فصل دوم :

۱– تعیین محل ریشه های معادله f(x)=0

۲– ۱– به صورت ترسیمی

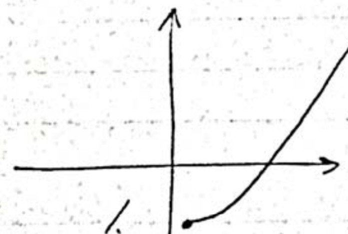
۳–۱– روش غیر ترسیمی یا جدول بندی مقادیر

۴–تعیین ریشه های حقیقی معادله با روش های عددی

Subject ۱۵
Date

فصل دوم

در این فصل یکی از اساسی ترین مسائل آنالیز عددی مطرح می شود، و آن یافتن مقادیری از متغیر x است که در $f(x)=0$، که در آن f یک تابع مفروض است.



حل بسیاری از مسائل اجتماعی، اقتصادی و علمی منجر به حل معادله ای به شکل $f(x)=0$ می شود. منظور از حل این معادله تعیین عدد یا اعدادی است که مقدار تابع به ازای آنها صفر شود. اگر $f(\alpha)=0$ آنگاه α را یک ریشه معادله می نامند یا می گویند α یک صفر تابع f است. تابع f به چند دسته تقسیم می شوند:

الف: تابع f، چندجمله ای باشد

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$f(x)$ را یک معادله چندجمله ای یا معادله جبری گویند

ب: هرگاه $f(x)$ شامل توابعی غیر چندجمله ای مانند توابع مثلثاتی $\sin x$، $\cos x$ و ... لگاریتمی، نمایی، معکوس مثلثاتی $\sin^{-1} x$، $\cos^{-1} x$ ...

Subject جلسه ۱۶
Date

یادآوری: $f(x)=0$ را یک معادله یا تابع متعالی یا غیرجبری می‌نامیم.

✓ $x^5-4x+2=0$ یک تابع چندجمله‌ای است

✓ $xe^x-1=0$ یا $x-3\sin x=0$ توابع متعالی هستند

در این فصل به حل معادلات متعالی جهت تعیین ریشه‌ها حقیقی معادله $f(x)=0$ می‌پردازیم:

لازم به توضیح است این مسأله یکی از قدیمی‌ترین مسائل تقریب عددی می‌باشد و هنوز تحقیق در این زمینه فعالانه ادامه دارد. مانند روش نیوتن - رافسون که روش کلاسیک و توسط اسحاق نیوتن حدود ۳۰۰ سال پیش ارائه شد تا روش خارج قسمت - تفاضل برای توابع چندجمله‌ای که اخیراً برای اولین بار ارائه شده‌اند.

نکته: برای حل معادله $f(x)=0$ ابتدا تقریب اولیه از ریشه را بدست می‌آوریم و سپس با استفاده از این تقریب و روش‌های متفاوت تقریب را بهتر می‌کنیم که روش‌های زیر را داریم:

۱) روش ترسیمی جهت تعیین محل ریشه‌های معادله $f(x)=0$

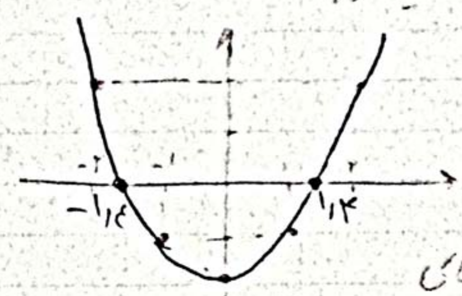
الف: در صورتی که معادله به شکل $y=f(x)$ باشد

Subject ص ۱۷
Date

مثال: تعداد و محل تقریبی ریشه‌های معادله $f(x) = x^2 - 2 = 0$ را تعیین کنید.

منحنی مربوطه را رسم می‌کنیم

x	y
۰	-۲
۱	-۱
۲	۲
-۱	۱
-۲	۲



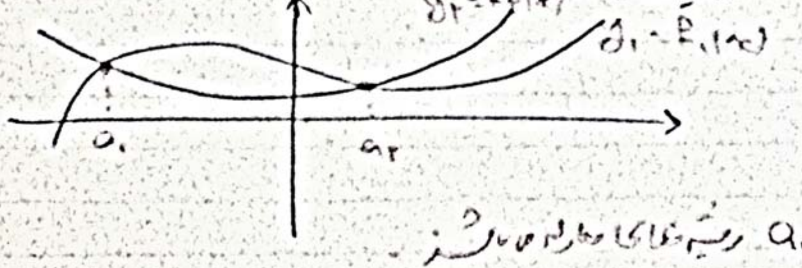
با توجه به شکل ریشه‌های معادله یا به عبارتی تعداد برخورد منحنی با محور xها ۲ نقطه می‌باشد

مقادیر محل تقریبی ریشه‌ها

$$x^2 - 2 = 0 \longrightarrow x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2} \simeq \pm 1.4$$

ب: در صورتی که معادله به صورت ترکیب دو تابع $f(x)$ باشد آنها را به شکل $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ درمی‌آوریم و منحنی‌های $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ را رسم می‌کنیم محل برخورد دو منحنی در روی محور x ریشه می‌باشد.



a_1 و a_2 ریشه‌های معادله می‌باشند.

Subject
Date

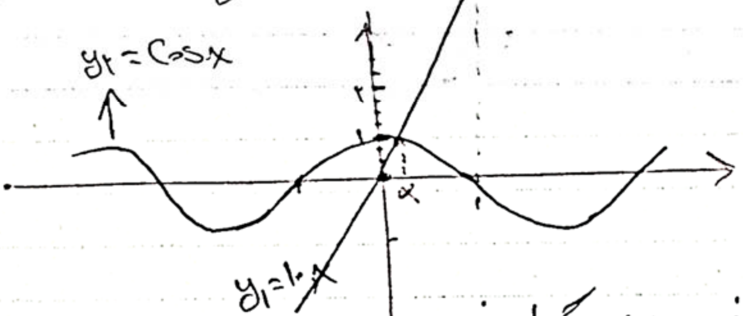
مثال: معادله $f(x)=10x-\cos x$ دارای چند تا ریشه حقیقی است و در نزدیکی چه عددی می باشد؟

$f(x)=f_1(x)-f_2(x)$

$f(x)=10x-\cos x=0$

هر کدام را ترسیم می کنیم

$y_1=10x \qquad y_2=\cos x$



x	y_1
0	0
1	10

پس ریشه معادله است یک ریشه حقیقی دارد و در نزدیکی صفر محدوده است

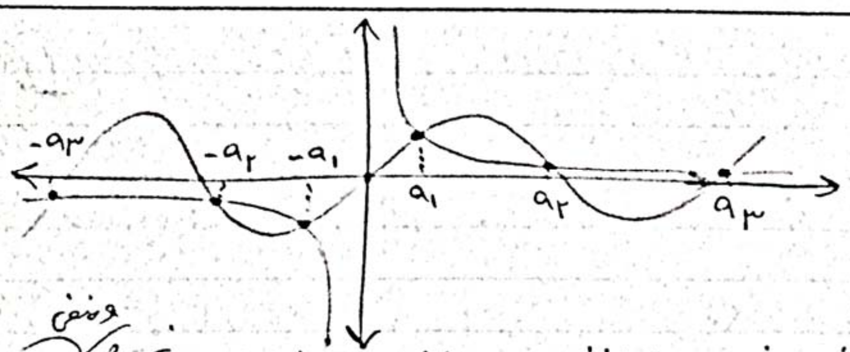
مثال: معادله $x\sin x-1=0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

حل: رسم اولی نمودار خیلی آسان است اگر بگوییم $y_1=1$ و $y_2=x\sin x$ ترسیم y_2 سخت است لذا داریم ⇐

با طرفین وسطین کردن داریم ⇐ $\sin x-\frac{1}{x}=0$

$y_1=\sin x \qquad y_2=\frac{1}{x}$

Subject ص ۱۹
Date



ریشه‌ها نسبت به هم قرینه‌اند معادله دارای بی‌نهایت ریشه مثبت و منفی است.

مثال: حدود و تعداد ریشه معادله $F(x)=x+\cos x$ را تعیین کنید؟

چون برای رسم این نوع از معادلات باید $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$

به صورت تفاضل داشته باشیم معادله فوق را داشته باشیم:

Subject: ص ۲۰
Date

۲) با روش غیر ترسیمی یا جدول مقداری، مقدار و موقعیت تعیین ریشه $f(x)=0$

قضیه (بولتزانو - وایرشتراس) : حالت خاص از قضیه مقدار میانی

اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)\,f(b)<0$
آن گاه حداقل یک نقطه مانند c هست که $a<c<b$ و $f(c)=0$

به عبارت دیگر $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در (a,b) دارد. اگر

f در $[a,b]$ اکیداً یکنوا باشد (یعنی صعودی یا نزولی) یا منحصر بود است
یعنی دقیقاً یک ریشه وجود دارد.

مثال: معادله زیر چند ریشه دارد؟

$f(x) = x^2 - (1-x)^5 = 0$ در بازه $[0,1]$

طبق قضیه $f(1)=1$ $\quad f(0)=-1$

$$f(0)\,f(1) = 1 \times -1 < 0$$

پس حداقل یک ریشه دارد. برای اینکه تعداد ریشه یا منحصر بودن آن را
آن ابتدا تابع در آن بازه یکنوا اکیداً باشد لذا داریم:

$$f'(x) = 2x + 5(1-x)^4$$

چون $f'(x)>0$ مثبت است پس تابع در آن بازه صعودی است پس
تنها یک ریشه دارد.

Subject: ص ۲۱
Date

(۲) تعیین ریشه‌های حقیقی با روش‌های عددی

۲-۱ روش دو بخشی (یا روش تنصیف) (یا جستجوی دودویی)
(Bisection Method)

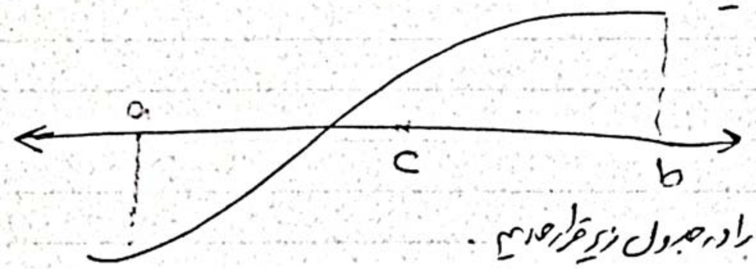
در این روش فرض می‌کنیم معادله $f(x)=0$ در بازه (a,b) دارای ریشه یکتا بوده، و f بر $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ باشد. قرار می‌دهیم $c=\frac{a+b}{2}$ و $f(c)$ را محاسبه می‌کنیم لذا حالات زیر را داریم:

۱) $f(a)f(c)<0$ (در این حالت ریشه بین a و c قرار دارد)

۲) $f(a)f(c)>0$ (در این حالت ریشه بین c و b می‌باشد)

۳) $f(a)f(c)=0$ در این حالت خاتمه یافته است یعنی c ریشه $f(x)=0$ است.

نمایش هندسی:



حالات بالا را در جدول زیر قرار می‌دهیم.

n	a	b	$c_n=\frac{a+b}{2}$	$f(c_n)$	علامت $f(a_n)f(c_n)$

Subject ص ۲۲
Date

مثال: ریشه معادله $3xe^{x}-1=0$ را بدست آورید با روش دو بخشی؟
در بازه $(0,25\ ,\ 0,27)$
$f(0,25) = -0,0188$ $f(0,27) = 0,0266$

n	a	b	c_n	$f(c_n)$	علامت
۱	۰٫۲۵	۰٫۲۷	۰٫۲۶	۰٫۰۰۸۹	−
۲	۰٫۲۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۵	−۰٫۰۰۶۹	+
۳	۰٫۲۵۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۷۵	−۰٫۰۰۵	

$c_1 = \frac{a+b}{2} = 0,26$

$c_2 = \frac{0,25+0,26}{2} = 0,255$

معیار و شرایط توقف روش دو بخشی: