

برای عضویت در بزرگترین کانال یازدهم و  
دوازدهم روی اینجا بزنید

[http://telegram.  
me/yazdahomiy](http://telegram.me/yazdahomiy)

برای دانلود رایگان گام به گام های دیگه کافیه  
روی اینجا بزنید

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

هندسه (۳)

رشته ریاضی و فیزیک

پایه دوازدهم

دوره دوم متوسطه

فصل اول

ماتریس و کاربردها

برای عضویت در کانال گام به گام  
روی اینجا بزنید

<http://telegram.me/yazdahomiy>

## ماتریس‌ها و اعمال روی ماتریس‌ها

اطلاعات مربوط به ۴ تیم اول حاضر در یک سری مسابقات فوتبال که به صورت تفرقه و برگشتی انجام می‌شود در جدول زیر آمده است:

امتیاز	مسابقات	باخت	برد	
۳۰	۳	۳	۹	تیم A
۲۵	۴	۴	۷	تیم B
۲۴	۶	۳	۶	تیم C
۲۲	۴	۵	۶	تیم D

$$M = \begin{matrix} \text{امتیاز} & \text{مسابقات} & \text{باخت} & \text{برد} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 & 6 \\ 7 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 22 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

اگر این اطلاعات را به شکل آرایشی از اعداد و در داخل دو گروه محصور کنیم، در این صورت یک ماتریس شامل ۴ سطر و ۴ ستون حاصل می‌شود که اگر آن را با حرف  $M$  نمایش دهیم، خواهیم داشت:

**تعریف:** هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند  $A, B, C, \dots$  و نام گذاری می‌کنیم.

**مثال:** ماتریس  $A$  ماتریسی شامل سه سطر و چهار ستون است. این ماتریس دارای  $3 \times 4 = 12$  درایه است و مثلاً عدد حقیقی  $\sqrt{2}$  درایه روی سطر اول و ستون چهارم است و درایه  $(-7)$  روی سطر دوم و ستون سوم قرار دارد.

در حالت کلی اگر ماتریسی چون  $A$  دارای  $m$  سطر و  $n$  ستون باشد می‌نویسیم  $A_{m \times n}$  و می‌خوانیم ( $A$  ماتریسی از مرتبه  $m \times n$  (در  $n$ ) است.) برای هر درایه ماتریس و

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & -7 & 1 \\ -3 & 2 & \pi & 14 \end{bmatrix}$$

به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه را مشخص می‌کند. یعنی درایه روی سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام.

ماتریس  $A_{r \times r}$  و ماتریس  $B_{m \times n}$  با درایه‌هایشان نمایش داده شده‌اند:

$$A_{r \times r} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

درایه  $b_{ij}$  را درایه عمومی ماتریس  $B$  می‌نامیم که  $1 \leq i \leq m$  و  $1 \leq j \leq n$  تغییر می‌کنند. همه درایه‌های ماتریس  $B$  را می‌توان توسط درایه عمومی نمایش داد و برای اختصار می‌نویسیم  $B = [b_{ij}]$ .

**مثال:** اگر ماتریس  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  ماتریسی  $2 \times 2$  باشد و برای  $i=1$  داشته باشیم  $a_{11}=5$  و برای  $i=2$  داشته باشیم  $a_{21}=7$  و  $a_{22}=5$  و برای  $i=1$  داشته باشیم  $a_{12}=-2$  در این صورت ماتریس  $A$  را با درایه‌هایش نمایش دهید.

**حل:**  $a_{11}=5$  و  $a_{12}=-2$  و  $a_{21}=7$  و  $a_{22}=5$  پس  $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

### کاردرکلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه  $A, B, C, D$  در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن موجود در هر فروشگاه، در جدول دو بعدی زیر آمده است این اطلاعات را یکبار با یک ماتریس  $3 \times 4$  و یک بار با ماتریس  $4 \times 3$  نمایش دهید.

فروشگاه A	۲۲ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن
فروشگاه B	۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن
فروشگاه C	۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن
فروشگاه D	۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

۱- اگر  $m=n=1$  در این صورت ماتریس  $[k]_{1 \times 1}$  را سناری یا عدد حقیقی  $k$  تعریف می‌کنیم.

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هابلیتون (۱۸۶۵-۱۸۰۵) ریاضی‌دان ایرلندی و «کیلی» ریاضی‌دان انگلیسی در نیمه اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبنای نظری این علم را کارل وایترشتراس (۱۸۹۷-۱۸۱۵) و دیگران در نیمه دوم قرن نوزدهم و نیمه اول قرن بیستم پایه‌ریزی کردند.

### معرفی چند ماتریس خاص

۱- اگر در ماتریس  $A$ ، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی  $n$  باشد،  $A$  را یک ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  ( $n \times n$ ) می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{و} \quad C = [5]_{1 \times 1} = 5$$

در ماتریس‌های  $A$  و  $B$  قطرهای مشخص شده را قطر اصلی این دو ماتریس می‌نامیم و اگر  $i=j$  در این صورت درایه  $a_{ii}$  روی قطر اصلی قرار دارد.

۲- اگر ماتریس  $A$  فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند:

$$A = [1 \ 2]_{1 \times 2} \quad B = [2 \ -1 \ 4 \ 5]_{1 \times 4} \quad \text{و} \quad C = [7]_{1 \times 1} = 7$$

۳- اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس ستونی می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad \text{و} \quad C = [1114]_{1 \times 1} = 1114$$

۴- ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند.) ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۵- اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = [7]$$

۶- ماتریس صفر، ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد  $\bar{0}$  نشان می‌دهیم. ماتریس  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس صفر  $2 \times 2$  است.

**تساوی بین دو ماتریس:** دو ماتریس هم‌مرتبه  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر

$$\forall i, j, a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$$

**مثال:** اگر دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  مساوی باشند  $(x+y+z)$  را بیابید.

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \\ z-1=5 \end{cases} \Rightarrow x=6, y=3, z=6 \Rightarrow x+y+z=15$$

### جمع ماتریس‌ها

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر فرار باشند شرکت تولیدکننده لباس‌ها به هر یک از ۴ فروشگاه مذکور ۲۰ شلوار، ۳۰ بلوز و ۵۰ پیراهن ارسال کند در این صورت اطلاعات مربوط به تعداد لباس‌ها در هر فروشگاه به صورت زیر است:

	D	C	B	A	
	۱۲+۲۰	۱۷+۲۰	۲۶+۲۰	۲۴+۲۰	شلوار
	۳۱+۲۰	۲۸+۲۰	۲۴+۳۰	۱۵+۳۰	بلوز
	۲۵+۵۰	۲۲+۵۰	۱۱+۵۰	۷+۵۰	پیراهن

اگر این جدول را با یک ماتریس  $3 \times 4$  نمایش دهیم می‌توان آن را توسط مجموع دو ماتریس که درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم جمع شده‌اند نوشت:

$$\begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix}_{3 \times 4} + \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \\ 50 & 50 & 50 & 50 \end{bmatrix}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 44 & 46 & 37 & 32 \\ 45 & 49 & 58 & 61 \\ 57 & 61 & 72 & 85 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه  $A$  و  $B$  کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل  $A$  و  $B$  ماتریسی است چون  $C$  که از همان مرتبه  $A$  و  $B$  است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

کاردر کلاس

مانند نمونه ماتریس های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+(-2) & 3+(-3) & (-1)+1 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 & (-1)+4 \\ 7+5 & 8+6 & 9+7 & (-1)+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 3 \\ 12 & 14 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

الف)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A-B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ب)  $A = [1 \ -1 \ 2 \ 7], B = [3 \ 2 \ -1 \ 4] \Rightarrow A+B = [4 \ 1 \ 1 \ 11]$

ب)  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ \sqrt{2} & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & -7 \\ 2 & 3 & -9 & \end{bmatrix} \Rightarrow A-B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 11 \\ \sqrt{2}-1 & 2 & 8 & 13 \end{bmatrix}$

ت)  $A = [5], B = [-7] \Rightarrow A+B = [8]$

د) دو ماتریس  $2 \times 2$  غیر مربعی که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

**تعریف:** برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام درایه های ماتریس ضرب می کنیم. به عبارت دیگر می توان نوشت:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه های لباس اگر ماتریس حاصل را A بنامیم و قرار باشد در هر فروشگاه تمام سه نوع لباس تعدادشان دو برابر شود ماتریس حاصل به صورت زیر نوشته می شود:

$$B = \begin{bmatrix} 24 \times 2 & 26 \times 2 & 17 \times 2 & 12 \times 2 \\ 15 \times 2 & 19 \times 2 & 28 \times 2 & 31 \times 2 \\ 7 \times 2 & 11 \times 2 & 22 \times 2 & 35 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24+24 & 26+26 & 17+17 & 12+12 \\ 15+15 & 19+19 & 28+28 & 31+31 \\ 7+7 & 11+11 & 22+22 & 35+35 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix} = A+A=2A$$

کاردرکلاس

۱- در هر حالت طرف دوم تساوی های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } -1 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ +4 & +5 & +6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ \sqrt{2} & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{پ) } 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ت) } 7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲- هر یک از ماتریس های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} = (-1) \times \begin{bmatrix} -1 & +1 & +2 \\ -3 & -1 & -4 \\ -2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

قرینه یک ماتریس: اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  ماتریسی دلخواه باشد قرینه ماتریس  $A$

را با  $(-A)$  نمایش داده و از ضرب  $(-1)$  در ماتریس  $A$  به دست می آید. واضح

است که  $A + (-A) = \bar{O}$

خواص مهم جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر  $A, B, C$  و  $r$  اعدادی حقیقی باشند خواص زیر

همگی به راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات اند:

الف)  $A+B=B+A$  خاصیت جابدهایی

ب)  $A+(B+C)=(A+B)+C$  خاصیت شرکت پذیری

پ)  $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$  خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس ها



ت)  $A+(-A)=(-A)+A=O$  خاصیت عضو قرینه

ث)  $r(A+B)=rA+rB$

ج)  $(r+s)A=rA+sA$

ح)  $rA=rB, r \neq 0 \Rightarrow A=B$

ط)  $A=B \Rightarrow rA=rB$

مثال: فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

در این صورت نشان می‌دهیم که  $(-2)(A+B) = (-2)A + (-2)B$

$$-2(A+B) = (-2) \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= (-2) \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+1 & 3+4 \\ (-1)+3 & 3+2 & (-5)+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)(1+(-2)) & (-2)(2+1) & (-2)(3+4) \\ (-2)((-1)+3) & (-2)(3+2) & (-2)((-5)+0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2) \times 1 + (-2) \times (-2) & -2 \times 2 + (-2) \times 1 & -2 \times 3 + (-2) \times 4 \\ (-2) \times (-1) + (-2) \times 3 & -2 \times 3 + (-2) \times 2 & (-2) \times (-5) + (-2) \times 0 \end{bmatrix}$$

توزیع پذیری ضرب  
نسبت به جمع  
در  $\mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} -2 \times 1 & -2 \times 2 & -2 \times 3 \\ (-2) \times (-1) & -2 \times 3 & (-2) \times (-5) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (-2) \times (-2) & -2 \times 1 & -2 \times 4 \\ -2 \times 3 & -2 \times 2 & -2 \times 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = (-2)A + (-2)B$$

در حالت کلی اگر فرض کنیم  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  در این صورت برای  $r \in \mathbb{R}$  داریم:

$$r(A \pm B) = r([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) = r[a_{ij} \pm b_{ij}] = [r(a_{ij} \pm b_{ij})]$$

$$= [ra_{ij} \pm rb_{ij}] \quad \text{توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در } \mathbb{R}$$

$$= [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] \quad \text{تعریف جمع (تفاضل)}$$

$$= r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}] \quad \text{تعریف ضرب عدد در ماتریس}$$

$$= rA \pm rB$$

کاردرگلاس

$$(r+s)A = (-2+3) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$rA + sA = -2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ +2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(r+s)A = rA + sA$$

۱- برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  و دو عدد حقیقی  $r = 3$  و  $s = -2$  برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.

۱- درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

$$rA \pm sA = r \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} \pm s \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$= \begin{bmatrix} ra_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} \pm \begin{bmatrix} sa_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$= \begin{bmatrix} (r \pm s)a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$= \begin{bmatrix} (r \pm s)a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} = (r \pm s)A$$

$$= (r \pm s)A$$

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر  $A$  ماتریس سطری و  $B$  ماتریس ستونی باشد طوری که تعداد ستون‌های ماتریس  $A$  با تعداد سطرهاى ماتریس  $B$  برابر باشند در این صورت  $A \times B$  تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایه ماتریس  $A$  را در درایه نظیرش در  $B$  ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی  $1 \times 1$  یا عدد حقیقی حاصل می‌شود.

مثال: اگر  $A = [-1 \ 2 \ 0 \ 3 \ -5]$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$  در این صورت داریم:

$$A \times B = [-1 \ 2 \ 0 \ 3 \ -5] \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= [(-1) \times (-2) + 2 \times 3 + 0 \times 7 + 3 \times (-1) + (-5) \times (-3)]$$

$$= [2 + 6 + 0 + (-3) + 15] = [15] = 15$$

کاردرگلاس

یک ماتریس سطری  $1 \times 2$  مانند  $A$  و یک ماتریس ستونی  $3 \times 1$  مانند  $B$  طوری

تعریف کنید که  $A \times B = -7$

$$A = [0 \ 0 \ 1], B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} \Rightarrow [0 \ 0 \ 1] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} = [0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times (-7)] = [-7] = -7$$

ضرب ماتریس در ماتریس

اگر  $A$  ماتریسی  $m \times p$  و  $B$  ماتریسی  $p \times n$  باشد (تعداد ستون‌های ماتریس  $A$  با تعداد سطرهاى  $B$  برابر باشد) در این صورت  $A_m \times p \times B_p \times n$  قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم  $A_m \times p \times B_p \times n = C_{m \times n} = [c_{ij}]$  ماتریسی  $m \times n$  بوده که درایه روی سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام در آن یعنی  $c_{ij}$  از ضرب سطر  $i$ ام  $A$  در ستون  $j$ ام  $B$  به دست می‌آید، یعنی

$c_{ij} = A$  سطر  $i$ ام  $\times$   $B$  ستون  $j$ ام

$$\Rightarrow C_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{in} \times b_{nj}$$

مثال: اگر  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$  و  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

اگر فرض کنیم،  $A_{3 \times 3} \times B_{3 \times 2} = C = [c_{ij}]_{3 \times 2}$  در این صورت ماتریس حاصل ضرب یعنی  $C$  ماتریسی  $3 \times 2$  بوده و داریم:

$$c_{11} = A \text{ سطر اول} \times B \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + 2 \times 2 + (-1) \times 5 =$$

$$c_{21} = A \text{ سطر سوم} \times B \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = (-1) \times 3 + (-2) \times 2 + 4 \times 5 =$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2-4 & 3+4-5 \\ 6-2+4 & 6+4+5 \\ -2+2+16 & -3-2+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 15 \\ 16 & 15 \end{bmatrix}$$

آیا ضرب  $(B \times A)$  امکان پذیر است؟ چرا؟ **خبر:** زیرا تعداد ستون های  $B$  با تعداد

سطرهای  $A$  مساوی نیست

کاردرکلاس

۱- برای هر حالت  $A \times B$  و  $B \times A$  را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$  ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 3} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 & -2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

ب)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$  ،  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \Rightarrow A \times B = \dots$  ،  $B \times A = \dots$   $A \times B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 7 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & -7 \end{bmatrix}$  ،  $B \times A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 18 & -13 \end{bmatrix}$

ب)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  ،  $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \Rightarrow A \times B = \dots$  ،  $B \times A = \dots$   $A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$  ،  $B \times A = [v] = v$

ب)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$  ،  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$  ،  $A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که «اگر  $a \times b = 0$  آنگاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ » مقایسه کنید.

اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس باشند که  $A \times B = \bar{O}$  لزوماً نمی توان نتیجه گرفت  $A = \bar{O}$  یا  $B = \bar{O}$

۲- اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 5$  باشد در این صورت در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید که  $A \times B$  و  $B \times A$  قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه آن را بیابید:

الف)  $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$       ب)  $B = [b_{ij}]_{3 \times 5}$       ب)  $B = [b_{ij}]_{5 \times 3}$

ت)  $B = [b_{ij}]_{5 \times 2}$       ت)  $B = [b_{ij}]_{5 \times 5}$

### خواص عمل ضرب ماتریس ها

کار در کلاس

۱- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $(A \times B)$  و  $(B \times A)$  را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

نتیجه

در حالت کلی ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی ندارد

۲- ماتریس اسکالر  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  را از چپ و راست در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ضرب کرده و حاصل ضرب ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

ماتریس اسکالر روبه رو که آن را ماتریس واحد یا همانی مرتبه  $n$  می نامیم، عضو حتمی برای عمل ضرب ماتریس های مربعی مرتبه  $n$  است یعنی:

$$A_{n \times n} \times I_n = I_n \times A_{n \times n} = A_{n \times n}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  و  $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  در این صورت درستی تساوی  $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$  را بررسی کنید.

گروه ریاضی استان خوزستان

پاسخ سوال ۱ کاردر کلاس

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & -4 \\ 4 & +3 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3 & -14 \\ +1 & +2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

پاسخ سوال ۲ کاردر کلاس

$$A \times I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$I \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \times I = I \times A = A$$

پاسخ سوال ۳ کاردر کلاس

$$A \times (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B + A \times C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

در حالت کلی اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $C = [c_{ij}]_{p \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{p \times n}$  در این صورت ضرب ماتریس  $A$  در مجموع  $(B+C)$  خاصیت توزیع پذیری یا پخش پذیری دارد یعنی:

$$A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C)$$

۴- با همان ماتریس های معرفی شده در شماره (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

در حالت کلی اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times p}$  و  $B = [b_{ij}]_{p \times n}$  و  $C = [c_{ij}]_{n \times h}$  در این صورت ضرب این سه ماتریس خاصیت شرکت پذیری دارد یعنی:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

پاسخ سوال ۴ کار در کلاس

$$A \times (B \times C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(A \times B) \times C = \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

۱- اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$  ماتریس  $3 \times 4$  باشد به طوری که برای  $i = z$  داشته باشیم  $a_{iz} = 7$  و برای  $i > z$  داشته باشیم  $a_{iz} = i + z$  و برای  $i < z$  داشته باشیم  $a_{iz} = i^z$  در این صورت ماتریس  $A$  را با درآه‌هایش مشخص کنید.

۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $A=B$  در این صورت حاصل  $(x+y+z)$  را بیابید.

۳- دو ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  و  $B$  مثال بزنید که  $A \neq \bar{0}$  و  $B \neq \bar{0}$  ولی  $AB = \bar{0}$ .

۴- با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی  $AB=AC$  نمی‌توان نتیجه گرفت  $B=C$ .

۵- اگر  $A$  ماتریس مربعی باشد و توان‌های  $A$  را به صورت  $A^1=AA^0$  و  $A^2=AA^1$  و ... و  $A^n=AA^{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$   $n > 1$ ) در این صورت با فرض  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل  $A^n$  و  $A^T$  را بیابید.

پاسخ سوال ۱

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{cases} 7 & i=j \\ i+j & i > j \\ i^j & i < j \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 4 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

پاسخ سوال ۲

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \\ 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=1, z=-2 \\ \Rightarrow x+y+z=2+1-2=1$$

پاسخ سوال ۳

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \bar{0}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \neq \bar{0} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

پاسخ سوال ۴

مثال نقض اول :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}; B \neq C$$

مثال نقض دوم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = AC = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix}; B \neq C$$

پاسخ سوال ۵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \begin{cases} A = A^3 = A^5 = A^7 = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ A^2 = A^4 = A^6 = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{cases}$$

گروه ریاضی استان خوزستان

برای دانلود رایگان گام  
به گام های دیگه کافیه  
روی اینجا بزنید



۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری به دست آورید که حاصل ضرب  $A \times B$  ماتریس قطری باشد.

۷- اگر  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  و  $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$  به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا  $A$  و  $B$  را با درایه‌هایشان نوشته و سپس  $A \times B$  و  $B \times A$  را به دست آورید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ -j + 2 & i < j \end{cases}$$

۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$  ماتریس قطری باشد و  $B$  ماتریس  $3 \times 3$  دلخواه باشد در این صورت ماتریس  $(A \times B)$  را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹- اگر  $A$  ماتریس  $2 \times 2$  و اسکالر باشد و  $B$  ماتریس هم‌مرتبه  $A$  در این صورت الف) برای  $A \times B$  و  $B \times A$  قوانینی تعریف کنید. ب) آیا تساوی  $A \times B = B \times A$  برقرار است؟

۱۰- اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $2 \times 2$  و تعویض پذیر باشند  $(A \times B = B \times A)$  ثابت کنید.

الف)  $(A + B)^T = A^T + 2AB + B^T$

ب)  $(A - B)(A + B) = A^T - B^T$

۱۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  مفروض باشد. حاصل  $A^2$  را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b+۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۸+۲a=۰ \Rightarrow a=۴ \\ b-۳=۰ \Rightarrow b=۳ \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۵ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۱ \\ ۸ & ۱۶ & ۳ \\ ۶ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}, B \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۷ & ۱۸ \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} r & ۰ & ۰ \\ ۰ & r & ۰ \\ ۰ & ۰ & r \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} ra_{۱۱} & ra_{۱۲} & ra_{۱۳} \\ ra_{۲۱} & ra_{۲۲} & ra_{۲۳} \\ ra_{۳۱} & ra_{۳۲} & ra_{۳۳} \end{bmatrix}$$

نتیجه: اگر  $A$  ماتریسی قطری و  $B$  یک ماتریس مربعی هم مرتبه با  $A$  باشد. برای محاسبه  $A \times B$  کافی است درایه های قطر اصلی  $A$  را در درایه های سطرهای نظیر آنها در ماتریس  $B$  ضرب کنیم.

پاسخ سوال ۹ اگر  $A = \begin{bmatrix} r & ۰ & ۰ \\ ۰ & r & ۰ \\ ۰ & ۰ & r \end{bmatrix}$  آنگاه:

$$B = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ra_{۱۱} & ra_{۱۲} & ra_{۱۳} \\ ra_{۲۱} & ra_{۲۲} & ra_{۲۳} \\ ra_{۳۱} & ra_{۳۲} & ra_{۳۳} \end{bmatrix} = rB, B \times A = \begin{bmatrix} ra_{۱۱} & ra_{۱۲} & ra_{۱۳} \\ ra_{۲۱} & ra_{۲۲} & ra_{۲۳} \\ ra_{۳۱} & ra_{۳۲} & ra_{۳۳} \end{bmatrix} = rB \Rightarrow A \times B = B \times A = rB$$

$$(A+B)^۲ = (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B = A^۲ + BA + AB + B^۲ = A^۲ + AB + AB + B^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$$

$$(A+B)(A-B) = (A+B)A - (A+B)B = A^۲ + BA - AB - B^۲ = A^۲ + AB - AB - B^۲ = A^۲ - B^۲$$

$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۳ = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶۴ \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} A^k = \begin{bmatrix} a_{۱۱}^k & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲}^k & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & a_{nn}^k \end{bmatrix}_{n \times n}$$

## وارون ماتریس و دترمینان<sup>۱</sup>

### وارون ماتریس‌ها

همان‌طور که در اعداد حقیقی وارون هر عدد حقیقی مانند  $a$  ( $a \neq 0$ ) را با  $\frac{1}{a}$  نشان می‌دهیم و همواره  $a \times \frac{1}{a} = 1$  (عدد یک عضو خنثی برای عمل ضرب است)

برای هر ماتریس مربعی مانند  $A$ ، وارون ماتریس  $A^{-1}$  (در صورت وجود) ماتریسی است چون  $B$  به طوری که  $A \times B = B \times A = I$ ، در این صورت  $B$  را وارون  $A$  می‌نامیم و با  $A^{-1}$  نشان می‌دهیم.

از وارون ماتریس‌ها در حل دستگاه‌های معادلات استفاده خواهد شد.

**مثال:** نشان دهید ماتریس  $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$  وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  است. کافی است ما بتوانیم به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم  $AB = BA = I$ .

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه وارون یک ماتریس  $2 \times 2$  مانند  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  (در صورت وجود)

باید ماتریسی چون  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  بیابیم طوری که  $A \times B = B \times A = I$

که این تساوی  $x, y, z, t$  را بر حسب  $a, b, c, d$  نتیجه

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<sup>۱</sup> Determinant

آیا دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  و

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  وارون یکدیگرند؟ چرا؟

خیر، زیرا

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq I$$

فرض کنید ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$(A^{-1})^{-1}$  را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\det(A) = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = A \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$$

**نقشه یکتایی وارون:** وارون هر ماتریس مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس‌های  $2 \times 2$  محاسبه شده است) در صورت وجود منحصر به فرد است.

**ایات:** فرض کنیم ماتریس‌های  $B$  و  $C$  هر دو وارون  $A$  باشند ثابت می‌کنیم  $B=C$

فرض  $AB=BA=I$   
 فرض  $AC=CA=I$   
 $B=IB=(CA)B=C(AB)$   
 $=CI=C$

می‌دهد و ماتریس  $B$  یا  $A^{-1}$  به صورت  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$  به دست می‌آید

که با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس می‌توان نوشت:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

عدد  $(ad-bc)$  را **دترمینان** ماتریس  $A$  می‌نامیم و با نماد  $|A|$  (می‌خوانیم، دترمینان  $A$ ) نشان می‌دهیم بنابراین می‌توان گفت:

**نتیجه**

اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  در این صورت وارون ماتریس  $A$  یعنی  $A^{-1}$  از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

تذکره: با توجه به قاعده محاسبه  $A^{-1}$  واضح است که اگر  $|A| = 0$  (یعنی  $A$  وارون ندارد).  $A$  وارون پذیر نیست. به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای اینکه  $A^{-1}$  وجود داشته باشد ( $A$  وارون پذیر باشد) آن است که  $|A| \neq 0$  باشد.

**مثال:** وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

چون  $|A| = 2 \neq 0$  پس  $A$  دارای وارون است (وارون پذیر است) و داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

پاسخ به دست آمده را امتحان کنید.

**حل دستگاه معادلات (دو معادله و دو مجهولی)** با استفاده از ماتریس وارون یکی از کاربردهای ماتریس و وارون در حل دستگاه‌های معادلات خطی است که ما در این درس و با استفاده از ماتریس وارون فقط به حل دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول می‌پردازیم.

دستگاه را به صورت یک تساوی ماتریسی نوشت:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و

$$\begin{bmatrix} 2x + y \\ 7x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (1)$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{bmatrix} 2x + y \\ 7x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

معادله ماتریسی اخیر معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهول مفروض است.

۱- حال اگر فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$  را ماتریس ضرایب می‌نامیم) در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس  $A$  وارون دارد (وارون پذیر است) و دزنانی  $A^{-1}$  را بیابید.

$$|A| = 2 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ وارون پذیر است}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

۲- معادله ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در  $A^{-1}$  ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه ضریب  $x$  و  $y$  را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{شرکت پذیری} \Rightarrow \left( \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

در حالت کلی اگر ماتریس ضرایب  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  و ماتریس  $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$  مقادیر معلوم و  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  ماتریس مجهولات دستگاه دو معادله و دو مجهول باشند در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادله ماتریسی  $AX=B$  نوشته شده و در صورتی که ماتریس  $A$  وارون پذیر باشد یا  $|A| \neq 0$  با ضرب  $A^{-1}$  از چپ در معادله فوق می توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \\ \Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

**مثال:** دستگاه  $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$  را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

**حل:** ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  و چون  $|A|=2 \neq 0$  پس  $A^{-1}$  وجود دارد. با جابه جایی درایه های روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی ماتریس  $A$  و تقسیم درایه های ماتریس حاصل بر  $|A|=2$ ، ماتریس  $A^{-1}$  را به دست می آوریم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تعریف متغیرهای ماتریسی}} \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 2 \end{cases}$$

تذکره: هدف از حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، پیدا کردن  $x$  و  $y$  ای است که در هر دو معادله دستگاه که هر کدام معادله یک خط هستند، صدق کند و تعبیر هندسی حل دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن مشخصات محل برخورد دو خط است.

### یادآوری

در واقع یک دستگاه دو معادله دو مجهولی از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادله یک خط هستند. لذا با دیدگاه هندسی می توان گفت وقتی صحبت از جواب این دستگاه می کنیم منظور یافتن نقطه ای است که روی هر دو خط واقع شده باشد. بنابراین سه حالت زیر را برای یک دستگاه می توان در نظر گرفت:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

دستگاه معادلات  $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -4x+2y=2 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. آیا می توانی از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنی؟  $|A|=2 \times 2 - (-1)(-4) = 0$  این دو خط نسبت به هم چگونه اند؟ موازی اند.

**نتیجه**

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$  در نظر بگیریم در این صورت با توجه به (الف) و (ب) می‌توان گفت:

(I) اگر  $|A| \neq 0$  آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است (دو خط متقاطع اند).

(II) اگر  $|A| = 0$  در این صورت یا دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی اند) و یا اینکه دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط برهم منطبق هستند).

**کاردرکلاس**

دستگاه معادلات  $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید.

۱- هر یک از معادلات دستگاه معادله یک خط در صفحه است. شیب هر یک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲- ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون پذیر است؟ چرا؟

۳- سؤال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه  $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -3x + 9y = -6 \end{cases}$  پاسخ داده و اگر  $A$  ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و  $|A| = 0$  برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

$$L: ۲x - ۳y = ۳ \Leftrightarrow y = \frac{۲}{۳}x - ۱ \Leftrightarrow m = \frac{۲}{۳}, h = -۱$$

$$L': -۴x + ۶y = ۱ \Leftrightarrow y = \frac{۲}{۳}x + \frac{۱}{۶} \Leftrightarrow m' = \frac{۲}{۳}, h' = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow m = m', h \neq h' \Leftrightarrow L \parallel L'$$

پس دو خط موازی اند و برهم منطبق نیستند زیرا عرض از مبداهای آنها مساوی نیست.

$$\begin{cases} ۲x - ۳y = ۳ \\ -۴x + ۶y = ۱ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (۲)(۶) - (-۳)(-۴) = ۰$$

پس  $A$  وارون پذیر نیست لذا این دستگاه جواب ندارد.

$$L: x - ۳y = ۲ \Leftrightarrow y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳} \Leftrightarrow m = \frac{۱}{۳}, h = \frac{۲}{۳}$$

$$L': -۳x + ۹y = -۶ \Leftrightarrow y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳} \Leftrightarrow m' = \frac{۱}{۳}, h' = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow m = m', h = h' \Rightarrow L \parallel L'$$

پس دو خط موازی اند و برهم منطبق اند زیرا عرض از مبداهای آنها مساوی است.

$$\begin{cases} x - ۳y = ۲ \\ -۳x + ۹y = -۶ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۶ \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (۱)(۹) - (-۳)(-۳) = ۰$$

پس  $A$  وارون پذیر نیست لذا این دستگاه بی شمار جواب دارد.

نتیجه: اگر  $\det(A) = ۰$  و عرض از مبدهای دو معادله مساوی باشند، دستگاه دو معادله دو مجهولی بی شمار جواب دارد و اگر

$\det(A) \neq ۰$  و عرض از مبدهای دو معادله مساوی نباشند، دستگاه دو معادله دو مجهولی هیچ جوابی ندارد.



## دترمینان و کاربردهای آن

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. دترمینان یک ماتریس اطلاعات مفیدی را جمع به خود ماتریس و خواص آن به ما خواهد داد. از جمله اینکه: وارون‌پذیری یک ماتریس از مقدار دترمینان آن ماتریس مشخص می‌شود. همان‌طور که ملاحظه شد، در حل دستگاه‌ها و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه از دترمینان استفاده می‌شود. دترمینان در هندسه برای محاسبه مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار به کار می‌رود. به کمک دترمینان ماتریس های  $2 \times 2$  می‌توان حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار را به دست آورد و نیز در محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده کرد که در این درس به بعضی از این کاربردها خواهیم پرداخت.

وقتی به تاریخ پیدایش مفهوم ماتریس برمی‌گردیم مشاهده می‌کنیم که مفهوم دترمینان که امروزه به عنوان بخشی از مفهوم ماتریس مطرح می‌شود، اندکی پیش از مفهوم ماتریس به وجود آمده است. نظریه دترمینان در نیمه دوم قرن هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم، با بررسی‌ها و پژوهش‌های «گابریل کرامر» ریاضی‌دان سوئیسی (۱۷۵۲-۱۷۹۰) در مسائل مربوط به حل و بحث دستگاه‌های معادلات خطی پدید می‌آید.

**تعریف:** اگر  $A$  ماتریسی مربعی از مرتبه  $n$  باشد ( $1 \leq n \leq 3$ ) در این صورت

دترمینان ماتریس  $A$  را با نماد  $|A| = \det(A)$  نمایش می‌دهیم و داریم:

(ما در این کتاب دترمینان را برای ماتریس‌های حداکثر از مرتبه ۳ تعریف می‌کنیم.)

$$I) A = [k]_{1,1} \Rightarrow |A| = k \quad III) A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$III) A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(برای هر ماتریس  $3 \times 3$  دلخواه می‌توان دترمینان  $A$  را بر حسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که همواره حاصل، عددی حقیقی و منحصر به فرد است.)

در واقع دترمینان ماتریس‌های  $2 \times 2$  را می‌توان تا بهی در نظر گرفت که دامنه آن مجموعه ماتریس‌های  $2 \times 2$  و هم‌دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی یعنی  $\mathbb{R}$  است.

$$\det: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

(منظور از  $M_{2 \times 2}$  مجموعه ماتریس‌های  $2 \times 2$  است.)

**مثال:** دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

الف)  $A = [-7] \rightarrow |A| = -7$

ب)  $A = [\sqrt{2}] \rightarrow |A| = \sqrt{2}$

پ)  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = [(4 \times 4) - (2 \times 8)] = 0$

$$\text{ت) } A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-1 \cdot 0) - (12) = -12$$

$$\text{ت) } A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

**مثال:** درمیان هر یک از ماتریس‌های زیر را برحسب یک سطر و یک ستون دلخواه

په‌دست آورید:

$$\text{الف) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر اول

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (0 - 12) + (0 + 6) + 2 \times (8 - 2) = (-12) + 6 + 20 = 14$$

برحسب ستون سوم

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (8 - 2) - 3 \times (4 - 2) + 0 = 10 - 6 = 4$$

تذکره: همان‌طور که در قسمت (الف) مشاهده کردید وقتی در یک ماتریس روی یک سطر یا یک ستون، درایه یا درایه‌های صفر هستند درمیان آن ماتریس برحسب همان سطر یا ستون راحت‌تر محاسبه می‌شود.

$$\text{ب) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر دوم

$$|A| = 0 + 0 + 4 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \times (8 - 3) = -20$$

برحسب ستون اول

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 0 + (-3) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (0 - 12) - 3 \times (-4 - 0) = -24 + 12 = -12$$

درایه (۲) روی سطر اول و ستون اول قرار دارد و درایه (۳) روی سطر سوم و ستون اول واقع است.

درمیان ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} (2)(4) - (1)(3) & (4)(1) - (-1)(2) \\ ((1)(1) - (5)(4)) & (2)(5) - (1)(-3) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -19 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = (5)(13) - (-1)(6) = 19$$

### دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های $3 \times 3$

دو این روش (فقط برای ماتریس های  $3 \times 3$  قابل استفاده است). دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می نویسیم و  $|A|$  برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر فرعی  $A$  و دو قطر موازی با آن به صورت زیر:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

**مثال:** دترمینان ماتریس  $A$  را برحسب سطر سوم و با استفاده از دستور ساروس به دست آورید (کدام روش راحت تر است؟).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر سوم

$$|A| = (-1) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -1 \times (9-8) + 1 \times (6-4) + 1 \times (4-3) = -1 + 2 + 1 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (4-9-8) - (-8-12+3) = -13+17=4$$

### کار در کلاس

۱- ماتریس های  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  مفروض اند. ماتریس  $A \times B$  را به دست آورده و برقراری تساوی  $|AB| = |A||B|$  را بررسی کنید.

۲- ماتریسی  $3 \times 3$  چون  $A$  بنویسید طوری که  $|A| = -6$ ، سپس ماتریس  $A^2$  را محاسبه و  $|A^2|$  را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  در این صورت اعداد حقیقی  $a, b, c, d$  و  $a \neq 0$  را چنان بیابید که تساوی  $|A|^2 - 5|A| + 6 = 0$  برقرار باشد.

$$|A|^2 - 5|A| + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (|A| - 2)(|A| - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 2 \Rightarrow ad - bc = 2 \\ \text{or} \\ |A| = 3 \Rightarrow ad - bc = 3 \end{cases}$$

پس مسأله بی شمار جواب دارد مثلاً با اختیار

$$a = b = 2, c = 3, d = 4$$

$$\Rightarrow \det(A) = 2 \times 4 - 2 \times 3 = 8 - 6 = 2$$

۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  در این صورت  $|A|$  را بر حسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی  $A$  مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

اگر  $A$  ماتریس  $3 \times 3$  و اسکالر باشد و  $a_{11} = 4$  در این صورت  $|A|$  را بیابید.

$$a_{11} = 4 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

#### نتیجه

- ۱- دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی.
- ۲- دترمینان ماتریس مربعی صفر، صفر است.

۱- اگر  $A$  ماتریس  $3 \times 3$  باشد و داشته باشیم  $|A| = 4$  در این صورت  $A$  را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

پاسخ سوال ۱ کار در کلاس

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 25 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB| = (2)(11) - (0)(25) = 22$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (2)(4) - (3)(-1) = 11$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = (3)(2) - (4)(1) = 2$$

$$|AB| = |A||B|$$

پاسخ سوال ۲ کار در کلاس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{1+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 = -6 \Rightarrow |A|^2 = (-6)^2 = 36$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|A^2| = (-1)^{1+1} \times 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36$$

$$\Rightarrow |A^2| = |A|^2$$

پاسخ سوال ۳ کار در کلاس

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{1+1} \times a \times \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + 0 + 0 = abc$$

پاسخ سوال ۴ کار در کلاس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2 \times 5 \times 10 = 100$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2^3 \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{2} = 100$$

روش دوم:

۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$  در این صورت  $|AB|$  و  $|BA|$  را به دست آورید.

۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$  در این صورت  $|A'|$  را به دست آورید.

۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $(|A|^3 - 2)$  را بیابید.

۴- دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$  را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

فرد ماتریسی  $2 \times 2$  چون  $A$  بیاید  $|A| = 3$ .

۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل عبارت  $(2A^{-1} - 3B^{-1})$  را بیابید.

۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  ابتدا ماتریس  $A^{-1}$  را بدست آورده و  $|A|$  را با  $|A^{-1}|$  مقایسه کنید.

۸- الف) ماتریس های  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید

و  $|A|$  و  $|B|$  را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

ب) قسمت الف) را برای دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$  بررسی کنید.

۹- برای ماتریس  $2 \times 2$  مانند  $A$  دو مقدار  $|A|$  و  $|KA|$  را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۱۰- اگر  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  باشد و  $|A| = 5$  در این صورت حاصل  $|A^{-1}|$  را بیابید.

۱۱- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  ماتریس ضرایب دستگاه بوده و

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$  ماتریس معلومات آن باشند. سپس جواب دستگاه را با استفاده از  $A^{-1}$  بیابید.

۱۲- به ازای چه مقادیری از  $k$  دستگاه  $\begin{cases} kx + 2y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$  یک دسته جواب مشخص به فرد دارد.

۱۳- روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب های هر یک از دستگاه های زیر بحث کنید و در صورت وجود جواب را با استفاده از  $A^{-1}$  بیابید.

الف)  $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

ب)  $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$

ب)  $\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \end{bmatrix} = -13 \Rightarrow |A \times B| = -13$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +6 \\ -1 & -2 & +3 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow |B \times A| = \begin{vmatrix} -2 & -4 & +6 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & +3 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & -9 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |B \times A| = ((-2)(-2)(-9) + (-4) \times 3 \times 3 + 6 \times (-1) \times 6) - (6 \times (-2) \times 3 - 2 \times 3 \times 6 + (-4)(-1)(-9)) = -108 + 108 = 0$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^T| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -7 & 0 & 25 \end{vmatrix} \Rightarrow |A^T| = 4 \times 9 \times 25 = 900$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{1+1}(-2) \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = (-2)(-3)(-5) = -30 \Rightarrow |A^T| = (-30)^2 = 900$$

روش دوم:

$$A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 3|A|^2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (5|A|)(3|A|^2) - 5|A| \Rightarrow 15|A|^3 - 5|A| = 0$$

$$\Rightarrow |A|(15|A|^2 - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \Rightarrow |A|^3 - 2 = -2 \\ |A|^2 = \frac{5}{15} \Rightarrow \begin{cases} |A| = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow |A|^3 - 2 = \frac{\sqrt{3}-10}{3} \\ |A| = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow |A|^3 - 2 = \frac{-\sqrt{3}-10}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{1+1}d(bc - bc) + (-1)^{2+1}e(ac - ac) + (-1)^{3+1}f(ab - ab) = 0$$

نتیجه: اگر درایه‌های دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مربعی، نظیر به نظیر مساوی باشند در میانه آن ماتریس، صفر است.

کافی است یک ماتریس قطری (یا مثلثی) بیابیم که حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی آن ۳ باشد مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (3)(-1)(-1) = 3$$

گروه ریاضی استان خوزستان





$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۲۰ - ۶ = ۱۴ \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{14} & -\frac{۳}{14} \\ -\frac{۲}{14} & \frac{۴}{14} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = ۲ + ۱۵ = ۱۷ \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ -\frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \end{bmatrix}$$

$$۲A^{-1} - ۳B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{7} & -\frac{۳}{7} \\ -\frac{۲}{7} & \frac{۴}{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\frac{۳}{17} & -\frac{۹}{17} \\ \frac{۱۵}{17} & \frac{۶}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۰۶}{119} & -\frac{۱۱۴}{119} \\ \frac{۷۱}{119} & \frac{۱۱۰}{119} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۱۰ - ۶ = ۴ \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{۵}{۸} - \frac{۳}{۸} = \frac{1}{4} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (bdh + afh + ceg)$$

$$B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = (kaei + kbfg + kcdh) - (kbdh + kafh + kceg) \Rightarrow |B| = k|A|$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc, B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = kad - kbc \Rightarrow |B| = k|A|$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc, kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \Rightarrow |kA| = (ka)(kd) - (kb)(kc) = k^۲ad - k^۲bc \Rightarrow |kA| = k^۲|A|$$

$$|A_{۳ \times ۳}| = ۵ \Rightarrow |A| = ۵ \Rightarrow |A^۳| = ۵^۳|A| = ۵^۳ \times ۵ = ۵^۴ = ۶۲۵$$

باسخ تمرین ۱۱

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$|A| = 6 + 20 = 26 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \times B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 52 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

باسخ تمرین ۱۲

$$\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{1} \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow k \neq -\frac{3}{2}$$

باسخ تمرین ۱۳

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} \neq -\frac{5}{1} \Rightarrow \text{دستگاه فقط یک دستگاه جواب منحصر به فرد دارد}$$

الف

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{3}{6} \neq \frac{5}{1} \Rightarrow \text{دستگاه هیچ جوابی ندارد}$$

ب

$$\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = -\frac{2}{4} \Rightarrow \text{دستگاه بی شمار جواب دارد}$$

ب

۳۱

## آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

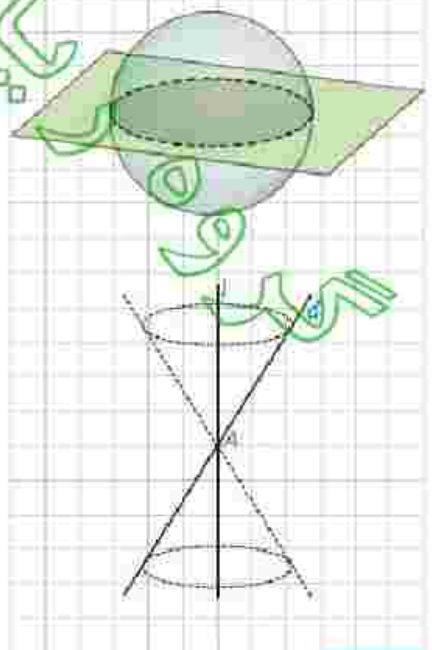
## مقاطع مخروطی



در پایه دهم با سطح مقطع صفحه با برخی اجسام هندسی آشنا شدید. فرض کنید یک کره را (مانند شکل) توسط یک صفحه قطع کنیم (برش دهیم). منظور از فصل مشترک خط و کره مجموعه نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند. به نظر شما فصل مشترک یک صفحه و یک کره چه شکلی می تواند باشد؟

رویۀ مخروطی: فرض کنید دو خط  $h$  و  $l$  در نقطه  $A$  (مانند شکل) متقاطع (غیر عمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط  $h$  حول خط  $l$  را یک رویۀ مخروطی (سطح مخروطی) می نامیم. در این حالت خط  $l$  را محور، نقطه  $A$  را رأس و خط  $h$  را مولد این سطح مخروطی می نامیم.

حال می خواهیم به طور شهودی با فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی، با توجه به حالت های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، آشنا شویم. از تصاویر ارائه شده برای درک بهتر شکل حاصل کمک بگیرید.



الف) در حالتی که صفحه  $P$  بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

در چه حالتی فصل مشترک صفحه  $P$  و سطح مخروطی تنها نقطه  $A$  خواهد بود؟

پاسخ: در حالتی که صفحه  $P$  دو خط  $l, d$  را در نقطه  $A$  قطع کند.

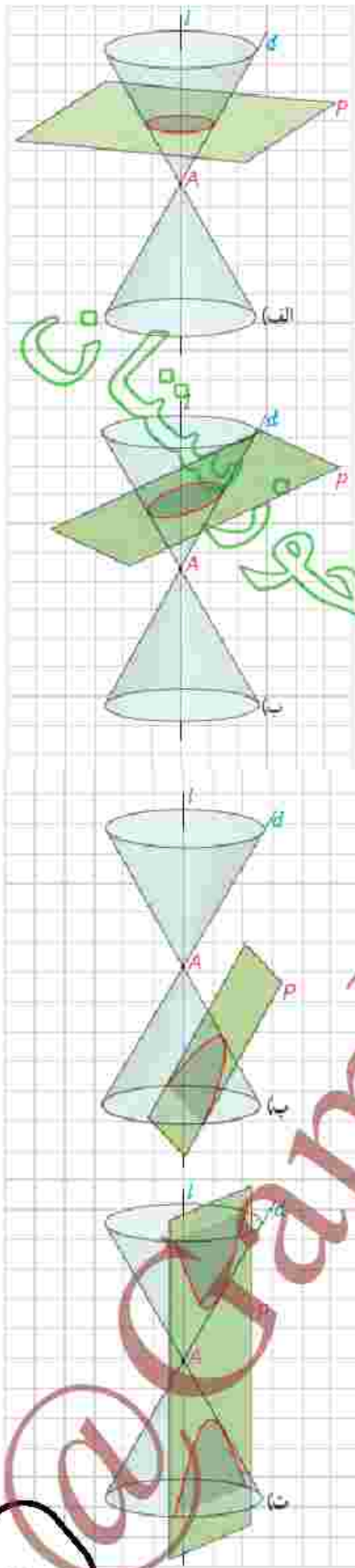
فصل مشترک همان نقطه  $A$  خواهد بود.

ب) در حالتی که صفحه  $P$  بر محور  $l$  عمود نباشد و با مولد  $d$  نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو تپه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.

پ) اگر صفحه  $P$  با مولد  $d$  موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر صفحه  $P$  از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آنها یک خط است.)

ت) اگر صفحه  $P$  به گونه‌ای باشد که هر دو تکمه  $l$  و  $d$  را از بیینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور  $l$  نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است. در این کتاب به تعریف دقیق و بررسی خواص هذلولی نخواهیم پرداخت.

با تعریف دایره آشنایی قبلی دارید. توجه داشته باشید که بیضی، سهمی و هذلولی نیز هر کدام تعاریف دقیق و مشخص دارند، اما اینکه چرا فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی مطابق با آنچه گفته شد دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی است، قابل اثبات است ولی ما در این کتاب به این اثبات‌ها نمی‌پردازیم. حال که با دایره، بیضی، سهمی و هذلولی (مقاطع مخروطی) به صورتی آشنا شدیم، برای تعریف دقیق این اشکال، ابتدا مفهوم مکان هندسی را معرفی می‌کنیم.



## مکان هندسی

طریقه رسم و ویژگی های عمود منصف یک پاره خط را از کتاب هندسه ۱ به خاطر دارید. دو ویژگی زیر را یادآوری می کنیم:

- هر نقطه روی عمود منصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.
- هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمود منصف آن است.

اگر خط  $d$  عمود منصف پاره خط  $AB$  باشد، در این صورت

$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$$

به طور خلاصه، یک نقطه روی عمود منصف پاره خط است، اگر و تنها اگر از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد.

به عبارت معادل، می گوئیم عمود منصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله اند.

به طور کلی مفهوم مکان هندسی به صورت زیر تعریف می شود:

**تعریف:** مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

## ۱ فعالیت

در کتاب هندسه ۱ با ویژگی ها و طریقه رسم نیمساز زاویه آشنا شدید. دو قضیه مهم در مورد نیمساز زاویه را یادآوری کنید:

- ۱- هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع آن به یک فاصله است.
- ۲- هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، روی نیمساز زاویه است.

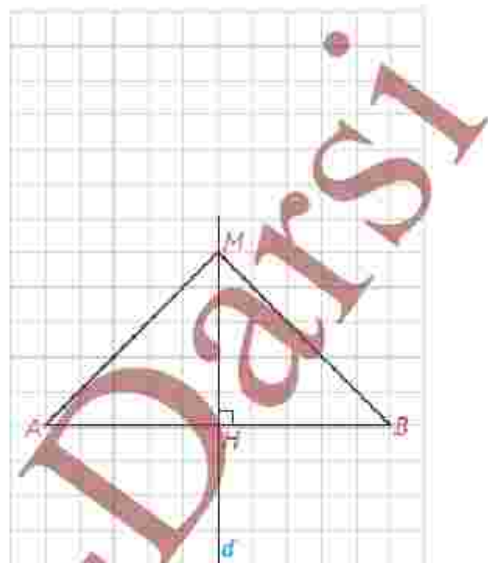
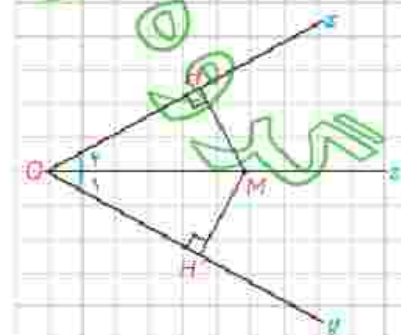
اکنون گزاره زیر را کامل کنید:

یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر ..... از دو ضلع آن به یک فاصله باشد.

$$(\hat{O}_1 = \hat{O}_2) \quad M \in O \Leftrightarrow MH = MH'$$

بنابراین می توان گفت:

نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که ..... از دو ضلع آن به یک فاصله باشد.



## ۲ فعالیت

دایره  $O$  به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  را در نظر بگیرید.

الف: هر نقطه دلخواه  $A$  روی دایره، از  $O$  چه فاصله‌ای دارد؟ پاسخ:  $r$   
 ب: اگر  $B$ ، یک نقطه در صفحه باشد و از  $O$  به فاصله  $r$  باشد ( $OB=r$ ) یا برهان  
 خلاف نشان دهید،  $B$  روی دایره است و از الف) و ب) نتیجه بگیرید:  
 فرض کنیم  $B$  روی دایره ( $C$ ) نباشد. در این صورت:  $A \in C \Leftrightarrow OA=r$   
 الف: اگر  $B$  داخل دایره باشد. آنگاه  $OB < r$  که این خلاف فرض است.  
 ب: اگر  $B$  خارج دایره باشد. آنگاه  $OB > r$  که این نیز خلاف فرض است.

### نتیجه

نقطه  $A$  روی دایره  $O(O, r)$  است، اگر و فقط اگر  $OA=r$ .

### نتیجه

دایره  $O(O, r)$  مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از نقطه  $O$  به فاصله  $r$  باشند.

## ۳ فعالیت

دو خط موازی  $d$ ،  $d'$  را که فاصله آنها از هم  $2$  سانتی متر است، در نظر بگیرید. آیا  
 نقطه‌های دلخواه  $A$  و  $B$  روی  $d'$ ، از خط  $d$  به فاصله یکسانی دارند؟ این فاصله چقدر  
 است؟ آیا می‌توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از  $d$  به فاصله  $2$  سانتی متر  
 باشند و روی  $d'$  نباشند؟ همه نقاطی که از  $d$  به فاصله  $2$  سانتی متر واقع اند، روی چه  
 شکلی قرار دارند؟

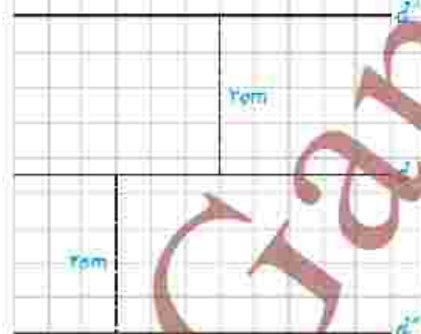
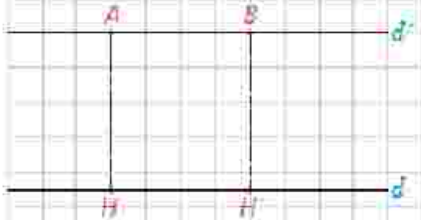
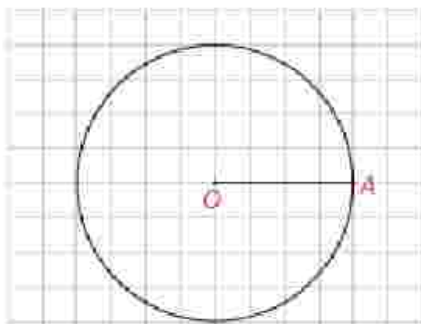
بله \* \* \* \* \* ۲ سانتی متر \* \* \* \* \* بله \* \* \* \* \* دو خط موازی \* \* \* \* \*

آیا گزاره زیر درست است؟ بله

یک نقطه در صفحه، از خط  $d$  به فاصله  $2$  سانتی متر است، اگر و تنها اگر  
 روی یکی از دو خط  $d$  و  $d'$  که موازی  $d$  هستند، واقع باشد.

آیا نتیجه‌گیری زیر درست است؟ بله

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط  $d$  به فاصله  $2$  سانتی متر هستند،  
 دو خط موازی  $d$  (در دو طرف آن) و به فاصله  $2$  سانتی متر از آن  
 می‌باشد.



■ مکان های هندسی مهم در صفحه :

– مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت  $A$  و  $B$  در صفحه به یک فاصله اند، عمود منصف  $AB$  است.

– مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله اند، نیمساز آن زاویه است.

– مکان هندسی نقاطی که از نقطه ثابت  $O$  به فاصله ثابت  $k$  قرار دارند، دایره ای به مرکز  $O$  و به شعاع  $k$  است.

– مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط  $d$  به فاصله ثابت  $k$  قرار دارند، دو خط موازی  $d$ ، به فاصله  $k$  از آن و در دو طرف آن است.

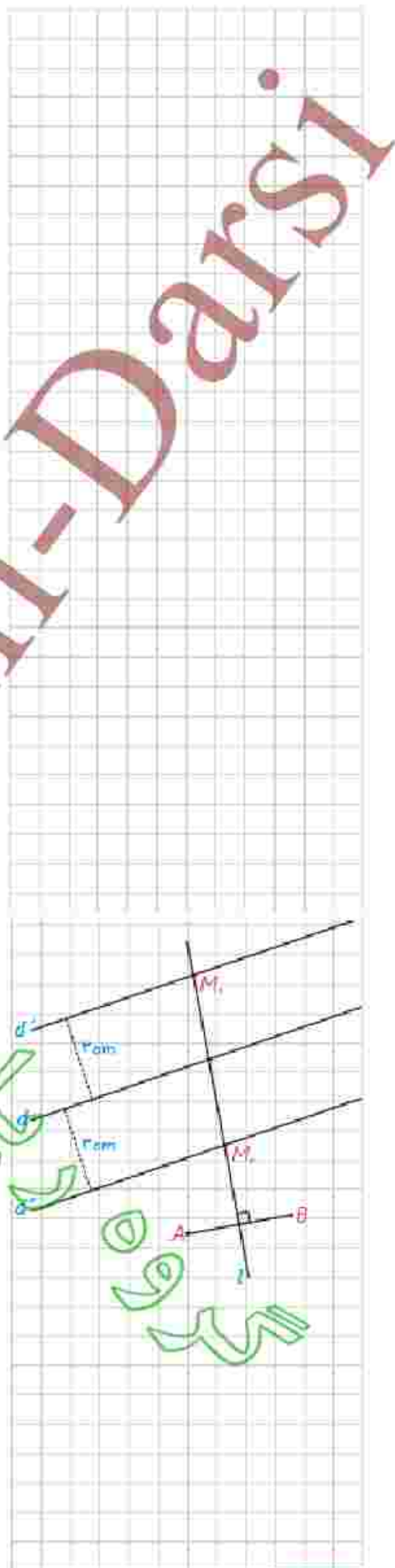
### ■ کاربرد مکان هندسی

یکی از مهم ترین کاربردهای مکان هندسی، ترسیم های هندسی و یافتن نقطه (یا نقاطی) است که دارای ویژگی معینی باشند. بدیهی است که اگر  $S_1$  مکان هندسی نقاطی با ویژگی  $P_1$  و  $S_2$  مکان هندسی نقاطی با ویژگی  $P_2$  باشند،  $S_1 \cap S_2$  مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی  $P_1$  و  $P_2$  را دارند. بنابراین برای یافتن نقاطی که این دو ویژگی را داشته باشند، باید نمودارهای  $S_1$  و  $S_2$  را رسم کرده و نقطه (یا نقاط) برخورد آنها را به دست آورد.

**مثال:** دو نقطه  $A$  و  $B$  و خط  $d$  که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیاید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله بوده و از  $d$  به فاصله ۳ سانتی متر باشد.

**حل:** مکان هندسی نقاطی که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله اند، عمود منصف  $AB$  و مکان هندسی نقاطی که از خط  $d$  به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی  $d$  به فاصله ۳ سانتی متر از آن هستند. بنابراین نقطه برخورد خط  $l$  (عمود منصف  $AB$ ) و دو خط موازی  $d'$  و  $d''$  جواب مسئله است (نقاط  $M_1$  و  $M_2$ ).

بحث در وجود جواب: اگر  $l$  یکی از دو خط  $d'$  و  $d''$  را قطع کند دیگری را هم قطع می کند و مسئله مانند شکل ۲ جواب دارد. اگر  $l$  با دو خط موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر  $l$  بر یکی از دو خط  $d'$  و  $d''$  منطبق باشد، مسئله بی شمار جواب دارد.





این مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید :

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به یک فاصله اند.

ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط  $d$  در نقطه ثابت  $A$  مماس اند.

ج) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت  $r$  که بر خط  $d$  در صفحه مماس اند.

د) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت  $r$  که بر دایره  $C(O,r)$  در صفحه این دایره مماس خارجی اند.

۱- نقاط  $A, B, C$  و  $D$  در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از  $C$  و  $D$  نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

۲- نقاط  $A, B, C$  در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از  $C$  به فاصله ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).

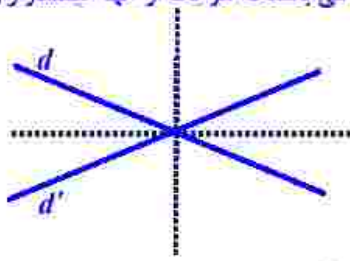
۳- نقطه  $A$  و خط  $d$  در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از  $A$  به فاصله ۲ سانتی متر و از  $d$  به فاصله ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).

۴- هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟

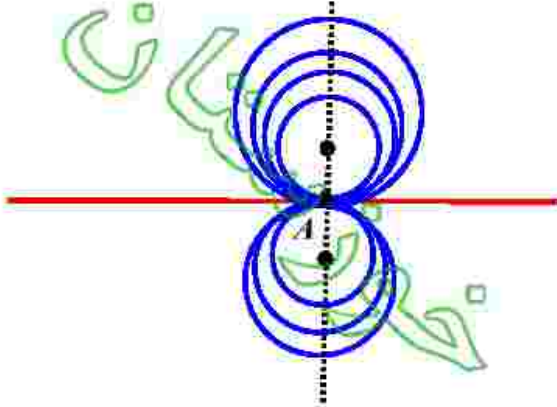
۵- هرگاه در خط  $d$  و  $l$  موازی باشند، از دوران  $d$  حول  $l$  سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه  $P$ ، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).



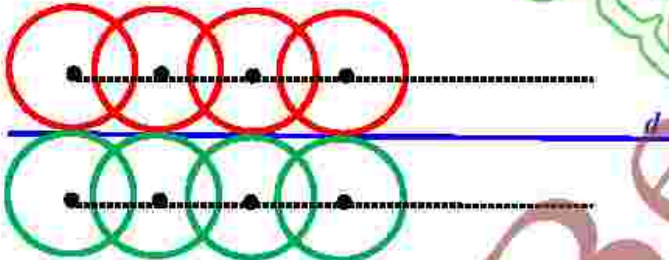
الف: مکان هندسی نقطه ای از صفحه که از دو خط متقاطع  $d, d'$  به یک فاصله است، دو خط عمود برهم می باشد که هر یک از آنها نیمساز زاویه ی بین دو خط  $d, d'$  است.



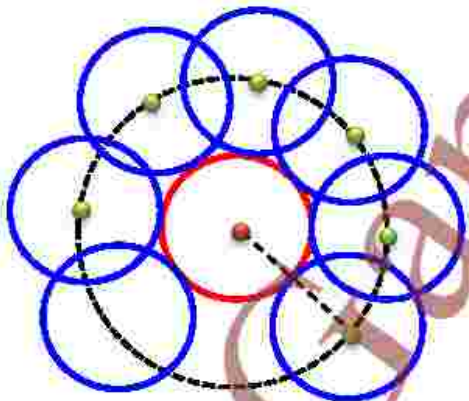
ب: مکان هندسی مرکز دایره ای که در نقطه ی  $A$  بر خط  $d$  مماس است، خطی است که در نقطه  $A$  بر  $d$  عمود می باشد.



ب: مکان هندسی مرکز دایره ای به شعاع  $r$  که در صفحه بر خط  $d$  مماس است، دو خط موازی با خط  $d$  می باشد که فاصله هر یک آنها از  $d$  مساوی  $r$  است.



ب: مکان هندسی مرکز دایره ای به شعاع  $r$  که بر دایره ی  $C(O, R)$  مماس خارج است دایره  $C(O, R+r)$  می باشد.



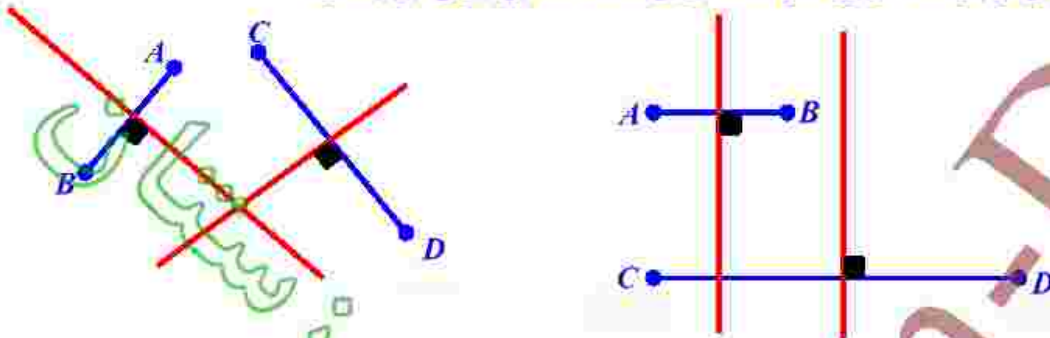
## برای دانلود رایگان گام به گام روی اینجا بزنید

پاسخ تمرین ۲

کافی است محل تقاطع عمود منصف های دو بازه خط  $AB, CD$  را تعیین کنیم.

بحث: اگر  $AB \parallel CD$  عمود منصف های این دو بازه خط، یکدیگر را فقط در یک نقطه قطع می کنند و مساله در این حالت فقط یک جواب دارد.

ولی اگر  $AB \not\parallel CD$  عمود منصف های این دو بازه خط، موازی اند و مساله در این حالت فقط هیچ جوابی ندارد.



پاسخ تمرین ۳

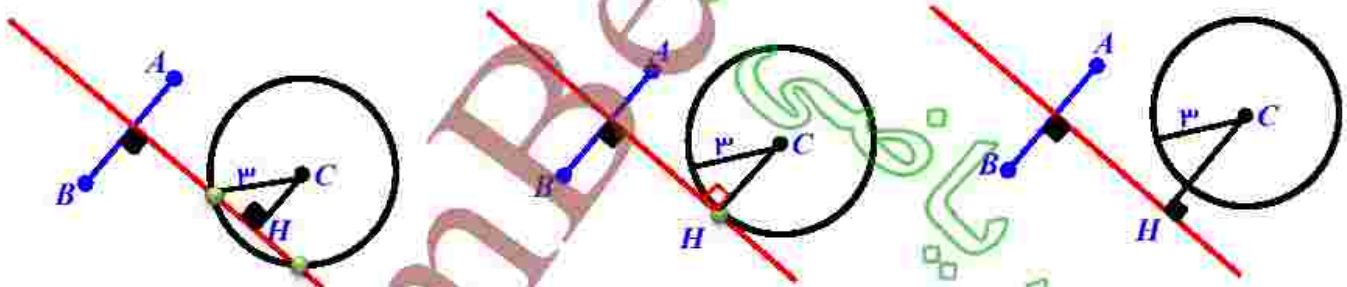
کافی است محل تقاطع عمود منصف بازه خط  $AB$  و دایره ای به مرکز  $C$  و شعاع ۳ را تعیین کنیم.

بحث: فرض کنیم  $d$  عمود منصف بازه خط  $AB$  است اگر  $CH$  فاصله  $C$  تا خط  $d$  باشد سه حالت زیر را به تفکیک بررسی می کنیم.

الف: اگر  $CH < 3$ : در این حالت خط  $d$  دایره را در ۲ نقطه قطع می کند و مساله دو جواب دارد.

ب: اگر  $CH = 3$ : در این حالت خط  $d$  بر دایره مماس و دایره را در ۱ نقطه قطع می کند لذا مساله فقط یک جواب دارد.

ج: اگر  $CH > 3$ : در این حالت خط  $d$  دایره را قطع نمی کند و مساله هیچ جوابی ندارد.

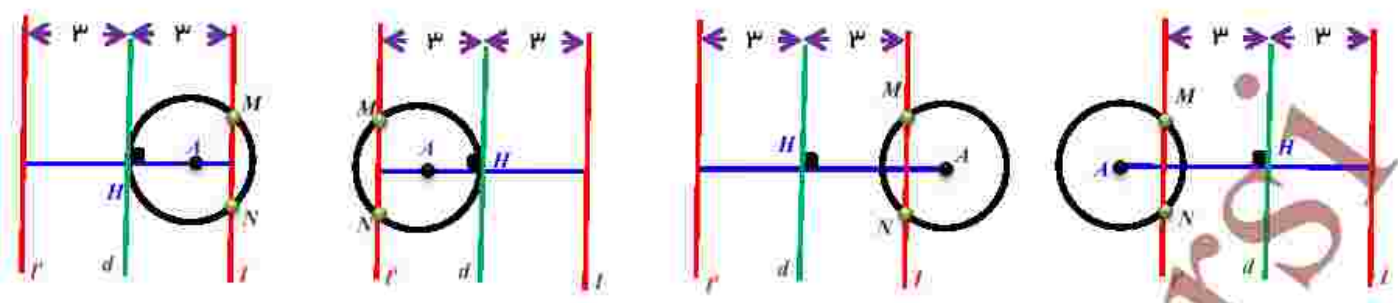


پاسخ تمرین ۴

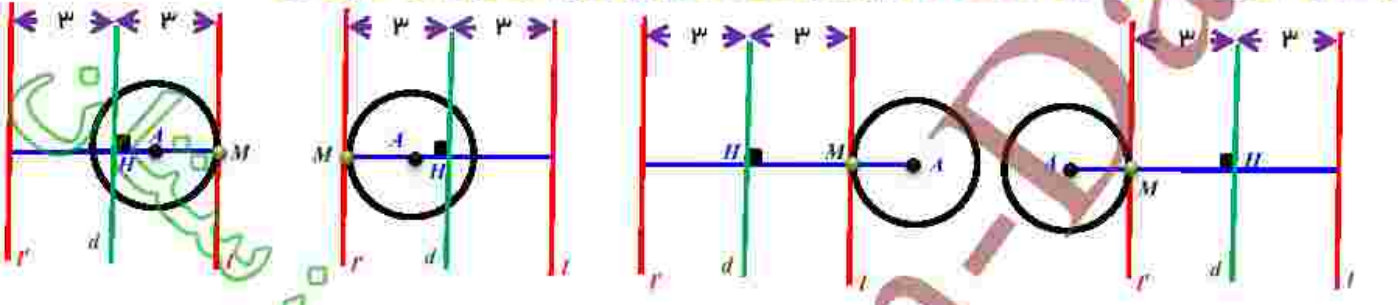
مکان هندسی نقطه ای که از  $A$  به فاصله ۲ باشد دایره ای به مرکز  $A$  و شعاع ۲ است. و مکان هندسی نقطه ای که از خط  $d$  به فاصله ۳ باشد دو خط موازی  $l, l'$  است که فاصله هر یک آنها از  $d$  مساوی ۳ است. محل تقاطع این دو مکان هندسی پاسخ مساله است.

بحث: فرض کنیم  $AH$  فاصله  $A$  تا خط  $d$  باشد. با توجه به اندازه شعاع دایره و مکان نقطه  $A$  یکی از حالت های زیر رخ می دهد.

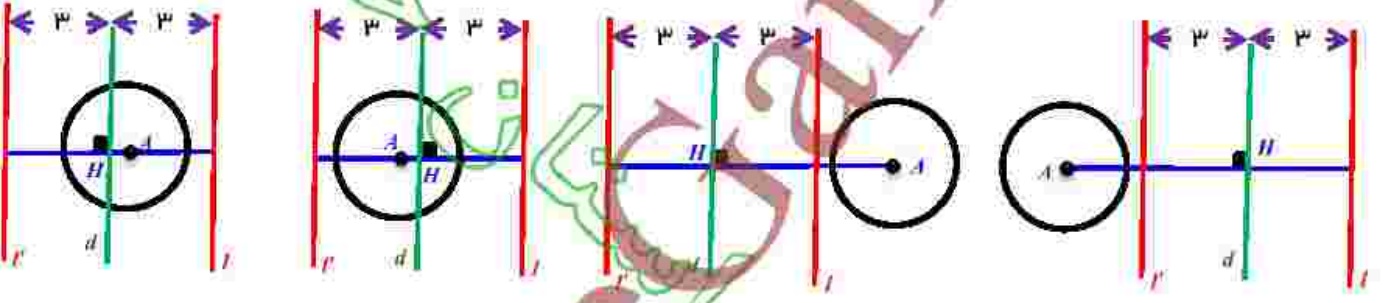
الف: اگر  $3 < AH < 5 = 3 + 2$  یا  $1 < 3 - 2 = 1 < AH < 5 = 3 + 2$  خط  $l$  (یا خط  $l'$ ) دایره را در دو نقطه قطع می کند و مساله دارای دو جواب است.



ب: اگر  $AH = r$  یا  $AH = \Delta$  خط  $l$  (یا خط  $l'$ ) دایره را در یک نقطه قطع می کند و مساله دارای یک جواب است.

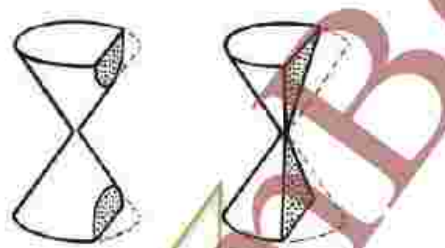


ج: اگر  $AH > r$  یا  $AH < r$  خط  $l$  (یا خط  $l'$ ) دایره را در هیچ نقطه ای قطع نمی کند و مساله جوابی ندارد.



پاسخ تمرین ۵

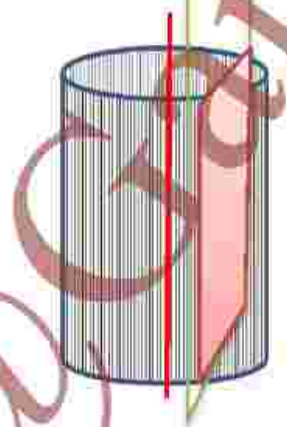
مکان هندسی خواسته شده دو خط متقاطع می باشد.



پاسخ تمرین ۶

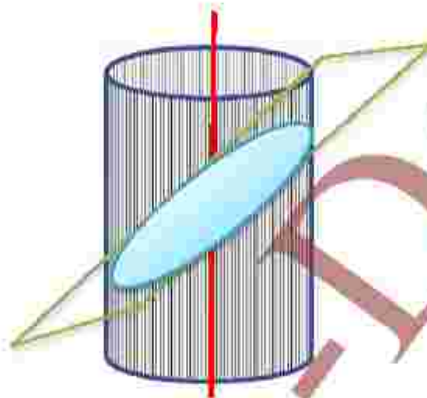
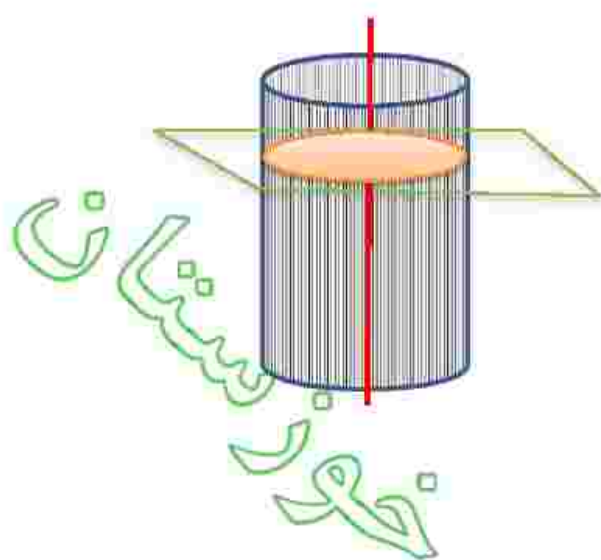
الف: اگر خط  $l$  با صفحه  $p$  موازی بوده و فاصله دو خط  $d, l$  بیشتر از فاصله خط  $l$  تا صفحه  $p$  باشد سطح مقطع ایجاد شده سطح بین دو خط موازی است.

ب: اگر خط  $l$  با صفحه  $p$  موازی بوده و فاصله دو خط  $d, l$  مساوی فاصله خط  $l$  تا صفحه  $p$  باشد سطح مقطع ایجاد شده، فقط یک خط موازی با  $l$  است.



ج: اگر خط  $l$  بر صفحه  $p$  عمود باشد، سطح مقطع ایجاد شده سطح یک دایره است.

د: اگر خط  $l$  و صفحه  $p$  متقاطع بوده ولی بر هم عمود نباشند، سطح مقطع ایجاد شده سطح یک بیضی است.



@GambBeGram

## دایره

معروفترین مقطع مخروطی، دایره است و چنانچه قبلاً دیدیم، دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله‌ای ثابت (شعاع دایره) واقع اند. حال می‌خواهیم ویژگی‌های دایره را به صورت تحلیلی در دستگاه مختصات دو بعدی با هم مرور کنیم.

معادله دایره: دایره  $C(O', r)$  را در دستگاه مختصات  $xy$  در نظر می‌گیریم. اگر  $O'(\alpha, \beta)$  مرکز دایره باشد و  $A(x, y)$  یک نقطه دلخواه روی آن باشد، با توجه به تعریف دایره، همواره  $O'A = r$  و با توجه به دستور تعیین فاصله بین دو نقطه می‌توان نوشت:

$$|O'A| = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

و این معادله دایره‌ای به مرکز  $(\alpha, \beta)$  و شعاع  $r$  است. که به آن معادله استاندارد دایره نیز می‌گویند.

**مثال:** معادله دایره‌ای به مرکز  $O'(2, -1)$  و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.

**حل:** به کمک دستور بالا معادله استاندارد دایره فوق نوشته می‌شود:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

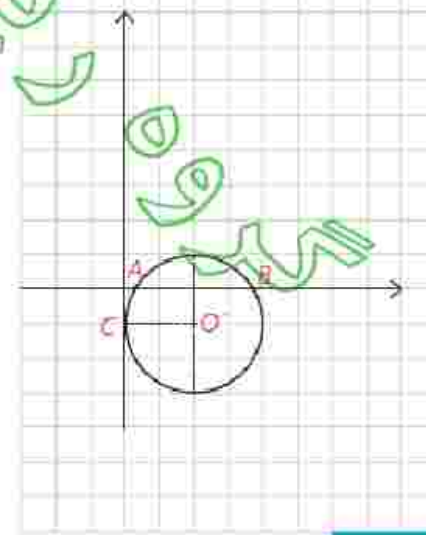
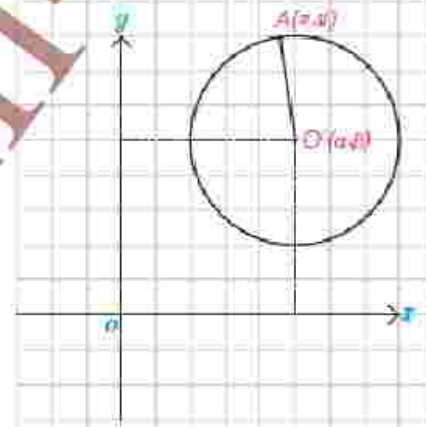
اگر در این معادله،  $y = 0$  قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور  $x$  ها به دست می‌آید:

$$(x - 2)^2 + 1 = 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = 3$$

$$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

لذا دایره فوق محور  $x$  ها را در نقاط  $A(2 - \sqrt{3}, 0)$  و  $B(2 + \sqrt{3}, 0)$  قطع می‌کند و اگر در معادله دایره،  $x = 0$  قرار دهیم نقاط برخورد با محور  $y$  ها پیدا می‌شوند:

$$4 \Rightarrow (y + 1)^2 = 0 \Rightarrow y = -1$$



بنابراین دایره فوق محور  $y$ ها را فقط در یک نقطه  $O(0, -1)$  قطع می‌کند و می‌دانیم که اگر یک خط دایره‌ای را فقط در یک نقطه قطع کند، در آن نقطه بر آن مماس است. پس همان‌طور که در شکل هم دیده می‌شود، دایره در نقطه  $C$  بر محور  $y$ ها مماس است. در معادله دایره می‌توانیم به کمک اتحادها، عبارت‌های درجه دوم را ساده کنیم، مثلاً در معادله فوق داریم:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$$

که این معادله را معادله ضمنی دایره می‌نامیم.

— تبدیل معادله ضمنی دایره به معادله استاندارد:

در حالت کلی معادله‌ای به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  ممکن است معادله دایره‌ای باشد. برای این منظور عبارت‌های  $x^2 + ax$  و  $y^2 + by$  را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم.

**مثال:** مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$  را به دست آوریم.

**حل:**

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = -1 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = -1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow O(-1, 2), r=2$$

### ۱ فعالیت

می‌خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله ضمنی  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  را در حالت کلی به دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید.

$$(x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) + (y^2 + by + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}) + c = 0 \Rightarrow$$

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0 \Rightarrow$$

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

$$\Rightarrow O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}), r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه‌ای درباره  $a, b, c$  به دست

می‌آید؟ معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  یک دایره است اگر و تنها اگر  $a^2 + b^2 - 4c > 0$

رابطه ضمنی  $x^2+y^2+ax+by+c=0$  معادله یک دایره است. اگر و تنها اگر  $a^2+b^2 > 4c$  باشد و اگر  $a^2+b^2 < 4c$  باشد، این معادله هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند و اگر  $a^2+b^2 = 4c$  باشد، این معادله تنها یک نقطه به مختصات  $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  را در صفحه مشخص می‌کند (چرا؟)

### نتیجه

با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می‌توان معادله آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادله دایره می‌توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

### کاردرکلاس

۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(0, 1)$  و شعاع آن ۲ واحد باشد.

۲- معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ به چه صورت است؟

۳- کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها را به دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف)  $x^2+y^2-2x-6y-1=0$

ب)  $x^2+y^2+2x+3y+4=0$

ج)  $2x^2+2y^2-3x+4y-2=0$

مسئله: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه  $O(-2, -1)$  مرکز آن و  $M(1, 1)$  یک نقطه از آن باشد.

حل: مرکز دایره را داریم. پس باید طول شعاع آن را داشته باشیم تا معادله آن را بنویسیم. روشن است که  $OM=r$  پس طول  $OM$  را به دست می‌آوریم:

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(1+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{13}$$

و معادله دایره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 13$$

$$O(0,1), r=3 \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 9$$

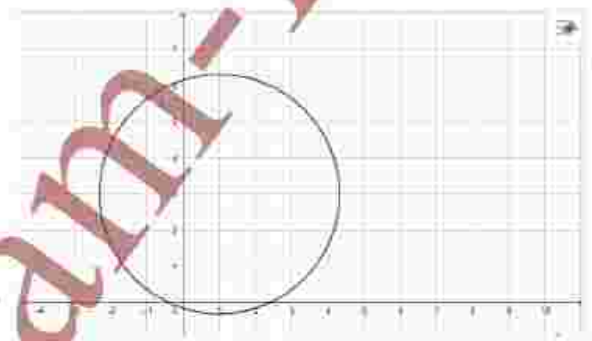
$$O(0,0) \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0 \Rightarrow a = -2, b = -6, c = -1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 4c = 4 + 36 + 4 = 44 > 0$$

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O'(1, 3), r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{44}}{2} = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$



الف :

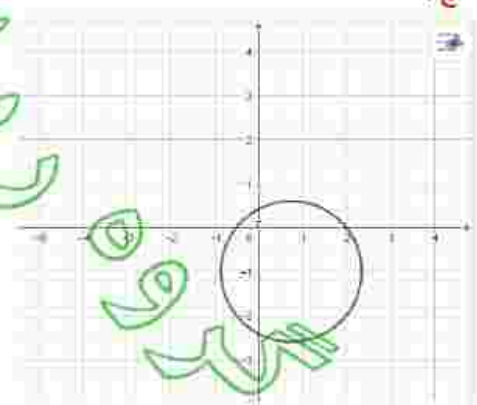
$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0 \Rightarrow a = 2, b = 2, c = 4$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 4c = 4 + 4 - 16 = -8 < 0 \Rightarrow \text{این معادله هیچ نقطه ای از صفحه را مشخص نمی کند.}$$

$$2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, b = 2, c = -1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 4c = \frac{9}{4} + 4 + 4 = \frac{41}{4} > 0$$

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O'\left(\frac{3}{4}, -1\right), r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{41}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{41}}{4}$$



ج :



**فعالیت ۲**

معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه  $O(1, -1)$  مرکز آن بوده و بر خط به معادله  $2x - 4y + 3 = 0$  مماس باشد.

۱- با توجه به آنچه از هندسه ۲ یاد دارید، شعاع دایره در نقطه تماس  $(H)$  بر خط عمود است

۲- طول شعاع دایره برابر است با فاصله مرکز دایره از خط مماس

۳- به کمک دستور فاصله نقطه از خط داریم:  $r = OH = \frac{|2(1) - 4(-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$

۴- معادله دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می‌نویسیم:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

**کاردرکلاس**

معادله دایره‌ای را بنویسید که  $O(1, 1)$  مرکز آن بوده و روی خط به معادله  $x + y = 2$  و تری به طول  $2\sqrt{2}$  جدا کند.

$AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow AH = BH = \sqrt{2}, OH = \frac{|1(1) + 1(1) - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$r = OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$

**مثال:** معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه  $O(-1, 1)$  بوده و بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$  از مماس بیرونی باشد.

**حل:** مختصات مرکز و شعاع دایره فوق را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \Rightarrow O'(1, -1), r' = \sqrt{2}$$

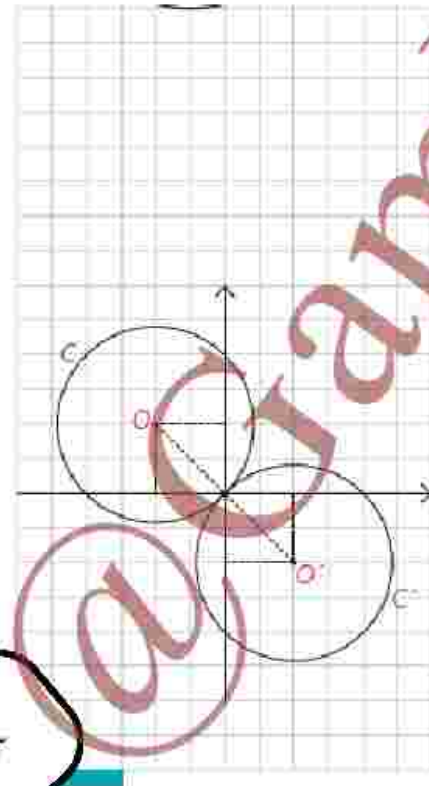
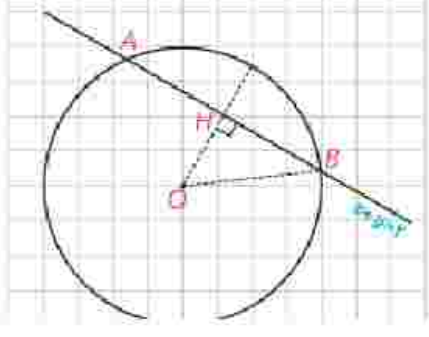
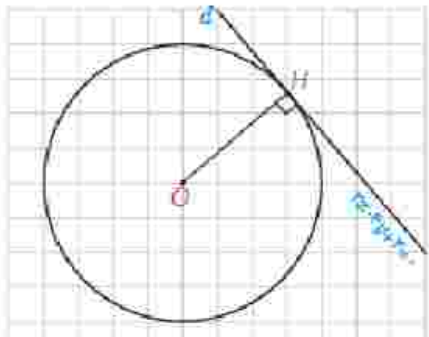
و چنانچه از هندسه ۲ می‌دانیم اگر  $d = OO'$  طول خط المکزین دو دایره مماس خارج باشد، بنابراین داریم:

$$d = OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d = 2\sqrt{2} = r + \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره  $C$  را می‌نویسیم:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$



**فعالیت ۳**

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(0,1)$  بوده و با دایره  $x^2+y^2-4x-6y=3$  مماس داخل باشد.

۱- معادله دایره فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \Leftrightarrow O'(2,3), r' = 4$$

۲- طول خط‌المركزین دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$d = OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

۳- با توجه به آنچه از هندسه ۲ می‌دانیم، داریم:

$$d = |r - r'| \Rightarrow |r - 4| = 2\sqrt{2} \Rightarrow r - 4 = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

۴- با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = (4 \pm 2\sqrt{2})^2$$

چرا مسئله دو جواب دارد؟ چون مشخص نیست از دو دایره، کدام یک درونی و کدام یک بیرونی است با توجه به این دو نوع جواب بدست می‌آید

**کاردرکلاس**

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

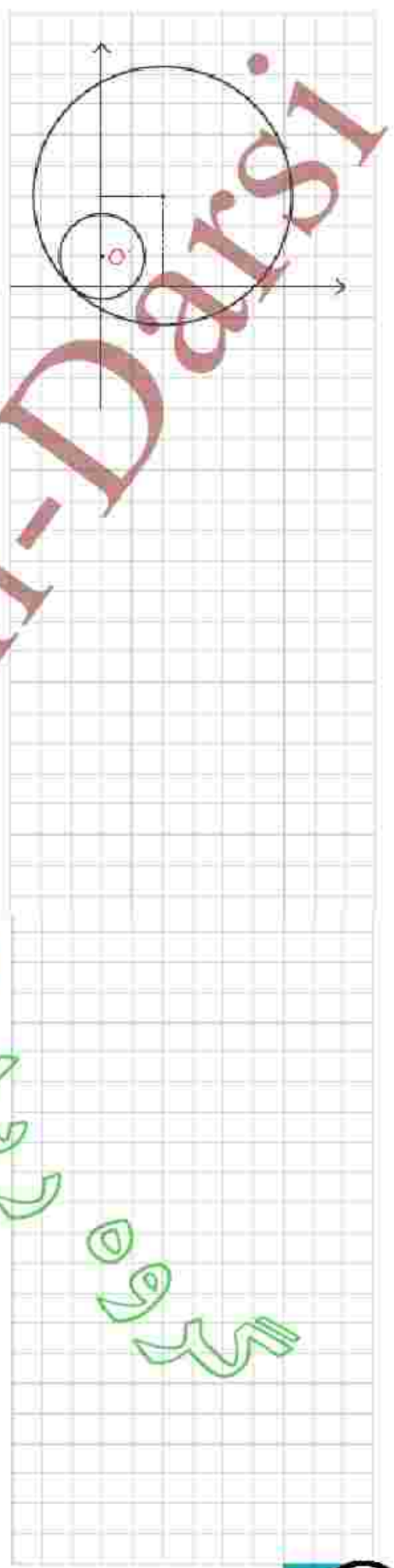
الف)  $x^2+y^2-4x-6y=3$  ,  $x^2+y^2-10x-14y+73=0$

ب)  $x^2+y^2-2x=1$  ,  $x^2+y^2=1$

ج)  $x^2+y^2=9$  ,  $x^2+y^2-2x+2y+1=0$

د)  $x^2+y^2=4$  ,  $x^2+y^2-8x-4y+19=0$

(راه‌نمایی: مختصات مرکز و طول شعاع‌های هر دو دایره را به دست آورده و پس از تعیین طول خط‌المركزین از اطلاعات خود از هندسه ۲ استفاده کنید.)



الف:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3 \Rightarrow O(2, 3), r = \frac{\sqrt{16 + 36 + 12}}{2} = 4$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0 \Rightarrow O'(5, 7), r' = \frac{\sqrt{100 + 196 + 292}}{2} = 1$$

$$\Rightarrow d = OO' = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = 4, r+r' = 4+1=5, |r-r'| = 4-1=3$$

$\Rightarrow |r-r'| < d < r+r' \Rightarrow$  دو دایره منقطع اند

ب:

$$x^2 + y^2 - 2x = 1 \Rightarrow O(1, 0), r = \frac{\sqrt{4+0+4}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow O'(0, 0), r' = 1$$

$$\Rightarrow d = OO' = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2} = 1, r+r' = 1+\sqrt{2}, |r-r'| = \sqrt{2}-1$$

$\Rightarrow |r-r'| < d < r+r' \Rightarrow$  دو دایره منقطع اند

ج:

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow O(0, 0), r = 3$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow O'(1, -1), r' = \frac{\sqrt{4+4-4}}{2} = 1$$

$$\Rightarrow d = OO' = \sqrt{(0-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}, r+r' = 3+1=4, |r-r'| = 3-1=2$$

$\Rightarrow d < |r-r'| \Rightarrow$  دو دایره منداخل اند

د:

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow O(0, 0), r = 2$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0 \Rightarrow O'(4, -2), r' = \frac{\sqrt{64+16-76}}{2} = 1$$

$$\Rightarrow d = OO' = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, r+r' = 2+1=3, |r-r'| = 2-1=1$$

$\Rightarrow r+r' < d \Rightarrow$  دو دایره بیرون هم هستند

$$x^2 + (4-x)^2 - 2(4-x) - 3 = 0$$

$$x^2 + 16 - 8x + x^2 - 8 + 2x - 3 = 0$$

$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 36 - 4(2)(5) = -4 < 0$$

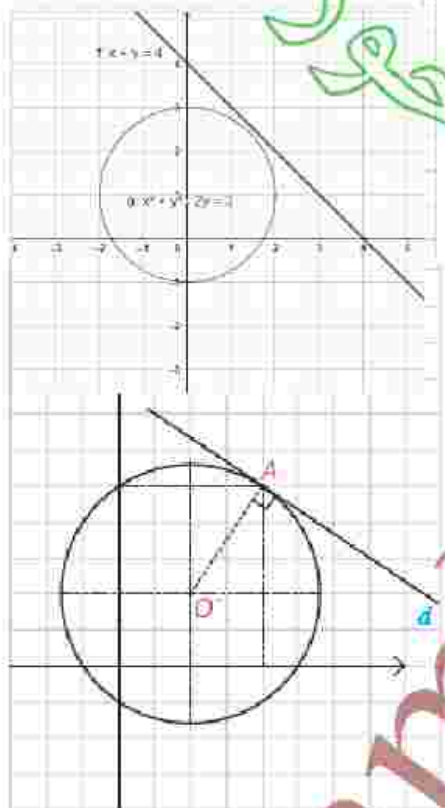
$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow O(0,1), r=2$$

$$\Rightarrow OH = \frac{|(0) + (1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow OH^2 > r^2 \Rightarrow OH > r$$



می خواهیم وضعیت خط به معادله  $x+y=4$  و دایره  $x^2+y^2-2y-3=0$  را تعیین کنیم.

روش اول: از معادله خط  $y=4-x$  را در معادله دایره جایگزین می کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه های برخورد از معادله حاصل به دست می آید).

$$x^2 + (4-x)^2 - 2(4-x) - 3 = 0 \Rightarrow \dots$$

با ساده کردن معادله حاصل و تعیین علامت  $\Delta$ ، نشان دهید معادله فوق ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش دوم: معادله دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصله مرکز دایره از خط را بیابید. چگونه تشخیص می دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

با رسم شکل خط و دایره در یک دستگاه مختصات، درستی نتیجه گیری تان را ببینید.

**سوال:** اگر در معادله حاصل از برخورد خط و دایره،  $\Delta > 0$  یا  $\Delta = 0$  شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت ها فاصله مرکز دایره از خط چگونه است؟

**مثال:** در نقطه  $A(2,3)$  روی دایره  $x^2+y^2-2x-2y=3$  مماسی بر آن رسم کردیم. معادله این خط مماس را به دست آورید.

**حل:** با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطه مماس، بر خط مماس عمود است، با تعیین مختصات مرکز دایره  $O$  و شیب  $OA$  را تعیین می کنیم و از آنجا شیب مماس را به دست آورده و معادله آن را تعیین می کنیم.

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow O(1,1) \Rightarrow m_{OA} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow$$

$$m_d = -\frac{1}{2} \Rightarrow y-3 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow \text{معادله مماس } d: y = -\frac{1}{2}x + 4$$

۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که :

الف)  $O(1,1)$  مرکز آن و  $A(3,2)$  نقطه‌ای از آن باشد.

ب)  $O(2,1)$  مرکز آن بوده و بر خط  $3x+4y=0$  مماس باشد.

پ)  $O(-1,-1)$  مرکز آن بوده و روی خط  $x+y=1$  و تری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط  $x+y=1$  و  $x-y=2$  شامل فترهایی از آن بوده و خط  $4x+3y=6$  بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط  $A(1,2)$  و  $B(3,0)$  بگذرد و  $y=2x-1$  شامل قطری از آن باشد.

۲- حدود  $a$  را طوری به دست آورید که  $x^2+y^2-2x+5y+a=0$  بتواند معادله یک دایره باشد.

۳- وضعیت هر یک از نقاط  $A(-1,-1)$ ،  $B(1,-2)$ ،  $C(2,2)$  و  $D(4,-1)$  را نسبت به دایره  $x^2+y^2-2x+4y-5=0$  تعیین کنید.

۴- وضعیت هر یک از حالت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف)  $x^2+y^2=4$ ،  $x^2+y^2-2x=4$

ب)  $x^2+(y-1)^2=1$ ،  $(x-1)^2+y^2=1$

ج)  $x^2+y^2=1$ ،  $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

د)  $x^2+y^2=1$ ،  $x^2+y^2-6x-2y+9=0$

۵- نقاط  $A(-1,-1)$  و  $B(1,1)$  و  $C(1,-2)$  رئوس مثلث  $ABC$  هستند. معادله دایره محیطی مثلث  $ABC$  را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس  $B$  به دست آورید.

۶- وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف)  $2x+4y=0$ ،  $x^2+y^2-4x-2y+7=0$

ب)  $x+y=2$ ،  $x^2+y^2=2$

ج)  $x+y=1$ ،  $x^2+y^2-1x-2y=2$

باسخ تمرین ۱

$$r = OA = \sqrt{(r-1)^2 + (r-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

$$r = OH = \frac{|r(r) + r(1)|}{\sqrt{r^2 + r^2}} = \frac{10}{2} = r \Rightarrow (x-r)^2 + (y-1)^2 = r^2$$

$$AB = r \Rightarrow AH = BH = \frac{r}{2}$$

$$OH = \frac{|1(-1) + 1(-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$r = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{13}{4}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=-1 \Rightarrow O'(2, -1)$$

$$r = \frac{|r(2) + 3(-1) - 6|}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{25}$$

$$A(1, r), B(r, 0) \Rightarrow M\left(\frac{1+r}{2}, \frac{r+0}{2}\right) = (r, r)$$

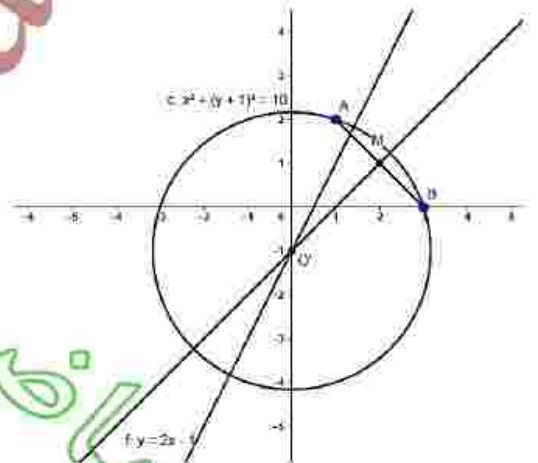
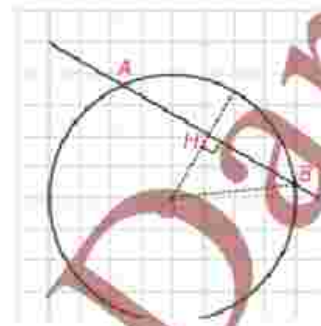
$$m_{AB} = \frac{0-r}{r-1} = -1 \Rightarrow m' = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow y-1 = 1(x-2) \Rightarrow y = x-1$$

$$\begin{cases} y = x-1 \\ y = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow x=0, y=-1 \Rightarrow O'(0, -1) \Rightarrow r = O'A = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-r)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + a = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 4c = 9 + 25 - 4a > 0$$

$$\Rightarrow 24 - 4a > 0 \Rightarrow a < \frac{24}{4} = \frac{17}{2}$$



باسخ تمرین ۲

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$$

$$A(-1, -1) \Rightarrow 1 + 1 - 2(-1) + 4(-1) - 5 = -5 < 0 \Rightarrow \text{نقطه درون دایره قرار دارد}$$

$$B(1, -2) \Rightarrow 1 + 4 - 2(1) + 4(-2) - 5 = -16 < 0 \Rightarrow \text{نقطه درون دایره قرار دارد}$$

$$C(2, 2) \Rightarrow 4 + 9 - 2(2) + 4(2) - 5 = 21 > 0 \Rightarrow \text{نقطه بیرون دایره قرار دارد}$$

$$D(4, -1) \Rightarrow 16 + 1 - 2(4) + 4(-1) - 5 = 0 \Rightarrow \text{نقطه روی دایره قرار دارد}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow O(0, 0), r = 2, \quad x^2 + y^2 - 2x = 4 \Leftrightarrow O'(1, 0), r' = \sqrt{5}$$

$$d = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1, r+r' = 2+\sqrt{5}, |r-r'| = \sqrt{5}-2 \Rightarrow |r-r'| < d < r+r' \Rightarrow \text{دو دایره متقاطع اند}$$

الف :

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow O(0, 1), r = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow O'(1, 0), r' = 1$$

$$d = OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}, r+r' = 2, |r-r'| = 0 \Rightarrow |r-r'| < d < r+r' \Rightarrow \text{دو دایره متقاطع اند}$$

ب :

ج :

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow O(0, 0), r = 1, \quad x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 5 = 0 \Leftrightarrow O'\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{2}\right), r' = \frac{\sqrt{18+18-4(5)}}{2} = 2$$

$$d = OO' = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2 \Rightarrow r+r' = 3, |r-r'| = 1 \Rightarrow d = r+r' \Rightarrow \text{دو دایره معاس بیرون هستند}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow O(0, 0), r = 1, \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow O'(3, 1), r' = 1$$

$$d = OO' = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}, r+r' = 2, |r-r'| = 0 \Rightarrow d > r+r' \Rightarrow \text{دو دایره متخارج اند}$$

د :

$$B(1, 1), A(-1, -1) \Rightarrow N\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right) \Rightarrow N(0, 0), m_{AB} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1 \xrightarrow{d \perp AB} m_d = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\Rightarrow y - 0 = -1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x}$$

$$C(1, -2), A(-1, -1) \Rightarrow M\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{-2+(-1)}{2}\right) \Rightarrow M(0, -2), m_{AB} = \frac{-2-(-1)}{1-(-1)} = -1 \xrightarrow{d \perp AB} m_d = \frac{-1}{-1} = \frac{-1}{-1} = +1$$

$$\Rightarrow y - (-2) = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x - 2}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -1 \Rightarrow O(1, -1) \Rightarrow r = OA = \sqrt{(1+1)^2 + (1-1)^2} = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (x+1)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow O(2, 2), r = \frac{\sqrt{16 + 16 - 28}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$3x + 4y = 0 \Rightarrow OH = \frac{|3(2) + 4(2)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{14}{5} \Rightarrow OH > r \Rightarrow \text{خط، دایره را قطع نمی کند}$$

الف:

ب:

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow O(0, 0), r = \sqrt{2}$$

$$x + y = 2 \Rightarrow OH = \frac{|1 + 0 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2} \Rightarrow OH = r \Rightarrow \text{خط بر دایره مماس است}$$

ج:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2 \Rightarrow O(1, 1), r = \frac{\sqrt{4 + 4 + 8}}{2} = 2$$

$$x + y = 1 \Rightarrow OH = \frac{|1 + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OH < r \Rightarrow \text{خط، دایره را در دو نقطه قطع می کند}$$

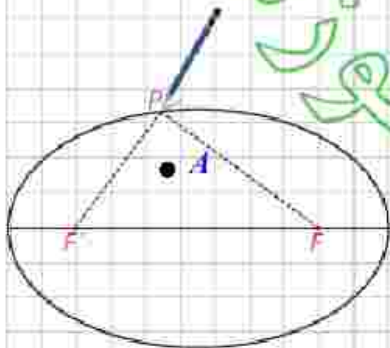


## بیضی و سهمی

### بیضی

#### فعالیت ۱

یک تکه نخ در نظر گرفته و دوسر آن را مطابق شکل در دو نقطه  $F$  و  $F'$  ثابت کنید. فرض کنید طول نخ  $l$  باشد و  $FF' > l$  یک مدار را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی ای بدگونهای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته ای خواهد بود که بیضی نام دارد.



۱- یک نقطه دلخواه روی شکل رسم شده در نظر بگیرید. مجموع فاصله های این نقطه از دو نقطه ثابت  $F$  و  $F'$  برابر چیست؟  
 $PF + PF' = l$

۲- یک نقطه دلخواه مانند  $A$  در درون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه ثابت  $F$  و  $F'$  وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه مورد نظر از  $F$  و  $F'$  کوچکتر از  $l$  است.

(راهنمایی: پارامتری: یا خط  $FA$  را از سمت  $A$  امتداد دهید تا بیضی را قطع کند. سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

پاسخ در صفحه بعد

۳- یک نقطه دلخواه مانند  $B$  بیرون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه  $F$  و  $F'$  وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه مورد نظر از  $F$  و  $F'$  بزرگتر از  $l$  است.

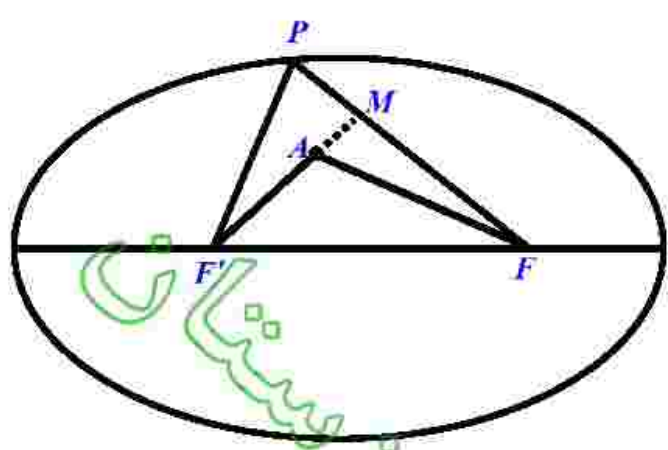
(راهنمایی: اگر نقطه  $B$  محل برخورد  $FB$  با بیضی باشد،  $F'D$  را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

پاسخ در صفحه بعد

۴- از مراحل (۱) تا (۳) متوجه وجود چه ویژگی مشترکی در همه نقاط بیضی شدید که هیچ نقطه دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

ویژگی تمام نقاط بیضی این است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت مقداری ثابت است

باسخ مرحله ۲ فعالیت



فرض کنیم  $A$  نقطه ای درون بیضی باشد که روی خط  $FF'$  قرار نداشته باشد.  
 نقطه  $P$  را روی بیضی چنان اختیار می کنیم که  $A$  درون مثلث  $PF'F$  باشد. اگر  
 امتداد  $AF'$ ، ضلع  $PF$  را در نقطه  $M$  قطع کند.  
 در این صورت بنا به قضیه نامساوی مثلث داریم:

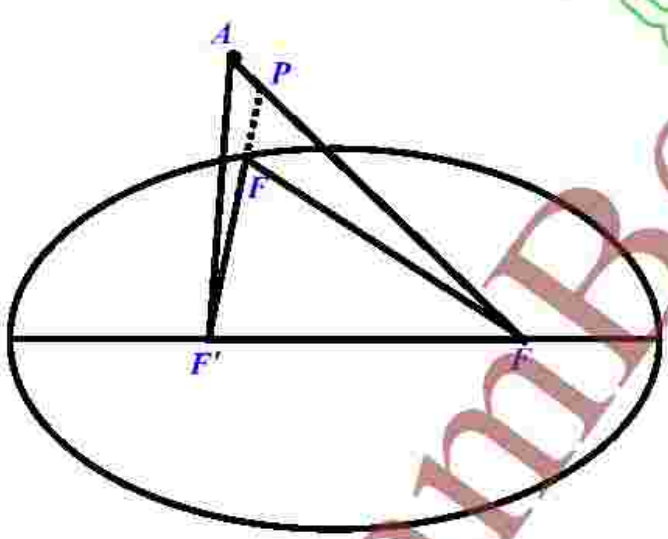
$$\Delta PF'M : F'M < PF' + PM$$

$$\Delta AFM : AF < AM + MF$$

$$\Rightarrow AF + F'M < PF' + PM + AM + MF \Rightarrow AF + F'A + AM < PF' + PM + AM + MF$$

$$\Rightarrow AF + AF' < PF' + PF \Rightarrow AF + AF' < l$$

باسخ مرحله ۳ فعالیت



فرض کنیم  $A$  نقطه ای بیرون بیضی باشد که روی خط  $FF'$  قرار نداشته باشد.  
 نقطه  $H$  را روی بیضی چنان اختیار می کنیم که  $P$  درون مثلث  $AFF'$  باشد. اگر  
 امتداد  $PF'$ ، ضلع  $AF$  را در نقطه  $M$  قطع کند.  
 در این صورت بنا به قضیه نامساوی مثلث داریم:

$$\Delta AF'M : F'M < AF' + AM$$

$$\Delta PFM : PF < PM + MF$$

$$\Rightarrow PF + F'M < AF' + AM + PM + MF \Rightarrow PF + F'P + PM < AF' + AM + PM + MF$$

$$\Rightarrow PF + PF' < AF' + AF \Rightarrow l < AF + AF'$$

۵- با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت .....  
یک مقدار ثابت ..... است.

دو نقطه ثابتی که با توجه به آنها، بیضی را به دست آوریم و آنها را  $F'$  و  $F$  نامیدیم کانون های بیضی نام دارند.

### نمایش ۲

بیضی مقابل را در نظر بگیرید.  $AA'$  قطر بزرگ (قطر کانونی) و  $BB'$  قطر کوچک بیضی نامیده می شود.  $F$  و  $F'$  کانون های بیضی هستند و نقطه  $O$  وسط پاره خط  $FF'$  مرکز بیضی است. فرض کنید اندازه پاره خط های  $OA$ ،  $OB$  و  $OF$  را به ترتیب با  $a$ ،  $b$  و  $c$  نمایش دهیم. بنابراین فاصله دو کانون بیضی برابر  $2c$  است.

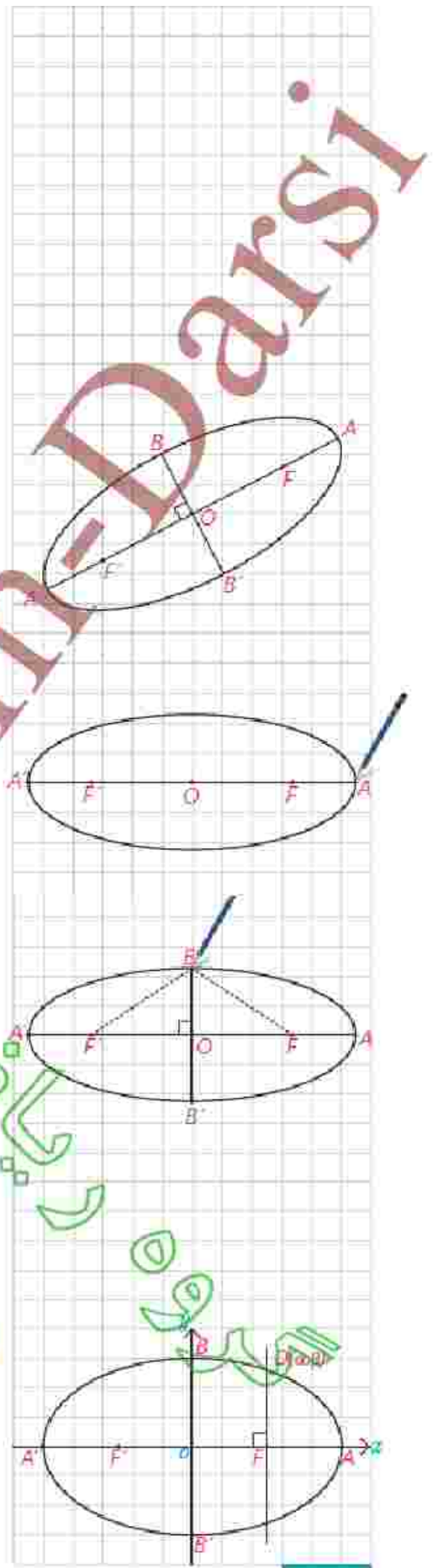
۱- الف) در ترسیم بیضی با نخ و مداد دو وضعیتی را که متناظر نقاط  $A$  و  $A'$  قرار می گیرند در نظر بگیرید.  
الف) نشان دهید که  $FA = F'A'$  و از آن نتیجه بگیرید که  $OA' = OA = a$  و لذا اندازه قطر بزرگ بیضی برابر  $2a$  است.  
ب) نشان دهید طول نخ مورد نظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

۲- الف) در ترسیم بیضی وضعیتی را که مداد در نقطه  $B$  قرار دارد در نظر بگیرید و نشان دهید  $b^2 + c^2 = a^2$   
ب) با انجام همین کار برای نقطه  $B'$  نتیجه بگیرید  $OB'^2 + c^2 = a^2$

و با توجه به آن نتیجه بگیرید  $OB' = OB = b$  و لذا اندازه قطر کوچک بیضی برابر  $2b$  است.

### کاردرکلاس

۱- مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای  $x$  و  $y$  منطبق هستند و فاصله  $F$  از هر دو نقطه  $O$  و  $A$  برابر  $a$  است. اگر خطی که در نقطه  $F$  بر  $AA'$  عمود کرده ایم بیضی را در نقطه  $D$  قطع کرده باشد، مختصات  $D$  را به دست آورید.



باسخ سوال ۱ فعالیت

الف: نقطه ای روی بیضی است لذا با توجه قسمت اول فعالیت قبل می توان نوشت:

$$FA + F'A = l \Rightarrow FA + FA + FF' = l \Rightarrow FA + FA = l - FF' \Rightarrow 2FA = l - FF'$$

به طریق مشابه با در نظر گرفتن نقطه  $A'$  می توان نوشت:  $2FA' = l - FF'$  پس:

$$FA = F'A = \frac{1}{2}l \Rightarrow FF' + F'A = FF' + FA \Rightarrow FA = F'A'$$

$$OF = OF' \Rightarrow OF + FA = OF' + F'A' \Rightarrow OA = OA' = a$$

پ:

$$AF + AF' = l \xrightarrow{AF=AF'} A'F' + AF' = l \Rightarrow AA' = l \Rightarrow l = 2a$$

باسخ سوال ۲ فعالیت

الف:

$$\Delta OBF \cong \Delta OBF' \Rightarrow BF = BF'$$

$$BF + BF' = AA' = 2a \Rightarrow BF + BF = 2a \Rightarrow 2BF = 2a \Rightarrow BF = a$$

$$\Delta OBF; \angle O = 90^\circ \Rightarrow OB^2 + OF^2 = BF^2 \Rightarrow OB^2 + c^2 = a^2 \quad \boxed{1}$$

ب:

$$\Delta OB'F \cong \Delta OB'F' \Rightarrow B'F = B'F'$$

$$B'F + B'F' = AA' = 2a \Rightarrow 2B'F = 2a \Rightarrow B'F = a$$

$$\Delta OB'F; \angle O = 90^\circ \Rightarrow OB'^2 + OF^2 = B'F^2 \Rightarrow OB'^2 + c^2 = a^2 \quad \boxed{2}$$

$$\boxed{1}, \boxed{2} \Rightarrow OB^2 = OB'^2 \Rightarrow OB = OB' = b$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای  $a$  و  $c$  بیضی مورد نظر را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که  $0 < c < a$  و لذا  $0 < \frac{c}{a} < 1$ . دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر  $\frac{c}{a}$  دارد. در رسم بیضی به صورت تقریبی ابتدا دو کانون  $F$  و  $F'$  را به فاصله  $2c$  از هم در نظر بگیرید. سپس نقاط  $A$  و  $A'$  را بر خط  $FF'$  به گونه‌ای انتخاب کنید که فاصله  $A$  تا  $F$  و فاصله  $A'$  تا  $F'$  برابر  $a-c$  و اندازه  $AA'$  برابر  $2a$  باشد. سپس با استفاده از رابطه  $b^2 = a^2 - c^2$  نقاط  $B$  و  $B'$  را مشخص کنید و بیضی را به‌طور تقریبی رسم کنید.

۱-  $c=1$  و  $a=4$  :  $\frac{c}{a} = \frac{1}{4}$

۲-  $c=2$  و  $a=8$  :  $\frac{c}{a} = \frac{1}{4}$

۳-  $c=1$  و  $a=2$  :  $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

۴-  $c=2$  و  $a=4$  :  $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

۵-  $c=3$  و  $a=4$  :  $\frac{c}{a} = \frac{3}{4}$

۶-  $c=6$  و  $a=8$  :  $\frac{c}{a} = \frac{3}{4}$

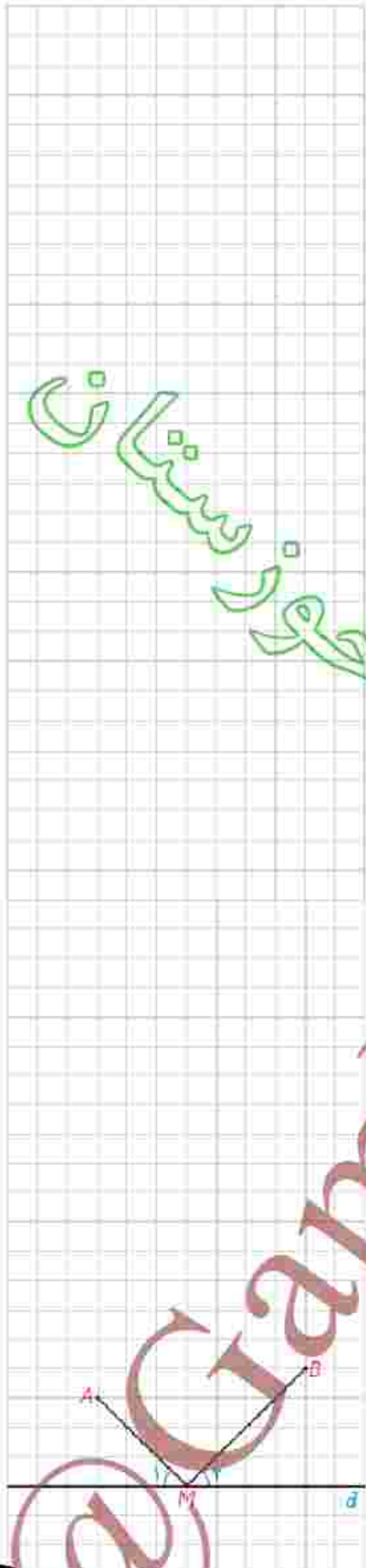
بسیار دقت کنید

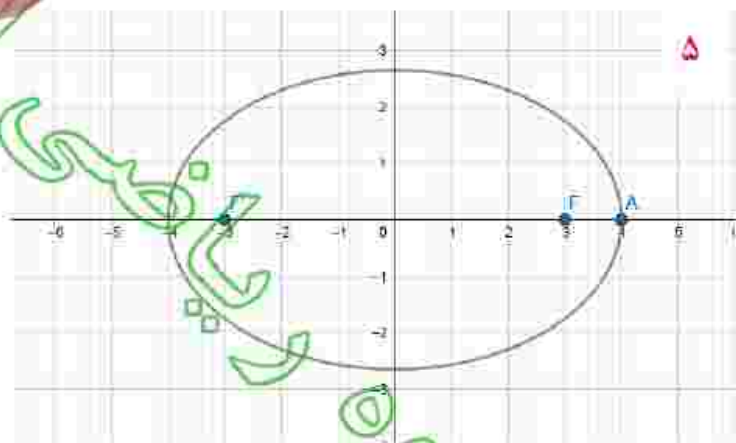
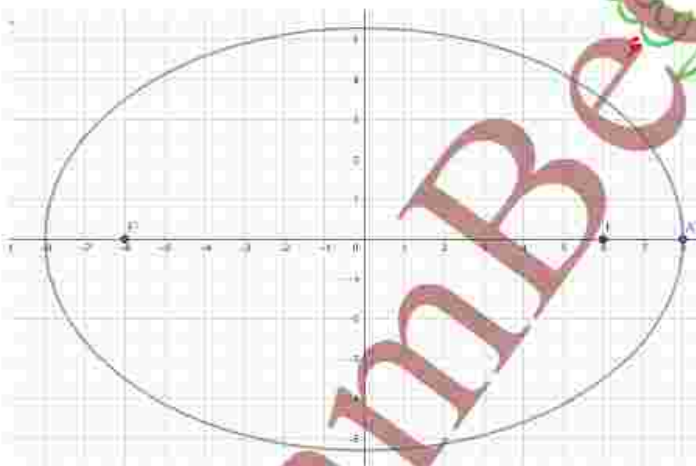
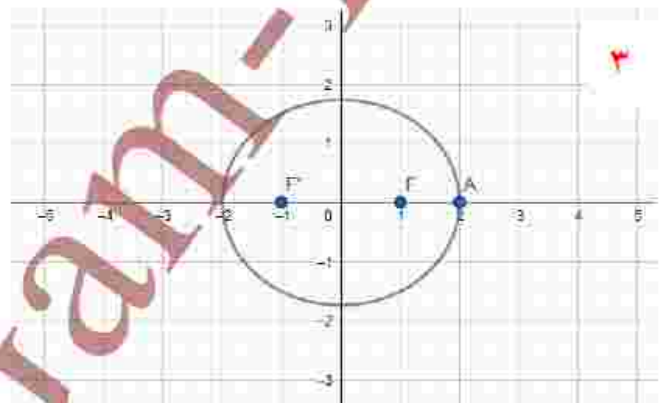
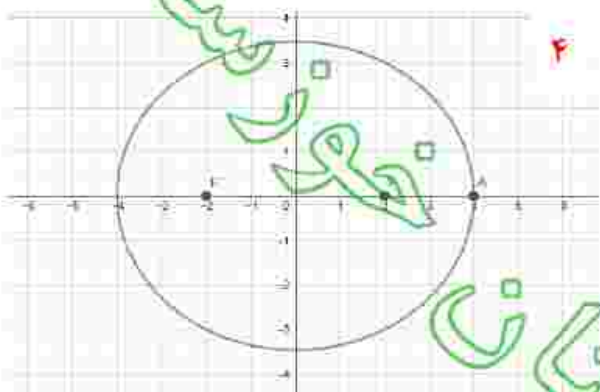
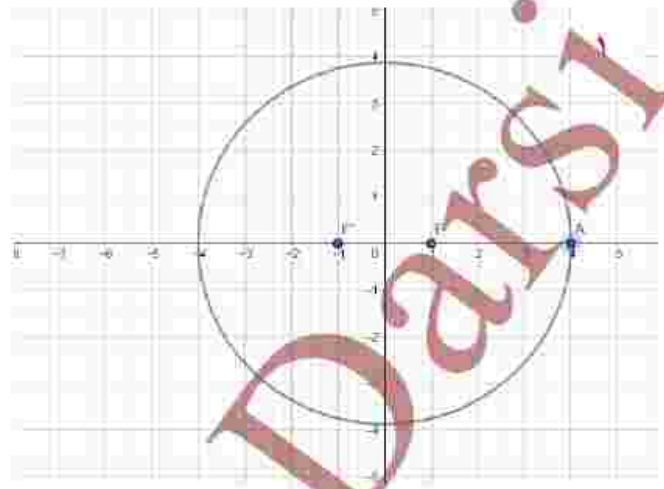
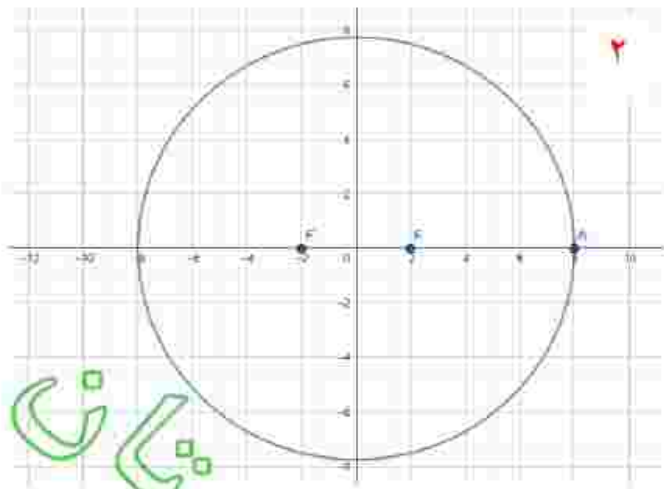
با توجه به آنچه دیدید هرچه مقدار  $\frac{c}{a}$  به یک نزدیک شود شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود و هرچه مقدار  $\frac{c}{a}$  به صفر نزدیک شود کشیدگی شکل بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود. به این سبب مقدار  $\frac{c}{a}$  را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم.

در حالتی که  $\frac{c}{a} = 1$  بیضی تبدیل به یک پاره‌خط و در حالتی که  $\frac{c}{a} = 0$  بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود. چرا؟

یادآوری

در پایه یازدهم دیدیم که کوتاه‌ترین مسیر از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  یا عبور از نقطه‌ای از خط  $d$ ، از نقطه‌ای مانند  $M$  روی خط  $d$  می‌گذرد، به گونه‌ای که دو زاویه ایجاد شده  $M_1$  و  $M_2$  با هم برابرند.





$$\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow a = c \Rightarrow a^2 = c^2 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} b^2 + c^2 = c^2 \Rightarrow b = 0$$

$$\frac{c}{a} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow c^2 = 0 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} b^2 + 0 = a^2 \Rightarrow a = b$$

#### ۴ فعالیت

فرض کنیم خط  $d$  مانند شکل مقابل در نقطه  $M$  بر بیضی مماس باشد.

۱- مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط  $d$  نسبت به دو کانون  $F$  و  $F'$  کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

۲- دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۳- با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

#### ■ سهمی

با سهمی در سال‌های گذشته تا حدی آشنا شده‌ایم. اکنون قصد داریم آن را به‌عنوان یک شکل هندسی مورد بررسی قرار دهیم.

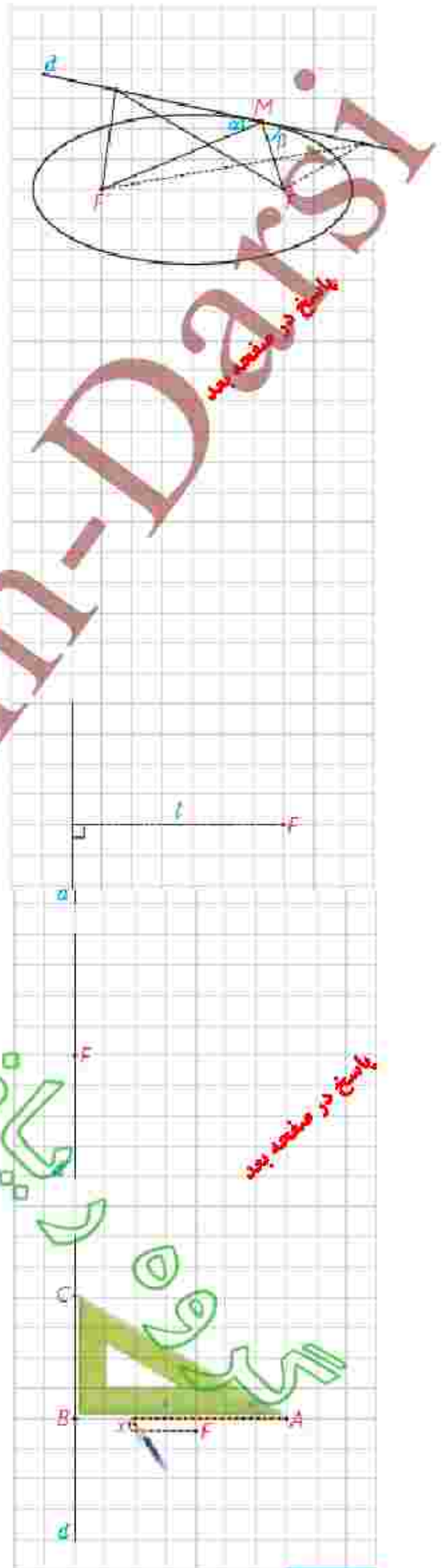
#### ۵ فعالیت

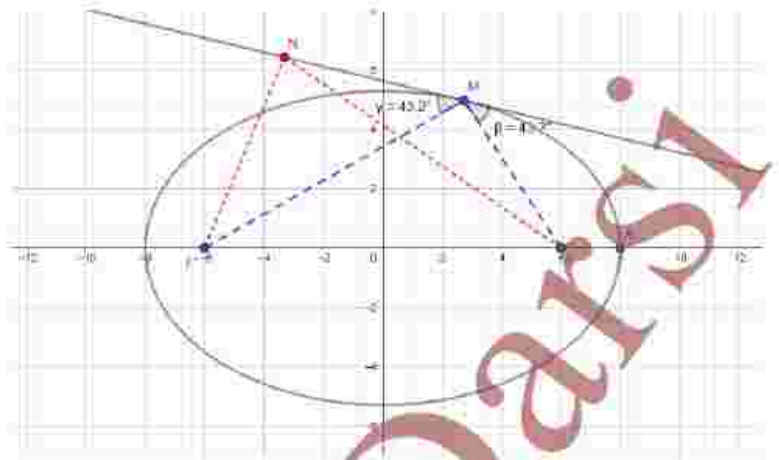
یک خط ثابت مانند  $d$  و یک نقطه ثابت مانند  $F$  خارج آن در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله  $F$  از خط  $d$  برابر  $l$  باشد.

- آیا می‌توانید نقطه دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از نقطه  $F$  خطی موازی خط  $d$  رسم کنید و آن را  $d'$  بنامید. تمام نقاط واقع بر خط  $d'$  فاصله‌شان از خط  $d$  برابر  $l$  است. حال توضیح دهید چگونه می‌توانید نقاطی بر خط  $d'$  بیابید که از نقطه  $F$  و خط  $d$  به یک فاصله باشند.

- اگر مسئله پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه باشد که به فاصله یکسانی از خط  $d$  و نقطه  $F$  قرار دارند، آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط مورد نظر ارائه می‌گردد.

فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا مانند شکل به نام‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  باشند. یک سر تکه نخ به طول  $AB$  را در رأس  $A$  از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطه  $F$  ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع  $BC$  بر خط  $d$  واقع باشد و نقطه  $F$  بر ضلع  $AB$  قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به گونه‌ای به نخ گیر دهید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشند. در این حالت فاصله نقطه‌ای که نوک قلم در آن قرار دارد از خط  $d$  و از نقطه  $F$  نسبت به هم چگونه است؟





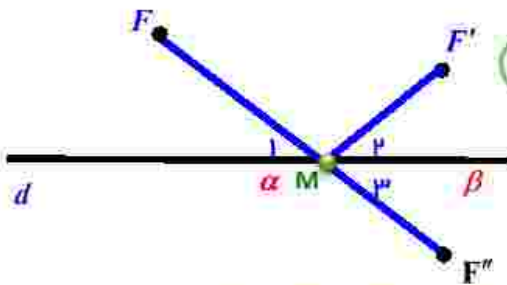
باسخ فعالیت ۴

۱- نقطه  $M$  - زیرا نقطه  $M$  تنها نقطه از خط  $d$  می باشد که روی بیضی قرار دارد و سایر نقاط این خط بیرون بیضی واقع اند پس بنا به فعالیت ۱  $FM + F'M$  کمترین مقدار ممکن را دارد.

۲- مساوی اند زیرا

بنا به آنچه در هندسه ۲ گفته شد اگر  $F, F'$  دو نقطه در یک طرف خط  $d$  باشند برای یافتن نقطه  $M$  روی خط  $d$  به طوری که  $FM + F'M$  کمترین مقدار ممکن را داشته باشد کافی است قرینه  $F'$  را نسبت به خط  $d$  یافته و آنرا به  $F$  وصل کنیم...

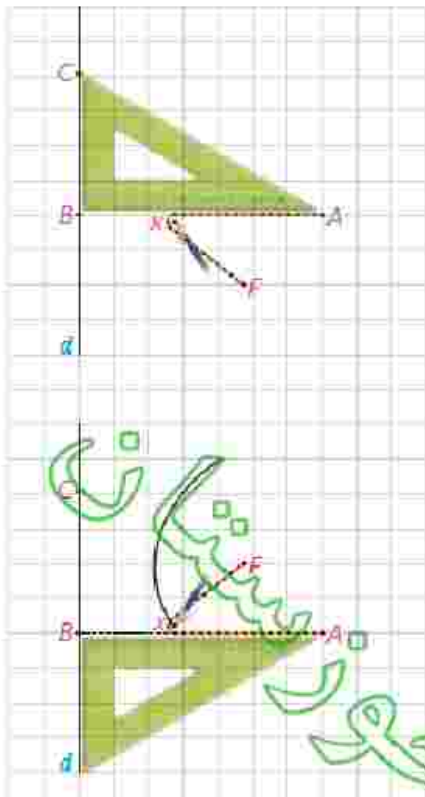
پس با توجه به شکل داریم:



$$\left. \begin{aligned} \angle M_1 &= \angle M_3 \\ \angle M_4 &= \angle M_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle M_1 = \angle M_4 \Rightarrow \alpha = \beta$$

۳- اشعه ای که از یکی از کانون های بیضی به بدنه آن تابیده می شود بعد از بازتاب از کانون دیگر می گذرد زیرا در هر بازتاب، زاویه ی تابش و بازتاب مساوی اند.





حال در حالتی که ضلع  $BC$  کماکان بر خط  $d$  واقع است گویا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع  $AB$  چسبیده باشد و هر دو تکه نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطه در حال حرکت نوک مداد را در هر حالت با  $X$  نمایش دهید. با دو خط های  $BX$  و  $FX$  هر کدام نمایانگر چه خصوصیاتی از نقطه  $X$  هستند و بین آنها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟ نقطه  $X$  از نقطه  $F$  و خط  $d$  به یک فاصله است یعنی

$$BX = FX$$

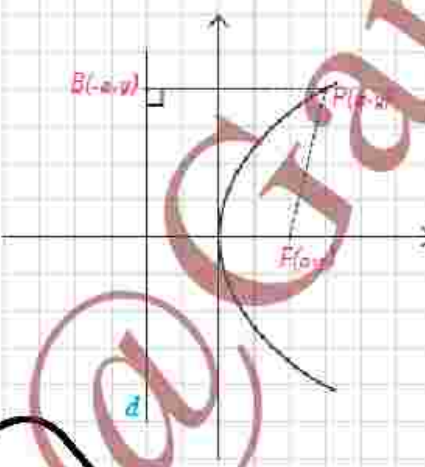
توضیح دهید که با ادامه این کار نقاطی که توسط مداد رسم می شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟ (دقت کنید که گویا را با منطبق کردن ضلع  $BC$  بر خط  $d$  در هر دو طرف نقطه  $F$  می توان حرکت داد.) همه نقطه ها از نقطه  $F$  و خط  $d$  به یک فاصله اند

شکل حاصل از فعالیت قبل سهمی نام دارد. در این حالت نقطه  $F$  را کانون سهمی و خط  $d$  را خط هادی سهمی می نامیم و اگر از  $F$  بر  $d$  خطی عمود رسم کنیم سهمی را در نقطه ای قطع می کند که به آن رأس سهمی می گوئیم. حال با توجه به آنچه دیدیم می توان گفت:

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

### ■ معادله سهمی

با توجه به آنچه گفته شد با سهمی به صورت هندسی آشنا شدیم. حال به دنبال این هستیم که برای یک سهمی داده شده معادله آن را به دست آوریم؛ یعنی معادله ای به دست آوریم که مختصات هر نقطه از سهمی در آن معادله صدق کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در معادله صدق کند روی سهمی مورد نظر باشند. دقت کنید که این کار را فقط برای سهمی هایی انجام می دهیم که خط هادی آنها موازی با یکی از محورهای مختصات باشد.



### ۶ فعالیت

۱- فرض کنید نقطه  $F(a,0)$ ، که در آن  $a$  مثبت است، کانون سهمی و خط هادی  $d$  موازی محور  $y$  ها به معادله  $x = -a$  باشد و نقطه  $P(x,y)$  نقطه ای دلخواه واقع بر سهمی باشد. داریم:  $|PF| = |PB|$ . چرا؟  
بنابراین

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+a)^2 + (y-y)^2}$$

گروه ریاضی استان خوزستان

با به توان ۲ رساندن دو طرف و ساده کردن عبارات خواهیم داشت:  $y^2 = 4ax$   
 دقت کنید که  $a$  برابر با فاصله کانون تا رأس سهمی و همچنین فاصله رأس سهمی تا  
 خط هادی است و فاصله کانون تا خط هادی برابر  $2a$  است. در این حالت عدد مثبت  
 $a$  را فاصله کانونی سهمی می نامند و چنان که دیده می شود خطی که از کانون به خط  
 هادی سهمی عمود می شود که در اینجا محور  $x$  هاست محور تقارن سهمی است که  
 به آن محور کانونی سهمی یا محور سهمی هم می گویم.

$$PF = PH \Rightarrow \sqrt{(x+a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow y^2 = -4ax$$

۲- در حالتی که خط هادی  $d$  موازی محور  $y$  ها به معادله  $x = a$  باشد ولی کانون  
 $F(-a, 0)$  در سمت چپ آن قرار داشته باشد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید  
 که در این حالت معادله سهمی به صورت  $y^2 = -4ax$  است. در این حالت محور  $x$  ها  
 محور سهمی است.

$$PF = PH \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+a)^2} \Rightarrow x^2 = 4ay$$

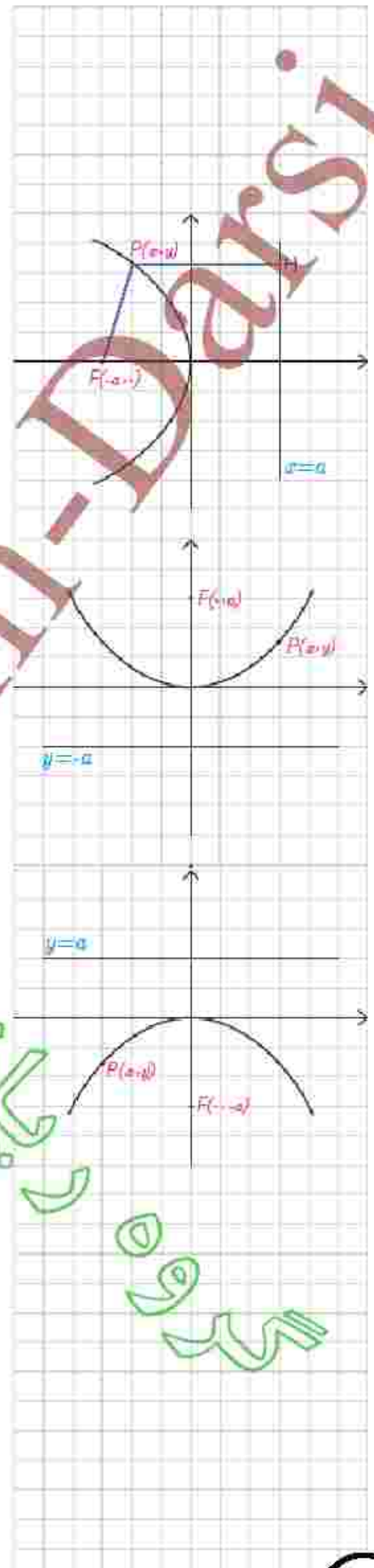
۳- در حالتی که خط هادی  $d$  موازی محور  $x$  ها به معادله  $y = -a$  و کانون  $F(0, a)$   
 در بالای آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله  
 سهمی به صورت  $x^2 = 4ay$  است. در این حالت محور  $y$  ها محور سهمی است.  
 (در واقع این معادله همان  $x^2 = \frac{1}{4a}y^2$  است که در پایه دهم به عنوان معادله سهمی  
 با آن آشنا شدید)

۴- در حالتی که خط هادی  $d$  موازی محور  $x$  ها به معادله  $y = a$  و کانون  $F(0, -a)$   
 در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادله سهمی  
 به صورت  $x^2 = -4ay$  است. در این حالت محور  $y$  ها محور سهمی است.

$$PF = PH \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y+a)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-a)^2} \Rightarrow x^2 = -4ay$$

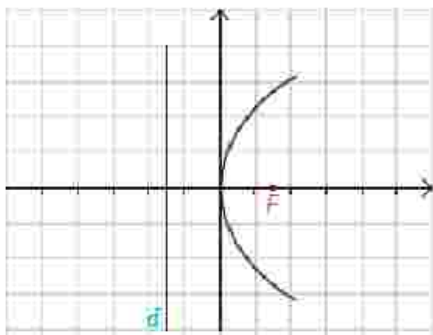
مطالب فوق درباره سهمی با رأس واقع در مبدأ مختصات را می توان در جدول زیر  
 خلاصه کرد.

معادله سهمی ( $a > 0$ )	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$y^2 = 4ax$	$(a, 0)$	$x = -a$	محور $x$	رو به راست
$y^2 = -4ax$	$(-a, 0)$	$x = a$	محور $x$	رو به چپ
$x^2 = 4ay$	$(0, a)$	$y = -a$	محور $y$	رو به بالا
$x^2 = -4ay$	$(0, -a)$	$y = a$	محور $y$	رو به پایین



**مثال:** معادله  $y = 6x$  مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نمایید.

**حل:** این معادله یک سهمی است که دهانه آن روبه راست است و محور آن محور  $x$  هاست. با قرار دادن  $6 = 4a$  داریم  $a = \frac{3}{2}$ . لذا کانون آن  $F(\frac{3}{4}, 0)$  و خط هادی آن موازی محور  $y$  ها و به معادله  $x = -\frac{3}{4}$  است و رأس آن مبدأ مختصات است. شکل تقریبی آن به صورت مقابل است.



### انتقال (محورها)

دیدیم که  $y = 4ax$  معادله یک سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات، کانون آن  $F(a, 0)$ ، خط هادی آن موازی محور  $y$  ها به معادله  $x = -a$ ، محور آن محور  $x$  ها (خط  $y = 0$ ) و دهانه آن روبه راست است. حال با توجه به آنچه درباره انتقال می دانیم می توان گفت معادله  $(y - k)^2 = 4a(x - h)$  معادله همان سهمی است که به اندازه  $h$  به سمت راست (در صورت منفی بودن  $h$  به سمت چپ) و به اندازه  $k$  به سمت بالا (در صورت منفی بودن  $k$  به سمت پایین) انتقال یافته است. لذا رأس آن به مختصات  $(h, k)$ ، کانون آن  $F(a + h, k)$ ، خط هادی آن موازی محور  $y$  ها به معادله  $x = -a + h$ ، محور آن خط  $y = k$  و دهانه آن کماکان روبه راست است.

معادله سهمی	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$(y - k)^2 = 4a(x - h)$	$(a + h, k)$	$x = -a + h$	خط $y = k$	رو به راست
$(y - k)^2 = -4a(x - h)$	$(-a + h, k)$	$x = a + h$	خط $y = k$	رو به چپ
$(x - h)^2 = 4a(y - k)$	$(h, a + k)$	$y = -a + k$	خط $x = h$	رو به بالا
$(x - h)^2 = -4a(y - k)$	$(h, -a + k)$	$y = a + k$	خط $x = h$	رو به پایین

همان طور که گفته شد رأس این سهمی ها نقطه ای به مختصات  $(h, k)$  است. لذا این حالت ها، حالت های کلی معادلات است که با قراردادن  $(h, k) = (0, 0)$  به حالت های خاص، که در جدول قبلی مطرح شد، خواهیم رسید. معادلات سهمی را در جدول فوق، معادلات استاندارد را با متعارف می گویم.

**مثال:** معادله سهمی به رأس  $A(2, 1)$  و کانون  $F(2, 5)$  را بیابید و معادله خط هادی آن را بنویسید.

**حل:** با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت:

$$F(h, a + k) \Rightarrow F(2, a + 1) = (2, 5) \Rightarrow a + 1 = 5 \Rightarrow \boxed{a = 4} \quad (1) \text{ (چرا؟)}$$

$$(2) \text{ معادله خط هادی آن } y = -3 \text{ است. چرا؟ } \boxed{y = -3}$$

۳) دهانه سهمی رو به بالاست. چرا؟ زترا در صفحه مختصات کانون سهمی بالاتر از رأس سهمی است

لذا معادله آن به صورت  $(x-h)^2 = 4a(y-k)$  است و خواهیم داشت:

$$(x-2)^2 = 16(y-1)$$

**مثال:** مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس  $A(4,6)$  و خط هادی  $x=9$

یترسید.

**حل:** یا توجه به جایگاه رأس و خط هادی سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت:

۱)  $a=5$  چرا؟  $a=5 \Rightarrow h=4, k=6; x=a+h \Rightarrow a+4=9 \Rightarrow a=5$

۲) کانون آن به مختصات  $F(-1,6)$  است. چرا؟  $F(-a+h, k) \Rightarrow F(-5+4, 6) \Rightarrow F(-1, 6)$

۳) دهانه سهمی رو به چپ است. چرا؟ زیرا رأس سهمی سمت چپ خط هادی سهمی قرار دارد.

لذا معادله آن به صورت  $(y-k)^2 = -4a(x-h)$  است و خواهیم داشت:

$$(y-6)^2 = -20(x-4)$$

### تبدیل معادله یک سهمی به صورت متعارف

چهار حالت معادله سهمی را که در جدول دوم مطرح شد، ۴ حالت شناخته شده (متعارف) در نظر می‌گیریم. اما در مثال‌های قبل معادلاتی یا عنوان معادله سهمی مطرح شد که برخی از آنها در ظاهر به شکل معادلات مطرح شده در جدول نبودند. به‌طور مثال در پایه دهم معادله‌ای به صورت  $y = x^2 + 3x + 5$  معادله یک سهمی نامیده شد. دقت کنید که ویژگی معادله سهمی این است که نسبت به یکی از دو متغیر  $x$  و  $y$  از درجه ۱ و نسبت به دیگری از درجه ۲ است. در ادامه نشان می‌دهیم معادله مطرح شده قابل تبدیل به یکی از ۴ حالت متعارف خواهد بود.

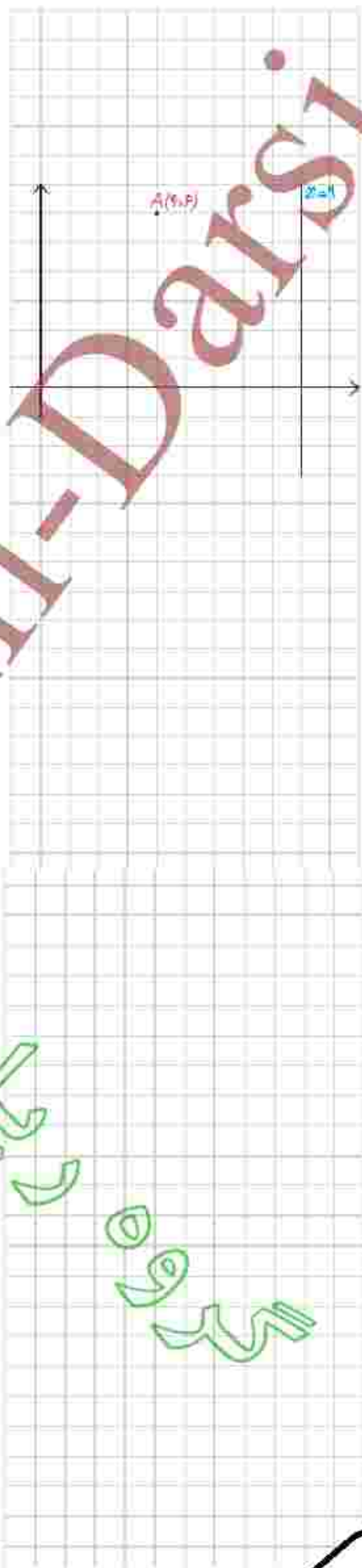
**مثال:** معادله یک سهمی به صورت  $y = x^2 + 3x + 5$  داده شده است. آن را به یکی از

حالت‌های متعارف تبدیل کنید و کانون و خط هادی و محور سهمی را مشخص نمایید.

**حل:** داریم  $x^2 + 3x = y - 5$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = y - 5 + \frac{9}{4} \Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = y - \frac{11}{4}$$

لذا معادله یک سهمی است که دهانه آن رو به بالا، رأس آن  $(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4})$  و  $4a=1$  و در نتیجه  $a = \frac{1}{4}$  است. بنابراین  $F = (h, a+k) = (-\frac{3}{2}, 3)$  کانون آن و خط هادی آن به معادله  $y = -a + k = \frac{5}{4}$  است. معادله محور سهمی به صورت  $x = h = -\frac{3}{2}$  است. با روش مشابه آنچه در مثال دیدید معادلات سهمی‌ها را می‌توان به یکی از حالات استاندارد نوشت.



## رسم سهمی

رسم دقیق یک منحنی توسط نرم افزارهای ریاضی انجام می‌گیرد. طبیعی است که در رسم منحنی‌ها با کاغذ و قلم، شکل حاصل شکل تقریبی منحنی مورد نظر خواهد بود. برای رسم یک سهمی ابتدا معادله آن را به صورت استاندارد می‌نویسیم و با توجه به آن، مختصات رأس سهمی، مقدار  $a$  (فاصله کانونی)، مختصات  $F$  (کانون) و خط هادی آن را به دست می‌آوریم و نیز درمی‌یابیم که دهانه سهمی رو به کدام طرف است.

یکی از مهم‌ترین نقاطی که باید در رسم سهمی جایگاه آن را مشخص نماییم، رأس سهمی است. اگر کانون سهمی را نیز مشخص نماییم در این صورت خطی که از رأس و کانون سهمی عبور می‌کند محور تقارن سهمی است.

حال اگر خطی را که در نقطه  $F$  بر محور تقارن سهمی عمود است رسم کنیم و روی آن دو نقطه، مثلاً  $B$  و  $B'$  را که به فاصله  $2a$  از  $F$  هستند مشخص نماییم، در این صورت نقاط  $B$  و  $B'$  بر سهمی واقع‌اند. چرا؟

حال با داشتن رأس و دو نقطه دیگر از سهمی و دانستن شکل کلی آن می‌توان شکل سهمی را به صورت تقریبی رسم کرد. قبل از رسم می‌توان نقاط برخورد منحنی با محورهای مختصات را نیز مشخص نمود.

**مثال:** نمودار معادله  $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$  را رسم کنید.

**حل:** ابتدا معادله را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم

$$y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x+1)$$

لذا معادله فوق یک سهمی با رأس  $A(h, k) = (-1, 1)$  است که دهانه آن رو به چپ است. داریم:  $-2a = -8 \Rightarrow a = 4$  و بنابراین  $F(-a+h, k) = (-3, 1)$  و معادله خط هادی آن به صورت  $x = a+h = 1$  است.

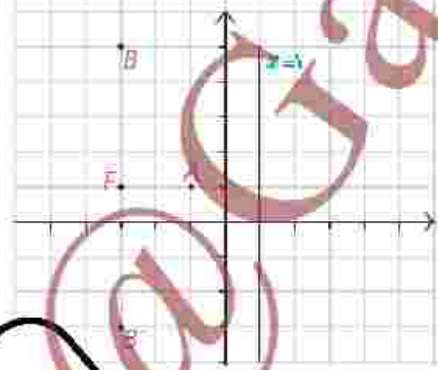
بر این صورت نقاط  $B$  و  $B'$  که هم طول با  $F$  و به فاصله  $2a = 8$  از  $F$  باشند یعنی  $B(-3, 9)$  و  $B'(-3, -3)$  نیز بر سهمی واقع‌اند. فاصله هر یک از آنها را از کانون و خط هادی بررسی کنید. حال با وصل کردن نقاط  $B$  و  $A$  و  $B'$  به صورت یک منحنی و ادامه آن، شکل تقریبی سهمی مورد نظر را به دست آورید.

بدون کاستن از کلیت مساله، سهمی  $x^2 = 4ay$  را در نظر می‌گیریم. کانون این سهمی نقطه  $F(0, a)$  و محور تقارن آن محور  $y$  ها است. اگر از کانون سهمی خطی عمود بر محور تقارن آن رسم کنیم، معادله آن خط  $y = a$  می‌باشد و برای بدست آوردن نقاط  $B, B'$  کافی است محل تقاطع آن را با سهمی بیابیم:

$$\left. \begin{matrix} x^2 = 4ay \\ y = a \end{matrix} \right\} \Rightarrow x^2 = 4a(a) \Rightarrow x^2 = 4a^2$$

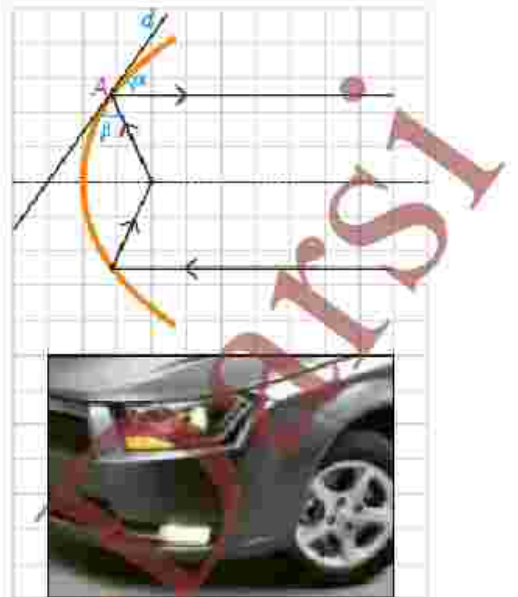
$$\Rightarrow x = \pm 2a \Rightarrow B(2a, a), B'(-2a, a)$$

$BB'$  را وتر کانونی سهمی می‌نامند و طول آن برابر  $4a$  است

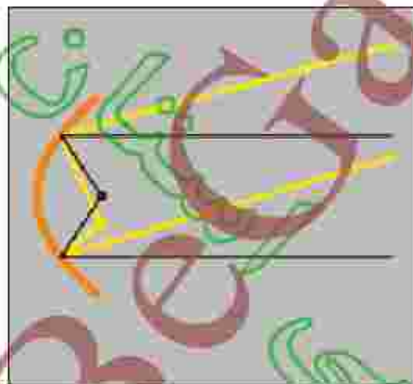
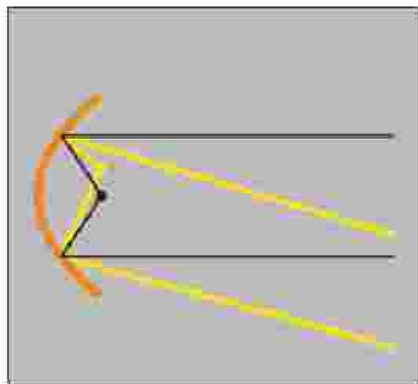


## ■ ویژگی بازتابندگی سهمی ها و کاربردهای آن

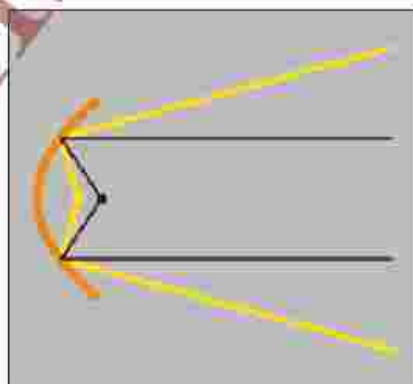
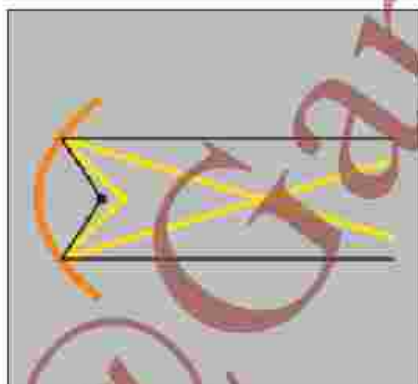
یکی از ویژگی های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی باز خواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. در واقع اگر خط  $d$  بر سهمی مماس و نقطه  $A$  نقطه تماس آن باشد زاویه های  $\alpha$  و  $\beta$  برابرند. از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به طور مثال چراغ جلوی اتومبیل ها را معمولاً به گونه ای می سازند که جداره پشت لامپ به حالت سهمی بتابد و جتس آینه ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می دهند. در این صورت حتی شعاع های نوری که به عقب تابیده می شوند پس از برخورد به جداره سهمی پشت لامپ به صورت شعاع هایی موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می یابند و روشنایی بیشتری به وجود می آورند.



با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین تر، شعاع های نور کماکان موازی باهم (نه موازی با محور) اما روبه بالا یا پایین خارج می شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می کنند.



اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب تر قرار گیرد شعاع های نور باهم موازی خارج نمی شوند.



۱- دو نقطه  $A$  و  $B$  روی یک بیضی  $F$  و  $F'$  کانون‌های بیضی اند.  $A$  به کانون  $F'$  نزدیک‌تر و  $B$  به کانون  $F$  نزدیک‌تر است. اگر  $BF' = AF'$  باشد، نشان دهید:

(الف) در حالی که دو پاره خط  $AF$  و  $BF'$  یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی اند.

(ب) در حالتی که  $AF$  و  $BF'$  یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند  $M$  قطع کنند، مثلث  $FMF'$  متساوی‌الساقین است و  $M$  روی قطر کوچک بیضی است.

۲- قطر دایره  $C$ ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی  $\epsilon$  است و از کانون  $F$  عمودی بر  $AA'$  رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند  $M$  قطع کند. ثابت کنید  $MF$  یا نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

۳- در شکل مقابل نقطه  $M$  روی بیضی و کانون‌های  $F$  و  $F'$  مشخص شده‌اند. خط  $d$  را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه  $M$  بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه  $F'$  خطی موازی با  $MF$  رسم کنید تا خط  $d$  را در نقطه‌ای مانند  $N$  قطع کند. ثابت کنید  $NF' = MF'$

۴- نقطه  $M$  روی بیضی به افطار  $6^\circ$  و  $1^\circ$  واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر  $4$  واحد است.

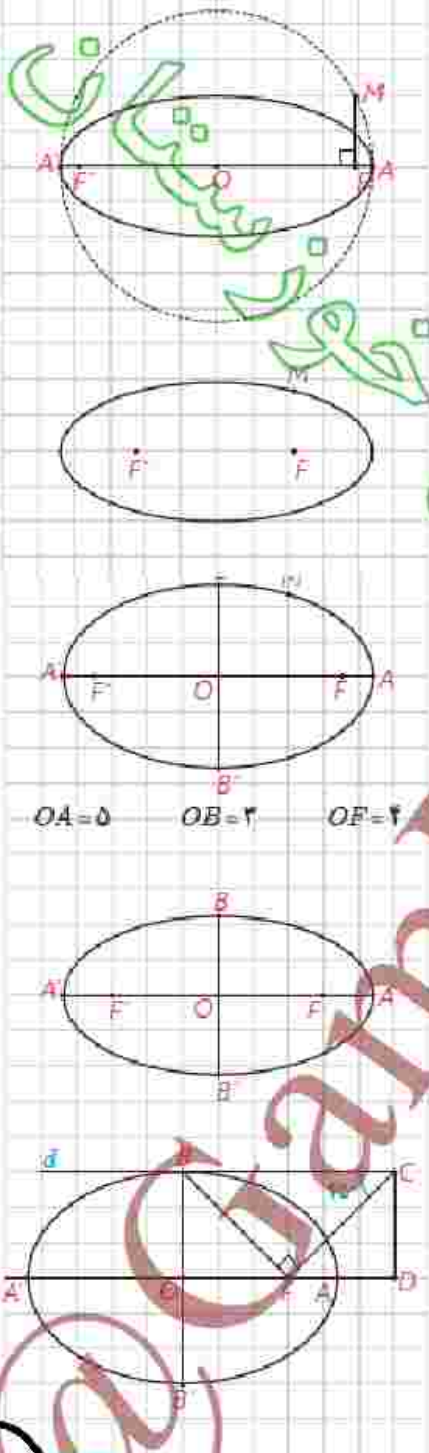
(الف) نشان دهید  $OM = OF = OF'$ .

(ب) نشان دهید مثلث  $MFF'$  قائم‌الزاویه است.

(ج) طول‌های  $MF$  و  $MF'$  را به دست آورید.

۵- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو پاره خط طول قطر کوچک است. اندازه زاویه  $FBF'$  چند درجه است؟

۶- در بیضی مقابل  $AA'$  و  $BB'$  دو فطر اند. خط  $d$  در نقطه  $B$  بر بیضی مماس است. پاره خط  $BF$  را رسم می‌کنیم و در نقطه  $F$  عمودی بر  $BF$  رسم می‌کنیم تا خط  $d$  را در نقطه  $C$  قطع کند و از  $C$  عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آنرا در نقطه‌ای مانند  $D$  قطع کند. اگر  $\angle BCF = 45^\circ$ ، مقدار  $\frac{AD}{AF}$  را به دست آورید.



پاسخ تمرین ۱:

الف: اگر  $AF, BF'$  یکدیگر را درون دایره قطع نکنند. چهار ضلعی  $AFBF'$  را در نظر می‌گیریم. نقاط  $A, B$  روی بیضی قرار دارند پس:

$$AF + AF' = BF + BF' = 2a \xrightarrow{BF=AF'} AF + BF' = BF + BF' \Rightarrow AF = BF'$$

به عبارت دیگر در چهار ضلعی  $AFBF'$  اضلاع مقابل دو به دو مساوی اند لذا چهار ضلعی  $AFBF'$  متوازی الاضلاع است پس:  $AF \parallel BF'$

ب: اگر  $AF, BF'$  یکدیگر را درون دایره قطع کنند

نقاط  $A, B$  روی بیضی قرار دارند پس:

$$AF + AF' = BF + BF' = 2a$$

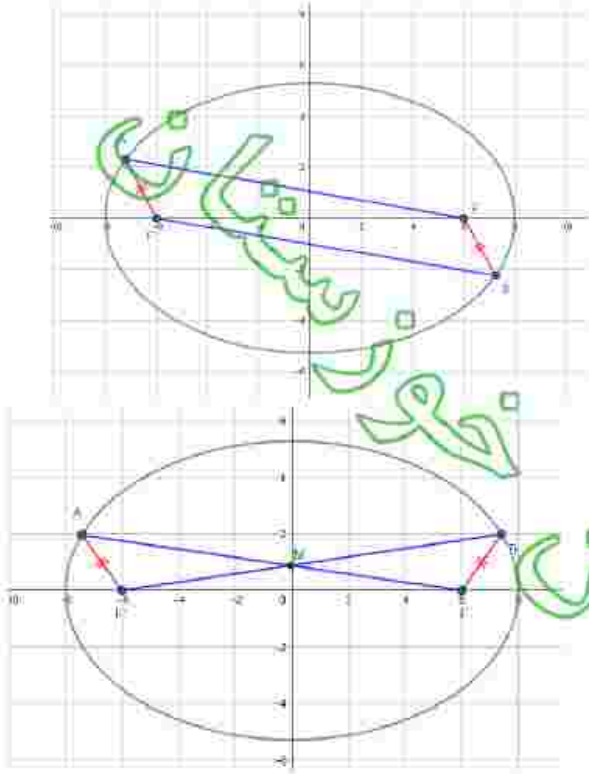
$$\xrightarrow{BF=AF'} AF + BF' = BF + BF' \Rightarrow AF = BF'$$

$$\left. \begin{array}{l} AF' = BF \\ AF = BF' \\ FF' = FF' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AFF' \cong \Delta BFF' \Rightarrow \angle A = \angle B$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B \\ \angle M_1 = \angle M_2 \\ AF' = BF \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AMF' \cong \Delta BMF \Rightarrow MF' = MF$$

از طرف دیگر قطر کوچک بیضی عمود منصف باره خط  $FF'$  می‌باشد.

لذا از رأس  $M$  در مثل متساوی الساقین  $FMF'$  می‌گذرد.



پاسخ تمرین ۲

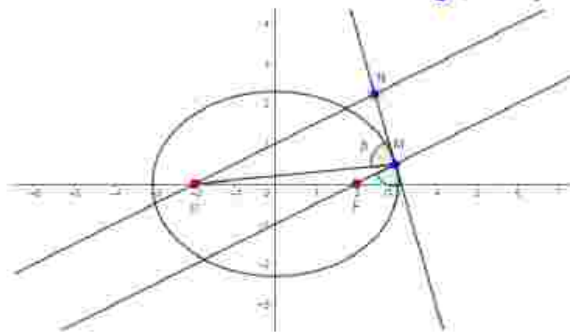
$$\Delta OFM: \angle F = 90^\circ \Rightarrow FM^2 = OM^2 - OF^2 \xrightarrow{FM=OM=OM'} FM^2 = a^2 - c^2 \xrightarrow{OM=OM'} FM^2 = b^2 \Rightarrow FM = b$$

پاسخ تمرین ۳

$$MN, FM \parallel F'N \Rightarrow \angle N_1 = \alpha$$

$$\angle N_1 = \beta \Rightarrow F'M = F'N$$

از طرف دیگر بنا به فعالیت ۴ می‌توان نوشت:  $\alpha = \beta$  پس:







۷- سهمی  $y^2 = 4x - 4$  مفروض است، مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

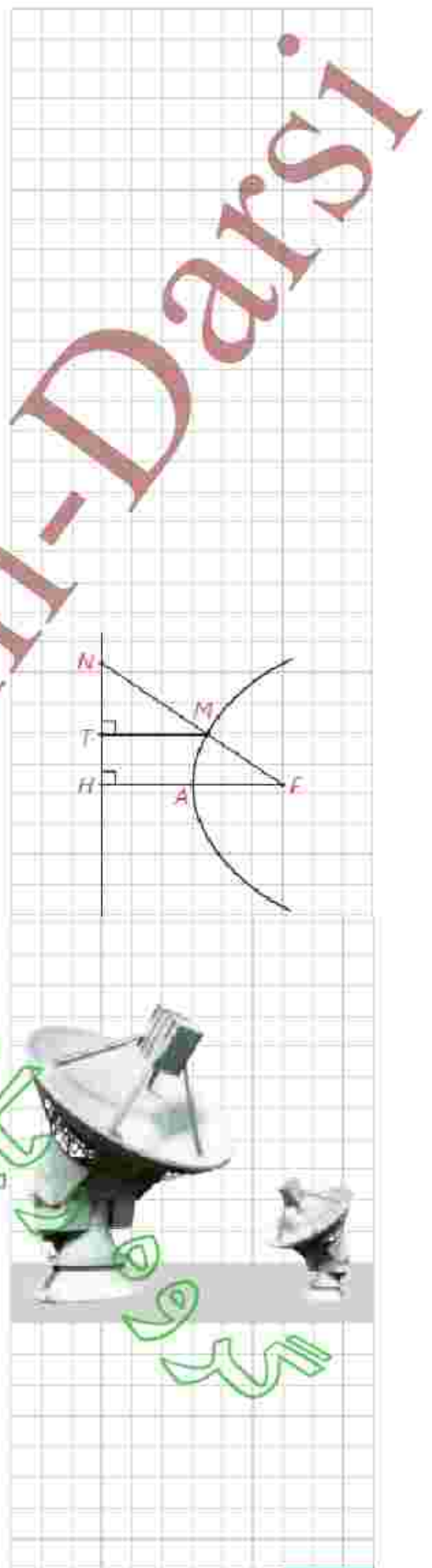
۸- مختصات رأس و کانون سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) را به دست آورید.

۹- معادله سهمی را بنویسید که  $K(1, 2)$  رأس و  $F(1, -2)$  کانون آن باشد.

۱۰- سهمی  $y^2 = 4x - 4$  مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع  $\frac{1}{2}$  واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۱- سهمی  $P$  با کانون  $F$  و خط هادی  $d$  مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از  $F$  بگذرد و بر خط  $d$  مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از  $F$  گذشته و بر  $d$  مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

۱۲- در شکل سهمی با رأس  $A$  و کانون  $F$  و خط هادی  $d$  رسم شده است. از  $F$  به نقطه دلخواه  $M$  روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا  $N$  را در  $d$  قطع کند و از نقطه  $M$  را بر  $d$  عمود کرده‌ایم. ثابت کنید:  $\frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH}$

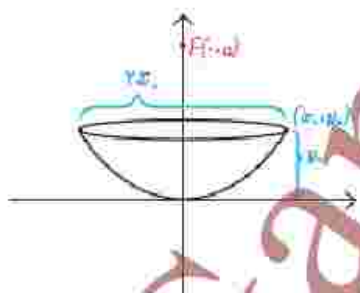


۱۳- یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را

در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه

گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر

۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.



۱۴- فرض کنید از مثلث  $ABC$ ، اندازه ضلع  $BC$  و ارتفاع  $AH$  و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.

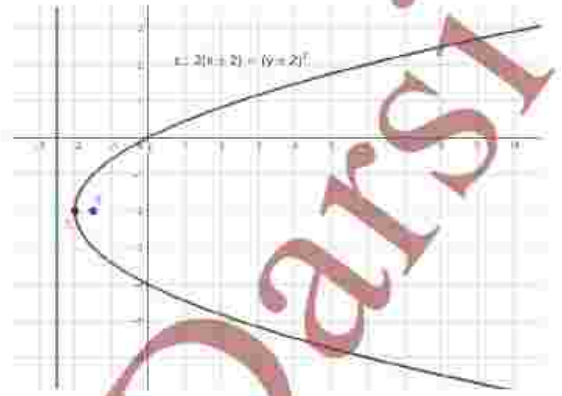
پاسخ تمرین ۷

$$y^2 = 2x - 4y \Rightarrow y^2 + 4y = 2x \Rightarrow$$

$$y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2)$$

$$S(-2, -2), 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow F(\alpha+a, \beta) \Rightarrow F\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$$

$$x = \alpha - a \Rightarrow x = -2 - \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$



پاسخ تمرین ۸

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y - c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) \Rightarrow y - c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \Rightarrow y - c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow y - c + \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 \Rightarrow 4p = a \Rightarrow p = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow S \begin{cases} \alpha = \frac{-b}{2a} \\ \beta = \frac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}, F \begin{cases} \alpha = \frac{-b}{2a} \\ \beta + p = \frac{4ac - b^2}{4a} + \frac{a}{4} \Rightarrow F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2 - a^2}{4a}\right) \end{cases}$$

$$y = \beta - p = \frac{4ac - b^2}{4a} - \frac{a}{4} = \frac{4ac - b^2 - a^2}{4a} \Rightarrow y = \frac{4ac - b^2 - a^2}{4a}$$

پاسخ تمرین ۹

$$S(1, 2) \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$$

چون  $S, F$  طولهای برابر دارند و نقطه  $S$  در صفحه مختصات بالاتر از  $F$  قرار دارد. سهمی قائم می باشد و نقر آن روبه پایین است لذا:

$$F(1, -2) \Rightarrow \alpha = 1, \beta - a = -2 \Rightarrow 2 - a = -2 \Rightarrow \boxed{a = +4 > 0}$$

$$(x - \alpha)^2 = -4a(y - \beta) \Rightarrow (x - 1)^2 = -16(y - 2)$$

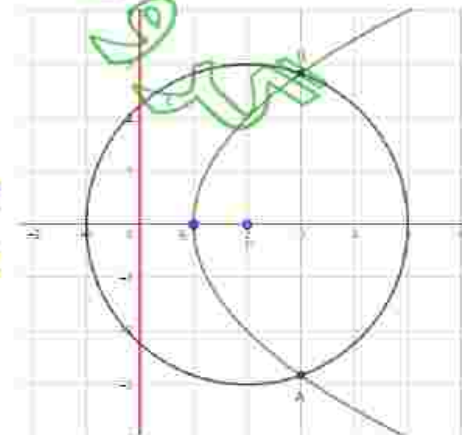
پاسخ تمرین ۱۰

$$y^2 = 4x - 4 \Rightarrow (y - 0)^2 = 4(x - 1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow F(\alpha+a, \beta) \Rightarrow F(2, 0)$$

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 2^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{y^2 = 4x - 4} (x - 2)^2 + 4x - 4 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x - 4 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y^2 = 4(2) - 4 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4} \\ x = -2 \Rightarrow y^2 = 4(-2) - 4 = -12 \quad \otimes \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(2, 2), B(2, -2)$$



**پاسخ تمرین ۱۱:** فرض کنیم  $A$  نقطه ی دلخواهی روی سهمی باشد. به مرکز  $A$  و شعاع  $AF$  دایره ای رسم می کنیم. بنا به تعریف سهمی هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی آن به یک فاصله است پس دایره رسم شده باید بر خط  $d$  مماس باشد.

بعکس فرض کنیم دایره  $C(A, r)$  از  $F$  می گذرد و بر  $d$  در نقطه  $H$  مماس است. بدیهی است که  $AF = AH = r$  پس نقطه  $A$  از کانون و خط هادی سهمی به یک فاصله است لذا  $A$  روی سهمی قرار دارد.

نتیجه: هر سهمی مکان هندسی مرکز دایره ای از صفحه است که از یک نقطه ثابت آن صفحه می گذرد و بر یک خط ثابت از آن صفحه مماس است.

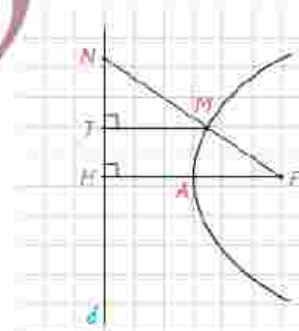
**پاسخ تمرین ۱۲:** دو نقطه روی سهمی اند پس فاصله آنها از کانون و خط هادی سهمی برابر است یعنی:

$$MT = MF, AH = AF \Rightarrow FH = 2AF$$

$$\Delta FNH: TM \parallel FH \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{TM}{FH} = \frac{NM}{NF} \xrightarrow{\substack{TM=MF \\ FH=2FA}} \frac{MF}{2FA} = \frac{NM}{NF} \Rightarrow \frac{NF}{2FA} = \frac{NM}{MF} \quad [1]$$

$$\Delta FNH: TM \parallel FH \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{TN}{TH} = \frac{NM}{MF} \quad [2]$$

$$[1], [2] \Rightarrow \frac{NF}{2FA} = \frac{TN}{TH} \xrightarrow{\times 2} \frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$



**پاسخ تمرین ۱۳:** با توجه به شکل، سهمی داده شده قائم است و رأس آن عمداً مختصات می باشد پس معادله آن به صورت مقابل است:  $x^2 = 4ay$

اگر  $(x_0, y_0)$  نقطه ای روی سهمی باشد به راحتی می توان فاصله کانونی را به شکل مقابل حساب نمود:  $x_0^2 = 4ay_0 \Rightarrow a = \frac{x_0^2}{4y_0}$

$$\frac{2x_0 \times 2x_0}{y_0} = \frac{4x_0^2}{y_0} = \frac{x_0^2}{\frac{y_0}{4}} = a$$

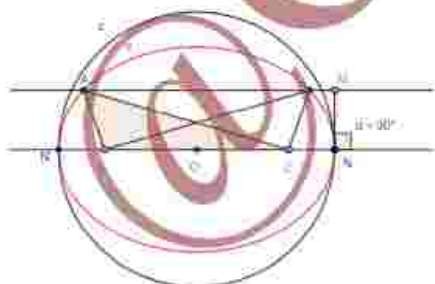
حال به روش ارائه شده برداریم: قطر دهانه دیش  $2x_0$  و عمق دیش  $y_0$  است پس طبق روش مساله داریم:  $a = \frac{x_0^2}{4y_0}$

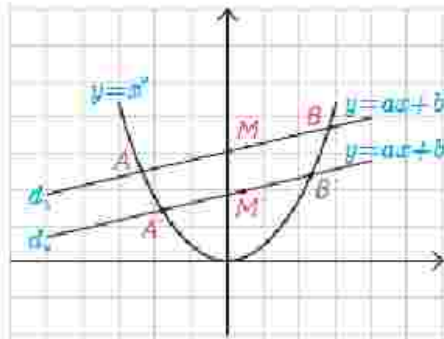
**پاسخ تمرین ۱۴:** فرض کنیم  $BC = a, AH = h_a$  و محیط مثلث  $ABC$  برابر  $2p$  باشد.

پاره خط  $BC = a$  را رسم نموده و وسط آن را  $O$  می نامیم. دایره ای به مرکز  $O$  و قطر  $2p - a$  رسم می کنیم و  $BC$  را امتداد می دهیم تا دایره را در نقاط  $N, N'$  قطع کند. سپس یک بیضی به کانونهای  $B, C$  که از  $N$  یا  $N'$  بگذرد بدیهی است که قطر بزرگ بیضی است و  $NN' = 2p - a$ .

اگر  $A$  نقطه ی دلخواهی از بیضی باشد:  $AB + AC = NN' \Rightarrow AB + AC = 2p - a \Rightarrow AB + AC + BC = 2p - a + a = 2p$

از نقطه  $N$  عمود  $MN = h_a$  را از  $NN'$  خارج نموده و از  $M$  خطی موازی  $NN'$  رسم می کنیم. محل تقاطع خط و بیضی را  $A$  می نامیم و مثلث  $ABC$  را رسم می کنیم مثلث  $ABC$  پاسخ مساله است.





۱۵- سهمی  $y = x^2$  و دو خط موازی  $d_1: y = ax + b$  و  $d_2: y = ax + b'$  را که با سهمی متقاطع اند، در نظر بگیرید.

الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط  $d_1$  و سهمی  $y = x^2$  باشد.

ب) فرض کنید  $A$  و  $B$  نقاط برخورد خط  $d_1$  و سهمی باشند و نقطه  $M$  وسط پاره خط  $AB$  باشد، مختصات نقطه  $M$  را بدست آورید.

ب) مراحل الف) و ب) را با جایگذاری خط  $d_2$  به جای  $d_1$  انجام دهید و مختصات نقطه  $M'$  (نقطه وسط پاره خط حاصل از نقاط تقاطع خط  $d_2$  و سهمی) بدست آورید.

ت) خط  $MM'$  نسبت به محور  $y$  ها چه وضعی دارد؟

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.



$$\left. \begin{matrix} y = x^{\gamma} \\ y = ax + b \end{matrix} \right\} \Rightarrow x^{\gamma} = ax + b \Rightarrow x^{\gamma} - ax - b = 0 \Rightarrow x_A = \alpha, x_B = \beta \Rightarrow A(\alpha, \alpha^{\gamma}), B(\beta, \beta^{\gamma})$$

$$\left. \begin{matrix} y = x^{\gamma} \\ y = ax + b' \end{matrix} \right\} \Rightarrow x^{\gamma} = ax + b' \Rightarrow x^{\gamma} - ax - b' = 0 \Rightarrow x_{A'} = \alpha', x_{B'} = \beta' \Rightarrow A'(\alpha', \alpha'^{\gamma}), B'(\beta', \beta'^{\gamma})$$

$$x^{\gamma} - ax - b = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = a, P = \alpha\beta = -b$$

$$M \begin{matrix} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{a}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\alpha^{\gamma} + \beta^{\gamma}}{2} = \frac{S^{\gamma} - \gamma P}{2} = \frac{a^{\gamma} + \gamma b}{2} \end{matrix} \Rightarrow M \left( \frac{a}{2}, \frac{a^{\gamma} + \gamma b}{2} \right)$$

$$x^{\gamma} - ax - b' = 0 \Rightarrow S = \alpha' + \beta' = a, P = \alpha'\beta' = -b'$$

$$M' \begin{matrix} \frac{x_{A'} + x_{B'}}{2} = \frac{\alpha' + \beta'}{2} = \frac{a}{2} \\ \frac{y_{A'} + y_{B'}}{2} = \frac{\alpha'^{\gamma} + \beta'^{\gamma}}{2} = \frac{S'^{\gamma} - \gamma P'}{2} = \frac{a^{\gamma} + \gamma b'}{2} \end{matrix} \Rightarrow M' \left( \frac{a}{2}, \frac{a^{\gamma} + \gamma b'}{2} \right)$$

ت: موازی اند، زیرا  $M, M'$  دارای طولهای مساوی اند و معادله خط  $MM'$  بصورت  $x = \frac{a}{2}$  است.

ت: ابتدا دو خط موازی  $d, d'$  را چنان رسم می کنیم که سهمی را در نقاط  $A, B, A', B'$  قطع کند. سپس وسطهای تاره خطهای  $AB, A'B'$  را به ترتیب  $M, M'$  می نامیم.

از راس سهمی خط  $L$  را موازی خط  $MM'$  رسم می کنیم. خط  $L$  با سخ مساله است.

## بردارها



▀ بنا به گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی غیر هم‌راستا با خط فرود می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند بردارهای نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار گیرد. به این نوع نشست هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند.

معرفی فضای  $\mathbb{R}^2$ 

با صفحه و دستگاه مختصات دو بعدی آشنایی داریم و می‌دانیم هر نقطه این صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند  $(a, b)$  که  $a, b \in \mathbb{R}$  مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه را مشخص می‌کند. با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به صورت زوج مرتب  $(x, y)$  نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه  $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  شامل همه نقاط صفحه می‌باشند و آن را با  $\mathbb{R}^2$  نمایش می‌دهند، یعنی

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

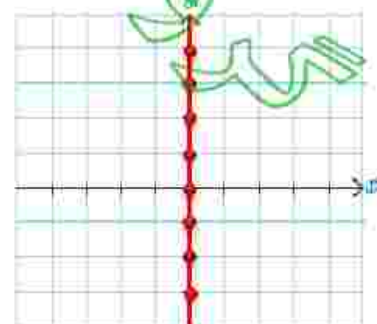
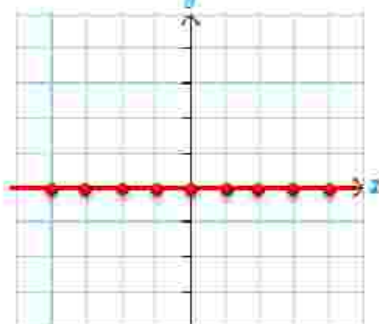
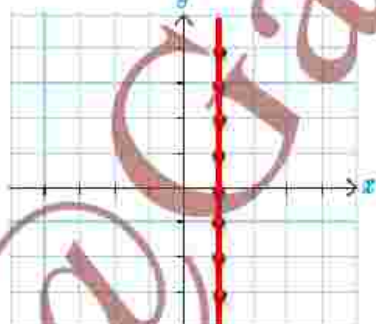
همچنین با معادله خط در صفحه آشنایی دارید و می‌دانید که حالت کلی آن به صورت  $ax + by = c$  است که در آن  $a, b, c \in \mathbb{R}$  و  $a$  و  $b$  هم‌زمان صفر نیستند.

به طور کلی هر وقت گفته می‌شود رابطه یا معادله‌ای نمودار  $G$  را مشخص می‌کند یعنی مختصات هر نقطه از نمودار  $G$  در آن رابطه یا معادله صدق می‌کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در رابطه یا معادله مذکور صدق کند روی نمودار  $G$  قرار دارد.

با توجه به آنچه گفته شد می‌خواهیم در  $\mathbb{R}^2$  یا همان صفحه، با دانستن برخی روابط شکل‌های متناظر با آنها را و یا برعکس با دانستن برخی شکل‌ها، روابط مرتبط با آنها را مشخص نمایم.

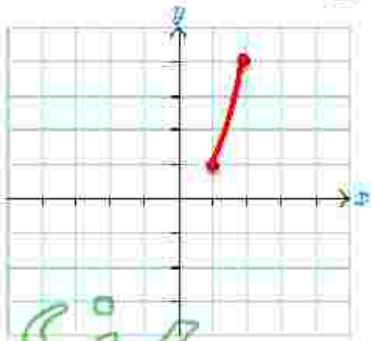
## کاردرگلاس

۱- برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می‌کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.

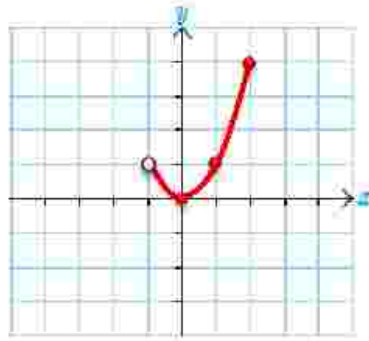
الف)  $x = 0$ ب)  $y = 0$ پ)  $x = 1$ 



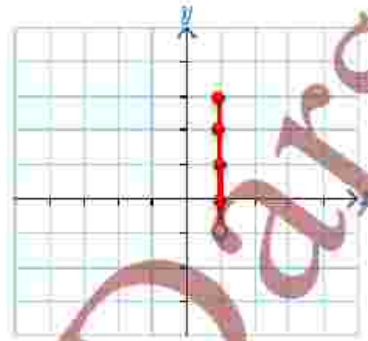
ج)  $y = x^2, 1 \leq x \leq 2$



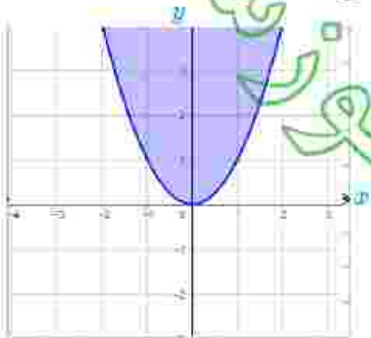
ن)  $y = x^2, -1 < x \leq 2$



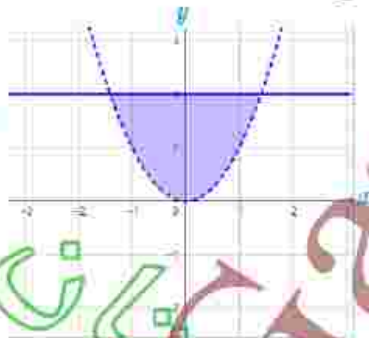
ن)  $x = 1, -1 \leq y < 2$



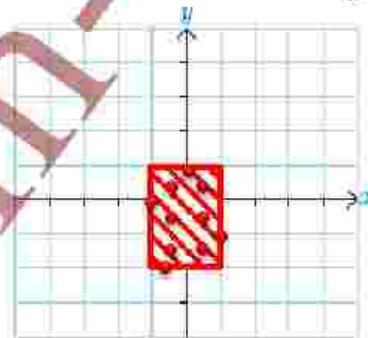
خ)  $y \geq x^2$



ج)  $x^2 < y \leq 2$



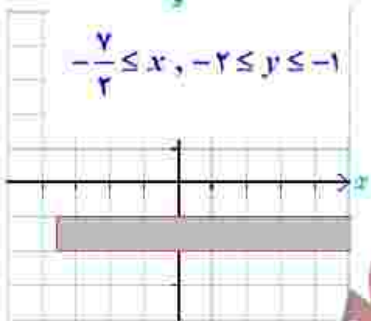
ج)  $-1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 1$



(الف)

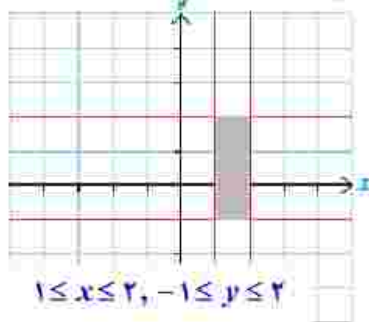
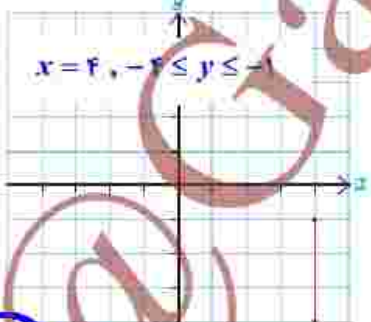
۲- در هر یک از شکل های روبه رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی های دیگری که از شکل دریافت می کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.

(ب)



$y = 2; -2 \leq x \leq 4$

(ب)



۱- صرفاً ناحیه هایی مدنظر است که مرزهای آنها خطوط موازی محورهای مختصات باشند.

حال به سراغ فضای  $\mathbb{R}^3$  می‌رویم. ابتدا با مختصات یک تناظر بین مجموعه نقاط فضای  $\mathbb{R}^3$  و مجموعه تمام سه‌تایی‌های  $(a, b, c)$  که در آن  $a, b, c \in \mathbb{R}$  برقرار می‌نماییم و سپس ارتباط بین برخی معادلات (یا روابط) و شکل‌های مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. باید توجه داشته باشیم از آنجا که ما دستگاه مختصات سه‌بعدی را در صفحه که خود دو بعدی است رسم می‌کنیم لذا در این حالت برای تصویر بستن شکل‌ها باید از قدرت تجسم خود کمک بگیریم.

### معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

مشابه  $\mathbb{R}^2$  می‌توان مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب  $(x, y, z)$  که در آنها  $x, y, z$  اعداد حقیقی‌اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای  $\mathbb{R}^3$  می‌گویند.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

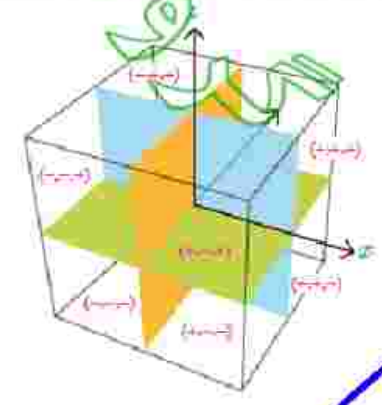
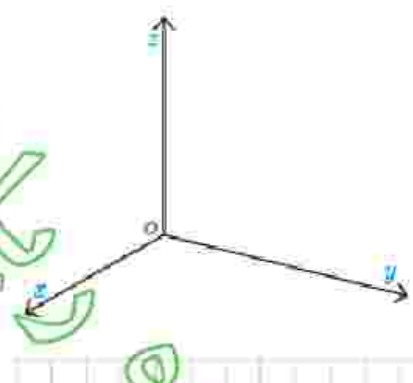
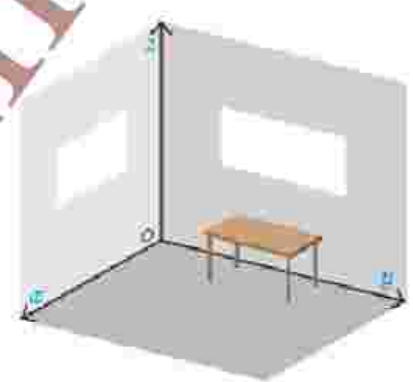
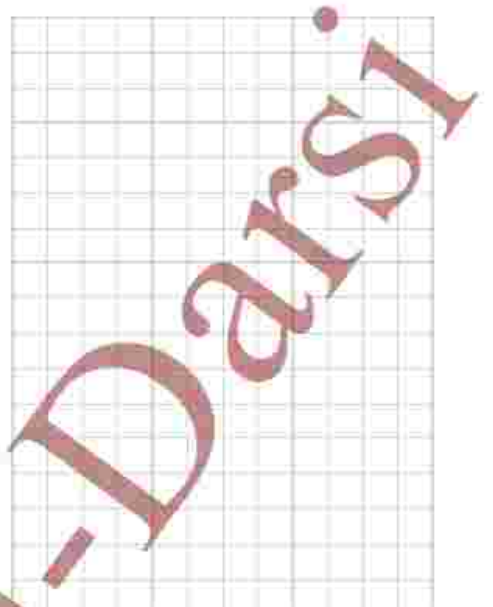
به یاد می‌آوریم که برای نمایش نقاط  $\mathbb{R}^2$  از یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود برهم  $x$  و  $y$  استفاده می‌شود. به طور مشابه می‌توان فضای  $\mathbb{R}^3$  را نیز با استفاده از یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دو به دو عمود برهم که در نقطه‌ای مانند  $O$  متقاطع‌اند نمایش داد. این محل تقاطع، مبدأ مختصات دستگاه می‌باشد و فاصله در امتداد هر سه محور با یک واحد طول سنجیده می‌شود. وضعیت سه محور دو به دو عمود برهم تشبیه به فصل مشترک دو دیوار و کف یک اتاق می‌باشد که در شکل دیده می‌شود و در واقع تشکیل یک کج می‌دهند.

محوره‌های  $Ox$ ،  $Oy$  و  $Oz$  به ترتیب محور  $x$ ‌ها، محور  $y$ ‌ها و محور  $z$ ‌ها نامیده می‌شوند. محوره‌های فوق تشکیل دهنده سه صفحه می‌باشند. صفحات مختصات عبارت‌اند از صفحه  $xy$  (کف اتاق) شامل محور  $x$ ‌ها و  $y$ ‌ها، صفحه  $yz$  (دیوار سمت راست) شامل محور  $y$ ‌ها و  $z$ ‌ها، صفحه  $xz$  (دیوار سمت چپ) شامل محور  $x$ ‌ها و  $z$ ‌ها هستند. جهت مثبت هر یک از محورها با پیکان مشخص شده است. اگر محورها را از مبدأ مختصات (نقطه  $O$ ) در خلاف جهت ادامه دهیم تا مقادیر منفی برای محورها ظاهر شوند آنگاه این دستگاه  $\mathbb{R}^3$  به هشت ناحیه که چهار ناحیه آن بالای صفحه  $xy$  و چهار ناحیه دیگر زیر صفحه  $xy$  هستند تقسیم می‌شود. چهار ناحیه بالای صفحه  $xy$  مطابق با شماره‌گذاری استاندارد یک دستگاه  $\mathbb{R}^3$  شماره‌گذاری می‌شوند.

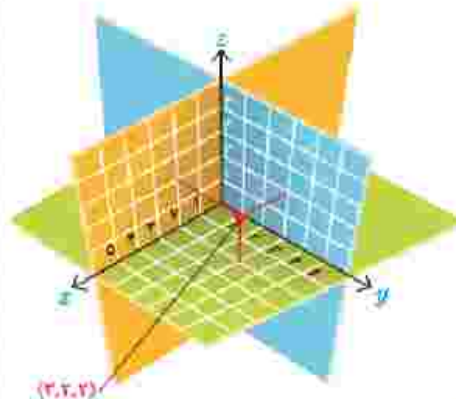
مثلاً ناحیه‌ای که در آن مقادیر روی هر سه محور مثبت هستند ناحیه شماره ۱ می‌باشد. به طریق مشابه چهار ناحیه پایین صفحه  $xy$  از ۵ تا ۸ شماره‌گذاری می‌شوند. شماره هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل‌ها و جدول روبه‌رو مشخص شده‌اند.

شماره ناحیه	علامت محورها		
	$x$	$y$	$z$
۱	+	+	+
۲	-	+	+
۳	-	-	+
۴	+	-	+
۵	+	+	-
۶	-	+	-
۷	-	-	-
۸	+	-	-

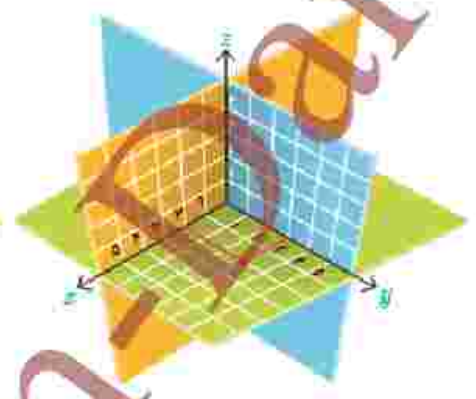
۱- از برخورد سه صفحه دو به دو متقاطع، یک کج تشکیل می‌شود.



برای نمایش سه‌تایی مرتب  $(x, y, z)$  در دستگاه مختصات  $\mathbb{R}^3$  کافی است ابتدا همانند شکل ۱ نقطه  $(x, y)$  را در صفحه  $xy$  بیابیم و سپس ارتفاع آن را به اندازه  $z$  در راستای موازی با محور  $z$ ‌ها (یعنی به‌طور عمودی) تغییر دهیم تا شکل شماره ۲ حاصل شود.

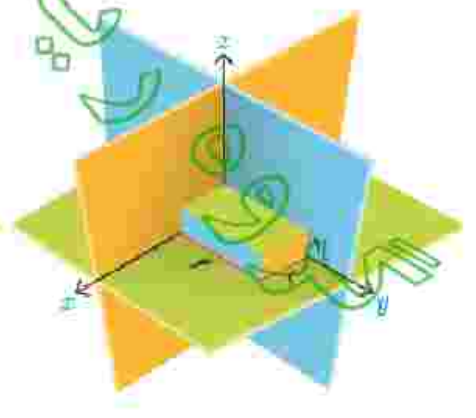
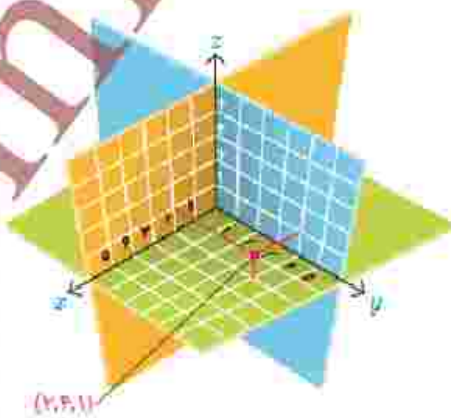


شکل شماره ۲

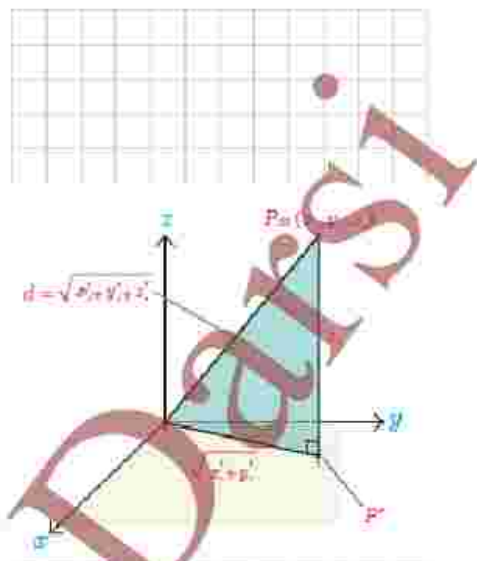


شکل شماره ۱

در واقع، می‌توان سه نقطه به طول‌های  $x, y, z$  به ترتیب بر روی محورهای  $x, y, z$  در نظر گرفت و سپس صفحه‌گذرنده از  $x$  و موازی با صفحه  $yz$ ، صفحه‌گذرنده از  $y$  و موازی با صفحه  $xz$  و صفحه‌گذرنده از  $z$  و موازی با صفحه  $xy$  را در نظر بگیریم. محل تقاطع این سه صفحه یک نقطه به طول  $x$ ، عرض  $y$  و ارتفاع  $z$  است که نمایش‌دهنده سه‌تایی مرتب  $(x, y, z)$  می‌باشد. مثلاً نقطه  $P$  در شکل زیر متناظر با سه‌تایی مرتب  $(2, 4, 1)$  است.



همچنین نقطه  $O$  که مبدأ مختصات است متناظر سه نایب مرتب  $(0, 0, 0)$  می باشد.  
 دو نقطه  $P = (x, y, z)$  و  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  را برهم منطبق گوئیم و می نویسیم  $P = Q$   
 هرگاه مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی  $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ .



برای یافتن فاصله یک نقطه از  $\mathbb{R}^3$  مانند  $P = (x, y, z)$  از مبدأ مختصات کافی است از نقطه  $P$  عمودی بر صفحه  $xy$  رسم کرده و پای عمود را  $P'$  بنامیم. در این صورت با توجه به شکل مقابل از قضیه فیثاغورس طول یاره خط  $OP'$  به صورت زیر محاسبه می شود.

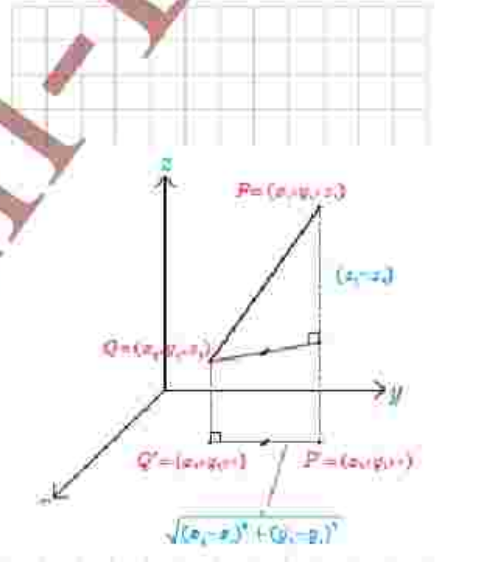
$$|OP'| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

اکنون در مثل قائم الزویه  $OPP'$  از قضیه فیثاغورس برای محاسبه طول وتر  $OP$  استفاده می کنیم. پس داریم:

$$|OP| = \sqrt{|OP'|^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

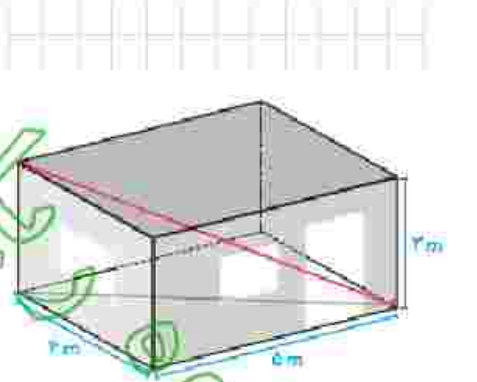
رابطه فوق را می توان با توجه به شکل برای فاصله دو نقطه دلخواه از  $\mathbb{R}^3$  مانند  $P = (x, y, z)$  و  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  به صورت زیر تعمیم داد.

$$|PQ| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$



**مثال:** در این شکل اتاقی به طول ۵ متر و عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر مشاهده می شود. طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه مقابلش چقدر است؟

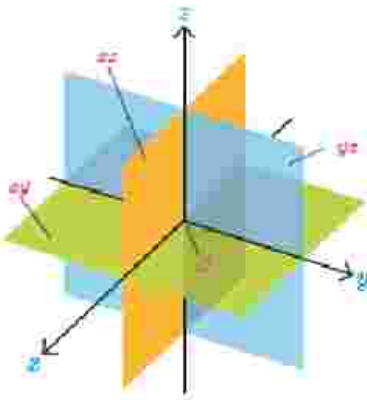
$$\text{قطر اتاق} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \quad \text{قطر مستطیل کف اتاق} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$



حال که با دستگاه مختصات سه بعدی آشنا شدیم با داشتن برخی معادلات یا روابط به بررسی نمودارهای مربوط به آنها و یا برعکس، با داشتن برخی نمودارها به بررسی رابطه یا معادله مربوط به آنها می پردازیم.

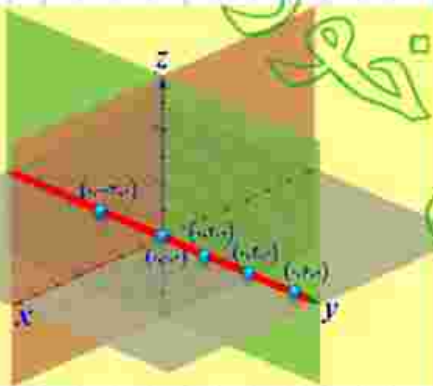
**مثال:** فرض کنید معادله  $x = 0$  داده شده باشد و ما بخواهیم شکل یا نمودار مربوط به آن را مشخص کنیم. با توجه به آنچه گفته شد باید تمام نقاطی را مشخص کنیم که در این معادله صدق می کنند و این یعنی تمام نقاطی که مؤلفه اول آنها یعنی  $x$  برابر صفر باشند. همواره با داشتن چنین معادلاتی باید دقت کنید که فضای مورد نظر در مسئله  $\mathbb{R}^3$  است یا  $\mathbb{R}^2$ .





قبلاً در کار کلاس دیدیم که شکل مربوط به این معادله در  $\mathbb{R}^3$  محور  $yz$  هاست. حال می‌خواهیم تمام نقاطی از  $\mathbb{R}^3$  را مشخص نماییم که مؤلفه اول آنها برابر صفر است، یعنی تمام سه تایی‌هایی به صورت  $(0, y, z)$  به طوری که  $y, z \in \mathbb{R}$ . همان‌گونه که دیده می‌شود مقدار  $y$  و  $z$  هر چه باشد در صورتی که مؤلفه اول صفر باشد آن نقطه در معادله مذکور صدق می‌کند و به عبارتی برای یافتن نقاطی که در معادله  $x=0$  صدق می‌کنند در انتخاب مقادیر  $y$  و  $z$  آزاد هستیم. مثلاً نقاط  $(0, -2, -1)$ ،  $(0, 0, 0)$ ،  $(0, 1, 2)$  و  $(0, -1, 5)$  همگی در معادله صدق می‌کنند. تمام این نقاط در معادله  $x=0$  صدق می‌کنند و این همان صفحه  $yz$  است.

تغییر مکان



تغییر مکان

### فعالیت ۱

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله  $x=0$  در  $\mathbb{R}^3$  تمام نقاط صفحه  $yz$  است (به عبارتی  $x=0$  معادله صفحه  $yz$  است) و دیدیم که نقاط مختلفی با  $y$  و  $z$  های دلخواه (مؤلفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه  $yz$  به دنبال نقاطی باشیم که مؤلفه سوم آنها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر  $x=0$  شرط  $z=0$  را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه  $yz$  سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای آنها  $z=0$  باشد.)

۱- مختصات چند نقطه را که در رابطه  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  صدق کنند را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

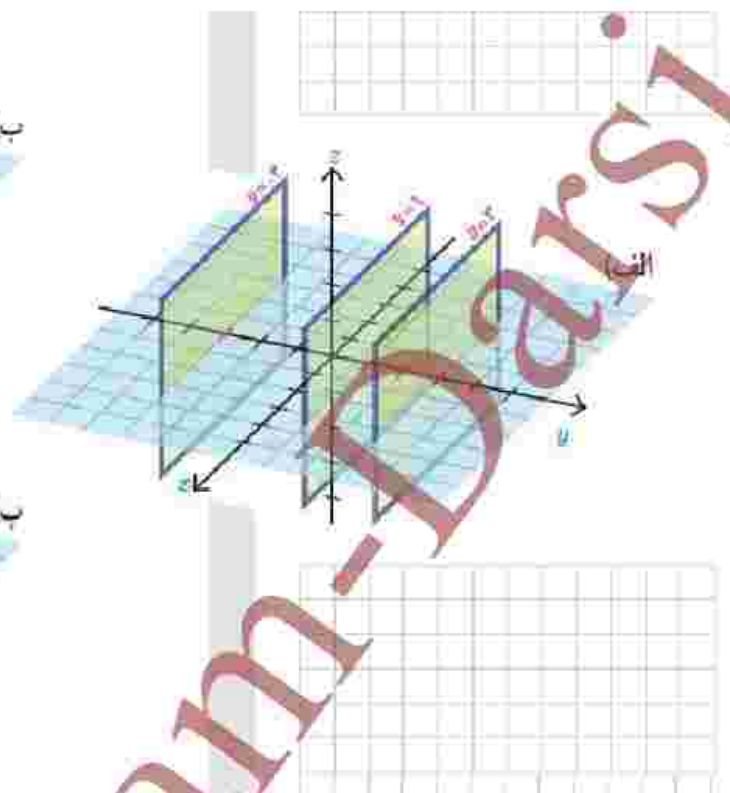
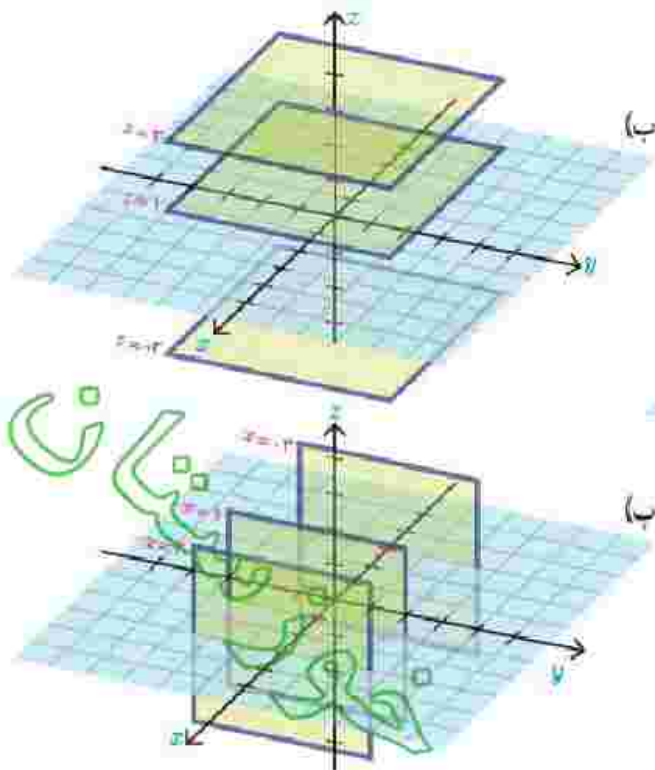
۲- نمودار مربوط به معادلات  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله  $x=0$  دارد؟ نمودار  $x=0$  خط راستی است که بر محور  $yz$  منطبق است. اما نمودار  $x=0$  صفحه  $yz$  است.

می‌دانیم محور  $yz$  در صفحه  $yz$  است. پس نمودار  $x=0$  در صفحه  $x=0$  قرار دارد.

**مثال:** روی صفحه  $z=1$  نقاط  $A=(1, 2, 1)$  و  $B=(2, 2, 1)$  و  $C=(3, 2, 1)$  را در نظر می‌گیریم، مؤلفه دوم هر سه نقطه برابر ۲ است. اگر روی صفحه مزبور  $(z=1)$  تمام نقاطی که مؤلفه دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم یک خط تشکیل می‌دهند (نمودار آن یک خط است به معادلات  $\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ )

### کاردرکلاس

۱- در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.



۲- وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات  $x=1, x=3, x=4, y=1, y=4, z=2$  و  $z=-2$  هستند<sup>۱</sup>.

الف) در هر یک از نسیب وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار دارند.

ب) معادلات مربوط به هر یک از مال‌های این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که مال‌ها پاره خط اند و نه خط)

ت) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

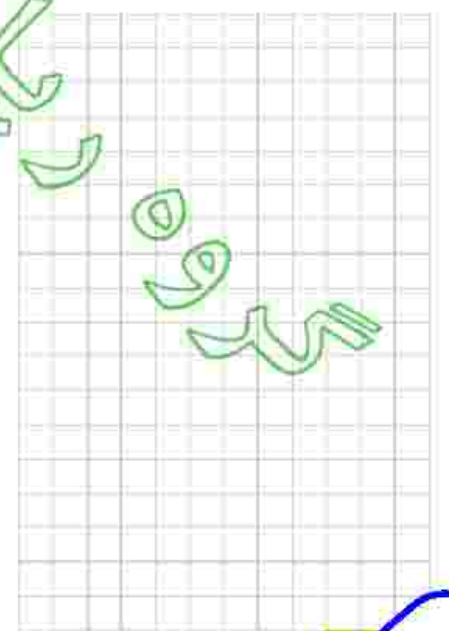
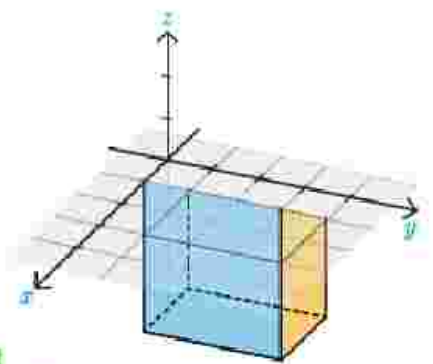
ث) روابط مشخص‌کننده یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص‌کننده پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید.

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه‌ای را بیابید که روی یکی از وجه‌های آن واقع در مال‌ها باشد.

ج) شرط اینکه نقطه‌ای درون این مکعب یا روی یکی از وجه‌های آن باشد چیست؟

ج) روابطی را بنویسید که مشخص‌کننده حجم محدود شده به درون و روی سطح مکعب داده شده باشند.

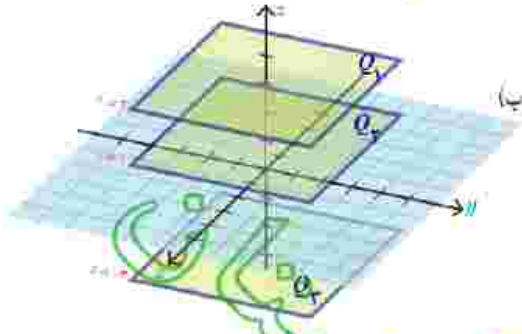
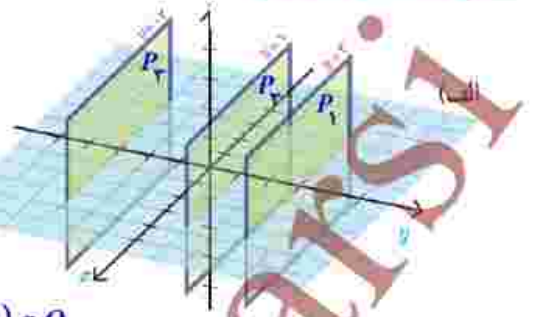


۱- مطرح چنین سؤال‌هایی تنها برای سطوحی که هر مرز آن موازی با یکی از محورهای مختصات است و حجم‌هایی که هر وجه آنها موازی با یکی از صفحات دستگاه مختصات است، مجاز می‌باشند.

$$P_1: y=3 \Rightarrow (1, 3, 2) \in P_1, (1, 3, -2) \in P_1$$

$$P_2: y=1 \Rightarrow (4, 1, -2) \in P_2, (5, 1, -2) \in P_2$$

$$P_3: y=-2 \Rightarrow (1, -2, 0) \in P_3, (4, -2, 2) \in P_3$$



$$Q_1: z=3 \Rightarrow (1, -1, 3) \in Q_1, (3, 3, 3) \in Q_1$$

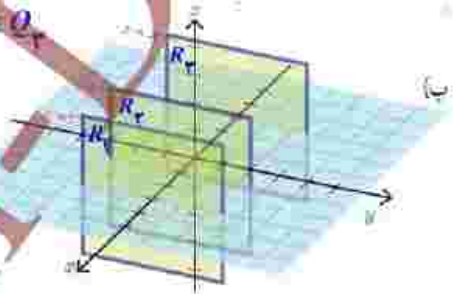
$$Q_2: z=1 \Rightarrow (4, 0, 1) \in Q_2, (5, -2, 1) \in Q_2$$

$$Q_3: z=-2 \Rightarrow (2, 3, -2) \in Q_3, (1, 2, -2) \in Q_3$$

$$R_1: x=3 \Rightarrow (3, -1, 2) \in R_1, (3, 3, 2) \in R_1$$

$$R_2: x=1 \Rightarrow (1, 0, 4) \in R_2, (1, -2, 1) \in R_2$$

$$R_3: x=-2 \Rightarrow (-2, 0, 2) \in R_3, (-2, 2, 4) \in R_3$$

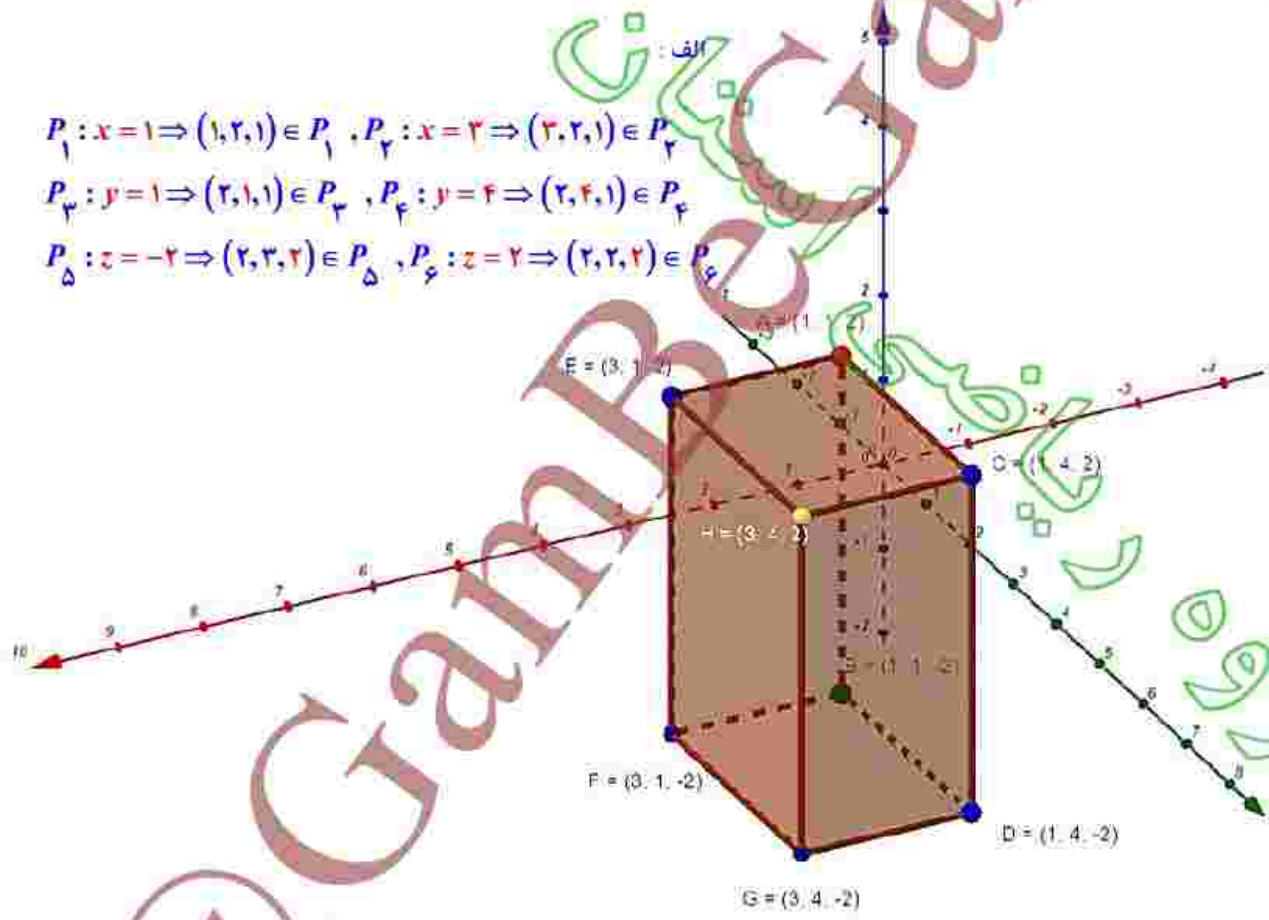


الف:

$$P_1: x=1 \Rightarrow (1, 2, 1) \in P_1, P_2: x=2 \Rightarrow (2, 2, 1) \in P_2$$

$$P_3: y=1 \Rightarrow (2, 1, 1) \in P_3, P_4: y=4 \Rightarrow (2, 4, 1) \in P_4$$

$$P_5: z=-2 \Rightarrow (2, 3, 2) \in P_5, P_6: z=2 \Rightarrow (2, 2, 2) \in P_6$$



$$P_1: x=1, P_2: y=1 \Rightarrow (1, 2, 1)$$

$$P_1: x=1, P_4: y=4 \Rightarrow (1, 4, -1)$$

$$P_2: x=2, P_5: z=-2 \Rightarrow (2, 3, 2)$$

$$\begin{aligned}
 &AB: x=y=1; z \in [-2, 2] \quad CD: x=1, y=4; z \in [-2, 2] \quad , \quad EF: x=3, y=1; z \in [-2, 2] \quad , \quad GH: x=3, y=4; z \in [-2, 2] \\
 &AC: x=1, z=2; y \in [1, 4] \quad , \quad BD: x=1, z=-2; y \in [1, 4] \quad , \quad FG: x=3, z=-2; y \in [1, 4] \quad , \quad EH: x=3, z=2; y \in [1, 4] \\
 &AE: y=1, z=2; x \in [1, 3] \quad , \quad BF: y=1, z=-2; x \in [1, 3] \quad , \quad DG: y=4, z=-2; x \in [1, 3] \quad , \quad CH: y=4, z=2; x \in [1, 3]
 \end{aligned}$$

$$A(1, 1, 2) \quad B(1, 1, -2) \quad C(1, 4, 2) \quad , \quad D(1, 4, -2) \\
 E(3, 1, 2) \quad F(3, 1, -2) \quad G(3, 4, 2) \quad , \quad H(3, 4, -2)$$

$$P_1: x=1; y \in [1, 4], z \in [-2, 2]$$

$$P_7: x=3; y \in [1, 4], z \in [-2, 2]$$

$$P_3: y=1; x \in [1, 3], z \in [-2, 2]$$

$$P_4: y=4; x \in [1, 3], z \in [-2, 2]$$

$$P_5: z=2; x \in [1, 3], y \in [1, 4]$$

$$P_6: z=-2; x \in [1, 3], y \in [1, 4]$$

ج: نقطه  $M(2, 2, 0)$  درون مکعب و نقطه  $N(1, 2, 0)$  روی وجه  $P_1$  قرار دارد.

ح: شرط آنکه نقطه  $M$  درون مکعب باشد این است که در هر سه شرط  $-2 < z_M < 2$ ,  $1 < y_M < 4$ ,  $1 < x_M < 3$  صدق کند.

و شرط آنکه نقطه  $M$  روی مکعب باشد این است که در یکی از شرایط فوق صدق کند.



## بردارها در $\mathbb{R}^2$

در سال‌های گذشته با بردارها در صفحه آشنا شدید. هر پاره خط جهت‌دار مانند  $AB$  در شکل مقابل، یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن  $A$  و انتهای آن  $B$  می‌باشد. این بردار را با  $\vec{AB}$  و اندازه آن را با  $|\vec{AB}|$  نشان می‌دهند. اغلب جهت سهولت، بردارها را با حروف کوچک لاتین مانند  $\vec{a}$  و اندازه طول آن را با  $|\vec{a}|$  نمایش می‌دهند. در شکل زیر چند بردار مختلف رسم شده‌اند. در این کتاب از هر دو شیوه نگارش، بسته به زمینه مورد بحث استفاده می‌گردد.

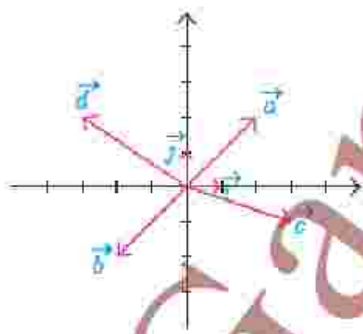


دو بردار را مساوی یا همسنگ گوئیم هرگاه اندازه و جهت آنها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. در شکل مقابل بردارها با هم مساوی هستند. همواره می‌توان هر بردار را با برداری مساوی آن، که از مبدأ مختصات شروع می‌شود یکی دانست، چرا که جهت و اندازه آنها برابر است.

واضح است که می‌توان بی‌شمار بردار دیگر که مساوی هستند را در صفحه در نظر گرفت. به این بردارهای برابر، در اصطلاح، بردارهای هم‌ارز گفته می‌شود. برای سهولت معمولاً برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات باشد و با عدد آن نماینده بردارهای همسنگ در نظر می‌گیرند. مثلاً در شکل قبل بردار قرمز رنگ نماینده همه بردارهای همسنگ  $\vec{a}$  می‌باشد. به همین جهت معمولاً ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر می‌گیرند.

با توجه به اینکه ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر گرفته‌ایم، مؤلفه‌های یک بردار با مختصات نقطه انتهایی آن برابر می‌شود. بنابراین هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس. از این‌رو هر بردار مانند  $\vec{a}$  را با زوج مرتبی که انتهای بردار را مشخص می‌کند نمایش می‌دهند. یعنی  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  که  $(a_1, a_2)$  مختصات انتهایی بردار  $\vec{a}$  می‌باشد.

**مثال:** بردارهای  $\vec{a} = (2, 2)$ ،  $\vec{b} = (-2, -2)$  و  $\vec{c} = (2, -1)$ ،  $\vec{d} = (-3, 2)$ ،  $\vec{e} = (1, -1)$  و  $\vec{f} = (0, 1)$  در دستگاه مختصات زیر رسم شده‌اند.



از سال‌های قبل به یاد می‌آوریم که جمع دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  از روش متوازی‌الاضلاع به صورت زیر به دست می‌آید و به آن برابری دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  می‌گویند.

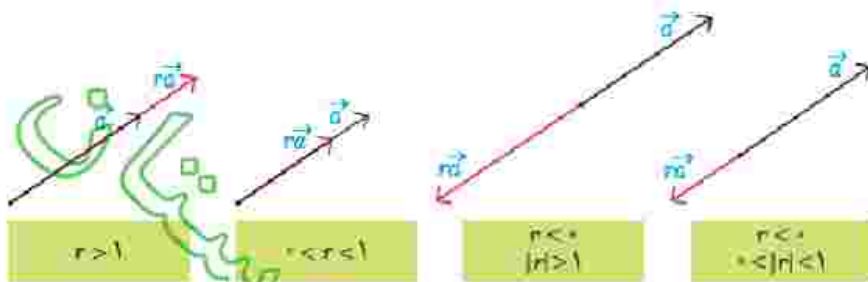
و نیز اگر داشته باشیم  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  می‌توان نوشت:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

همچنین اگر  $r \in \mathbb{R}$  و  $\vec{a}$  یک بردار باشد، آنگاه بردار  $r\vec{a}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2)$$

می‌توان نشان داد دو بردار  $\vec{a}$  و  $r\vec{a}$  همواره با هم موازی اند و برعکس اگر دو بردار مانند  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  موازی باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است. در شکل‌های زیر وضعیت دو بردار  $\vec{a}$  و  $r\vec{a}$  در حالت‌های مختلف نشان داده شده‌اند.



به‌طور خاص وقتی  $r = -1$  بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  حاصل می‌شود که آن را قرینه بردار  $\vec{a}$  می‌نامند. با توجه به تعریف قرینه یک بردار می‌توان برای تفاضل دو بردار نوشت:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

به نظر شما تعریف هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

معمولاً مبدأ مختصات را به عنوان بردار صفر در نظر می‌گیرند و با  $\vec{O} = (0, 0)$  نمایش می‌دهند.

با توجه به اینکه ابتدای هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  را می‌توان مبدأ مختصات در نظر گرفت، با استفاده از رابطه فاصله دو نقطه از صفحه، اندازه (طول) بردار  $\vec{a}$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

بردارها، کاربردهای فراوانی در محاسبات مهندسی و نیز مدل‌سازی‌ها دارند. به‌طور نمونه، بنا به گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی آریب (غیر هم راستا) یا خط فرود (مسیر یاندر فرود) می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار



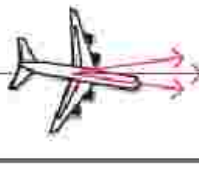
گیرد (به شکل زیر رجوع کنید). به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرنجگی می گویند. بردارها برای مدل سازی وضعیت فرود هواپیما در چنین شرایطی بسیار مناسب می باشند. اکنون به مثال بعد در این رابطه دقت کنید.



هواپیما در حال نزدیک شدن به باند فرود



اولین برخورد هواپیما با باند فرود



هواپیما بر روی باند فرود و در حال کاهش سرعت



توقف کامل

**مثال:** فرض کنید مسیر فرود (خط فرود) در جهت بردار  $\vec{T}$  و حداکثر نیروی قابل کنترل در لحظه فرود با اندازه این بردار برابر باشد. همچنین باد نیرویی در جهت بردار  $\vec{w}$  به هواپیما وارد می کند. در هر یک از دو وضعیت زیر خلبان، هواپیما را در هنگام فرود در جهت کدام بردارهای داده شده می تواند قرار دهد، به طوری که یک فرود این داشته باشد یعنی برآیند نیروی محرکه  $\vec{T}$  و نیروی باد  $\vec{w}$  در جهت  $\vec{T}$  باشد.



الف



الف-۱



الف-۲



الف-۳



ب



ب-۱

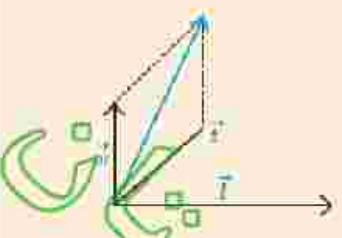
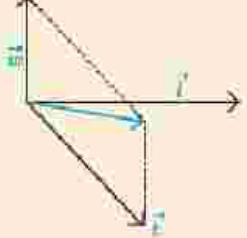
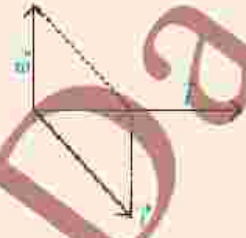


ب-۲



ب-۳

**پاسخ:** در مورد وضعیت الف برآیند بردارهای  $\vec{w}$  (نیروی باد) و  $\vec{v}$  (نیروی محرکه هواپیما) به صورت زیر است.

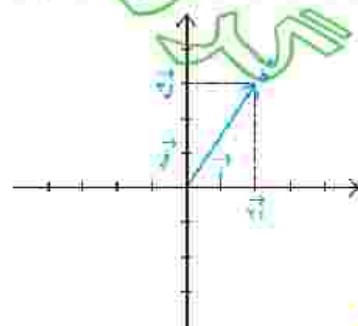
الف-۱	الف-۲	الف-۳
		
بردار برآیند در جهت $\vec{v}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از بالای باند)	بردار برآیند در جهت $\vec{v}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار برآیند در جهت $\vec{v}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{v}$ است. بنابراین $\vec{v}$ فرود امن است.

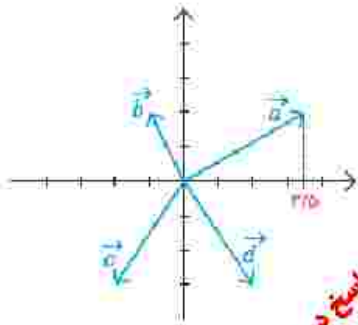
در مورد وضعیت ب برآیند بردارهای  $\vec{w}$  (نیروی باد) و  $\vec{v}$  (نیروی محرکه هواپیما) به صورت زیر است.

ب-۱	ب-۲	ب-۳
		
بردار برآیند در جهت $\vec{v}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{v}$ است. بنابراین فرود امن است.	بردار برآیند در جهت $\vec{v}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار برآیند در جهت $\vec{v}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)

معمولاً بردار به طول واحد در جهت محور  $\vec{i}$  را با  $\vec{i}$  و بردار به طول واحد در جهت مثبت محور  $\vec{j}$  را با  $\vec{j}$  نمایش می دهند. در شکل مقابل بردار  $\vec{v} = (1, 0)$  و  $\vec{w} = (0, 1)$  و نیز بردار  $\vec{b} = (2, 3)$  به صورت حاصل جمع مضاربی از  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  نمایش داده شده اند. به طور کلی می توان هر بردار دلخواه مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  را به صورت زیر نمایش داد.

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$



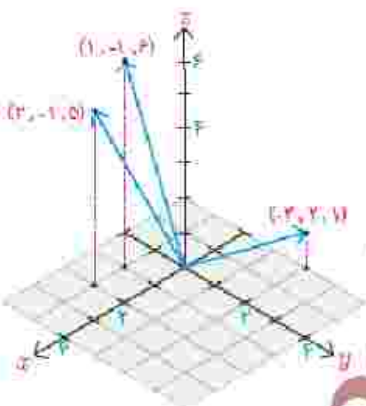


پاسخ در صفحه ی بعد

- ۱- در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده است.
- الف) مختصات بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  را یافته و آن را رسم کنید.
- ب) قرصه بردارهای  $\vec{c}$  و  $\vec{b}$  را رسم کرده و مختصات آنها را به دست آورید.
- ج) مؤلفه های بردارهای  $\vec{a} - \vec{b}$  و  $\vec{d} - \vec{c}$  را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هر یک را به دست آورید.
- د) هر یک از بردارهای  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{d} - \vec{c}$  را بر حسب بردارهای واحد  $\vec{i}, \vec{j}$  به دست آورید.

### ■ بردارها در $\mathbb{R}^3$

مناسبه بردارهای  $\mathbb{R}^2$  می توان به هر نقطه از  $\mathbb{R}^3$  برداری که از مبدأ شروع می شود نظیر کرد. مثلاً فرض کنید  $A = (a_1, a_2, a_3)$  نقطه ای غیر از مبدأ  $\mathbb{R}^3$  باشد. در این صورت باره خط جهت داری که از مبدأ مختصات یعنی  $O = (0, 0, 0)$  شروع شده و در نقطه  $A$  پایان می یابد یک بردار در  $\mathbb{R}^3$  را مشخص می کند. آن را با  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  نشان می دهیم. در بردار  $\vec{a}$  مقادیر  $a_1, a_2, a_3$  را مؤلفه های بردار  $\vec{a}$  می گویند. همچنین قرارداد می کنیم که مبدأ مختصات یعنی  $O = (0, 0, 0)$  نمایشگر بردار  $\vec{0} = (0, 0, 0)$  است که بردار صفر نامیده می شود. به عنوان مثال در شکل مقابل، چند بردار در  $\mathbb{R}^3$  نمایش داده شده است.



### ■ طول بردار در $\mathbb{R}^3$

با توجه به رابطه فاصله دو نقطه از  $\mathbb{R}^3$  طول هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  در  $\mathbb{R}^3$  از رابطه زیر به دست می آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

### ■ حاصل جمع دو بردار در $\mathbb{R}^3$

حاصل جمع دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  به صورت زیر تعریف می شود که به آن بردار برابنده نیز می گویند.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

این شکل بردارهای  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{a} + \vec{b}$  را در دستگاه  $\mathbb{R}^3$  نشان می دهد. همان طور که از شکل رویه رو پیداست برای هر دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  می توان روش متوازی الاضلاع را در صفحه ای که از آن دو بردار می گذرد به کار برد و بردار برابنده  $\vec{a} + \vec{b}$  را یافت.

۷۳

الف :

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, 5, 2) + (-1, 2) = (2, 5, 4)$$

ب :

$$\vec{a} = (-2, -3) \Rightarrow -\vec{c} = (+2, +3)$$

$$\vec{d} = (+2, -3) \Rightarrow -\vec{d} = (-2, +3)$$

ج :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (3, 5, 2) + (+1, -2) = (4, 5, 0) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 4, 5$$

$$\vec{d} - \vec{c} = \vec{d} + (-\vec{c}) = (+2, -3) + (+2, +3) = (+4, 0) \Rightarrow |\vec{d} - \vec{c}| = 4$$

د :

$$\vec{a} = (3, 5, 2) = 3i + 5j + 2k$$

$$\vec{b} = (-1, 2) = -i + 2j$$

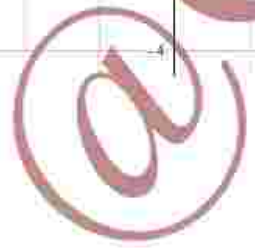
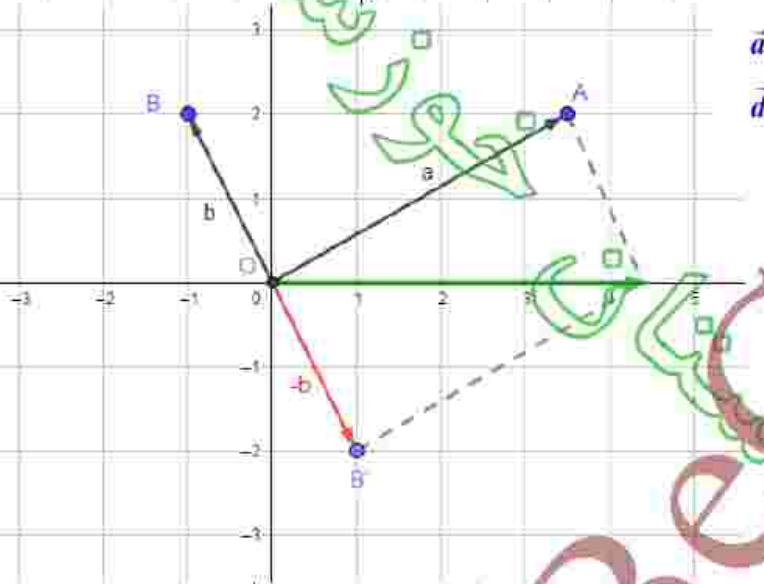
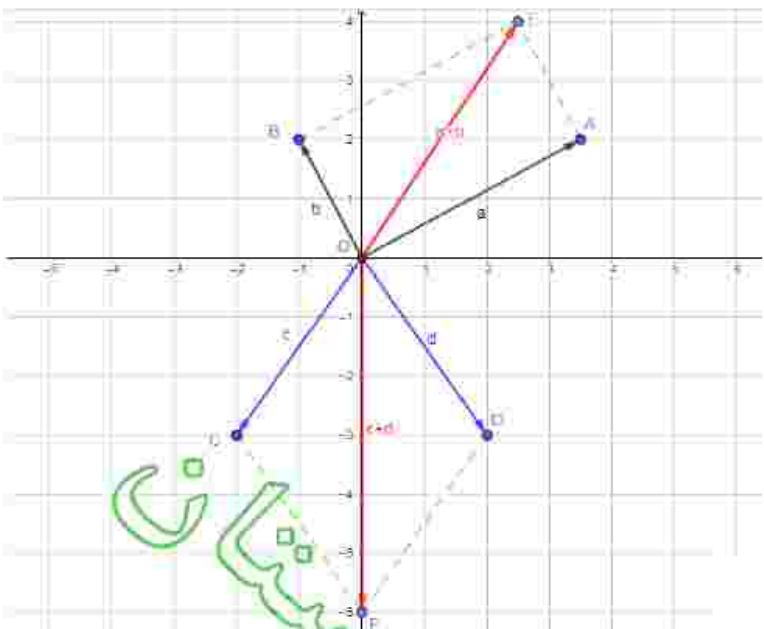
$$\vec{c} = (-2, -3) = -2i - 3j$$

$$\vec{d} = (+2, -3) = 2i - 3j$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, 4) = 2i + 5j + 4k$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (4, 5, 0) = 4i + 5j$$

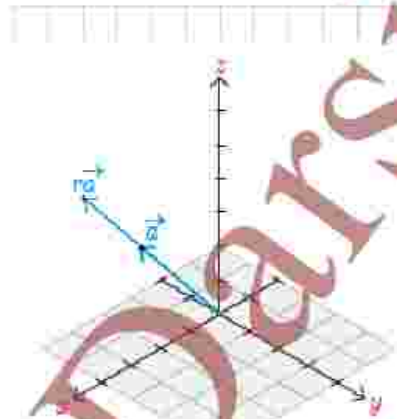
$$\vec{d} - \vec{c} = (+4, 0) = 4i$$



برای هر عدد حقیقی  $r$ ، حاصل ضرب  $r$  در بردار  $\vec{a}$  را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2, a_3)$$

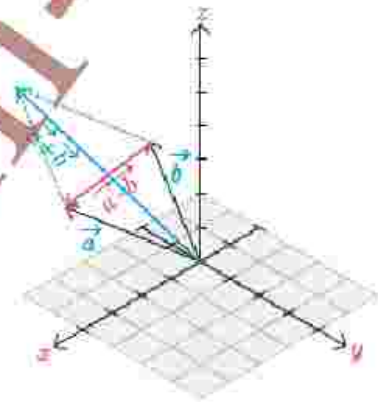
این شکل دو بردار  $r\vec{a}$ ،  $\vec{a}$  که در آن  $r > 1$  را نشان می دهد.  
 آیا راستای  $r\vec{a}$ ،  $\vec{a}$  با هم متفاوت اند؟



به طور خاص بردار  $-\vec{a}$  را که با  $-\vec{a}$  نشان می دهند قرینه  $\vec{a}$  می گویند یعنی  $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ . این بردار هم اندازه با  $\vec{a}$  (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می باشد. اکنون تفاضل بردار  $\vec{b}$  از  $\vec{a}$  یعنی  $\vec{a} - \vec{b}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم.

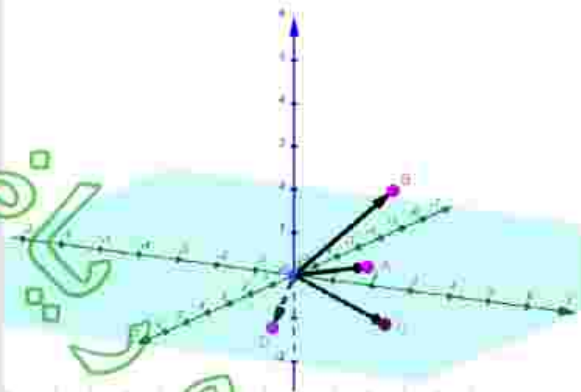
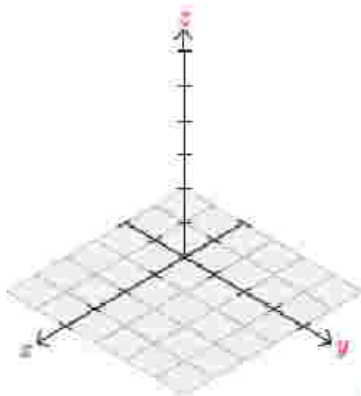
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

در شکل بردارهای  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و قرینه آن و نیز  $\vec{a} - \vec{b}$  نمایش داده شده اند.



### کاردرکلاس

نقاط  $A = (2, 3, 1)$ ،  $B = (-1, 2, 1)$  و  $C = (3, 2, 0)$  را در یک دستگاه  $\mathbb{R}^3$  در نظر بگیرید. اگر  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$ ،  $\vec{c}$ ،  $\vec{d}$  بردارهایی در  $\mathbb{R}^3$  با نقاط انتهایی به ترتیب  $A, B, C, D$  باشند آنگاه آنها را در دستگاه فوق نشان دهید و هر یک از بردارهای زیر را به دست آورید.



$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2, 3, 1) + (-2, 4, 2) = (0, 7, 3)$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (2, 3, 1) + [(-1, 2, 2) + (3, 4, 0)] = (2, 3, 1) + (2, 6, 2) = (4, 9, 3)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = [(2, 3, 1) + (-1, 2, 2)] + (3, 4, 0) = (1, 5, 3) + (3, 4, 0) = (4, 9, 3)$$

$$-\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = -2[(-1, 2, 2) + (3, 4, 0)] = -2(2, 6, 2) = (-4, -12, -4)$$

$$-\vec{a}\vec{b} - 2\vec{c} = -2(-1, 2, 2) - 2(3, 4, 0) = (2, -4, -4) + (-6, -8, 0) = (-4, -12, -4)$$

### ■ خواص جمع بردارها

بر کار در کلاس قبل درستی برخی روابط و اعمال بین بردارها را بررسی کردیم. به طور کلی اگر  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  سه بردار دلخواه و  $\vec{0} = (0, 0, 0)$  بردار صفر و نیز  $r$  و  $s$  دو عدد حقیقی باشند روابط زیر همواره برقرارند.

$$1- \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{خاصیت جابه جایی جمع})$$

$$2- \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{خاصیت شرکت پذیری در جمع})$$

$$3- \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0} \quad (\text{عضو قرینه})$$

$$4- \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad (\text{عضو خنثی})$$

$$5- r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

$$6- (r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$

$$7- (rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$$

$$8- \text{اگر } \vec{b} = r\vec{a} \text{ آنگاه } |\vec{b}| = |r| |\vec{a}| \quad (r \text{ قدر مطلق } r \text{ است})$$

### ■ بردارهای یکه

با بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}$  در صفحه  $\mathbb{R}^2$  به ترتیب در جهت محور  $x$  ها و  $y$  ها آشنا شدیم. به طور مشابه در  $\mathbb{R}^3$  بردارهای زیر را با طول واحد در جهت محورهای مختصات  $\mathbb{R}^3$  در نظر می گیرند.

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$$

به این ترتیب  $\vec{i}$  بردار یکه در جهت محور طول ها،  $\vec{j}$  بردار یکه در جهت محور عرض ها و  $\vec{k}$  بردار یکه در جهت محور ارتفاع ها می باشند.

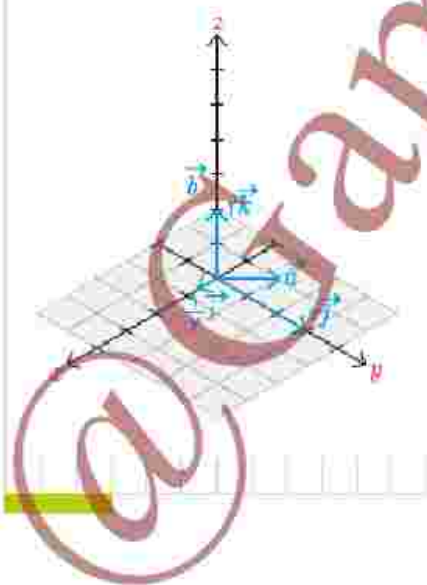
همچنین با استفاده از روابط بین بردارها به سادگی می توان نشان داد که هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  به صورت ترکیبی از بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  قابل بیان است. که واقع داریم:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

**مثال:** بردار  $\vec{a} = (\frac{1}{4}, 3, 2)$  را بر حسب بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  و  $\vec{k}$  نشان دهید.

$$\vec{a} = \frac{1}{4}\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

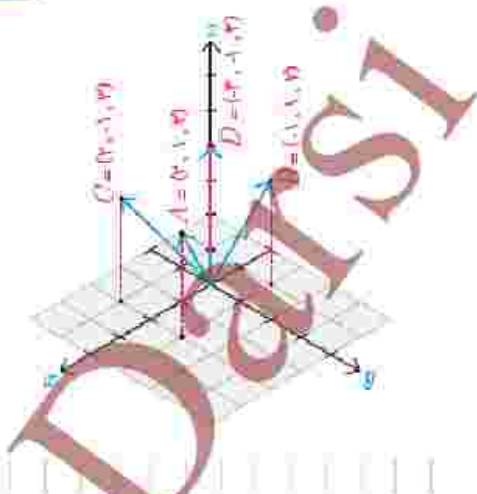
مدرسین





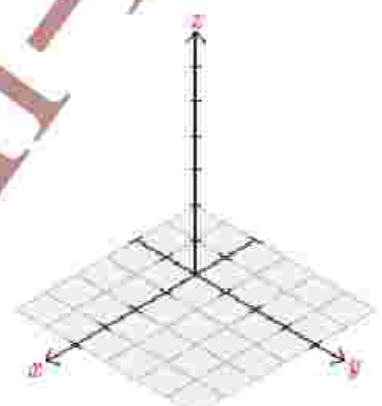
۱- چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.  $ABDC$  الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهارضلعی  $ABCD$  را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح  $ABCD$  هم مساحت و موازی هستند را بنویسید.



۲- نقاط با مختصات  $S = (-2, -2, -2)$ ,  $R = (3, 0, -1)$ ,  $Q = (0, -1, -2)$ ,  $P = (1, 0, 1)$  را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.

۳- در سؤال قبل طول پاره‌خط‌های  $PQ$ ,  $RQ$  و  $PS$  را بیابید.



۴- فرض کنید  $P = (x, y, z)$  و  $Q = (x_0, y_0, z_0)$  مختصات نقطه  $M$  وسط پاره‌خط  $PQ$  را بیابید.

۵- در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

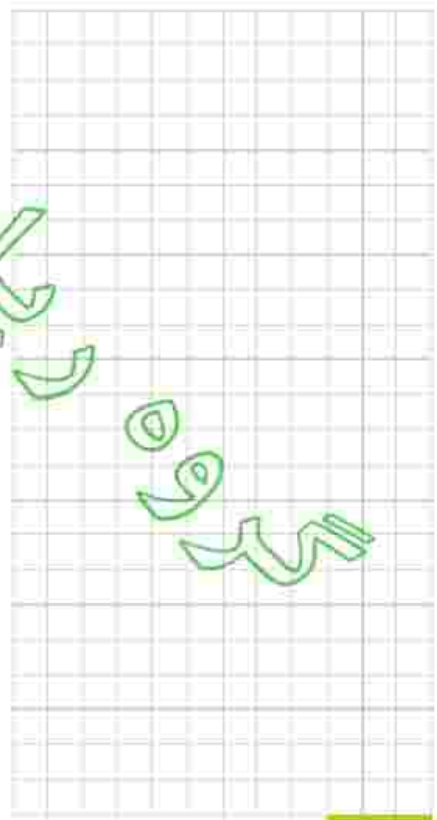
الف)  $\vec{a} = (-\frac{1}{3}, 0, 2)$  ،  $\vec{b} = (\sqrt{2}, 1, 1)$  ،  $r = 3$  ،  $r\vec{a} - \vec{b} = ?$

ب)  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  ،  $\vec{b} = (3, -1, -1)$  ،  $r = -1$  ،  $r\vec{a} + \vec{b} = ?$

ج)  $\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} - \vec{k}$  ،  $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k}$  ،  $\vec{a} + \vec{b} = ?$

د)  $\vec{a} = 5\vec{k} + \vec{j}$  ،  $\vec{b} = -\vec{k} + \vec{i}$  ،  $r = \frac{1}{5}$  ،  $r\vec{a} + \vec{b} = ?$

۶- طول بردار  $\vec{a}$  را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.



باسخ تمرين ۱:

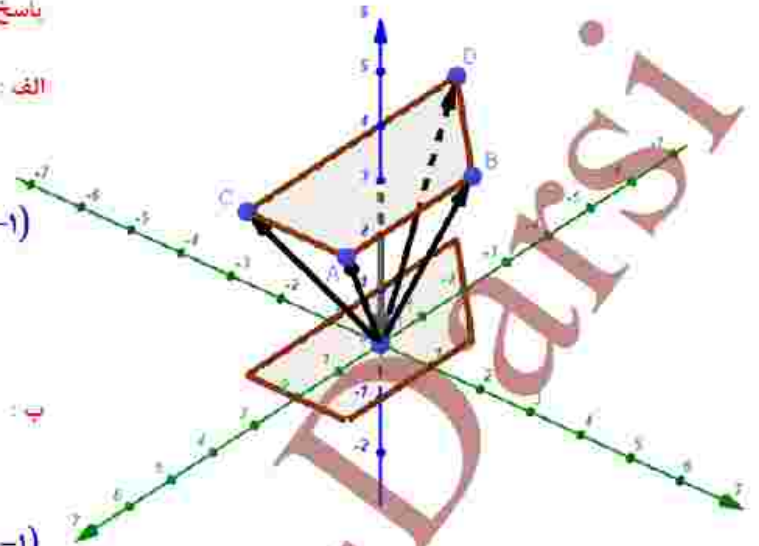
الف:

$$A(2, 1, 3), B(-1, 1, 3) \Rightarrow AB: (y=1, z=3; -1 \leq x \leq 2)$$

$$B(-1, 1, 3), D(-3, -1, 3) \Rightarrow BD: (y=x+2, z=3; -3 \leq x \leq -1)$$

$$D(-3, -1, 3), C(2, -1, 3) \Rightarrow DC: (y=-1, z=3; -3 \leq x \leq 2)$$

$$A(2, 1, 3), C(2, -1, 3) \Rightarrow AC: (x=2, z=3; -1 \leq y \leq 1)$$



ب:

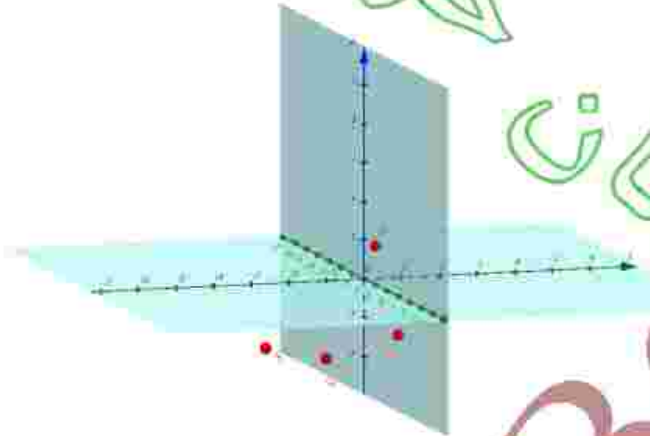
$$A'(2, 1, 0), B'(-1, 1, 0) \Rightarrow A'B': (y=1, z=0; -1 \leq x \leq 2)$$

$$B'(-1, 1, 0), D'(-3, -1, 0) \Rightarrow B'D': (y=x+2, z=0; -3 \leq x \leq -1)$$

$$D'(-3, -1, 0), C'(2, -1, 0) \Rightarrow D'C': (y=-1, z=0; -3 \leq x \leq 2)$$

$$A(2, 1, 0), C(2, -1, 0) \Rightarrow A'C': (x=2, z=0; -1 \leq y \leq 1)$$

باسخ تمرين ۲:



باسخ تمرين ۳:

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2} \Rightarrow PQ = \sqrt{(-1)^2 + (-1-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

$$RQ = \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2 + (z_Q - z_R)^2} \Rightarrow RQ = \sqrt{(-3)^2 + (-1-0)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

$$PS = \sqrt{(x_S - x_P)^2 + (y_S - y_P)^2 + (z_S - z_P)^2} \Rightarrow PS = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$$

باسخ تمرين ۴:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}, y_M = \frac{y_P + y_Q}{2}, z_M = \frac{z_P + z_Q}{2} \Rightarrow M \left( \frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}, \frac{z_P + z_Q}{2} \right)$$

باسخ تمرین ۵

$$r\bar{a} - \bar{b} = 3\left(-\frac{1}{3}, 0, 2\right) - (\sqrt{2}, 1, 1) = (-1, 0, 6) - (\sqrt{2}, 1, 1) = (\sqrt{2} - 1, -1, 5) \quad \text{الف}$$

$$r\bar{a} + \bar{b} = -1(3, 2, -1) + (3, 1, -1) = (-3, -2, 1) + (3, 1, -1) = (0, -1, 0) \quad \text{ب}$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (\sqrt{2}, 0, -1) + (0, 2, 1) = (\sqrt{2}, 2, 0) \quad \text{ج}$$

$$r\bar{a} + \bar{b} = \frac{1}{5}(0, 1, 5) + (1, 0, -1) = \left(0, \frac{1}{5}, 1\right) + (1, 0, -1) = \left(1, \frac{1}{5}, 0\right) \quad \text{د}$$

باسخ تمرین ۶

$$\bar{a} = \left(-\frac{1}{3}, 0, 2\right) \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{37}{9}} = \frac{\sqrt{37}}{3} \quad \text{الف}$$

$$\bar{a} = (3, 2, -1) \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \quad \text{ب}$$

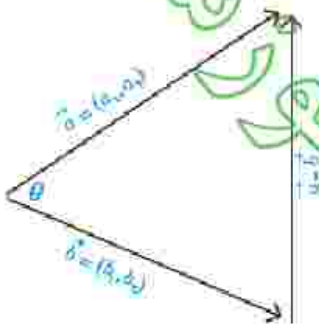
$$\bar{a} = (\sqrt{2}, 0, -1) \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \quad \text{ج}$$

$$\bar{a} = (0, 1, 5) \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{26} \quad \text{د}$$

## ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

فرض کنید دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  همانند شکل داده شده اند. می خواهیم زاویه بین این دو بردار  $(\theta)$  را پیدا کنیم.

برای این منظور بردار تقاض  $\vec{a} - \vec{b}$  را نیز در این شکل رسم کرده ایم تا منتهی به طول اضلاع زیر به دست آید.



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس ها که سال گذشته آموخته اید می توان نوشت:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$$

(1)

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

از طرفی صورت کسر فوق را می توان با توجه به اندازه های اضلاع مثلث که قبلاً محاسبه شده اند به صورت زیر ساده کرد.

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(2a_1b_1 + 2a_2b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

پس عبارت (1) به صورت زیر به دست می آید.

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(باطنه فوق برای حالتی که دو بردار هم راستا باشند نیز برقرار است.)

با محاسبه عبارت سمت راست و حل معادله مقدار  $0 \leq \theta \leq \pi$  به دست می آید.  
 کمیتی که در صورت این کسر سمت راست است را معمولاً با  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نشان می دهند  
 و به آن حاصل ضرب داخلی یا حاصل ضرب نقطه ای دو بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  می گویند. بنابراین  
 می توان نوشت:

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

همچنین از روابط فوق معلوم است که

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

به طور مشابه حاصل ضرب داخلی دو بردار در  $\mathbb{R}^3$  نیز قابل تعریف است.

**تعریف:** اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار در  $\mathbb{R}^3$  باشند؛  
 در این صورت ضرب داخلی  $\vec{a}$  در  $\vec{b}$  را که با نماد  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نمایش می دهیم  
 به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

با اثباتی مشابه قبل می توان نشان داد که اگر  $0 \leq \theta \leq \pi$  زاویه بین دو بردار ناصفر  
 $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  در  $\mathbb{R}^3$  باشند آنگاه

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

از تعریف ضرب داخلی واضح است که اگر یکی از دو بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  صفر باشند آنگاه  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  هر چند که در این حالت زاویه  $\theta$  بین دو بردار تعریف نمی شود.

**مثال:** زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  و  $\vec{b} = (1, -1, 1)$  را پیدا می کنیم.

**حل:** ابتدا ضرب داخلی دو بردار را به صورت زیر محاسبه می آوریم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \times 1) + (-1 \times -1) + (2 \times 1) = 3$$

از طرفی اگر  $0 \leq \theta \leq \pi$  زاویه بین دو بردار باشند خواهیم داشت:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 3 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \cos \theta \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

### ■ خواص ضرب داخلی

۱-  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  خاصیت جابه جایی

اثبات:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}$

۲-  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

اثبات:  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$

۳-  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  خاصیت شرکت پذیری

اثبات:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$

$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$

$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3$

$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

۴- برای دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff a$  و  $b$  برهم عمود هستند

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$

۵-  $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0, \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

۶-  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$  (نامساوی کسینوسوارتز) منظور از  $|\vec{a}| |\vec{b}|$  قدر مطلق مقدار

$\vec{a} \cdot \vec{b}$  است.

$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \left| |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \right| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$

که در آخرین نامساوی از  $|\cos \theta| \leq 1$  استفاده شده است.

### ■ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$

دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را که زاویه بین آنها  $\theta$  است با فرض  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  در نظر

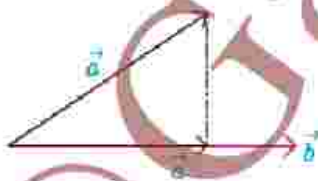
می‌گیریم. می‌خواهیم تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  را بر امتداد بردار  $\vec{b}$  که آن را با  $\vec{a}'$  نمایش

داده‌ایم به دست آوریم. از روی شکل مشخص است که برای یک  $r$  حقیقی  $\vec{a}' = r \vec{b}$ .

با توجه به اینکه بردار تفاضل  $\vec{a}$  از  $\vec{a}'$  بر بردار  $\vec{b}$  عمود است. خواهیم داشت:

$(\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \implies (\vec{a} - r \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \implies \vec{a} \cdot \vec{b} - r \vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \implies r = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$

موسسه تخصصی



بنابراین بردار تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد بردار  $\vec{b}$  به صورت زیر به دست می آید.

$$\vec{a}' = r\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

**مثال:** تصویر قائم بردار  $\vec{a} = (2, -1, 3)$  را بر امتداد بردار  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  بیابید.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + (3)(0) = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{3}{2} \vec{b} = \frac{3}{2} (1, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

نوار در کلاس

۱- تصویر بردار  $\vec{e} = (1, 0, 0)$  بر امتداد بردار  $\vec{z} = (0, 1, 0)$  بیابید.

۲- نشان دهید که اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری صفر می شود.

۳- نشان دهید که اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  در یک راستا باشند آنگاه تصویر  $\vec{a}$  بر  $\vec{b}$  برابر خود  $\vec{a}$  می شود.

۴- هر یک از حالات زیر را با شکل های داده شده نظیر کنید.

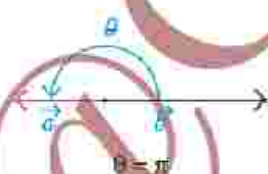
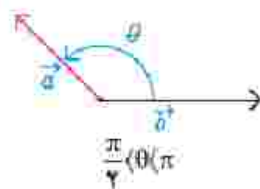
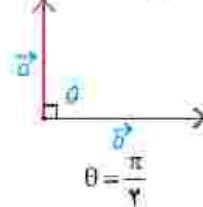
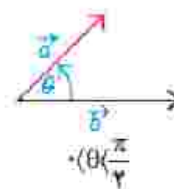
الف)  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

ب)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

ج)  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

د)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|$

ه)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|a||b|$



پاسخ سوال ۱ کلاس در کلاس

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0) \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0, j^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

$$\vec{i} = \frac{\vec{i} \cdot \vec{j}}{j^2} \vec{j} = \frac{0}{1} \vec{j} = 0 \cdot (0, 1, 0) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

پاسخ سوال ۲ کار در کلاس

فرض کنیم  $\vec{0} = (0, 0, 0) \neq \vec{0}, \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}, \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \neq \vec{0}$  و در این صورت  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  و تصویر  $\vec{a}$  بر  $\vec{b}$  برابر است با

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \vec{b} = \frac{0}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} (b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

پاسخ سوال ۳ کار در کلاس

فرض کنیم  $\vec{0} = (0, 0, 0) \neq \vec{0}, \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}, \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \neq \vec{0}$  و در این صورت  $\vec{a} = k\vec{b} \neq \vec{0}$

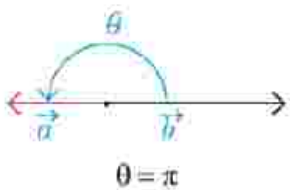
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k\vec{b} \cdot \vec{b} = kb^2$$

پس تصویر  $\vec{a}$  بر  $\vec{b}$  برابر است با

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \vec{b} = \frac{kb^2}{b^2} \vec{b} = k\vec{b} = \vec{a}$$

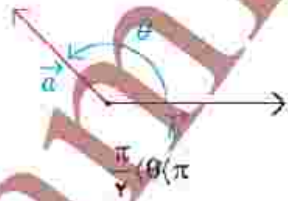
پاسخ سوال ۳ کار در کلاس

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|a||b| \quad (\text{ج})$$



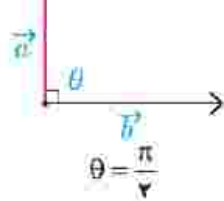
ج

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \quad (\text{ب})$$



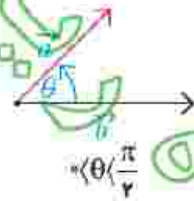
ب

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad (\text{پ})$$



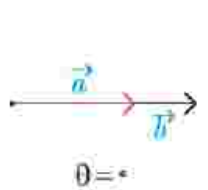
پ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\text{د})$$

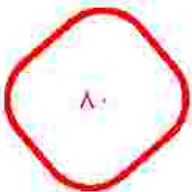


د

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad (\text{الف})$$



الف





## ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. می توان ضرب دو بردار را به گونه ای تعریف کرد که حاصل ضرب آنها همواره یک بردار باشد.

**تعریف:** فرض کنیم  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند.

ضرب داخلی  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را که با نماد  $\vec{a} \times \vec{b}$  نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

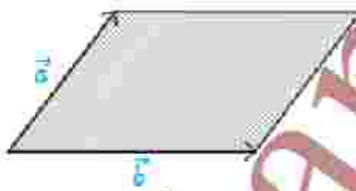
اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار غیر صفر و  $\theta$  زاویه بین آنها باشد اندازه بردار  $\vec{a} \times \vec{b}$  می شود:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + \\ &+ a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_3 b_2)^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta = \\ &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta)^2 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

بنابراین

از هندسه سال قبل می دانیم که  $\sin \theta$  عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که اندازه اضلاع آن برابر  $|\vec{a}|$  و  $|\vec{b}|$  است.



**مثال:** بردارهای  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  در  $\mathbb{R}^3$  در نظر بگیرید. حاصل  $\vec{i} \times \vec{j}$  و  $\vec{j} \times \vec{i}$  را بدست آورید.

$$\vec{i} \times \vec{j} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0)$$

$$= ((0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(0), (1)(1) - (0)(0)) = (0, 0, 1) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0)$$

$$= ((1)(0) - (0)(0), (0)(0) - (0)(1), (0)(1) - (1)(1)) = (0, 0, -1) = -\vec{k}$$

همان طور که مشاهده شد حاصل ضرب خارجی دو بردار  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  برابر با بردار  $\vec{k}$  شد که بر هر دوی  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  عمود می باشد. ضرب خارجی دارای خواص زیر می باشد.

**خاصیت ۱:** فرض کنید  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند. در این صورت

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

این خاصیت گویای این مطلب است که  $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$  و  $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

بنابراین با توجه به آنچه تاکنون به دست آمده است می توان گفت ضرب خارجی دو بردار برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی الاضلاع ایجاد شده توسط آن دو بردار است. در واقع می توان نشان داد که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار بر صفحه شامل آن دو بردار عمود است. اثبات این خاصیت در ادامه می آید.

**اثبات:**

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

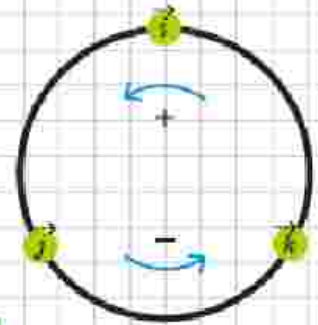
$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = b_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

می توان نشان داد که برای سه برداری که  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  روابط زیر برقرار است:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

معمولاً این روابط را به صورت نمودار حلقه‌ای نیز نمایش می دهند.



$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{خاصیت ۲}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \text{خاصیت ۳}$$

$$r \vec{a} \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times r \vec{b} \quad \text{خاصیت ۴: اگر } r \text{ عددی حقیقی باشد، آنگاه}$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ داریم:} \quad \text{خاصیت ۵: برای سه بردار}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

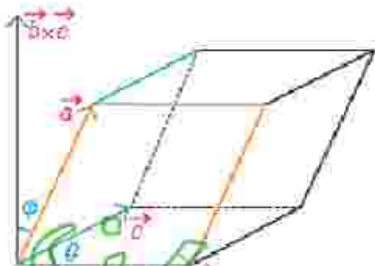
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \text{خاصیت ۶: دو بردار غیر صفر } \vec{a}, \vec{b} \text{ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر}$$

**اثبات:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

### حجم متوازی السطوح

اگر  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه می توان به کمک آنها متوازی السطوحی همانند شکل زیر تولید کرد.



همان طور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با اندازه تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر روی بردار  $\vec{b} \times \vec{c}$  یعنی

$$\text{ارتفاع} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی السطوح توسط بردارهای  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید شده پس مساحت آن برابر است با  $|\vec{b} \times \vec{c}|$  با استفاده از دترمینان نیز می توان مساحت متوازی الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  به صورت زیر به دست آورد:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

بنابراین حجم متوازی السطوح به صورت زیر به دست می آید:

$$\text{حجم متوازی السطوح} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = |\vec{b} \times \vec{c}| \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

از شکل فوق واضح است که اگر سه بردار در یک صفحه قرار بگیرند آنگاه حجم متوازی السطوح برابر صفر است و از رابطه بالا نیز این مطلب قابل اثبات است. لذا در این حالت خاص نیز حجم متوازی السطوح برابر است با  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$  حجم متوازی السطوح پدید آمده توسط سه بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ،  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  و  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  با استفاده از دترمینان نیز به دست می آید.

$$K = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{حجم} = V = |K|$$

$$\text{یا } K = a \cdot (b \times c)$$

اگر در این صورت چه نتیجه ای می گیرید؟

**مثال:** حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای  $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ،  $\vec{b} = (0, 1, 1)$  و  $\vec{c} = (1, 0, 1)$  تولید می شود.

**حل:** با استفاده از ضرب خارجی  $\vec{b}$  در بردار  $\vec{c}$  به دست می آید.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (1, 1, -1)$$

بنابراین حجم متوازی السطوح به دست می آید.

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1)| = |1 + 1 + 0| = 2$$

پیش‌تر اشاره شد که اگر سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح و نیز  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$  برابر صفر می‌شود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می‌شود.

**مثال:** آیا بردارهای  $\vec{a} = (1, 9, -1)$ ،  $\vec{b} = (1, -1, 3)$ ،  $\vec{c} = (2, 2, -1)$  در یک صفحه‌اند؟  
**حل:** برای این منظور کافی است  $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$  را به دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی‌السطوح تولید شده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

سه بردار در یک صفحه هستند.  $\Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -32 + 42 - 1 = 9 \neq 0$

**تمرین**

۱- برای هر یک از بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  که در زیر آمده است تصویر قائم  $\vec{a}$  را بر امتداد  $\vec{b}$  به دست آورید.

الف)  $\vec{a} = (2, -1, 2)$ ،  $\vec{b} = i$   
 ب)  $\vec{a} = (2, 3, 1)$ ،  $\vec{b} = (3, 2, 1)$   
 ج)  $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ،  $\vec{b} = (-1, 2, 4)$

۲- فرض کنید  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ . مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$  را محاسبه کنید.

۳- سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  مثال بزنید که برای آنها  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$  ولی  $\vec{b} \neq \vec{c}$ .

۴- اگر  $\vec{a} = (-1, 1, 4)$ ،  $\vec{b} = (3, -4, 2)$  و  $\vec{c} = (1, -3, 4)$  باشند آنگاه تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد  $\vec{b} + \vec{c}$  را به دست آورید.

۵- برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a} = (1, -2, 2)$  و  $\vec{b} = (-2, 1, -5)$  بردار پیدا کنید.

۶- سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  مثال بزنید که برای آنها  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$  ولی  $\vec{b} \neq \vec{c}$ . آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷- بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  مفروض‌اند به طوری که  $|\vec{a}| = 3$ ،  $|\vec{b}| = 26$  و  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$ . مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  را محاسبه کنید.

۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط  $A = (3, 5, 2)$ ،  $B = (5, 5, 0)$ ،  $C = (-2, -4, 0)$  داده شده است را بیابید.

$$\vec{a} = (2, -1, 2), \vec{b} = (1, 0, 0) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times 0 = 2, \vec{b}^T = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^T} \vec{b} = \frac{2}{1} (1, 0, 0) = (2, 0, 0)$$

$$\vec{a} = (2, 2, 1), \vec{b} = (2, 2, 1) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 13, \vec{b}^T = 2^2 + 2^2 + 1^2 = 14$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^T} \vec{b} = \frac{13}{14} (2, 2, 1) = \left( \frac{26}{14}, \frac{26}{14}, \frac{13}{14} \right)$$

$$\vec{a} = (1, 1, 0), \vec{b} = (-1, 2, 4) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-1) + 1 \times 2 + 0 \times 4 = 1, \vec{b}^T = (-1)^2 + 2^2 + 4^2 = 21$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^T} \vec{b} = \frac{1}{21} (-1, 2, 4) = \left( -\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{4}{21} \right)$$

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 3$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \xrightarrow{\cdot \vec{a}} \vec{a}^T \vec{a} + \vec{a}^T \vec{b} + \vec{a}^T \vec{c} = 0 \quad \boxed{1}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \xrightarrow{\cdot \vec{b}} \vec{a}^T \vec{b} + \vec{b}^T \vec{b} + \vec{b}^T \vec{c} = 0 \quad \boxed{2}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \xrightarrow{\cdot \vec{c}} \vec{a}^T \vec{c} + \vec{b}^T \vec{c} + \vec{c}^T \vec{c} = 0 \quad \boxed{3}$$

$$\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3} \Rightarrow \vec{a}^T \vec{a} + \vec{a}^T \vec{b} + \vec{a}^T \vec{c} + \vec{a}^T \vec{b} + \vec{b}^T \vec{b} + \vec{b}^T \vec{c} + \vec{a}^T \vec{c} + \vec{b}^T \vec{c} + \vec{c}^T \vec{c} = 0$$

$$\Rightarrow 2\vec{a}^T \vec{b} + 2\vec{a}^T \vec{c} + 2\vec{b}^T \vec{c} + \vec{a}^T \vec{a} + \vec{b}^T \vec{b} + \vec{c}^T \vec{c} = 0 \Rightarrow 2(\vec{a}^T \vec{b} + \vec{a}^T \vec{c} + \vec{b}^T \vec{c}) + 4 + 1 + 9 = 0$$

$$2(\vec{a}^T \vec{b} + \vec{a}^T \vec{c} + \vec{b}^T \vec{c}) = -14 \Rightarrow \vec{a}^T \vec{b} + \vec{a}^T \vec{c} + \vec{b}^T \vec{c} = -7$$

يا فرض  $\vec{a} = (1, 1, 1), \vec{b} = (2, 2, -1), \vec{c} = (5, -2, 1)$  داريم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 4$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \times 5 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 4$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}, \vec{b} \neq \vec{c}$$

باسخ تمرین ۴

با فرض  $\vec{a} = (1, -3, 4), \vec{b} = (3, -4, 2), \vec{c} = (-1, 1, 4)$  بس:

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{c} = (3, -4, 2) + (-1, 1, 4) = (2, -3, 6)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = 1 \times 2 + (-3)(-3) + 4 \times 6 = 2 + 9 + 24 = 35$$

$$|\vec{d}|^2 = 2^2 + (-3)^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36 = 49$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} \vec{d} = \frac{35}{7} (2, -3, 6) = 5(2, -3, 6) = \left( \frac{10}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{30}{7} \right)$$

باسخ تمرین ۵

$$\vec{a} = (1, -3, 2), \vec{b} = (-2, 1, 5)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 7\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \Rightarrow \vec{c} = (7, -9, -5), \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

باسخ تمرین ۶

با فرض  $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (2, 4, 6), \vec{c} = (-1, -2, -3)$  داریم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \vec{0}, \vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \vec{b} \neq \vec{c}$$

باسخ تمرین ۷

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow 12 = 3 \times 2\sqrt{6} \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{12}{12\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \frac{144}{144 \times 6}} = \pm \sqrt{\frac{25}{144}} = \pm \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 3 \times 2\sqrt{6} \times \left( \pm \frac{5}{12} \right) = \pm 5\sqrt{6}$$

باسخ تمرین ۸

$$A(2, 5, 7), B(5, 5, 0), C(-4, 0, 4)$$

$$\vec{AB} = (3, 0, -7), \vec{AC} = (-6, -5, -3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -7 \\ -6 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -35\mathbf{i} + 55\mathbf{j} - 10\mathbf{k} \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-35)^2 + 55^2 + (-10)^2} = \sqrt{4350}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{\sqrt{4350}}{2}$$

خوارسٲان  
خوارسٲان  
گامبے گرام-ڈارسی  
گامبے گرام-ڈارسی  
گامبے گرام-ڈارسی