

به نام او

هفتمین آزمون تئوری شازرز

وقت : پنج ساعت

سوال های آزمون نسبتاً سخت هستند ☺

پاسخ سوالات هفته دیگر بر روی شازرز قرار خواهد گرفت.

بهار 25 نمره

امین یک گراف n راسی در نظر گرفته است و امین می خواهد آن را پیدا کند (او فقط تعداد راس ها را می داند و از یال ها اطلاعی ندارد). امین در هر مرحله می تواند دو راس به امین بگوید و امین کوتاه ترین فاصله ی آن ها را در گرافی که در نظر گرفته است می گوید. (کوتاه ترین فاصله بین دو راس برابر کمترین تعداد یال است که باید طی کنیم تا از یکی به دیگری برسیم. فاصله دو راس که به هم مسیر ندارند برابر بی نهایت است). کمترین تعداد پرسش هایی که امین لازم دارد تا گراف امین را پیدا کند چقدر است؟ (واضح است که این دو امین با هم فرق دارند 😊)

جمشید 35 نمره

یال های یک گراف کامل $2n+1$ راسی با 3 رنگ رنگ شده اند. ثابت کنید می توان یکی از رنگ ها را انتخاب کرد به صورتی که گرافی که با یال های این رنگ ساخته می شود مولفه ی همبندی ای اکیدا بزرگ تر از n راس داشته باشد. (در واقع ثابت کنید می توانیم یکی از رنگ ها و $n+1$ راس را به نحوی انتخاب کنیم به صورتی که از هر یک از این $n+1$ راس به هر راس دیگری از همین $n+1$ راس فقط با یال های رنگ انتخاب شده مسیر وجود داشته باشد).

دلبر 40 نمره

تورنمنت یک گراف جهت دار است که هر دو راس آن به هم دقیقاً یک یال دارند. یک شاه در یک تورنمنت راسی است که به همه به وسیله ی مسیری با حداکثر طول 2 دست رسی داشته باشد (دقت کنید که این مسیر باید از شاه شروع شود و به آن راس تمام شود و جهت یال ها هم از شاه به آن راس باشد). تورنمنتی n راسی که $n \geq 5$ و هیچ راس با درجه خروجی $n-1$ نداشته باشد را دلبر می گوئیم. ثابت کنید هر دلبر حداقل 3 شاه دارد. (بله ، سه 😊) (درجه خروجی یک راس برابر تعداد یال هایی است که از آن راس خارج شده اند)