چکیده مبسوط چهارمین سمینار آنالیز تابعی و کابردهای آن

۱۳-۱۲اسفند ۱۳۹۴، دانشگاه فردوسی مشهد

بررسی پایداری جواب‌های معادله ناویر-استوکس در $\mathbb{R}^2$ با استفاده از طیف عملگر خطی معادله پیچش

قاسم بابایی تهرانی [1] *، امیر علی جمشیدیان [2]، و اکبر زنجانی[3]

[1,2] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
author1@um.ac.ir
author2@um.ac.ir
[3] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند
author3@birjand.ac.ir

چکیده. در این مقاله با استفاده از طیف عملگر خطی معادله پیچش به بررسی پایداری جواب‌های معادله ناویر-استوکس در بعد ۲ خواهیم پرداخت و ضمن معرفی یک منیفلد پایا نشان می‌دهیم که این جواب‌ها دارای یک جاذب سراسری می‌باشند.

۰. پیش‌گفتار

مکانیک سیالات یکی از مهم‌ترین علوم است که اخیرا مورد توجه دانشمندان و به ویژه ریاضیدانان مختلفی قرار گرفته است. در این حوزه، از دیدگاه ریاضیدانان سعی بر این است که مدل‌هایی از حرکت سیالات به کمک معادلات ریاضی ارائه شود تا به وسیله آن بتوان دینامیک سیالات را شبیه سازی کرد. بهترین مدلی که تاکنون در این زمینه ارائه شده است که بطور تقریبا دقیقی حرکت سیالات را مدل می‌کند معادله ناویر-استوکس [۱] است که به صورت زیر فرمول می‌شود:

$$u_t(x,t) + (u(x,t).\nabla)u(x,t) = -\nabla p(x,t) + \nu \triangle u(x,t) \qquad (۱.۱)$$

که در آن $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$ سرعت حرکت سیال، $p = p(x,t) \in \mathbb{R}$ میدان فشار، $x \in \mathbb{R}^n$ ، $t \geq 0$ و νضریب چسبندگی است. اخیرا تحقیقات زیادی روی این مدل در بعدهای ۲ و ۳ انجام شده است. در این مقاله با استفاده از معادله پیچش این مدل در بعد ۲ و به کمک ابزارهای آنالیز تابعی مثل تئوری نیم‌گروه‌ها، عملگرها، طیف یک عملگر و ... سعی خواهیم کرد که تجزیه و تحلیل دقیقی از جواب‌های این مدل ارائه دهیم.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. معادله ناویر-استوکس، پایداری، طیف عملگر، نیم گروه .

* سخنران

[۱] Navier-Stokes

برای سادگی، فرض کنید $\nu = 1$ و تعریف کنید $\omega = \nabla \times u = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1$ که ω را پیچش میدان سرعت u می‌نامیم. اکنون اگر از طرفین معادله (۱.۱) کرل بگیریم خواهیم داشت:

$$\omega_t + (u.\nabla)\omega = \triangle\omega \tag{۲.۱}$$

که $\omega = \omega(x,t) \in \mathbb{R}$، $x = (x_1, x_2)$ و $t \geq 0$. معادله (۲.۱) را معادله پیچش می‌نامند. با استفاده از قانون بیوساوارت، u ظاهر شده در معادله (۲.۱) به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(X-Y)^{\perp}}{|x-y|^2} \omega(y) dy, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \tag{۳.۱}$$

که در آن $X = (x_1, x_2)^T$ و $X^{\perp} = (-x_2, x_1)^T$. حال اگر معادله (۲.۱) را با شرط اولیه $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2$ در نظر بگیریم در این صورت معادله (۲.۱) جواب یکتای سراسری $\omega \in C^0([0,\infty), L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^2))$ دارد [۱] و یکی از ویژگی‌های مهم معادله (۲.۱) این است که جرم کل ω حفظ می‌شود [۲] یعنی :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega(x,t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) dx, \qquad t \geq 0. \tag{۴.۱}$$

در ادامه برای بررسی رفتارهای مجانبی معادله (۲.۱) نیاز داریم که در فضاهای هیلبرت وزن دار که با $L^2(m)$ نمایش داده می‌شود کار کنیم. بنابراین برای هر $m \geq 0$ فضای هیلبرت $L^2(m)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$L^2(m) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^2) | \parallel f \parallel_m < \infty \} \tag{۵.۱}$$

که

$$\parallel f \parallel_m = \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^m |f(\xi)|^2 \right)^{1/2} = |b^m f|_2 \tag{۶.۱}$$

بطوریکه

$$|f(\xi)|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \qquad b_m(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

۲. تغییر متغیر، نیم‌گروه و طیف عملگر $\mathcal{L}$

تغییر متغیرهای زیر را در نظر بگیرید :

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1+t}}, \qquad \tau = \log(1+t) \tag{۱.۲}$$

در این صورت اگر $\omega(x,t)$ جواب (۲.۱) و $\mathbf{u}(x,t)$ میدان سرعت مطابق با آن طبق قانون بیوساوارت باشد تعریف می‌کنیم :

$$\omega(x,t) = \frac{1}{1+t} \mathsf{w}\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right) \tag{۲.۲}$$

$$\mathbf{u}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \mathbf{v}\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right) \tag{۳.۲}$$

بنابراین w در معادله زیر صدق می‌کند.

$$\partial_\tau \mathsf{w} = \mathcal{L}\mathsf{w} - (\mathbf{v}.\nabla_\xi)\mathsf{w} \tag{۴.۲}$$

که
$$\mathcal{L}\mathsf{w} = \triangle_\xi \mathsf{w} + \frac{1}{2}(\xi.\nabla_\xi)\mathsf{w} + \mathsf{w} \quad (۵.۲)$$
و
$$\mathbf{v}(\xi,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\xi-\eta)^\perp}{|\xi-\eta|}\mathsf{w}(\eta,\tau)d\eta. \quad (۶.۲)$$
اپراتور $\mathcal{L}$ تعریف شده در معادله (۴.۲) طبق تبدیل فوریه یک اپراتور خطی $S(\tau) = e^{\tau\mathcal{L}}$ تولید می‌کند که به صورت زیر تعیین می‌شود.
$$(\widehat{S(\tau)f})(p) = e^{-a(\tau)|p|^2}\hat{f}(pe^{\frac{-\tau}{2}}). \quad (۷.۲)$$

قضیه ۱.۲. فرض کنید $m \geq 0$ و $\mathcal{L}$ اپراتور خطی ظاهر شده در معادله (۴.۲) در $L^2(m)$ باشد که روی دامنه ماکزیمالش تعریف شده است آنگاه طیف عملگر $\mathcal{L}$ به صورت زیر است :
$$\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda\in\mathbb{C}|R(\lambda)\leq \frac{1}{2}-\frac{m}{2}\}\cup\{-\frac{k}{2}|k\in\mathbb{N}\} \quad (۸.۲)$$
بعلاوه اگر $m > 1$ و اگر $k\in\mathbb{N}$ در $k+1 < m$ صدق کند آنگاه $\lambda_k = -\frac{k}{2}$ مقدار ویژه تنها از $\mathcal{L}$ که مرتبه تکرار آن $\binom{2+k-1}{k}$ است.

برهان. با گرفتن تبدیل فوریه از اپراتور $\mathcal{L}$ در معادله (۵.۲) خواهیم داشت :
$$(\widehat{\mathcal{L}}u)(p) = -(|p|^2 + \frac{1}{2}p.\nabla p)\hat{u}(p)$$
بنابراین به راحتی می‌توان نشان داد که
$$\{\lambda\in\mathbb{C}|R(\lambda)\leq \frac{1}{2}-\frac{m}{2}\}\cup\{-\frac{k}{2}|k\in\mathbb{N}\}\subseteq\sigma(\mathcal{L})$$
و بر عکس طبق قضیه هیله-یوشیدا می‌توان ثابت کرد
$$\sigma(\mathcal{L})\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}|R(\lambda)\leq \frac{1}{2}-\frac{m}{2}\}\cup\{-\frac{k}{2}|k\in\mathbb{N}\}.$$
□

۳. منیفلد پایا

برای به کار بردن قضیه منیفلد پایا رفتار جواب‌های معادله (۴.۲) را در یک همسایگی از نقطه ثابت $\mathsf{w}=0$ بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\chi : L^2(m)\to\mathbb{R}$ یک تابع C^∞ باشد به طوری‌که $\chi(\mathsf{w}) = 1$ اگر $\|\mathsf{w}\|_m \leq 1$ و $\chi(\mathsf{w}) = 0$ اگر $\|\mathsf{w}\|_m \geq 2$. بنابراین برای هر $r_0 > 0$ و همه $\mathsf{w}\in L^2(m)$ تعریف می‌کنیم $\chi_{r_0}(\mathsf{w}) = \chi(\mathsf{w}/r_0)$. اکنون به جای معادله (۴.۲) معادله زیر را در نظر بگیرید :
$$\partial_\tau\mathsf{w} = \mathcal{L}\mathsf{w} - (\mathbf{v}.\nabla_\xi)(\chi_{r_0}(\mathsf{w})\mathsf{w}). \quad (۱.۳)$$
به طور واضح (۴.۲) و (۱.۳) برای $\|\mathsf{w}\|_m \leq r_0$ هم ارزند. فرض کنید $\phi_\tau^{r_0,m}$ نیم شار تولید شده توسط (۱.۳) و ϕ_τ^m نیم شار تولید شده توسط (۴.۲) باشد. بنابراین با استفاده از قضیه منیفلد پایا (CHT)[۳] برای $\phi_\tau^{r_0,m}$ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱.۳. فرض کنید $k \in \mathbb{N}$ و $m > k+2$ و همچنین فرض کنید W_c زیر منیفلد ساخته شده در CHT باشد تعریف می‌کنیم

$$W_c^{loc} = W_c \cup \{\mathsf{w} \in L^2(m) | \|\mathsf{w}\|_m < r_0\}. \tag{۲.۳}$$

آنگاه W_c^{loc} تحت شار ϕ_τ^m به طور موضعی پایا است. اگر $\mathsf{w}(\tau)$ یک نیم مسیر منفی از (۴.۲) باشد به طوری‌که $\|\mathsf{w}\|_m \le r_0$ برای همه $0 \le \tau$، آنگاه برای همه $\tau \le 0$، $\mathsf{w}(\tau) \in W_c^{loc}$. بعلاوه برای هر $\mu < \mu_2$ (که μ_2 در قضیه CHT معلوم می‌شود)، $r_2 > 0$ و $c > 0$ با خواص زیر وجود دارد : برای همه $\tilde{\mathsf{w}} \in L^2(m)$ با $\|\tilde{\mathsf{w}}\|_m \le r_0$، یک $\mathsf{w}_0 \in W_c^{loc}$ یکتا وجود دارد به طوری‌که $\phi_m^\tau(\mathsf{w}_0) \in W_c^{loc}$ برای همه $\tau \ge 0$ و

$$\|\phi_m^\tau(\tilde{\mathsf{w}}_0) - \phi_m^\tau(\mathsf{w}_0)\|_m \le c e^{-\mu\tau}, \qquad \tau \ge 0. \tag{۳.۳}$$

۴. نتایج اصلی

قضیه ۱.۴. فرض کنید $m > 1$، $\mathsf{w}_0 \in L^2(m)$ و همچنین فرض کنید $\mathsf{w} \in C^0([0, +\infty), L^2(m))$ جوابی از (۴.۲) با مقدار اولیه w_0 باشد. آنگاه

$$\|\mathsf{w} - \alpha G\|_m \to 0 \tag{۱.۴}$$

زمانی که $\tau \to +\infty$. که در آن $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \mathsf{w}_0(\xi) d\xi$ و $G(\xi) = \frac{1}{4\pi} e^{-|\xi|/4}$ تابع ویژه متناسب با مقدار ویژه $\lambda_0 = 0$ است که جواب ثابت معادله (۴.۲) نیز می‌باشد.

اکنون اگر عکس تغییر متغیر (۱.۲) را در تابع $G(\xi)$ اعمال کنیم نتایج زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۲.۴. فرض کنید $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ جواب $\omega(x,t)$ از (۲.۱) در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{p}} |\omega(.,t) - \frac{\alpha}{t} G(\frac{.}{\sqrt{t}})|_p = 0 \qquad , \qquad 1 \le p \le \infty$$

که $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) dx$. اگر $\mathbf{u}(x,t)$ جواب معادله ناویر-استوکس بدست که از قانون بیوساورات توسط $\omega(x,t)$ باشد در این صورت

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} |\mathbf{u}(.,t) - \frac{\alpha}{\sqrt{t}} \mathbf{v}^G(\frac{.}{\sqrt{t}})|_q = 0 \qquad , \qquad 2 < q \le \infty$$

که در آن $\mathbf{v}^G$ میدان سرعت متناسب با G است.

مراجع

1. M. Ben-Artzi, *Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 128(4):329–358, 1994..
2. Thierry Gallay, C. Eugene Wayne, *Invariant Manifolds and the Long-Time Asymptotics of the Navier-Stokes and Vorticity Equations on* $\mathbb{R}^2$, Archive for Rational Mechanics and Analysis Volume 163, Issue 3, pp 209–258, June 2002.
3. Xu-Yan Chen, Jack K. Hale, and Bin Tan, *Invariant foliations for C1 semigroups in Banach spaces*,J. Differential Equations, 139(2):283–318, 1997.