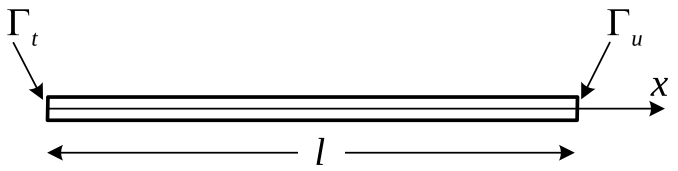
فصل پنجم: فرمولاسیون اجزاء محدود برای مسائل یک بعدی

ایجاد معادلات گسسته (discrete equations)

بعد از بدست آوردن فرم ضعیف مسأله، قدم آخر در ایجاد معادلات اجزاء محدود گسسته‌سازی (Discretization) است.

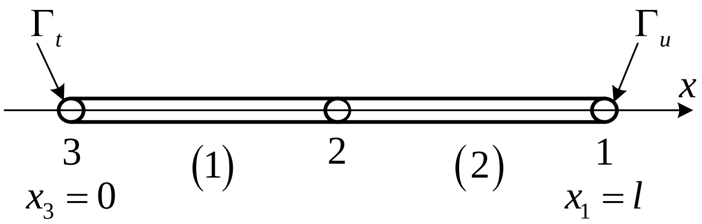
این میله در $x = 0$ دارای شرط مرزی تنش (طبیعی) و در $x = l$ دارای شرط مرزی ضروری است.



××

گام اول در روش اجزاء محدود پیش پردازش است. در این گام شبکه اجزاء محدود را ایجاد می‌کنیم.

شماره‌گذاری گره‌ها از مرز ضروری یعنی Γ_u آغاز شده است.



××

این گام خود دارای سه مرحله است: ۱- بدست آوردن فرم قوی مسأله ۲- استخراج فرم ضعیف ۳- گسسته‌سازی معادلات

فرم قوی مسأله تحلیل تنش را در فصل سوم بدست آوردیم و فرم ضعیف مسأله را هم از آن استخراج کردیم.

در این فصل معادلات فرم ضعیف را گسسته کرده و معادلات گسسته اجزاء محدود را ایجاد می‌کنیم.

××

- تابع هموار $u(x)$ که شرط مرزی ضروری $u(0)=\bar{u}_1$ را ارضا می‌کند طوری بیابید که داشته باشیم:

$$\int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^T AE\left(\frac{du}{dx}\right)dx - \int_0^l w^T b\,dx - \left(w^T \bar{t} A\right)\Big|_{x=l} = 0 \quad \forall w(x) \text{ with } w(0)=0 \qquad (۵\text{-}۱\text{-الف})$$

در معادله بالا به جای w از w^T استفاده کردیم. اینکار از نظر ریاضی مشکلی ایجاد نمی‌کند اما برای سازگاری معادلات ماتریسی ضروری است.

××

این فرم ضعیف روی کل ناحیه مسأله یعنی $[0,l]$ نوشته شده بود.

اما همانطور که در فصل اول دیدیم در روش اجزاء محدود برای افزایش دقت حل، ناحیه کل مسأله را به المان‌های کوچکتر تقسیم می‌کنیم.

لذا انتگرال فرم ضعیف باید روی محدوده المان یعنی $[x_1^e, x_2^e]$ نوشته شود:

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\frac{dw^e}{dx}\right)^T A^e E^e \left(\frac{du^e}{dx}\right)dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} w^{eT} b\,dx - \left(w^{eT}\bar{t}A^e\right)\Big|_{x=l} \qquad (۵\text{-}۱\text{-ب})$$

××

یعنی اگر تعداد کل المان‌ها را با n_{el} نشان دهیم فرم ضعیف معادله (۵-۱-الف) با عبارت زیر معادل خواهد بود:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\frac{dw^e}{dx}\right)^T A^e E^e \left(\frac{du^e}{dx}\right)dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} w^{eT} b\,dx - \left(w^{eT}\bar{t}A^e\right)\Big|_{x=l} \right\} = 0 \qquad (۵\text{-}۲)$$

جمع کردن فرم ضعیف مربوط به تک تک المان‌ها در واقع همان گام سوم روش اجزاء محدود یعنی سرهم کردن معادلات است.

××

در قدم دوم و آخر برای گسسته‌سازی، توابع تقریب و مشتقات آن‌ها در فرم ضعیف با استفاده از روابط زیر بر حسب توابع شکل نوشته می‌شود:

$$\frac{du^e}{dx}=\frac{d\vec{\mathbf{N}}^e}{dx}\tilde{\mathbf{u}}^e=\vec{\mathbf{B}}^e\tilde{\mathbf{u}}^e$$
$$w^{e\mathrm{T}}(x)=\left(\vec{\mathbf{N}}^e\tilde{\mathbf{w}}^e\right)^{\mathrm{T}}=\tilde{\mathbf{w}}^{e\mathrm{T}}\vec{\mathbf{N}}^{e\mathrm{T}} \qquad (۳-۵)$$
$$\left(\frac{dw^e}{dx}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{d\vec{\mathbf{N}}^e}{dx}\tilde{\mathbf{w}}^e\right)^{\mathrm{T}}=\left(\vec{\mathbf{B}}^e\tilde{\mathbf{w}}^e\right)^{\mathrm{T}}=\tilde{\mathbf{w}}^{e\mathrm{T}}\vec{\mathbf{B}}^{e\mathrm{T}}$$

×××

با جایگزین کردن از معادلات (۵-۳) در (۵-۲) بدست می‌آید:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}}\tilde{\mathbf{w}}^{e\mathrm{T}}\{\int_{x_1^e}^{x_2^e}\left(\frac{d\vec{\mathbf{N}}^e}{dx}\right)^{\mathrm{T}}A^eE^e\left(\frac{d\vec{\mathbf{N}}^e}{dx}\right)dx\,\tilde{\mathbf{u}}^e-\int_{x_1^e}^{x_2^e}\vec{\mathbf{N}}^{e\mathrm{T}}b\,dx-\left(\vec{\mathbf{N}}^{e\mathrm{T}}\bar{t}A^e\right)_{x=l}\}=0$$

$$\sum_{e=1}^{n_{el}}\tilde{\mathbf{w}}^{e\mathrm{T}}\{\underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e}\vec{\mathbf{B}}^{e\mathrm{T}}A^eE^e\vec{\mathbf{B}}^e dx}_{\vec{\mathbf{K}}^e}\,\tilde{\mathbf{u}}^e-\underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e}\vec{\mathbf{N}}^{e\mathrm{T}}b\,dx}_{\tilde{\mathbf{f}}_\Omega^e}-\underbrace{\left(\vec{\mathbf{N}}^{e\mathrm{T}}\bar{t}A^e\right)_{x=l}}_{\tilde{\mathbf{f}}_\Gamma^e}\}=0 \qquad (۴-۵)$$

×××

یا به عبارت دیگر:

$$\vec{\mathbf{K}}^e\tilde{\mathbf{u}}^e=\tilde{\mathbf{f}}_\Omega^e+\tilde{\mathbf{f}}_\Gamma^e \qquad (۵-۵)$$

به این ترتیب گام دوم روش اجزاء محدود هم به اتمام می‌رسد.

بعد از اینکه معادله (۵-۵) برای همه المان‌ها بدست آمد در گام سوم این معادلات را سر هم می‌کنیم تا معادلات کل سیستم بدست آید.

با حل معادلات سر هم شده در گام چهارم جواب مسأله حاصل می‌گردد.

×××

در معادله اخیر دو ماتریس تعریف کردیم که در روش اجزاء محدود (FEM) کاربرد بسیاری دارند:

- ماتریس سختی المان:

(۶-۵)

- ماتریس نیروهای خارجی المان:

$$\tilde{\mathbf{f}}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \tilde{\mathbf{N}}^{eT} b\,dx + \left(\tilde{\mathbf{N}}^{eT}\bar{t}A^e\right)_{x=l} = \underbrace{\int_{\Omega^e}\tilde{\mathbf{N}}^{eT} b\,dx}_{\tilde{\mathbf{f}}_\Omega^e} + \underbrace{\left(\tilde{\mathbf{N}}^{eT}\bar{t}A^e\right)\Big|_{\Gamma_t^e}}_{\tilde{\mathbf{f}}_\Gamma^e} \qquad (۷-۵)$$

××

در این روابط Γ_t^e قسمتی از مرز المان است که روی مرز طبیعی مسأله قرار دارد.

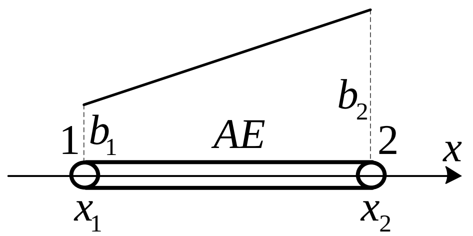
بردار $\tilde{\mathbf{f}}_\Omega^e$ بردار نیروهای جسمی خارجی المان (مثل وزن) و بردار $\tilde{\mathbf{f}}_\Gamma^e$ بردار نیروهای مرزی المان (مثل بار گسترده یا متمرکز) است.

ماتریس سختی و بردار نیروی کل سیستم با اسمبل کردن ماتریس سختی و بردار نیروی المان‌ها که در فصل دوم با آن آشنا شدیم بدست می‌آید.

××

ماتریس‌های المان برای المان‌های دو گرهی

در این بخش ماتریس سختی و بردار نیروهای خارجی را برای المانی دو گرهی که تحت توزیع خطی نیروی جسمی b قرار دارد بدست می‌آوریم.



از فصل چهارم برای این المان می‌دانیم:

(۸-۵)

جهت اختصار بالانویس شماره المان در این روابط حذف شده است.

××

بنابراین ماتریس سختی معادله (۵-۶) برای این المان برابر است:

$$\vec{\mathbf{K}}^e=\int_{x_1}^{x_2}\vec{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}AE\,\vec{\mathbf{B}}\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\frac{1}{l}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}}AE\underbrace{\frac{1}{l}\begin{bmatrix}-1&1\end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{B}}}dx=\frac{AE}{l^2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\end{bmatrix}\int_{x_1}^{x_2}dx=\frac{AE}{l^2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\left(\underbrace{x_2-x_1}_{l}\right)$$

بعد از ساده‌سازی خواهیم داشت:

(۹-۵)

××

این ماتریس سختی با ماتریس سختی بدست آمده با روش مستقیم در فصل دوم برابر است.

البته روش مستقیم در مسائل پیچیده یا در صورت استفاده از المان‌های غیر خطی قابل استفاده نیست.

حال بردار نیروهای جسمی خارجی را محاسبه می‌کنیم:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\Omega}^{e}=\int_{x_1}^{x_2}\vec{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}b\,dx \qquad (۱۰\text{-}۵)$$

چون توزیع نیروی جسمی خطی است آن را هم بر حسب توابع شکل خطی بیان می‌کنیم:

(۱۱-۵)

××

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\Omega}^{e}=\int_{x_1}^{x_2}\vec{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}b\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\vec{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{N}}\,dx\,\vec{\mathbf{b}}=\frac{1}{l^2}\int_{x_1}^{x_2}\begin{bmatrix}(x_2-x)^2&(x_2-x)(x-x_1)\\(x_2-x)(x-x_1)&(x-x_1)^2\end{bmatrix}dx\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=\frac{l}{6}\begin{bmatrix}2b_1+b_2\\b_1+2b_2\end{bmatrix} \qquad (۱۲\text{-}۵)$$

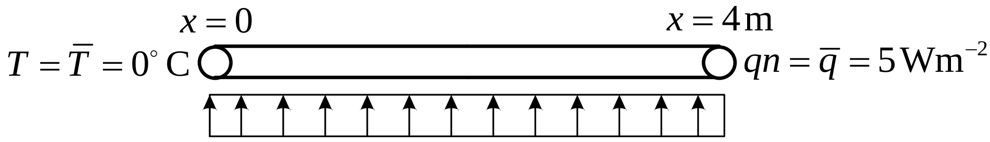
طبق این رابطه جمع نیروهای وارده بر دو گره المان برابر است با $l(b_1+b_2)/2$ که برابر نیروی برآیند روی المان است.

ضمن اینکه اگر $b_1=b_2$ باشد مطابق انتظار نصف نیرو به گره ۱ و نصف دیگر به گره ۲ می‌رسد.

××

مثال (۵-۱): مسأله رسانایی گرما

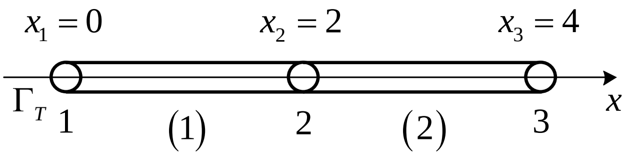
میله شکل زیر دارای منبع گرمایی $s=5\mathrm{Wm^{-1}}$ با توزیع یکنواخت است. سطح مقطع میله $A=0.1\mathrm{m^2}$ و هدایت دمایی آن $k=2\mathrm{W^{\circ}C^{-1}m^{-1}}$ بوده و طول آن $4\mathrm{m}$ است. شرایط مرزی در شکل نشان داده شده‌اند.



××

۱- پیش پردازش:

شبکه اجزاء محدود حاصل از تقسیم ناحیه به دو المان در شکل زیر آمده است. شماره‌گذاری گره‌ها از مرز ضروری یعنی Γ_T آغاز شده است.



۲- ماتریس رسانایی المان:

××

فرم ضعیف روی ناحیه هر المان عبارت است از:

(۱۳-۵)

حال با استفاده از توابع شکل داریم:

$$\int_{\Omega^e} \frac{d\tilde{\mathbf{N}}^T}{dx} Ak \frac{d\tilde{\mathbf{N}}}{dx} dx\, \tilde{\mathbf{T}}^e = -\left(\tilde{\mathbf{N}}^T A\overline{q}\right)\Big|_{\Gamma_q^e} + \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{N}}^T s\, dx$$

$$\rightarrow$$

$$\underbrace{\int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{B}}^T Ak\, \tilde{\mathbf{B}}\, dx}_{\tilde{\mathbf{K}}^e} \tilde{\mathbf{T}}^e = \underbrace{-\left(\tilde{\mathbf{N}}^T A\overline{q}\right)\Big|_{\Gamma_q^e}}_{\tilde{\mathbf{f}}_\Gamma^e} + \underbrace{\int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{N}}^T s\, dx}_{\tilde{\mathbf{f}}_\Omega^e} \qquad (۱۴\text{-}۵)$$

××

بنابراین ماتریس رسانایی المان برابر است:

$$\tilde{\mathbf{K}}^e = \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{B}}^T Ak\, \tilde{\mathbf{B}}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} Ak \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{Ak}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۱۵\text{-}۵)$$

برای المان اول داریم:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad l = 2, \quad Ak = 0.2 \quad \Rightarrow \vec{\mathbf{K}}^{(1)} = \frac{0.2}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب برای المان دوم:

××

برای یافتن ماتریس رسانایی سیستم از روش اسمبل مستقیم استفاده می‌کنیم:

$$\vec{\mathbf{K}}^{(1)} = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \quad \vec{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{K}} = \begin{array}{cc} 1 \quad 2 \quad 3 & \\ \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

۳- ماتریس شار مرزی:

××

گره ۳ متعلق به المان اول نیست و تابع شکل هر المان فقط در محدوده همان المان غیر صفر است لذا:

اما گره ۳ گره دوم المان دوم است بنابراین N_1 در این گره صفر و N_2 در آن یک است:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\Gamma}^{2} = -0.5\tilde{\mathbf{N}}^{T}\left(x_3\right) = -0.5\begin{bmatrix} N_1\left(x_3\right) \\ N_2\left(x_3\right) \end{bmatrix} = -0.5\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

ماتریس شار مرزی برای کل سیستم از اسمبل کردن ماتریس شار مرزی تک تک المان‌ها بدست می‌آید.

××

r_1 از آنجا به بردار شار مرزی اضافه شد که در گره اول شرط مرزی دما (ضروری) داریم و شرط مرزی شار گرما (طبیعی) در آن مجهول است.

۴- ماتریس شار منبع:

این ماتریس برای هر دو المان برابر است با:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\Omega}^{e} = \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{N}}^T s\,dx = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} (x_2 - x) \\ (x - x_1) \end{bmatrix} \times 5\,dx = \frac{5l}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

××

ماتریس شار مرزی کل سیستم هم برابر است با:

۵- حل معادلات گسسته اجزاء محدود:

معادلات گسسته به فرم $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{f}}$ هستند که در آن $\tilde{\mathbf{T}}$ بردار مقادیر گرهی دماست:

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{f}}_{\Omega} + \tilde{\mathbf{f}}_{\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + r_1 \\ 10 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

××

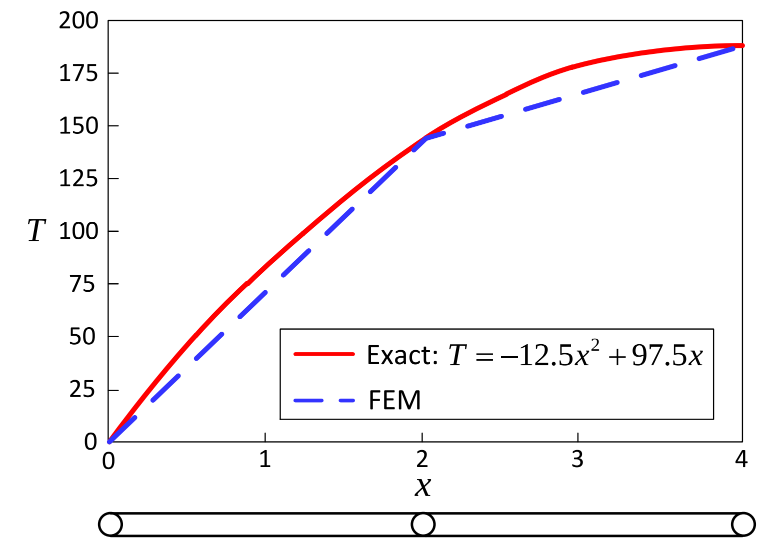
حال باید شرایط مرزی ضروری (دمایی) را اعمال کنیم:

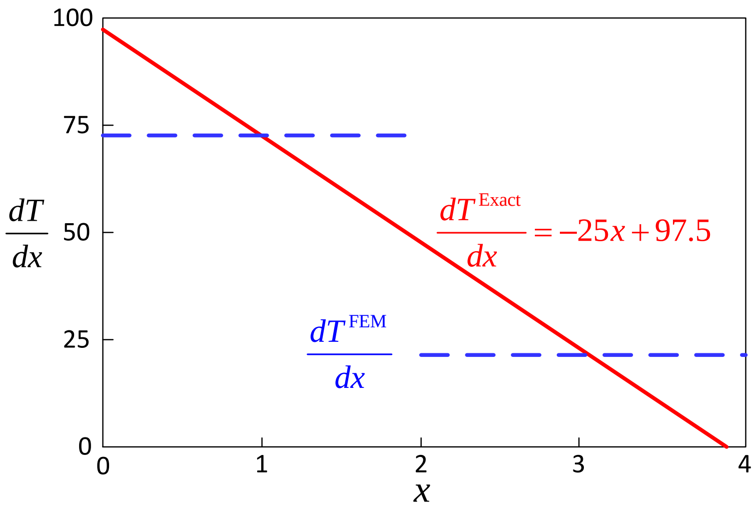
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 + 0.1 \times 0 \\ 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

این مسأله بدلیل سادگی دارای جواب دقیق (تحلیلی) نیز هست.

جواب تحلیلی و تقریب FEM در اسلاید بعد با هم مقایسه شده‌اند.

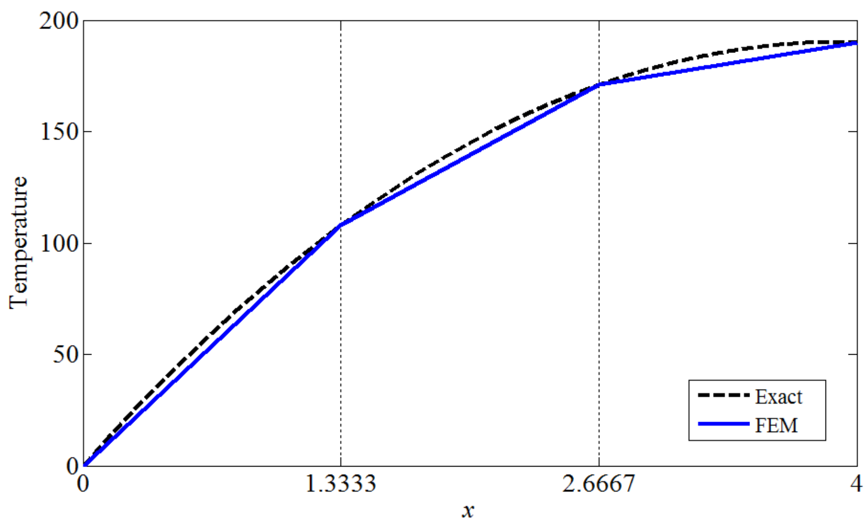




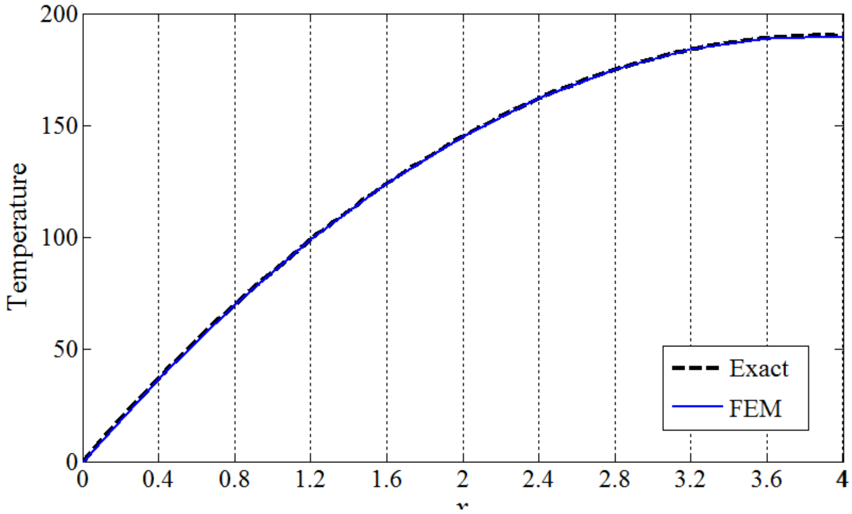
تمرین سری چهارم

مثال (۵-۱) را با سه المان خطی و دو المان درجه دو حل کنید.

در شکل زیر پاسخ حاصل از سه المان خطی با جواب دقیق مقایسه شده است.

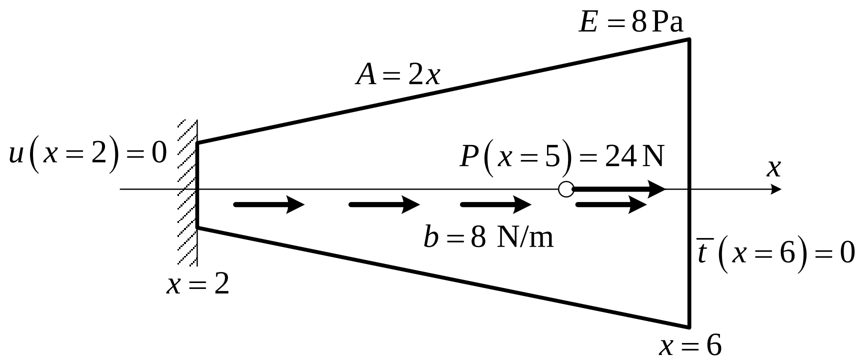


حل مثال قبل با ده المان



مثال (۵-۲): میله الاستیک مخروطی

میله مخروطی شکل زیر تحت بار محوری گسترده b و بار محوری متمرکز P قرار دارد. جابجایی‌ها و تنش‌های مجهول را با کمک روش اجزاء بدست آورید. از شبکه‌ای شامل یک المان سه گرهی استفاده کنید. ابعاد شکل به متر هستند.

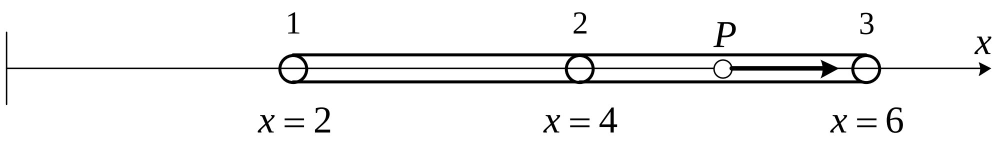


××

$$N_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-4)(x-6)}{(-2)(-4)} = \frac{1}{8}(x-4)(x-6)$$

$$N_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-2)(x-6)}{(2)(-2)} = -\frac{1}{4}(x-2)(x-6)$$

$$N_3 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(4)(2)} = \frac{1}{8}(x-2)(x-4)$$



×××

ماتریس $\vec{\mathbf{B}}$ متناظر برابر است با:

$$B_1 = \frac{dN_1}{dx} = \frac{1}{4}(x-5), \quad B_2 = \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{2}(4-x), \quad B_3 = \frac{dN_3}{dx} = \frac{1}{4}(x-3)$$

یا به فرم ماتریسی:

چون شبکه مسأله از یک المان تشکیل شده بنابراین ماتریس‌های سختی، نیرو و جابجایی‌های گرهی سیستم همان ماتریس‌های المان هستند.

لذا ماتریس سختی سیستم برابر است با:

$$\vec{\mathbf{K}} = \vec{\mathbf{K}}^{(1)} = \int_{x_1}^{x_3} \vec{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} AE\, \vec{\mathbf{B}}\, dx$$

×××

با جاگذاری بدست می‌آید:

$$\vec{\mathbf{K}} = \vec{\mathbf{K}}^{(1)} = \int_2^6 \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x-5 \\ 8-2x \\ x-3 \end{bmatrix}(2x)(8)\frac{1}{4}\begin{bmatrix} x-5 & 8-2x & x-3 \end{bmatrix} dx =$$

$$\int_2^6 \begin{bmatrix} x(x-5)^2 & x(x-5)(8-2x) & x(x-5)(x-3) \\ x(8-2x)(x-5) & x(8-2x)^2 & x(8-2x)(x-3) \\ x(x-3)(x-5) & x(x-3)(8-2x) & x(x-3)^2 \end{bmatrix} dx$$

×××

با توجه به اینکه چندجمله‌ای زیر انتگرال از درجه سوم است بنابراین استفاده از دو نقطه گاوس برای محاسبه دقیق کفایت می‌کند.

ژاکوبین نگاشت تبدیل برابر است:

با نوشتن x برحسب ξ انتگرال را بصورت زیر به ناحیه مادر نگاشت می‌کنیم:

$$\int_{2}^{6} f\left(x\right)dx = J\int_{-1}^{1} f\left(x(\xi)\right)d\xi = J\left[W_1 f\left(x(\xi_1)\right)+W_2 f\left(x(\xi_2)\right)\right]=2\left[f\left(x(\xi_1)\right)+f\left(x(\xi_2)\right)\right]$$

××

در این رابطه :

بنابراین:

$$x\left(\xi_1\right)=4+2\xi_1=4+2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2.8453 \qquad , \qquad x\left(\xi_2\right)=4+2\xi_2=4+2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=5.1547$$

به عنوان مثال درایه K_{11} ماتریس سختی برابر است با:

$$K_{11}=\int_{2}^{6} x\left(x-5\right)^2 dx = 2\left[2.8453\left(2.8453-5\right)^2+5.1547\left(5.1547-5\right)^2\right]=26.667$$

××

با روشی کاملاً مشابه می‌توان سایر درایه‌ها را حساب کرده و بدست آورد:

ماتریس نیروی جسمی هم با جمع اثرات نیروی جسمی b و نیروی متمرکز P بدست می‌آید:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\Omega}=\tilde{\mathbf{f}}_{\Omega}^{(1)}=\int_{x_1}^{x_3}\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}} b\,dx+\underbrace{\left(\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}P\right)\Big|_{x=5}}_{\text{contribution from the point force}}$$

××

با جاگذاری در رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\Omega}=\int_{2}^{6}\begin{bmatrix}\dfrac{(x-4)(x-6)}{8}\\ -\dfrac{(x-2)(x-6)}{8}\\ \dfrac{(x-2)(x-4)}{8}\end{bmatrix}\overset{b}{\times 8}\,dx+\begin{bmatrix}\dfrac{(x-4)(x-6)}{8}\\ -\dfrac{(x-2)(x-6)}{8}\\ \dfrac{(x-2)(x-4)}{8}\end{bmatrix}_{x=5}\times 24$$

با توجه به اینکه تابع زیر انتگرال (ترم اول) درجه دوم است نیاز به تربیع گاوس دو نقطه‌ای داریم:

××

$$\tilde{\mathbf{f}}_\Omega = 2\left\{\begin{bmatrix} \left(x(\xi_1)-4\right)\left(x(\xi_1)-6\right) \\ -\left(x(\xi_1)-2\right)\left(x(\xi_1)-6\right) \\ \left(x(\xi_1)-2\right)\left(x(\xi_1)-4\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(x(\xi_2)-4\right)\left(x(\xi_2)-6\right) \\ -\left(x(\xi_2)-2\right)\left(x(\xi_2)-6\right) \\ \left(x(\xi_2)-2\right)\left(x(\xi_2)-4\right) \end{bmatrix}\right\} + 3\begin{bmatrix} (5-4)(5-6) \\ -(5-2)(5-6) \\ (5-2)(5-4) \end{bmatrix} =$$

$$2\begin{bmatrix} (2.8453-4)(2.8453-6) \\ -(2.8453-2)(2.8453-6) \\ (2.8453-2)(2.8453-4) \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} (5.1547-4)(5.1547-6) \\ -(5.1547-2)(5.1547-6) \\ (5.1547-2)(5.1547-4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 18 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.33 \\ 21.33 \\ 5.33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 18 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.33 \\ 39.33 \\ 14.33 \end{bmatrix}$$

××

بنابراین معادله کلی عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 26.67 & -32 & 5.33 \\ -32 & 85.33 & -53.33 \\ 5.33 & -53.33 & 48 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.33 + r_1 \\ 39.33 \\ 14.33 \end{bmatrix}$$

با اعمال شرط مرزی $u_1 = 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 85.33 & -53.33 \\ 0 & -53.33 & 48 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 39.33 + 32\times 0 \\ 14.33 - 5.33\times 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

××

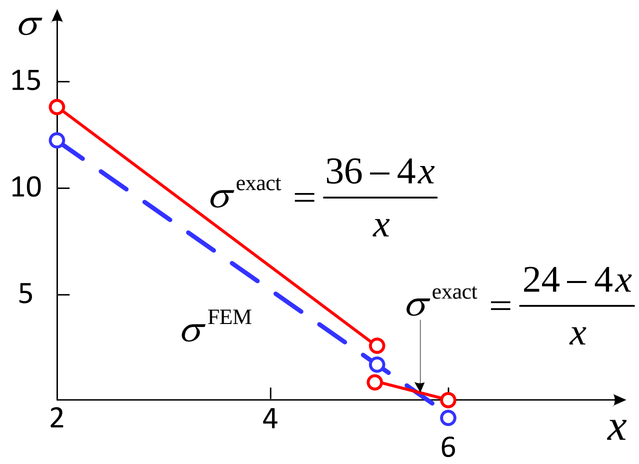
جابجایی و تنش میله با استفاده از مقادیر گرهی جابجایی برابر است با:

$$u = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{u}} = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 = \frac{1}{8}(x-4)(x-6)\times(0) - \frac{1}{4}(x-2)(x-6)\times(2.1193) +$$

$$\frac{1}{8}(x-2)(x-4)\times(2.6534) = -0.19815x^2 + 2.24855x - 3.7045$$

×××

شکل زیر تنش دقیق را با تنش بدست آمده توسط FEM (خط ممتد) مقایسه می‌کند. مطابق با شکل، جواب FEM قادر به پیش‌بینی پرش تنش میله در نقطه اعمال بار نیست.



×××

مثال (۵-۳)

معادله زیر را به روش اجزاء محدود و با کمک دو المان دو گرهی حل کنید. با رسم نمودار جواب دقیق و اجزاء محدود را مقایسه کنید.

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2x^3=0, \quad u(0)=1, \quad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=2}=-3.9$$

حل: ابتدا باید فرم ضعیف مسأله را پیدا کرد:

$$\int_0^2 w^T\left(\frac{d^2u}{dx^2}+2x^3\right)dx=0 \quad \Rightarrow$$

برای ترم اول معادله بالا از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

×××

$$-\int_0^2 \frac{dw^T}{dx}\frac{du}{dx}dx+w^T\left.\frac{du}{dx}\right|_0^2+2\int_0^2 w^T x^3 dx=0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 \frac{dw^T}{dx}\frac{du}{dx}dx=w^T\left.\frac{du}{dx}\right|_0^2+2\int_0^2 w^T x^3 dx$$

به عبارت دیگر:

$$\int_0^2 \frac{dw^T}{dx}\frac{du}{dx}dx=\left(w^T\frac{du}{dx}\right)_{x=2}-\left(w^T\frac{du}{dx}\right)_{x=0}+2\int_0^2 w^T x^3 dx$$

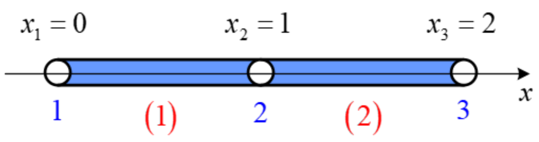
با توجه به شرایط مرزی داریم:

×××

در نتیجه:

$$\int_0^2 \frac{dw^T}{dx}\frac{du}{dx}dx = \left(-3.9w^T\right)_{x=2} + 2\int_0^2 w^T x^3 dx = 0$$

حال نوبت به گسسته‌سازی می‌رسد:



$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\left(N\tilde{w}\right)^T}{dx}\frac{d\left(N\tilde{u}\right)}{dx}dx = \left(-3.9\left(N\tilde{w}\right)^T\right)_{x=2} + 2\int_{x_1}^{x_2}\left(N\tilde{w}\right)^T x^3 dx = 0$$

$$\Rightarrow$$

××

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} B^T B dx}_{K^e}\, \tilde{u} = \underbrace{\left(-3.9N^T\right)_{x=2}}_{f_\Gamma^e} + \underbrace{2\int_{x_1}^{x_2} N^T x^3 dx}_{f_\Omega^e} = 0$$

برای هر المان داریم:

$$N = \begin{bmatrix} \dfrac{x_2 - x}{L} & \dfrac{x - x_1}{L} \end{bmatrix} \xrightarrow{L=1} N = \begin{bmatrix} x_2 - x & x - x_1 \end{bmatrix}$$

ابتدا برای المان اول:

$$K^{(1)} = \int_0^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

××

چون $x = 2$ جزء المان اول نیست: $\qquad f_\Gamma^{(1)} = 0$

از طرف دیگر:

$$f_\Omega^{(1)} = 2\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - x \\ x \end{bmatrix} x^3 dx = 2\int_0^1 \begin{bmatrix} x^3 - x^4 \\ x^4 \end{bmatrix} dx$$

چندجمله‌ای زیر انتگرال از درجه چهارم است. بنابراین:

پس باید از سه نقطه گاوس استفاده کرد.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= +0.775 & w_1 &= 0.556 \\ \xi_2 &= 0 & w_2 &= 0.889 \\ \xi_3 &= -0.775 & w_3 &= 0.556 \end{aligned} \qquad J = \frac{b-a}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

××

$$\begin{array}{l} x=0 \quad : \quad \xi=-1 \\ x=1 \quad : \quad \xi=+1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\xi+1}{2} \quad \Rightarrow \quad x(\xi_i)=\frac{\xi_i+1}{2}$$

با کمک تربیع گاوس:

$$f_{\Omega}^{(1)}=2\times\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix} x(\xi)^3-x(\xi)^4 \\ x(\xi)^4 \end{bmatrix} d\xi$$

$$f_{\Omega}^{(1)}=\begin{bmatrix} w_1\left(x(\xi_1)^3-x(\xi_1)^4\right)+w_2\left(x(\xi_2)^3-x(\xi_2)^4\right)+w_3\left(x(\xi_3)^3-x(\xi_3)^4\right) \\ w_1\left(x(\xi_1)\right)^4+w_2\left(x(\xi_2)\right)^4+w_3\left(x(\xi_3)\right)^4 \end{bmatrix}$$

××

با جایگذاری:

$$f_{\Omega}^{(1)}=\begin{bmatrix} 0.556\left(0.8875^3-0.8875^4\right) \\ 0.556(0.8875)^4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.889\left(0.5^3-0.5^4\right) \\ 0.889(0.5)^4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.556\left(0.1125^3-0.1125^4\right) \\ 0.556(0.1125)^4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

در نهایت:

××

به همین ترتیب برای المان دوم هم می‌توان نشان داد (اثبات به عهده دانشجو):

علاوه بر این:

$$f_{\Gamma}^{(2)}=\left(-3.9N^T\right)_{x=2}=-3.9\begin{bmatrix} 2-x \\ x-1 \end{bmatrix}_{x=2}=-3.9\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -3.9 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$f^{(2)}=f_{\Gamma}^{(2)}+f_{\Omega}^{(2)}=\begin{bmatrix} 0 \\ -3.9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2.6 \\ 4.9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

××

در گام بعد عملیات سر هم کردن انجام می‌شود:

$$K=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad f=\begin{bmatrix}0.1\\ 3\\ 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

با اعمال شرایط مرزی بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{u}_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{u}_1\\ 3+\bar{u}_1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{u}_1\\ 4\\ 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad u_2=5 \;\;,\;\; u_3=6$$

××

براحتی می‌توان جواب دقیق مسأله را بدست آورد: