسان با شماره‌های ۱ تا ۶ در یک ظرف قرار دارند، به تصادف دو گوی از آنها برمی‌داریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو گوی کم‌تر از ۶ است؟
- $\frac{5}{12}$  (۴)                       $\frac{1}{2}$  (۳)                       $\frac{1}{4}$  (۲)                       $\frac{4}{15}$  (۱)
- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = \binom{6}{2} = 15 \rightarrow A = \{\{1 \text{ و } 2\} \{1 \text{ و } 3\} \{1 \text{ و } 4\} \{2 \text{ و } 3\}\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{15}$$

- ۵- اگر منحنی به معادله  $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعه مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟
- $4 < m < 5$  (۴)                       $3 < m < 5$  (۳)                       $3 < m < 4$  (۲)                       $m > 3$  (۱)

# آزمون جامع ریاضی برای هر دو رشته تجربی و ریاضی زمان ۵۰ دقیقه (سیزدهم اردیبهشت ۹۵)

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. باید معادله‌ی  $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$  دارای دوریشه حقیقی مثبت باشد.

$$\Delta' > 0 \Rightarrow 4 - 2(m - 3) > 0 \Rightarrow 10 > 2m \Rightarrow m < 5$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 2 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} m < 5 \\ m > 3 \end{array} \right\} \rightarrow 3 < m < 5$$

۶- از تساوی  $\text{Log}_5(2x - 1) + \text{Log}_5(3x - 5) = 1$ ، مقدار  $\text{Log}_2(6x + 3)$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_5(2x - 1)(3x - 5) = 1 \Rightarrow (2x - 1)(3x - 5) = 5 \Rightarrow 6x^2 - 10x - 3x + 5 = 5 \Rightarrow 6x^2 - 13x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin D_f \\ x = \frac{13}{6} \in D_f \end{cases}$$

$$x = \frac{13}{6} \Rightarrow \text{Log}_2(6x + 3) = \text{Log}_2 16 = \text{Log}_2 2^4 = 4$$

۷- در دستگاه معادلات  $\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = 1 \end{cases}$  معکوس ماتریس مجهول، به صورت  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  است. اگر  $x = 1$ ، مقدار  $y$  کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Ax = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ 2f - 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x=1} \begin{cases} -f = 1 \\ y = 2f - 1 \end{cases} \Rightarrow y = -3$$

۸- تصاعد هندسی ... و  $\frac{1}{4}$  و  $x$  و ۲ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

- (۱)  $\frac{41}{32}$  (۲)  $\frac{21}{16}$  (۳)  $\frac{11}{8}$  (۴)  $\frac{23}{16}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2 = 2 \times \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{\text{غیرنزولی}} x = -1 \text{ و } q = \frac{-1}{2}$$

$$S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{2\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^6\right)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4\left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{3}{2}} \Rightarrow S_6 = \frac{4}{3} \times \frac{63}{64} = \frac{21}{16}$$

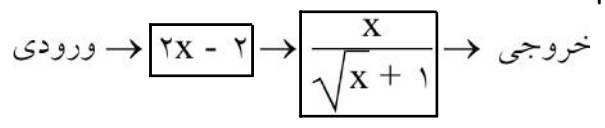
۹- اعداد  $2^a$ ،  $4\sqrt{2}$  و  $2^b$  سه جمله متوالی از تصاعد هندسی‌اند، واسطه عددی بین  $a$  و  $b$  کدام است؟

- (۱)  $2/5$  (۲) ۲ (۳)  $1/5$  (۴)  $\sqrt{2}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a + b = 5 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 5/2 = 2.5$$

۱۰- اگر خروجی از ماشین شکل مقابل  $\frac{4}{3}$  باشد مقدار ورودی کدام است؟



- (۱)  $\frac{11}{9}$  (۲)  $\frac{7}{2}$  (۳) ۳ (۴) ۴

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

آزمون جامع ریاضی برای هر دو رشته تجربی و ریاضی (زمان ۵۰ دقیقه) (سیزدهم اردیبهشت ۹۵)

$$f(2x-2) = \frac{2x-2}{\sqrt{2x-2+1}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2(x-1) = 2(\sqrt{2(x-1)+1}) \xrightarrow{\sqrt{x-1}=t} 3t^2 = 2(t\sqrt{2+1}) \Rightarrow 3t^2 - 2t\sqrt{2} - 2 = 0$$

$$t = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2} \Rightarrow x = 3$$

تذکر: به کمک گزینه‌ها این تست به راحتی حل می‌شود.

۱۱- اگر  $a_n = \sqrt{n^2 + 2n}$  و  $b_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ ، هریک از دو دنباله  $\{a_n - b_n\}$  و  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  به ترتیب

چگونه‌اند؟

- (۱) همگرا - همگرا (۲) همگرا - واگرا (۳) واگرا - همگرا (۴) واگرا - واگرا
- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 2n} - n - \frac{1}{n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n - n - \frac{1}{n} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2 + 2n}}{n^2 + 1} = 1$$

هر دو دنباله همگرا هستند.  $\Rightarrow$

۱۲- در معادله‌ی  $3x^2 - 17x + m = 0$  یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیشتر است.  $m$  کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x_1 = 3x_2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases}$$

$$4x_2 = \frac{14}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{3}$$

$$3\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 17\left(\frac{7}{3}\right) + m = 0 \Rightarrow m = 10$$

۱۳- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \left( \frac{\pi}{2} + x \right) \sin(\pi + x) = 0$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{2} + \cos x (-\sin x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1 \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۱۴- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$  به کدام صورت است؟

آزمون جامع ریاضی برای هر دو رشته تجربی و ریاضی (زمان ۵۰ دقیقه) (سیزدهم اردیبهشت ۹۵)

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۴)$$

$$k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (۳)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (۱)$$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۱۵- اگر  $f(x) = x + 2$  و  $g(x) = 2x^2 - 8x + 1$  باشند، آن گاه حاصل جمع ریشه های معادله ی  $\operatorname{gof}^{-1}(x) = 0$  کدام است؟

$$-۸ \quad (۴)$$

$$۸ \quad (۳)$$

$$\frac{25}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{-25}{2} \quad (۱)$$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x + 2 = y \Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$$

$$g(f^{-1}(x)) = 0 \Rightarrow g(x - 2) = 0 \Rightarrow 2(x - 2)^2 - 8(x - 2) + 1 = 0$$

۱۶- با فرض  $f(x) = 2x + 3$  و  $g^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$  مقدار  $(\operatorname{gof}^{-1})(5)$  چه قدر است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۱)$$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$(\operatorname{gof}^{-1}) = (\operatorname{fog}^{-1})^{-1} = \left( \frac{2(3x + 1)}{x - 2} + 3 \right)^{-1} = \left( \frac{9x - 4}{x - 2} \right)^{-1} = \frac{2x - 4}{x - 9}$$

$$\Rightarrow (\operatorname{gof}^{-1})(5) = \frac{2 \times 5 - 4}{5 - 9} = -\frac{3}{2}$$

۱۷- اگر  $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$  مقدار  $a$  کدام است؟

$$-۱ \quad (۴)$$

$$-۲ \quad (۳)$$

$$-۳ \quad (۲)$$

$$-۴ \quad (۱)$$

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2a) = 1 + 2a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow (1 + 2a) - (a - 1) = -1 \Rightarrow a = -1 - 2 = -3$$

۱۸- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x^2 - \sqrt{x}}$  کدام است؟

$$\frac{3\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{x^2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

$$x \rightarrow 1$$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

آزمون جامع ریاضی برای هر دو رشته تجربی و ریاضی (زمان ۵۰ دقیقه) (سیزدهم اردیبهشت ۹۵)

$$H = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi(1 + \tan^2 \pi x)}{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$

(هویتال)

۱۹- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{1}{3}$ ، مشتق  $f(\sqrt{|x| + 3})$  در نقطه  $x = -1$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{6}$       (۲)  $\frac{1}{12}$       (۳)  $-\frac{1}{6}$       (۴)  $-\frac{1}{12}$

$$f'(2) = -\frac{1}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(f(\sqrt{|x| + 3}))' = (f(\sqrt{-x + 3}))' = \frac{-1}{2\sqrt{-x + 3}} f'(\sqrt{-x + 3}) \stackrel{x = -1}{=} \frac{-1}{4} f'(2) = -\frac{1}{4} \times -\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

۲۰- ضابطه‌ی تابع وارون تابع  $f(x) = \frac{1}{2}(3^{x+1} - 1)$  کدام است؟

(۱)  $\text{Log}_3(2x + 1)$       (۲)  $\text{Log}_3 \frac{2x + 1}{3}$       (۳)  $\text{Log}_3(2x - 1)$       (۴)  $\text{Log}_3 \frac{2x + 1}{3}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{1}{2}(3^{x+1} - 1) \Rightarrow 2y = 3^{x+1} - 1 \Rightarrow 3^{x+1} = 2y + 1 \Rightarrow x + 1 = \text{Log}_3(2y + 1)$$

$$x = \text{Log}_3(2y + 1) - 1 \Rightarrow x = \text{Log}_3 \frac{2y + 1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \text{Log}_3 \frac{2x + 1}{3}$$

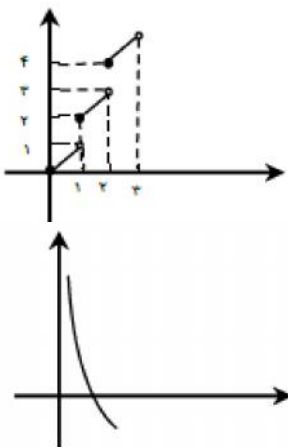
۲۱- کدام تابع زیر در دامنه‌ی خود نه صعودی است و نه نزولی؟

(۱)  $y = x + [x]$       (۲)  $y = \text{Log}_{\frac{1}{2}} x$       (۳)  $y = -\sqrt[3]{x + 1} + 2$       (۴)  $y = x - [x]$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

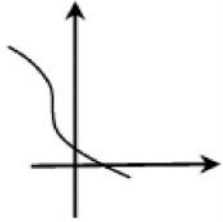
گزینه ۱: اکیداً صعودی

گزینه ۲: اکیداً نزولی

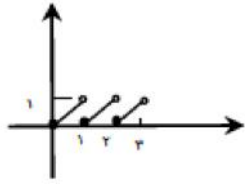




آزمون جامع ریاضی برای هر دو رشته تجربی و ریاضی (زمان ۵۰ دقیقه) (سیزدهم اردیبهشت ۹۵)



گزینه ۳: اکیداً نزولی



گزینه ۴: غیر یکنوا

۲۲- مقدار مشتق تابع با ضابطه  $y = \sin \frac{x}{y} + 1$  در نقطه  $(\pi, 1)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{\pi - 1}$       (۲)  $\frac{1}{\pi + 1}$       (۳)  $\frac{-1}{\pi + 1}$       (۴)  $\frac{1}{1 - \pi}$

از تابع داده شده بر حسب  $x$  مشتق ضمنی می‌گیریم:

$$y = \sin \frac{x}{y} + 1 \Rightarrow y' = \left(\frac{x}{y}\right)' \cos \frac{x}{y} = \frac{y - xy'}{y^2} \cos \frac{x}{y}$$

در نقطه  $(\pi, 1)$ :

$$y' = \frac{1 - \pi y'}{1} \cos \pi = \pi y' - 1 \Rightarrow y' = \pi y' - 1 \Rightarrow 1 = y'(\pi - 1) \Rightarrow y' = \frac{1}{\pi - 1}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۳- مشتق  $f(\sqrt[3]{6x+2})$  در نقطه  $x = 1$  برابر ۲- است. شیب خط قائم بر نمودار  $f$  در نقطه‌ای به طول ۲ کدام

است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳) ۳      (۴) ۴

$$y = f(\sqrt[3]{6x+2}) \Rightarrow y' = \frac{6}{3\sqrt[3]{6x+2}^2} f'(\sqrt[3]{6x+2})$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x = 1 \Rightarrow y' = \frac{6}{12} f'(2) = -2 \Rightarrow f'(2) = -4 \Rightarrow \frac{-1}{f'(2)} = \frac{1}{4}$$

۲۴- معادله مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + x^2}{x-2}}$  وقتی  $x \rightarrow -\infty$  کدام یک است؟

- (۱)  $2y - 2x - 3 = 0$       (۲)  $2y + 2x - 3 = 0$       (۳)  $2y - 2x + 3 = 0$       (۴)  $2y + 2x + 3 = 0$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + x^2}{x-2}} = \sqrt{x^2 + 3x + 6 + \frac{12}{x-2}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{(x^3 + x^2)}{(x-2)} = x^2 + 3x + 6$$

$$y = \sqrt{x^2 + 3x + 6} \sim \left| x + \frac{3}{2} \right| \Rightarrow \left( x \rightarrow -\infty \Rightarrow y = -x - \frac{3}{2} \Rightarrow 2y + 2x + 3 = 0 \right)$$

۲۵- تقعر نمودار تابع با ضابطه  $y = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$  در بازه  $(a, b)$  رو به پایین است، بیشترین مقدار  $(b - a)$  کدام است؟

آزمون جامع ریاضی برای هر دو رشته تجربی و ریاضی (زمان ۵۰ دقیقه) (سیزدهم اردیبهشت ۹۵)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$f''(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^5}}$$

$(-2, 0)$        $b - a = 2$

$x$	-2	.	.
$f''(x)$	+	-	+

۲۶- به ازای کدام مقدار  $b$  دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$  و  $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$  مماس داخل‌اند؟

- (۱) -۵      (۲) -۴      (۳) -۳      (۴) -۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$C: x^2 + (y - 2)^2 = -b + 4$$

$$C': (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \quad 0 \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right|^{-1} \text{ و } 0 \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right|^{-1} \Rightarrow oo' = \sqrt{2} = |R - R'| = |\sqrt{-b + 4} - \sqrt{2}| \Rightarrow b = -4$$

۲۷- معادله بیضی که دو کانون آن به مختصات  $F'(-2, 0)$ ،  $F(2, 0)$  و طول قطر کوچک آن ۲ باشد، کدام است؟

(۱)  $5x^2 + y^2 = 5$       (۲)  $x^2 + 5y^2 = 5$       (۳)  $5x^2 + 4y^2 = 20$       (۴)  $4x^2 + 5y^2 = 20$

با توجه به آنکه  $FF' = 4$  می‌باشد پس:

$$FF' = 2c = 4 \Rightarrow c = 2, \text{ قطر کوچک} = 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 5$$

مرکز بیضی، وسط دو کانون آن است پس  $O\left(\frac{2-2}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (0, 0)$  مرکز آن بوده و در نتیجه مبدا

مختصات مرکز بیضی است و محور کانونی ( $FF'$ ) بر روی محور  $x$  ها و محور دیگر محور  $y$  ها است پس بیضی افقی است و داریم:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow 5y^2 + x^2 = 5$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۲۸- حاصل  $\int_{-2}^1 x([x] - 1) dx$  کدام است؟

- (۱) ۳      (۲) ۴/۵      (۳) ۵      (۴) ۵/۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\int_{-2}^1 x([x] - 1) dx = \int_{-2}^{-1} x(-2 - 1) dx + \int_{-1}^0 x(-1 - 1) dx + \int_0^1 x(-1) dx$$

$$-\frac{3x^2}{2} \Big|_{-2}^{-1} + (-x^2) \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 = \left(-\frac{3}{2}\right) - (-6) + (0) - (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 = 5$$

۲۹- حاصل  $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$  چه قدر است؟

آزمون جامع ریاضی برای هر دو رشته تجربی و ریاضی (زمان ۵۰ دقیقه) (سیزدهم اردیبهشت ۹۵)

$$\ln \frac{5}{3} \quad (4)$$

$$\ln \frac{5}{4} \quad (3)$$

$$\ln \frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\ln \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$1 + \ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \Rightarrow I = \int \frac{du}{u} = \ln u$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$= \ln (\ln x + 1) \Big|_e^e = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

۳۰. در مستطیلی به ابعاد ۱۳ و ۶ واحد، نقطه‌ی M بر روی ضلع بزرگتر قرار دارد و خطوط واصل از M به دو رأس دیگر مستطیل بر هم عموداند. فاصله‌ی نزدیک‌ترین رأس مستطیل از M کدام است؟

$$4/5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3/5 \quad (2)$$

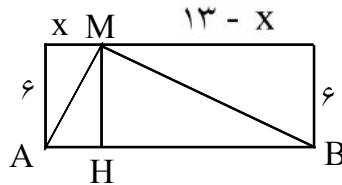
$$3 \quad (1)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

روش اول:

$$x(13-x) = MH^2$$

$$x(13-x) = 36 \Rightarrow x = 4$$



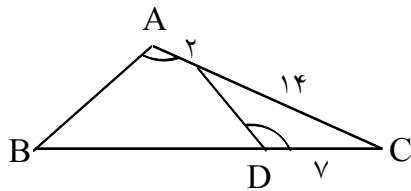
روش دوم:

$$MB^2 + MA^2 = AB^2$$

$$36 + (13-x)^2 + 36 + x^2 = 169 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 26x + 72 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-9) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ و } x = 9$$

با توجه به شکل:



۳۱. در شکل مقابل  $\hat{A} = \hat{D}$ ، طول BD چند واحد است؟

$$23 \quad (2)$$

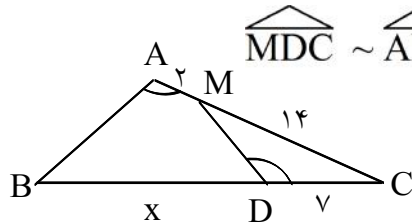
$$22 \quad (1)$$

$$25 \quad (4)$$

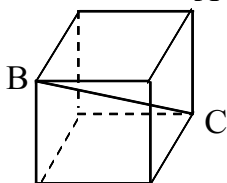
$$24 \quad (3)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{MDC} \sim \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{y}{16} = \frac{14}{y+x} \Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{2}{y+x} \Rightarrow y+x = 32 \Rightarrow x = 25$$



۳۲. در مکعب شکل مقابل فاصله‌ی رأس A از قطر BC چند برابر یال مکعب است؟



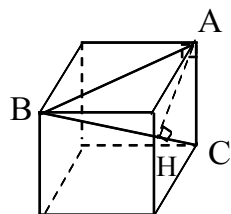
$$\frac{\sqrt{6}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



با توجه به رابطه فیثاغورث در مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )



آزمون جامع ریاضی برای هر دو رشته تجربی و ریاضی زمان ۵۰ دقیقه (سیزدهم اردیبهشت ۹۵)

$$AC = a \text{ و } BC = a\sqrt{3} \text{ و } AB = a\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2} \Rightarrow \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3} \times h}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{3}$$