به نام خالق ستارگان

12th IOAA team

I.R.IRAN

پاسخنامه آزمون شبیه‌ساز مرحله دوم

المپیاد نجوم و اختر فیزیک

دوازدهمین تیم ملی المپیاد نجوم و اختر فیزیک

به سایر راه‌حل‌های درست سوالات نیز نمره تعلق میگیرد.

سوال اول(۱۰نمره)

الف) با توجه به اینکه مسئله در رابطه با گرانش است پارامتر های دخیل در مسئله عبارتند از : $\lambda . G . R$ ابتدا بعد این سه پارامتر را به دست می آوریم :

$$[\lambda] = \frac{M}{L}$$

$$[R] = L$$

$$[G] = \frac{L^{۳}}{MT^{۲}}$$

پس داریم :

$$T = C\lambda^{\alpha} R^{\beta} G^{\gamma}$$

$$T = C\left[\frac{M}{L}\right]^{\alpha} [L]^{\beta} \left[\frac{L^{۳}}{MT^{۲}}\right]^{\gamma}$$

$$\alpha - \gamma = ۰ . -\alpha + \beta + ۳\gamma = ۰ . -۲\gamma = ۱$$

$$\alpha = \gamma = -\frac{۱}{۲} . \beta = ۱ \overset{T}{\Rightarrow} T = C\frac{R}{\sqrt{\lambda G}}$$

به دست آوردن هر توان درست ۲ نمره دارد . در مجموع قسمت الف ۶ نمره دارد.

ب)

$$\frac{T_{۲}}{T_{۱}} = \frac{R_{۲}}{R_{۱}} \times \sqrt{\frac{\lambda_{۱}}{\lambda_{۲}}} \overset{\text{داریم}}{\Longrightarrow} \frac{T_{۲}}{T_{۱}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

به دست آوردن جواب نهایی صحیح ۴ نمره دارد .

سوال دوم(۱۰نمره)

الف)ابتدا دمای این مایع را به دست می‌آوریم و اگر دمای به دست آمده در بازه دمای جوش تا انجماد آب باشد، می توان استدلال کرد که مایع موردنظر آب باشد .

$$\frac{L_{\odot}}{۴\,\pi r^{۲}} \times \left(\pi R_p{}^{۲}\right) \times (۱-a) = \sigma T_p{}^{۴}\, ۴\,\pi R_p{}^{۲} \quad ۲$$

طرف چپ معادله بالا مقدار انرژی است که سیاره از ستاره جذب می کند و طرف راست مقدار انرژی است که با فرض جسم سیاه بودن تابش می کند .

$$L_{\odot} = \sigma T_{\odot}{}^{۴}۴\pi R_{\odot}{}^{۲} \rightarrow \quad T_p = T_{\odot}\left(\frac{(۱-a)R_{\odot}{}^{۲}}{۴r^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۴}} \quad \text{و} \quad P^{۲} = \frac{۴\pi^{۲}r^{۳}}{GM_{\odot}}$$

که در رابطه بالا P دوره تناوب انتقالی سیاره به دور ستاره است .

$$\rightarrow r = ۵.۸۸ \times ۱۰^{۱۰}m = ۰.۳۹\ AU \quad ۱$$

$$\rightarrow T_p = ۳۳۰\ K = ۵۶\ \text{سانتی گراد} \quad ۲$$

پس مایع مورد نظر می تواند آب باشد .

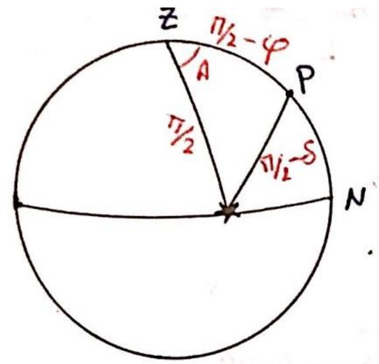
ب) برای این قسمت فرض میکنیم ۷۵٪ سطح کره زمین از آب تشکیل شده و میانگین ارتفاع آب از سطح برابر ۸ کیلومتر است . از آنجایی که ارتفاع آب نسبت به شعاع زمین بسیار کم است داریم:

$$V_{\text{حجم آب های کره زمین}} \cong ۰.۷۵ \times ۴\,\pi R_{earth}{}^{۲}h = ۳ \times ۱۰^{۱۸}m^{۳} \quad ۲$$

$$V_{\text{حجم آب سیاره}} \cong ۴\,\pi R_p{}^{۲}h_p => \left(V_{\text{حجم آب سیاره}} = V_{\text{حجم آب های کره زمین}}\right) \text{و}\ R_p = \frac{R_{earth}}{۳} \quad ۲$$

$$\rightarrow h_p = ۵۴\ km \quad ۱$$

سوال سوم(۲۵نمره)

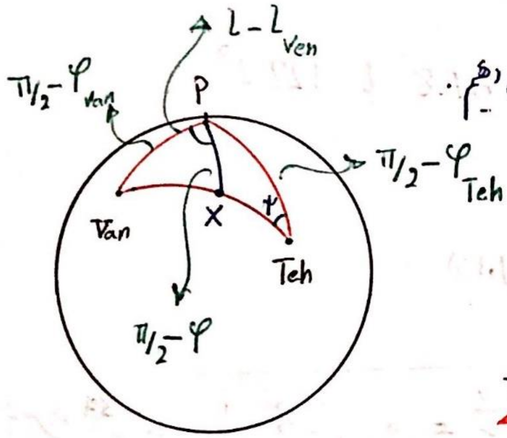


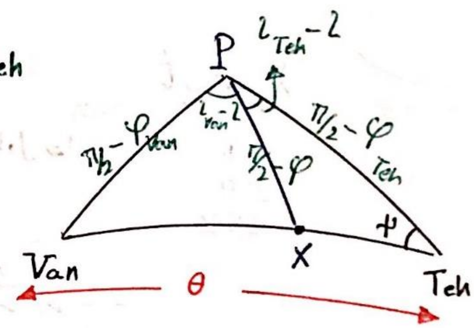
الف) می دانیم ستاره وگا در لبه افق قرار دارد بنابراین زاویه ی راستای شمال با ستاره همان سمت طلوع / غروب ستاره است.

$$\cos(\pi/2-\delta) = \cos(\pi/2)\cos(\pi/2-\varphi) + \sin(\pi/2)\sin(\pi/2-\varphi)\cos A_{\text{طلوع}}$$ ۳

$$\Longrightarrow \cos A_{\text{طلوع}} = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \xrightarrow[A=34]{\delta=38^\circ} \boxed{\varphi = 42^\circ}$$ ۲

ب) شهری که در آن سقوط کرده اند را با X نشان می دهیم.





۳

$$\cos\theta = \sin\varphi_{Teh}\sin\varphi_{Van} + \cos\varphi_{Teh}\cos\varphi_{Van}\cos(l_{Teh}-l_{Van}) \longrightarrow \theta = 95^\circ$$ ۲

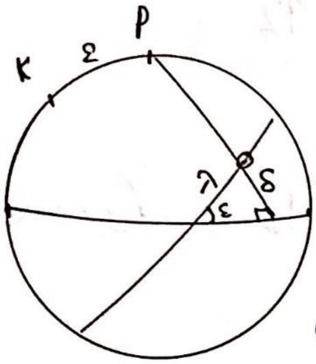
$$\cos\psi = \frac{\sin\varphi_{Van} - \cos\theta\sin\varphi_{Teh}}{\cos\varphi_{Teh}\sin\theta} \longrightarrow \psi = 4.3^\circ$$ ۱

چهار جزئی : $\cos(l_{Teh}-l)\sin\varphi_{Teh} = \cos\varphi_{Teh}\tan\varphi - \sin(l_{Teh}-l)\cot\psi$ ۱

با حل معادله $\Longrightarrow l_{Teh} - l = 0.65 \rightsquigarrow \boxed{l = 50.7}$ ۱

$\Longrightarrow X \begin{pmatrix} 42_N \\ 50.7_E \end{pmatrix}$ ۴

ج) $\cot A_{\text{طلوع}\,\odot} = \dfrac{\sin\delta_\odot}{\cos\varphi} \xrightarrow[\varphi = 42]{A_{\text{طلوع}} = 63} \sin\delta_\odot = 0.34$ ۳



$\dfrac{\sin\lambda}{\sin\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} \longrightarrow \sin\delta = \sin\varepsilon \sin\lambda$

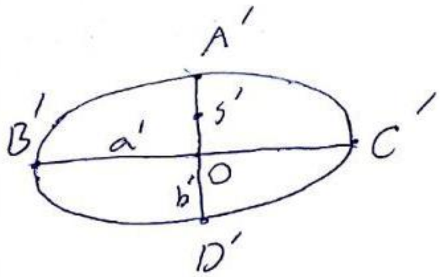
$\longrightarrow \lambda = 57.8^\circ$ یا 122.2° ۳

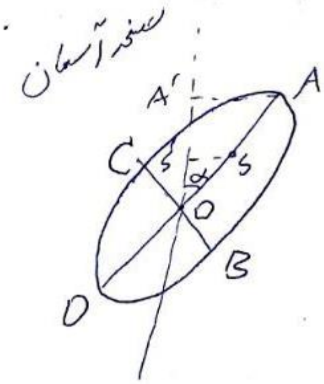
$\lambda = \omega t$

$\omega \to \dfrac{360}{365.25}$ ، $t \to$ از اول بهار

۲ $\longrightarrow$ $\boxed{t = 28 \text{ اردیبهشت یا } 2 \text{ مرداد}}$

سوال چهارم(۳۰نمره)



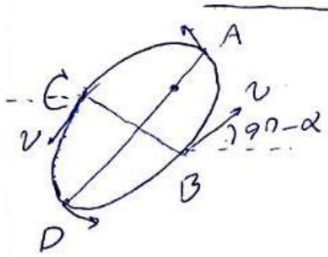


$$OS' = OS\cos\alpha \,,\quad OA' = OA\cos\alpha \Rightarrow \frac{OS}{OA} = \frac{ae}{a} = \boxed{e = \frac{OS'}{OA'}}$$ ۵

$$a' = OB' = b = OB \qquad b = a\sqrt{1-e^2} \Rightarrow a = \frac{b}{\sqrt{1-e^2}} = \boxed{\frac{OB'}{\sqrt{1-\frac{OS'^2}{OA'^2}}}}$$ ۵

$$OA' = b' = OA\cos\alpha = a\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b'}{a}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \boxed{\frac{OA'}{OB'}\sqrt{1-\frac{OS'^2}{OA'^2}}}$$ ۵



$$v_{r_{C'}} - v_{r_{B'}} = v\sin\alpha - (-v\sin\alpha) = 2v\sin\alpha$$ ۵

$$-\frac{k}{2a} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k}{a} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{a}}$$

$$v_A + v_D = v_p + v_a = \sqrt{\frac{k}{a}\,\frac{1+e}{1-e}} + \sqrt{\frac{k}{a}\,\frac{1-e}{1+e}}$$ ۵

$$\frac{v_{r_{C'}} - v_{r_{B'}}}{v_A + v_D} = \frac{2\sqrt{\frac{k}{a}}\sin\alpha}{\sqrt{\frac{k}{a}\,\frac{1+e}{1-e}} + \sqrt{\frac{k}{a}\,\frac{1-e}{1+e}}} = \frac{2\sqrt{1-e}\sqrt{1+e}\,\sin\alpha}{1+e+1-e} = \boxed{\sqrt{1-e^2}\,\sin\alpha}$$ ۵

سوال پنجم(۴۰نمره)

الف) (10 نمره)

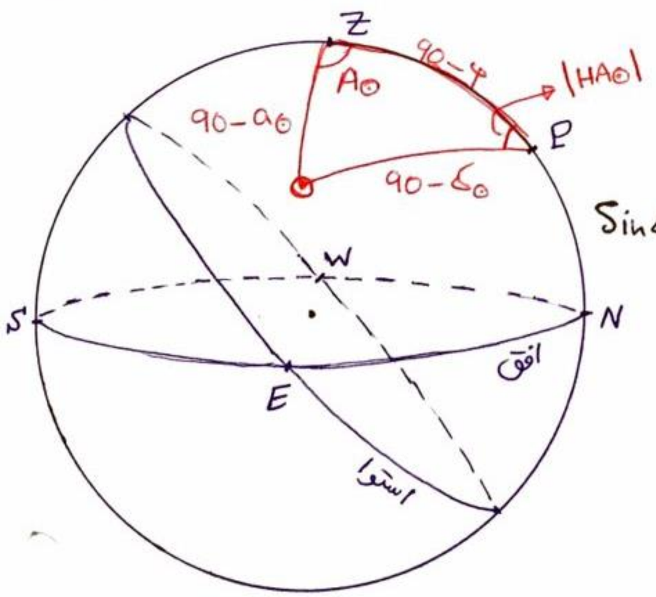
با توجه به مختصات داده شده متوجه می‌شویم که نیروگاه در کشور ایران واقع شده است.
پس از ساعت محلی یک ساعت کم میکنیم تا اثر ساعت تابستانی جبران شود.

$$\text{ساعت محلی}: 11 \longrightarrow \left.\begin{array}{l} LMT = 10_h \\ LMT = 12 + HAMS \end{array}\right\} \longrightarrow HAMS = -2_h = -30^\circ$$

$$RAMS = \frac{360}{365.25} \times \underbrace{(\text{تعداد روز های گذشته از ابتدای سال})}_{31+7} - 1.8^\circ = 35.65^\circ$$

$$HAMS + RAMS = LST \longrightarrow LST = 5.65^\circ \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} HA_\odot + RA_\odot = LST \\ RA_\odot = \cos^{-1}\left(\dfrac{\cos\lambda_\odot}{\cos\delta_\odot}\right) \\ \sin\delta_\odot = \sin\varepsilon \sin\lambda_\odot \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{cases} \delta_\odot = 14.03^\circ \\ HA_\odot = -29.44^\circ \end{cases} \quad (1)$$



$$\sin a_\odot = \sin\varphi \sin\delta_\odot + \cos\varphi \cos\delta_\odot \cos H$$

$$\longrightarrow \boxed{a_\odot = 58.1^\circ} \quad (4)$$

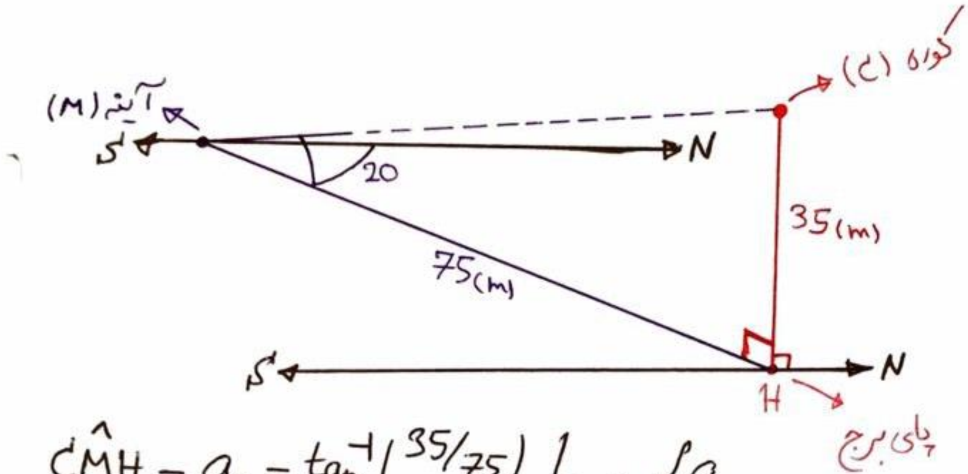
$$\sin\delta_\odot = \cos\varphi \cos a_\odot + \sin\varphi \sin a_\odot \cos A_\odot$$

$$\longrightarrow \boxed{A_\odot = 118.8^\circ} \quad (4)$$

ب)

ابتدا سمت و ارتفاع کوره از دید آینه را محاسبه می‌کنیم:

(15 نمره)

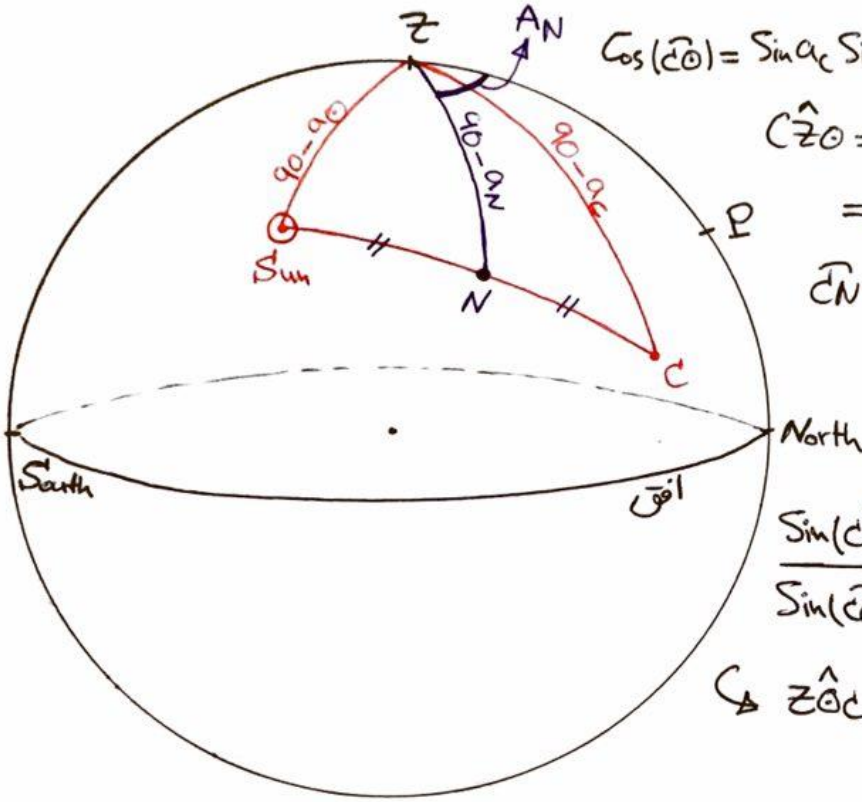


$$\hat{CMH} = a_c = \tan^{-1}(35/75) \;\Big|\longrightarrow \begin{cases} a_c = 25^\circ \\ A_c = 20^\circ \end{cases}$$
$$\hat{HMN} = A_c \longrightarrow A_c = 20^\circ E$$

2

برای آنکه بازتاب نور خورشید از آینه به روی کوره بیافتد، باید خط عمود بر صفحه‌ی آینه به سمت و ارتفاعی اشاره کند که درست در وسط دایره‌ عظیمه‌ی واصل کوره و خورشید باشد:

3



$$\cos(\widehat{C\odot}) = \sin a_c \sin a_\odot + \cos a_c \cos a_\odot \cos(C\hat{Z}\odot)$$

$$C\hat{Z}\odot = A_\odot - A_c$$

$$\Rightarrow \widehat{C\odot} = 73.4^\circ$$

$$\widehat{CN} = \widehat{N\odot} = \frac{\widehat{C\odot}}{2} = 36.7^\circ$$

$$\frac{\sin(C\hat{Z}\odot)}{\sin(\widehat{C\odot})} = \frac{\sin(Z\hat{\odot}C)}{\sin(90-a_c)}$$

$$\hookrightarrow Z\hat{\odot}C = \begin{cases} 69.16 \checkmark \\ 110.8 \times \end{cases}$$

$$\cos(\widehat{ZN}) = \sin a_\odot \cos(\widehat{\odot N}) + \cos a_\odot \sin(\widehat{\odot N}) \cos(Z\hat{\odot}C)$$

$$\rightarrow \widehat{ZN} = 37.5 \equiv 90 - a_N \rightarrow \boxed{a_N = 52.5^\circ} \quad 5$$

$$\frac{\sin(\odot\hat{Z}N)}{\sin(\widehat{\odot N})} = \frac{\sin(Z\hat{\odot}C)}{\sin(\widehat{ZN})} \rightarrow \odot\hat{Z}N = 66.56^\circ$$

$$A_n = A_\odot - \odot\hat{Z}N \rightarrow \boxed{A_n = 52.2^\circ} \quad 5$$

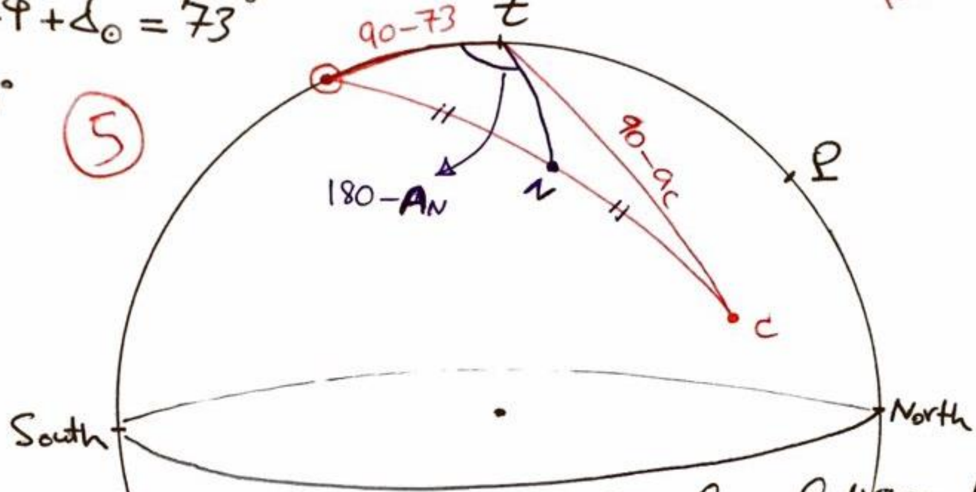
ج) میدانیم در هنگام اذان ظهر زاویه ساعتی خورشید صفر است :

(15 نمره)

$$a_\odot = 90 - \varphi + \delta_\odot = 73^\circ$$

$$A_\odot = 180^\circ$$

5



$$\cos(\widehat{\odot C}) = \sin a_c \sin a_\odot + \cos a_c \cos a_\odot \cos(180 - A_c)$$

$$\rightarrow \widehat{\odot C} = 81.1^\circ$$

$$\sin a_c = \cos(\widehat{\odot C}) \sin a_\odot + \sin(\widehat{\odot C}) \cos a_\odot \cos(Z\hat{\odot}C)$$

$$\rightarrow Z\hat{\odot}C = 18^\circ$$

$$\cos(\widehat{ZN}) = \sin a_\odot \cos\left(\frac{\widehat{\odot C}}{2}\right) + \cos a_\odot \sin\left(\frac{\widehat{\odot C}}{2}\right) \cos(Z\hat{\odot}C)$$

$$\rightarrow \widehat{ZN} = 24.8^\circ \rightarrow \boxed{a_N = 65.1^\circ}$$ 5

$$\frac{\sin(180 - A_N)}{\sin\left(\frac{\widehat{\odot C}}{2}\right)} = \frac{\sin(Z\hat{\odot}C)}{\sin(\widehat{ZN})} \rightarrow \boxed{A_N = 28.5^\circ}$$ 5

سوال ششم(۲۵نمره)

با فرض گفته شده $\quad q = -\dfrac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = cte = q_0$

زمان حال است

$$\rightarrow \ddot{a}\,da = \dot{a}\,d\dot{a} \Rightarrow -q_0 \dot{a}^2 \frac{da}{a} = \dot{a}\,d\dot{a}$$

$$\Rightarrow -q_0 \int_{a_0}^{a} \frac{da}{a} = \int_{\dot{a}_0}^{\dot{a}} \frac{d\dot{a}}{\dot{a}} \Rightarrow -q_0 \ln\left(\frac{a}{a_0}\right) = \ln\left(\frac{\dot{a}}{\dot{a}_0}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-q_0} = \frac{\dot{a}}{\dot{a}_0} \Rightarrow a_0^{q_0}\dot{a}_0 \int_{\underset{\text{Big Bang}}{0}}^{t} dt = \int_{\underset{\text{Big Bang}}{0}}^{a} a^{q_0}\,da$$

$$q_0 > 0 \Rightarrow q_0 \neq -1 \Rightarrow a_0^{q_0}\dot{a}_0 t = \frac{1}{1+q_0} a^{1+q_0}$$

$$\Rightarrow a_0^{1+q_0}\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right) t = \frac{1}{1+q_0} a^{1+q_0}$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0} \Rightarrow \frac{1}{1+q_0} a^{1+q_0} = H_0 a_0^{1+q_0} t$$

$$\Rightarrow \boxed{a(t) = a_0\left((1+q_0)H_0 t\right)^{\frac{1}{1+q_0}}} \quad ۲۵$$

سوال هفتم(۶۰نمره)

الف) با استفاده از انرژی واحد جرم داریم:

$$\varepsilon_H = -\frac{GM}{r_{aH}} + \frac{v_H^{۲}}{۲}\,(۱) = -۵.۸ \times ۱۰^{۷}\,\frac{J}{kg} \quad \text{و} \quad \varepsilon_H = -\frac{GM}{۲a_H}\,(۱) \Rightarrow a_H = ۳۴۳۳.۵\ km\,(۳)$$

از رابطه سرعت در بیضی برای محاسبه سرعت فرود($r = R_e$) داریم(۱)

$$v_H(landing) = \sqrt{GM\left(\frac{۲}{R_e} - \frac{۱}{a_H}\right)}\ (۱) = ۲.۹۸\,\frac{km}{s}\,(۳)$$

(۵) شکل مناسب

ب) ابتدا زوایای زیر را در شکل موجود در متن سوال تعریف میکنیم: (مرکز زمین: C)

زاویه راستای اوج مدار Falcon با راستای اوج مدار Heavy : β .... زاویه FCH (۱)

زاویه راستای اوج مدار Falcon تا محل فرود Falcon: θ_f .... زاویه $FCF_{landing}$ (۱)

زاویه راستای اوج مدار Heavy تا محل فرود Heavy: θ_h .... زاویه $HCH_{landing}$ (۱)

بنابراین جدایی زاویه محل فرود دو موشک از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta\theta = \beta + \theta_h - \theta_f$$

حال مشخصات دو مدار تا محاسبه می‌کنیم:

Heavy:

$$\boldsymbol{a_H = 3433.5\ km}$$

$$r_{aH} = a_H(۱ + e_H) = ۶۴۷۸\ km\ \ (۱) \Rightarrow \quad \boldsymbol{e_H = 0.89}\ \ (\mathbf{3})$$

Falcon:

$$\varepsilon_F = -\frac{GM}{r_{aF}} + \frac{v_F^{۲}}{۲}\,(۱) = -۶ \times ۱۰^{۷}\,\frac{J}{kg} \ \text{و}\ \varepsilon_F = -\frac{GM}{۲a_F}\,(۱) \quad \Rightarrow \boldsymbol{a_F = 3317.5\ km}\ \ (\mathbf{3})$$

$$r_{aF} = a_F(۱ + e_F) = ۶۴۳۸\square\square\ \ (۱) \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{e_F = 0.94}\ (\mathbf{3})$$

حال برای محاسبه β داریم:

$$r_{aF} = \frac{a_H(۱ - e_H^۲)}{۱ + e_H \cos(۱۸۰ - \beta)} = ۶۴۳۸\ km \ \ (۱) \Rightarrow \ \beta = ۲.۳\ ° \ (۱)$$

برای محاسبه θ_H داریم:

$$R_e = \frac{a_H(۱ - e_H^۲)}{۱ + e_H \cos(۱۸۰ - \theta_H)} = ۶۳۷۸\ km \ \ (۱) \Rightarrow \ \theta_H = ۳.۶۴\ ° \ (۱)$$

برای محاسبه θ_F داریم:

$$R_e = \frac{a_F(۱ - e_F^۲)}{۱ + e_F \cos(۱۸۰ - \theta_F)} = ۶۳۷۸\ km \ \ (۱) \Rightarrow \ \theta_F = ۱.۹۵\ ° \ (۱)$$

بنابر این جدایی زاویه نقاط فرود برابر است با:

$$\delta\theta = \beta + \theta_h - \theta_f \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\delta\theta = 4°} \ \ (۱)$$

پس اختلاف محل فرود دو موشک برابر است با:

$$\delta r = ۲\,\pi R \frac{\delta\theta}{۳۶۰} = \mathbf{445\ km}\ \mathbf{(5)}$$

ج) از آنجا که در نقطه F جسم در اوج مدار اولیه است، راستای سرعت عمود بر راستای شعاع می‌باشد و از تعریف زاویه پرواز(γ) "زاویه بین راستای سرعت و راستای عمود بر شعاع" می دانیم زاویه بین بردار ثانویه و بردار اولیه سرعت درواقع همان زاویه پرواز جسم در مدار ثانویه است. **(توضیحات مناسب ۵)**

ابتدا سرعت ثانویه (سرعت در مدار *Heavy*) را محاسبه می‌کنیم:

$$v' = \sqrt{GM\left(\frac{۲}{r_{aF}} - \frac{۱}{a_H}\right)} \ \ (۱) = ۲.۷۸ \frac{km}{s} \ \ (۱)$$

حال از رابطه زاویه پرواز با آنومالی حقیقی داریم:

$$\tan\gamma = \frac{e_H \sin\beta}{۱ + e_H \cos\beta} \ \ (۲) \ \Longrightarrow \ \boldsymbol{\gamma = 1.1°} \ \ \mathbf{(2)}$$

حال برای به دست آوردن اندازه تغییرات سرعت داریم:

$$\delta v = \sqrt{v^۲ + v'^2 - ۲\,vv'\cos\gamma} \ \ (۱) \ = \mathbf{0.86\frac{km}{s}} \ \ \mathbf{(5)}$$

سوال هشتم (۶۰نمره)

$$u = nE \rightarrow \frac{u_f}{u_b} = \frac{u_\nu}{u_\gamma} = \frac{n_\nu E_\nu}{n_\gamma E_\gamma} = \frac{\frac{7}{8}\frac{\pi^2}{15} g_\nu \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}}{\frac{\pi^2}{15} g_\gamma \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}} \rightarrow \frac{E_\nu}{E_\gamma} = \frac{7}{8}$$ ۵

$$g_\nu = 1, \quad g_\gamma = 2$$

$$4p \rightarrow {}^{4}_{2}He + 2e^+ + 2\nu$$
$$e + e^+ \rightarrow 2\gamma$$
$$\rightarrow n_\gamma = 2n_\nu$$ ۵

انرژی کل دادنی : $E = \Delta m c^2 = (4m_p - m_{He} - 2m_e)c^2 = 4.12 \times 10^{-12}\,J$ ۵

$$E = 4E_\gamma + 2E_\nu$$ ۵

$$\rightarrow E = 4E_\gamma + 2 \times \frac{7}{8} E_\gamma = \frac{23}{4} E_\gamma = 4.12 \times 10^{-12}\,J \rightarrow E_\gamma = 7.14 \times 10^{-12}\,J = \frac{hc}{\lambda} \simeq kT \rightarrow \boxed{T_\gamma = 5.2 \times 10^{10}\,K}$$ ۵ ۵

$$\rightarrow \boxed{E_\nu = 6.27 \times 10^{-12}\,J}$$ ۲,۵

$$E \propto \sigma \rightarrow \frac{E}{E_\odot} = \frac{\sigma_\nu}{\sigma_{\nu\odot}} \rightarrow \frac{E(J)}{7.14 \times 10^{-12}\,J} = \frac{10^{-43}\,cm^2}{10^{-45}\,cm^2} \rightarrow \boxed{E_\nu = 6.27 \times 10^{-10}\,J}$$ ۵

$$E_\nu = \frac{7}{8} E_\gamma \rightarrow E_\gamma = 7.14 \times 10^{-10} = kT_\gamma \rightarrow T_\gamma = 5.2 \times 10^{13}\,K$$ ۲,۵

$$\frac{T_c}{T_\gamma} = \frac{T_{c\odot}}{T_{\gamma\odot}}, \quad T_{c\odot} = 15 \times 10^6\,K \rightarrow \boxed{T_c = 1.5 \times 10^{10}\,K}$$ ۱۰

فشار ستون جرم $= \frac{GM^2}{R^4} \simeq \frac{\rho kT}{\bar{m}} \rightarrow T \simeq \frac{GM^2 \bar{m}}{k\rho R^4}$

$$\rho \simeq \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\rightarrow T \simeq \frac{\frac{4\pi}{3} G M \bar{m}}{kR}, \quad R \simeq cte. \rightarrow \boxed{\frac{T}{T_\odot} = \frac{M}{M_\odot} \simeq 1000}$$ ۵

سوال نهم(۲۵نمره)

الف) از معادله فریدمان داریم $(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - kc^2$ که برای کیهانی تخت *k=0* ۲

پس داریم:

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_0 a^{-2}$$

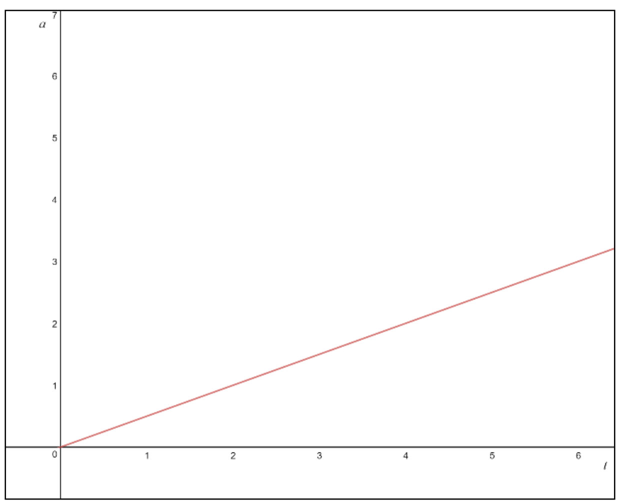
پس از ساده سازی داریم:

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho_0} = H_0 \quad ۱$$

$$\rightarrow \int_0^a da = \int_0^t H_0 dt \quad ۱$$

$$a(t) = H_0 t \quad ۱$$

پس فاکتور مقیاس با زمان به صورت خطی افزایش می یابد و نمودار آن به صورت زیر میباشد:



۲

ب) $\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 2 \times 10^5 \frac{kg}{m^3}$ ۳

ج) چگالی کیهان برابر جمع چگالی همه ی انواع ذرات میباشد و چگالی هر نوع ذره برابر حاصل ضرب چگالی تعداد آن در جرمش است. ۲

اگر جرم و چگالی تعداد ذره ی نوع ۱ را m و n در نظر بگیریم:

$$\rho_{.} = nm + \left(\frac{n}{۳}\right)(۲\, m) + \left(\frac{n}{۹}\right)(۴\, m) + \left(\frac{n}{۲۷}\right)(۸\, m) + \cdots$$
$$= nm[۱ + \left(\frac{۲}{۳}\right) + \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} + \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳} + \cdots]$$ ۴

برای حساب کردن دنباله بالا از این راه استفاده میکنیم:

$$S \equiv ۱ + x + x^{۲} + x^{۳} + \cdots$$

$$\rightarrow Sx = x + x^{۲} + x^{۳} + x^{۴} + \cdots$$

پس از کم کردن دو رابطه از هم داریم:

$$S(۱ - x) = ۱ \rightarrow S = \frac{۱}{۱ - x}$$ ۶

پس جواب دنباله ی بالا به ازای $x = \frac{۲}{۳}$ برابر با ۳ میشود.

چگالی ذره ی نوع ۱ برابر است با nm پس داریم:

$$\rho_{۱} = \frac{\rho_{.}}{۳} = ۶.۶ \times ۱۰^{۴}\ \frac{kg}{m^{۳}}$$ ۳

سوال دهم(۳۰نمره)

الف)

$$B-V = -2.5\log\left(\frac{I_B\,\Omega}{I_V\,\Omega}\right) = -2.5\log\left(\frac{B(\lambda_B)\,\Delta\lambda_B}{B(\lambda_V)\,\Delta\lambda_V}\right)$$

2.5

$$B(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

$$\Rightarrow B-V = -2.5\log\left(\frac{\lambda_V^5}{\lambda_B^5}\,\frac{e^{hc/\lambda_V kT}-1}{e^{hc/\lambda_B kT}-1}\,\frac{\Delta\lambda_B}{\Delta\lambda_V}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{hc/\lambda_V kT}-1}{e^{hc/\lambda_B kT}-1}\left(\frac{\lambda_V^5\,\Delta\lambda_B}{\lambda_B^5\,\Delta\lambda_V}\right) = 10^{\frac{B-V}{-2.5}}$$

حل عددی

$$\Rightarrow \begin{cases} T_{NAIKASH,eff} = T_{N,eff} = 4826\ K & (4) \\ T_{IQAH,eff} = T_{I,eff} = 5145\ K & (4) \end{cases}$$

حل (در حساب ۰،۵)

$$m_{bol,N} - m_{bol,I} = -2.5\log\left(\frac{b_N}{b_I}\right) = -2.5\log\left(\frac{\frac{L_N}{\cancel{4\pi d^2}}}{\frac{L_I}{\cancel{4\pi d^2}}}\right)$$

$$= -2.5\log\left(\frac{4\pi R_N^2\,\sigma T_{eff,N}^4}{4\pi R_I^2\,\sigma T_{eff,I}^4}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{R_N^2}{R_I^2} \cdot \frac{T_{N,eff}^4}{T_{I,eff}^4} = 10^{-\frac{m_{bol,N} - m_{bol,I}}{2.5}}$$

5

$$\Longrightarrow \frac{R_N}{R_I} = 0.424$$

6)

$$[P_c] = \left[\frac{F}{A}\right] = \left[\frac{ma}{A}\right] = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$$

$$[M] = kg$$

$$[R] = m$$

$$[G] = \frac{N \cdot m^2}{kg^2} = \frac{\cancel{kg} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m^2}{kg^{\cancel{2}}} = \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

$$P_c \propto G^{\alpha} M^{\beta} R^{\gamma} \Longrightarrow \frac{kg}{m \cdot s^2} = \frac{m^{3\alpha}}{kg^{\alpha} \cdot s^{2\alpha}} \cdot kg^{\beta} \, m^{\gamma}$$

$$\alpha = 1$$

$$kg: \quad \beta - \alpha = 1 \Rightarrow \beta = 2$$

$$m: \quad 3\alpha + \gamma = -1$$

$$s: \quad 2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \gamma = -4$$

$$\Rightarrow \boxed{P_c = \underbrace{C}_{\text{(عدد بی بعد}} \frac{GM^2}{R^4}}$$

2.5

(ج

$$\epsilon = \frac{\Delta E}{\Delta t \, \Delta m} \Rightarrow \epsilon = \frac{L}{\underbrace{M_c}_{\text{جرم هسته است}}}$$

2.5

$$\Rightarrow M_c = \frac{L}{\epsilon} \Rightarrow \frac{M_{c,N}}{M_{c,I}} = \frac{L_N / \epsilon_N}{L_I / \epsilon_I}$$

$$= \frac{L_N}{L_I} \underbrace{\frac{\epsilon_I}{\epsilon_N}}_{\epsilon_0 \rho T} = \frac{\rho_{c,I} \, T_{c,I}}{\rho_{c,N} \, T_{c,N}} \frac{L_N}{L_I}$$

I

$$\boxed{T_c \neq T_{eff}}$$

II

$$P_c = C\,\frac{GM^2}{R^4}$$

$$P_c = \frac{\rho_c k T_c}{m_H}$$

$$\Longrightarrow \frac{\rho_{c,N}\,T_{c,N}}{\rho_{c,I}\,T_{c,I}} = \frac{M_N^2/R_N^4}{M_I^2/R_I^4}\,\underbrace{\frac{C_N}{C_I}}_{=1} \quad \text{I}$$

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5}$$

در هر دو ستاره بیشتر هیدروژن است (اکثر اصلی هیدروژن گاز است)

$$\text{I} \Longrightarrow \frac{M_{c,N}}{M_{c,I}} = \frac{L_N}{L_I}\cdot\left(\frac{L_N}{L_I}\right)^{-2/3.5}\frac{R_I^{-4}}{R_N^{4}}$$

$$= \left(\frac{L_N}{L_I}\right)^{\frac{1.5}{3.5}}\frac{R_I^{-4}}{R_N^{-4}} = \left(\frac{R_N^2\,T_{N,eff}^4}{R_I^2\,T_{I,eff}^4}\right)^{\frac{3}{7}}\left(\frac{R_I}{R_N}\right)^{-4}$$

$$= \left(\frac{R_N}{R_I}\right)^{\frac{6}{7}+4}\left(\frac{T_{N,eff}}{T_{I,eff}}\right)^{\frac{12}{7}}$$

$$\Longrightarrow \frac{M_{c,N}}{M_{c,I}} = 0.0139 \quad (7)$$