

اثر صفحهای اصنانه شده

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 (s + z_1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

اصنانه کردن صفحهای (بالا زدن) سیستم را افزایش داده و زمان صعود را کاهش میدهد همچنین مقدار منفرجه شدن را نیز کاهش میدهد. فرکانس افزایش یافته و زمان پاسخ کمتر میشود. سیستم در محدوده پایداری بیشتری خواهد ماند.

در این حالت فرض بر این است که صفحهای اصنانه شده را نسبت به مقدار استاندارد (بدون اصنانه) تغییر میدهد.

$$\frac{s+4}{s^2+4s+4} \rightarrow \frac{2s+4}{s^2+4s+4}$$

مطابق حالت سیم تغییر کرده اند اما صفحهای از ۲ به ۴ فرکانس را میتوان گفت که دامنه فرکانسهای کمتر پاسخ کاهش یافته و زمان فرکانس افزایش پیدا میکند.

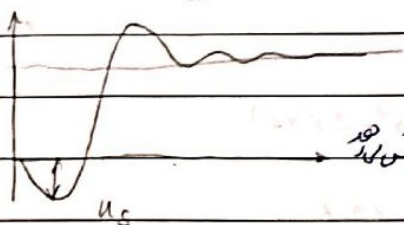
در این حالت گفته شده فرض بر این است که صفحهای اصنانه شده را نسبت به مقدار استاندارد تغییر میدهد.

اثر صفحهای نیمه راست صاف

undershoot

اگر صفحهای اصنانه شده در نیمه راست صاف باشد پاسخ سیستم در ابتدا فرکانس (پایین زدن) خواهد داشت. هر چه صفحهای راست از مقدار دورتر شود فرکانس کمتر شود. ثابت می شود که اگر مقدار صفحهای سمت راست سیستم، فرکانس پاسخ را دارای فرکانس است که پاسخ منفرجه هم نامیده می شود. به این گونه سیستم ها غیر منفرجه (non minimum phase) می گویند.

در حالت ای (پایین زدن) (فرکانس) پاسخ سیستم با سرعت زمان بسته می شود به مقدار زیادی صاف می رسد و t_s مقدار زیادی دارد.

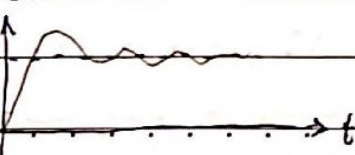


نکته: وجود یک صفحهای در یک قطب اثرات مشابهی دارد بر پاسخ اندک تا حدی.

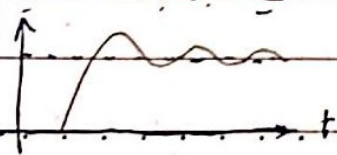
اثر تأخیر زمانی:

در سیستم های فیزیکی پاسخ سیستم به ورودی اغلب با تأخیر زمانی همراه است. اگر در شکل زیر پاسخ یک سیستم برای صاف با وجود تأخیر باشد.

$C(t)$



$C(t)$



ART

Subject

Date

می دانیم که در حوزه فرکانس یک سیستم تأخیری به صورت $e^{-std \cdot s}$ نمایش داده می شود

$$C(t-td) \xrightarrow{L} e^{-std \cdot s} C(s)$$

$$e^{-std \cdot s} = \begin{cases} 1 - tds & \text{تقریب به صورت صفر} \\ 1 - \frac{td}{2}s & \text{تقریب با دقت دوم} \\ 1 + \frac{td}{2}s & \text{یک صفر در یک نقطه} \end{cases}$$

نکته: در حوزه فرکانس در سیستم ها نیز افزودن صفر سمت راست است و هر چه td بزرگتر شود منفرجه می شود به سمت مبدأ نزدیک می شود و می تواند فرکانس پایین را در پاسخ سیستم به وجود آورد و معمولاً اثر تأخیر را به صورت حالت اول تقریب می زنند. به خاطر داشته باشید که اثر تأخیر حالت افزودن صفر سمت راست به سیستم است.

سیستم های مرتبه بالاتر:

در تحلیل پاسخ گذرای سیستم های مرتبه بالاتر زمان داده می شود که پاسخ سیستم مرتبه بالاتر حاصل جمع پاسخ های سیستم های مرتبه اول و دوم است. اگر سیستم مرتبه اول بالاتر از ۲ داشته باشد می توان گفت برای علم فرکانس خیلی بد است. ما را به طریقی برای آن تعریف می کنیم اما اگر بتوان این یک سیستم را به یک قطب مقابل نزدیک کرد آن کار خنجر کم و آن می تواند برای آن تعریف کرد.

روش کاهش مرتبه بارش و

در این روش مقابل یا قطب را کم می کنند (در دینامیک بار مقابل) در سمت چپ صفحه حذف می کنند و می گویند که در این کاهش مرتبه باید توجه قرار گیرد است که: توان حالت ماندگار پاسخ به سیستم کاهش یافته باید برابر با حاصل قرار در سیستم اصلی باشد یعنی بهره حالت ماندگار در دو حالت باید یکسان باشد.

$$G(s) = \frac{1}{(s+8)(s^2+2s+2)}$$

برای مثال در سیستم

$$G(s) = \frac{1}{(s+8)(s^2+2s+2)}$$

Dominant closed loop poles

مراحل تقریب زد کردن سیستم مرتبه بالاتر مرتبه پایین:

۱- تعیین شکل کلی و حذف تقابلی که در حالت و دور از محور دینامیک

۲- در حالت ماندگار باید به سیستم اصلی ART در این بهره یکسانی که باشد.

مثال: سیستم کنده را تابع تبدیل حلقه بسته زیر توصیف می شود تقریب مناسب این سیستم را به دست آورید.

$$\frac{C}{R} = \frac{600}{(s^2 + 22s + 120)(s^2 + 4s + 3)}$$

ابتدا خروجی تابع تبدیل حلقه بسته را تجزیه می کنیم تا بین قطب چه وضعیتی دارند.

قطب های غیر غالب $s^2 + 22s + 120 = 0 \rightsquigarrow s_{1,2} = -10, -12$

$s^2 + 4s + 3 = 0 \rightsquigarrow s_{3,4} = -1, -3$

مقدار ثابت ماندگار تابع انتقال: $\frac{600}{120 \times 3} = \frac{5}{3}$

تابع تقریبی: $\frac{A}{s^2 + 4s + 3} \rightsquigarrow \frac{A}{3} = \frac{5}{3} \rightsquigarrow A = 5$

مقدار ثابت ماندگار تابع تقریبی: $\frac{A}{3}$

بنابراین تابع تقریبی: $\frac{5}{s^2 + 4s + 3} \rightsquigarrow \omega_n = \sqrt{3} \rightsquigarrow 2\zeta\omega_n = 4 \rightsquigarrow \zeta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

مقدار $\zeta = 1.17$

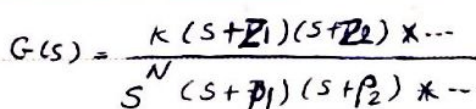
انتقال کردن در ردی مرجع توسعه فروشی سیستم، از اهداف مهم سیستم است. مخطای حالت

فرصتی سیستم نامه اندازه می تواند درودی اسی که به آن ایمان شده (در مثال بکند) (نماید).

مکان را به هم می رساند. در ساله طراحی، یکی از اهداف طراحی طوری سیستم های مبتنی بر

حای کنترل نفس، مهر را انقباض کند.

۱. نوع سیستم و مقدار و نزدیک واحد در نظر گرفته شده است و نوع سیستم با توجه به تابع تبدیل معلوم است.



$s(s+p_1)(s+p_2) \dots$ مرتبه با نوع متفاوت است

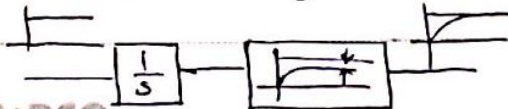
--- و نوع سیم 2 $G_2 = \frac{s+1}{s^2(s^2+4s+3)}$ نوع سیم 1 $G_1 = \frac{s+1}{s+2}$

۲ خط ثابت قادر سیستم رابط سیستم با نوع سیستم و دوری احتمال سه سیستم دارد

وَلَمْ يَدْعُوا مَعَهُ مِثْلَ وَاعْدِهِمْ لَمَنْ هُوَ ذَا الْعَرْشِ الْمَدِيدِ

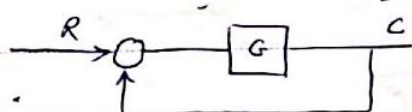
(S)

سیستم دارد واقع افزایش میدهد



خطای محاسبات مانند:

در سیستم در بر دو با بند یک واحد و تاج تبدیل حلقه باز G خطای این حدودات طرف می شود:



$$E = R - C \text{ plus } \frac{C}{R} = \frac{G}{1+G}$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

حالت طبره که شخص است خطای سیستم به ورودی سیستم بستگی دارد.

$$E = \lim_{s \rightarrow \infty} e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 5E(s) \text{ bda} \quad \text{= più, cioè due sda}$$

خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی $\frac{1}{s}$ $E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)} \times \frac{1}{s}$

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+\lim_{s \rightarrow 0} G(s)} \quad \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K_p \quad E_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$$

(نوع خطای پویست. (م)

خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی $\frac{1}{s^2}$ $E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \times \frac{1}{s^2}$

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s G(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)} \quad \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = kv \quad E_{ss} = \frac{1}{kv}$$

خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی $\frac{1}{s^3}$ $E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \times \frac{1}{1+G(s)} \times \frac{1}{s^3}$

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} \quad \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = K_a \quad E_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

برای اینکه سیستم به ورودی (u) حفظ توانسته باشد نوزح سیستم حداقل باید u باشد

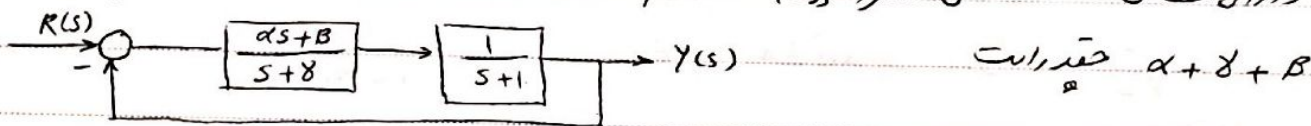
$$\frac{1}{52} = \frac{1}{52} \cdot \frac{52}{52} = \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{52} = \frac{1}{52^2}$$
$$1^w \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad (\frac{1}{53}) - w$$

خطای حالت دائمی (استeady state error) بر حسب نوع سیستم و ورودی اعمال شده به آن

نوع سیستم	ورودی تابع پله	ورودی سب	ورودی شیب
0	$\frac{1}{1+Kp}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{Kv}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{Ka}$
3	0	0	0

نکته: همیشه پیش از به کار بردن فرمول های بدست آمده برای سیستم خطا، از پایداری بودن سیستم باید اطمینان حاصل کنید چرا که خطای سیستم ناپایدار به بی نهایت میل می کند.

مثال: دکتور کتده $G_c(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s + \delta}$ ، امضای طراحی می کنیم که به ازای ورودی پله ای واحد درای خطای حالت دائمی صفر ($E_{ss} = 0$) $\xi = 0.5$ و زمان نشست $t_s = 8 \text{ sec}$ (با معیار 2٪) باشد.



حقیقت $\alpha + \delta + \beta$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\left(\frac{\alpha s + \beta}{s + \delta}\right) \left(\frac{1}{s + 1}\right)}{1 + \left(\frac{\alpha s + \beta}{s + \delta}\right) \left(\frac{1}{s + 1}\right)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + (\alpha + \delta + 1)s + (\delta + \beta)}$$

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = (\alpha + \delta + 1) \rightarrow \alpha + \delta + 1 = 1 \\ \delta + \beta = \omega_n^2 \rightarrow \delta + \beta = 1 \\ \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8, \zeta = 0.5 \rightarrow \omega_n = 1 \end{cases}$$

$$E_{ss} = \frac{1}{1 + Kp} \quad Kp = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\alpha s + \beta}{(s + \delta)(s + 1)} = \frac{\beta}{\delta} \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\delta}} = 0$$

$$\rightarrow \delta = 0 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \beta = 1 \rightarrow \alpha + \beta + \delta = 1$$

از جدول اول می توانیم ببینیم $\delta = 0$ جدول نوع سیستم باید حداقل 1 باشد تا خطای حالت ماندگار به ورودی پله صفر باشد.

بایداری =

منهضم بایداری ارتباط نزدیکی با انرژی سیستم دارد و مهمترین عامل است که در محقق هر سیستم باید مورد توجه قرار گیرد. در واقع پایداری گذرا و خطای حالت دائمی، کاهش حاصلت به تغییرات مدل فرایند و تغییر اهداف، حتی در سایه بایداری تراشیده می‌شود چرا که به عنوان مثال در سیستم ناپایداری محقق خطای حالت دائمی به معنی خواهد بود.

تعارف زیاد برای بایداری مطرح شده است در سیستمی که مدل خطی با درجه دوم بایداری پایداری ورودی - خروجی و بایداری رانگی برای ما مهم است.

بایداری یک سیستم حلقه بسته را می‌توان از دو معنی قطبی و حلقه بسته آن (ریشه‌های معادله مشخصه) در صفحه s تبیین کرد. (تفصیل کرد) اگر هر کدام از این مقبول در نتیجه راست حلقه و قرار گیرند با گذشت زمان به مورد غالب تبدیل می‌شوند و پایداری گذرا با درجه افزایش (نوسانی یا یکپارچه) خواهد بود و این یک سیستم ناپایداری آن می‌دهد. به محض آغاز به کار چنین سیستمی خروجی با زمان افزایش می‌یابد اگر آستانه‌ای در سیستم صورت گیرد و توقف مکانیکی تأمین شده باشد سیستم نهایتاً آستانه می‌رسد و از کار می‌افتد زیرا پایداری یک سیستم فیزیکی نمی‌تواند بی‌نهایت افزایش یابد اگر تمامی مقبولی حلقه بسته در نتیجه خطی معادله قرار گیرند چرا که پایداری نهایتاً به تعداد می‌رسد این یک سیستم ناپایداری را می‌توان می‌دهد.

نکته: بایداری با ناپایداری سیستم خطی از خواص خود سیستم است و به ورودی و پایداری حرکت آن وابسته نیست.

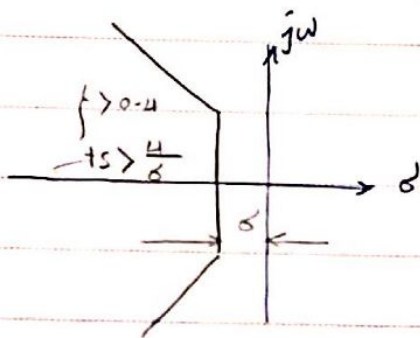
نکته: مقبولی ورودی بر خاصیت بایداری سیستم تأثیر ندارند تنها در پایداری حالت دائمی و (خطای حالت ماندگار مؤثرند)

نکته: مثلاً بایداری مطلق نباشد با انتخاب نکردن مقبولی حلقه بسته در نتیجه راست صفحه s و روی محور حلقه حل می‌شود

پایه رسانی (ناپایداری سیستم ای می‌شود)

از نظر ریاضی مظهری حلقه سته بر روی محور ω به نوساناتی منجر می شود که دامنه آن ها
بزرگ افزایش یافته باشد. در مواردی که نوسان وجود دارد، دامنه نوسانات مظهری
افزایش یافته باشد. بنابراین سیستم کنترل نباید مظهری حلقه سته ای بر روی محور ω داشته باشد.

نکته: صرف قرار گرفتن تمام مظهری حلقه سته در نیمه چپ صفحه s مشخصه های پایخ
گذرای مطلوب را تضمین نمی کند، برای آن که پاسخ گذرای سریع و در عین حال به خوبی میراثونده
داشته باشیم، مظهری حلقه سته سیستم باید در ناحیه خاصی در صفحه مختلط قرار گیرند.



معيار پایداری روث

پایداری بهترین سندها در سیستم‌های کنترل خطی است یعنی آن که تحت چه شرطی سیستم ناپایدار خواهد شد؟ آخر ناپایداری است چگونه بدان آن را پایداری کرد؟
می‌دانیم که یک سیستم کنترل پایداری است اگر و تنها اگر تمام قطب‌های حلقه بسته در نیمه چپ صفحه قرار گیرند. آخر سیستم‌های حلقه بسته خطی تابع تبدیل حلقه بسته می‌باشد و بدین ترتیب داریم:
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$
 $m \leq n$ و b ها ثابت هستند و a ها

معيار پایداری روث Routh با روشی سازد که مقدار قطب‌های حلقه بسته‌ای را که در نیمه راست صفحه قرار می‌گیرند بدون تجزیه حلقه‌های منخرج تعیین کنیم.
(حلقه‌های ممکن است پارامترهای وابسته باشد و MATLAB نمی‌تواند با آن‌ها کار کند (مثل K))

معيار پایداری روث: جدولی که معیار حلقه‌های و بدین آوردن ریشه‌های آن، وجود ریشه‌های ناپایدار در آن آشکار می‌سازد. این معیار پایداری به حلقه‌های با مقدار محدودی حلقه‌های می‌باشد. حلقه‌های که این معیار به یک سیستم کنترل می‌دهد، اطلاعات مربوط به پایداری مطلق را می‌توان مستقیماً از ضرایب معادله مشخصه بدست آورد.

تعیین:

شرط لازم برای آنکه حلقه‌های معادله مشخصه یک معادله مشخصه باشد، اینست که تمام ضرایب وجود داشته و تمام ضرایب هم علامت نیز باشند.
مراحل روث: 1 - معادله مشخصه سیستم = منخرج تابع تبدیل حلقه بسته پایداری آوردیم
2 - رانده جدول توانی نزدیکی از s^0 مرتب می‌کنیم

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

3 - جدول را تشکیل می‌دهیم.

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	...	$b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_1}$
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	...	$b_2 = \frac{a_4 a_1 - a_0 a_5}{a_1}$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3		...	$b_3 = \frac{a_6 a_1 - a_0 a_7}{a_1}$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3		...	$c_1 = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_2}{b_1}$
$\vdots$						$c_2 = \frac{a_5 b_1 - a_1 b_3}{b_1}$
s^2						
s^1						
s^0						

جدول همی جدول :

روش رادش : یک می راند که مقدار رادش های معادله با نسبت های حقیقی نسبت برابر با مقدار رادش
علامت در ضرایب اولین ستون آرایه است . توجه کنید که داشتن مقدار در رادش معادلات در
اولین ستون لازم نیست و مقترع علامت آن ها لازم است .

شرط لازم و کافی برای آنکه تمام رادش های معادله در نتیجه یک چندنه 5 قرار گیرند آن است که 2
تمام ضرایب معادله صحفه نسبت باشند و تمام معادلات در اولین ستون آرایه علامت مثبت داشته باشند

مثال : $a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$ $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$

$$\begin{array}{r|rr} s^3 & a_0 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s & \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_1} & \\ s^0 & a_3 & \end{array}$$

شرط لازم و کافی : $\frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_1} > 0$

$a_2 a_1 > a_0 a_3$

$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$

مثال

$$\begin{array}{r|rrrr} s^4 & 1 & & 3 & & 5 \\ s^3 & & 2 & & 4 & \\ s^2 & & & \frac{3 \times 2 - 4 \times 1}{2} = 1 & & 5 \\ s^1 & & & \frac{4 - 2 \times 5}{1} = -6 & & \\ s^0 & & & & 5 & \end{array}$$

توضیح علامت : در رادش با نسبت های
حقیقی نسبت وجود دارد

نکته : نتایج ضرب با نسبت ضرایب هر ردیف توسط یک عدد مثبت برای سادگی می باشد
شده نمی کند

$$\begin{array}{r|rrrr} s^4 & 1 & & 3 & & 5 \\ & 1 & & 2 & & \\ & 1 & & 5 & & \\ & -3 & & & & \\ & 5 & & & & \end{array}$$

برای مثال در جدول بالا ردیف دوم را به 2 تقسیم می کنیم

در نتیجه علامت 2 رادش

با نسبت های حقیقی نسبت

(نسبت رادش) معادله دارد

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k = 0$$

مثال: معادله مشخصه سیستم عبارت از
که برای آن k برده سیستم است مطلوب است که پایداری سیستم را برای تغییرات برده k بررسی کنید

$$\begin{array}{r|rr} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & 1+k \\ s^1 & \frac{9-1-k}{3} & \\ s^0 & 1+k & \end{array}$$

$$\frac{8-k}{3} > 0 \rightarrow k < 8 \quad \text{و} \quad 1+k > 0 \rightarrow k > -1$$

بنابراین برای پایداری سیستم باید داشته باشیم $-1 < k < 8$

موارد خاص در شکل آرایه های رouth

حالت خاص ①: در عدد رتبه عبارت اولی ستون در هر ردیف صفر باشد و یک سطر عبارت s^i

آن ردیف صفر باشد و یا عبارت دیگر مانند باشد.

($\rightarrow E$)

① عبارت صفر را با یک عدد بسیار کوچک مثبت ϵ جایگزین کرده و آرایه را تحلیل می کنیم
② در معادله مشخصه s $\frac{1}{\epsilon}$ تبدیل می کنیم و معادله مشخصه جدید را بدست می آوریم و آرایه شکل را
③ معادله را در یک فاکتور مثلاً $(s+1)$ که محل ریشه اش متغیر است ضرب می کنیم و آرایه را بدست می آوریم

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rr} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \rightarrow E & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

مثال:

اگر علامت ضرب ϵ ها نیز علامت ضرب زیر آن است یک مثبت ریشه تحت طرادی محور دلتا وجود دارد

اما اگر علامت ضرب ϵ با ϵ با زیر آن مخالف باشد، تغییر علامتی رخ داده است

$$s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 4s + 5 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrr} s^4 & 1 & 2 & 5 \\ s^3 & 2 & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} s^2 & \epsilon & 5 \\ s^1 & \frac{4\epsilon - 10}{\epsilon} = 4 - \frac{10}{\epsilon} < 0 \\ s^0 & 5 & \epsilon \rightarrow 0 \end{array}$$

در تغییر علامت در ستون اول وجود دارد

در ریشه سمت راست محور مدحوی بوده و سیستم

ناپایدار است.

عالت حاضر (2): یک سطر از آرایه صفر باشد

این حالت صفتی برخی از مدارها حول مبدأ صحنه و تقارن داشته باشد و عملیات بصورت

(4) $(s-6)$, $(s+6)$, $(s-j\omega)$, $(s+j\omega)$ و $(s-\alpha \pm j\omega)$, $(s+\alpha \pm j\omega)$ باشد.

(3) یعنی در مقابل حقیقی با اندازه های مساوی و علامت های مختلف و در سطح مزدوج مختلط

(5) $\frac{x}{x}$ و $\frac{x}{x}$ و $\frac{x}{x}$ و $\frac{x}{x}$

راه حل: 1- با استفاده از ضرایب سطر مقابل سطر صفر، معادله کنگی تشکیل می دهیم.

2- از معادله کنگی نسبت به s مشتق می گیریم.

3- به جای سطر صفر، ضرایب مشتق معادله کنگی را قرار می دهیم.

4- درش را از آرایه می بکنیم.

مثال: معادله تحفته سیستم به صورت

$$s^6 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} s^5 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ s^4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ s^3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$u(s) = s^4 + 2s^2 + 2 = 0$$

$$\frac{du(s)}{ds} = 4s^3 + 4s$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$\downarrow \frac{d}{ds}$$

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

مثال : معادله مشخصه

با توجه به معادله مشخصه واضح است که سیستم ناپایدار است. شرط لازم را نداریم، با تست آرایه روت می توان مقدار ریشه های سمت راست محور دلتا را تعیین کرد:

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	8	96	0
s^2	24	-50	
s^1	112.7		
s^0	-50		

$$U(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d/ds \\ \frac{dU(s)}{ds} = 8s^3 + 96 = 0 \end{array} \right.$$

بنابراین معادله مشخصه یک ریشه مثبت حقیقی مثبت دارد

$$s^6 + 3s^5 + 6s^4 + 12s^3 + 11s^2 + 9s + 6 = 0 \quad \text{مثال : معادله مشخصه}$$

s^6	1	6	11	6
s^5	3	12	9	
s^4	2	8	6	
s^3	8	16	0	
s^2	4	6		
s^1	4			
s^0	6			

$$U(s) = 2s^4 + 8s^2 + 6 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d/ds \\ \frac{dU(s)}{ds} = 8s^3 + 16s = 0 \end{array} \right. \quad \text{① ، ②}$$

تغییر علامتی وجود ندارد، حول یک خط صفر راست می

سیستم نوسانی است (ناپایدار نیست) ، پایدار حاشیه ای

حالت خاص 3 (در واقع نسبت) : به وجود آوردن هندسه صفر
(معادله مشخصه دارای ریشه های تکراری روی محور حلقه باشد) اگر ریشه های محور حلقه تکراری باشند
با یک سیستم ناپایدار و بی نرم $Kt \sin(\omega t + \phi)$ خواص دارد.

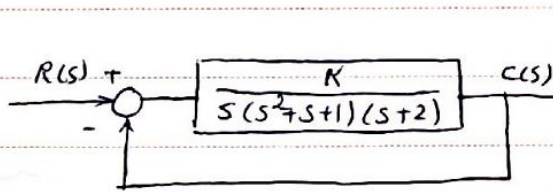
مثال : معادله مشخصه سیستم بی نرم : $s^7 + 4s^6 + 7s^5 + 10s^4 + 11s^3 + 8s^2 + 5s + 2 = 0$

s^7	1	7	11	5
s^6	4	10	8	2
s^5	4.5	9	4.5	
s^4	2	4	2	
s^3	①	①		
s^2	2	2		
s^1	②			
s^0	2			

$u_1(s) = 2s^4 + 4s^2 + 2 = 0 \rightarrow s^4 + 2s^2 + 1 = 0$
 $\downarrow d/ds$
 $\frac{du_1(s)}{ds} = 4s^3 + 4s = 0 \rightarrow ① s^3 + s = 0$
 $u_2(s) = 2s^2 + 2 = 0$
 $\downarrow d/ds$
 $\frac{du_2(s)}{ds} = 4s$

با توجه به ریشه های نزدیک محله تکراری معادله $u_1(s)$ از جدول ابتدا مشخص می شود سیستم فوق ناپایدار است.

* با وجود اینکه ستون اولیه آرایه را نشانه می دهد اما به خاطر ریشه های نزدیک تکراری سیستم فوق ناپایدار است.



(کاربرد معیار پایداری راس) در تحلیل سیستم تکراری
سیستم تکراری را به شکل درج شده در نظر بگیریم
محدود کننده K را برای پایداری سیستم حلقه بسته تعیین کنید

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{1 + \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)}}$$

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را به دست می آوریم :

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{(s^3+s^2+s)(s+2)+K}$$

s^4	1	3	K
s^3	3	2	
s^2	$\frac{7}{3}$	K	
s^1	$\frac{14-3K}{3}$		
s^0	K		

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

معادله مشخصه

$$\frac{14-3K}{3} = 2 - \frac{2}{3}K > 0 \rightarrow K < \frac{14}{9}$$

بنابراین $K = \frac{14}{9}$ ، سیستم ناپایدار می شود

نکته در مورد بایدارگی :

سیستم بایدار ← مقابله با تغییرات در سطح سطح دریا و سطح دریا
بایدار حاشیه ای (مرزی) ← هنگامیکه با چند نقطه سازه (یعنی یک مرکز ثقل) روی محور
موجود باشد و نقطه ثقل در سمت چپ قرار گیرند پاسخ به صورت
توانی خواهد بود که سیستم را بایدار حاشیه ای گردانند.
(آخر دوری با مرکز ثقل در سمت راست بایدار مرزی ایستاده بایدار می شود)

سیستم بایدار مستوی ← در بسیاری از سیستم ها نمودار مکان ریشه ها به سمت راست محور دوار
هم کشیده می شود لذا برای محاسبه ای از K سیستم بایدار و برای محاسبه ای از K سیستم نایدار
این گونه سیستم را بایدار مستوی می گویند.

بایدارگی نسبی ← معمولاً ممکن است بایدارگی مطلق ضعیف باشد یعنی نسبت حقیقی ریشه λ
منفی باشد و به همین ترتیب به محور دوار باشد در این صورت ریشه های سیستم با دایره ها را طوری تعیین
کنیم که ریشه های معادله مشخصه در طرف چپ خط $\alpha - \beta = 0$ قرار گیرند.
در این حالت برای تعیین ریشه ابتدا $\alpha - \beta = 0$ را به جای β قرار می دهیم.
تغییر علامت نشان دهنده ریشه های در سمت راست خط $\alpha - \beta = 0$ است.

* برای چک بایدارگی معادله مشخصه را با جدول رادش چک می کنیم.

تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل به روش مکان ریشه :

شخصه‌های اصلی پانچ‌گانه یک سیستم حلقه بسته ارتباطاتش با موقعیت قطب‌های حلقه بسته دارند. اگر سیستم بهره حلقه (K) تغییری نداشته باشد، موقعیت قطب‌های حلقه بسته به مقدار بهره حلقه انتخاب شده بستگی دارد.

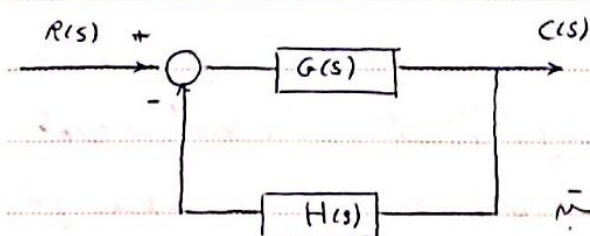
از نقطه نظر طراحی، در برخی سیستم‌ها تنظیم ساده بهره (K) ممکن است قطب‌های حلقه بسته را به موقعیت‌های مطلوب انتقال دهد. اگر تنظیم بهره به تنهایی نتیجه مطلوب را ندهد، اضافه کردن یک میران ساز $(G_c(s))$ به سیستم ضروری می‌باشد.

قطب‌های حلقه بسته ریشه‌های معادله مشخصه هستند. پیدا کردن ریشه‌های معادله مشخصه درجه 3 و بالاتر بر زحمت محاسبه و به حل کامپیوتری نیاز دارد (مثلاً MATLAB).

با استفاده از روش ساده‌ای به اسم "روش مکان ریشه" Root-locus method، ریشه‌های معادله مشخصه برای تمام مقادیر یک پارامتر تابع تبدیل حلقه باز (معمولاً بهره K) رسم می‌شوند. فرض خواهیم کرد که بهره تابع تبدیل حلقه باز (K) پارامتری است که از صفر تا ∞ تغییر خواهد کرد.

به روش مکان ریشه در طراحی یک سیستم کنترل خطی بسیار مفید است، زیرا نحوه اصلاح قطب و صفرهای حلقه باز را برای رسیدن به مشخصه‌های عملکرد سیستم نشان می‌دهد. می‌تواند مکان ریشه با استفاده از MATLAB بسیار ساده است.

به طور خلاصه می‌توان گفت: با استفاده از تابع تبدیل حلقه باز و تغییر بهره K از صفر تا ∞ ریشه‌های معادله مشخصه (مقابل‌های تابع تبدیل حلقه بسته) رسم می‌شوند.



مقدارهای مکان ریشه :

تابع تبدیل حلقه باز : $G(s)H(s)$

$$\text{تابع تبدیل حلقه بسته} : \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

معادله مشخصه این سیستم حلقه بسته با صفر قرار دادن مخرج می‌آید.

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(s)H(s) = -1$$

Subject

Date

* برای رسم آدرین تابع تبدیل حلقه باز از روی معادله مشخصه، معادله مشخصه را برقرار می‌کنیم:

$$s^3 + 2s^2 + s + k = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{s^3 + 2s^2 + s + k}{s^3 + 2s^2 + s} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{k}{s^3 + 2s^2 + s} = 0$$

از آنجایی که $G(s)H(s)$ کسری مختلط است $GH = 1$ را می‌توان بازنویس کرد طرزی که در اندازه نوشت

$$\begin{cases} \angle GH = \pm 180(2k+1) & \text{مطابق زاویه} \\ |GH| = 1 & \text{مطابق اندازه} \end{cases}$$

مقادیری از s که هر دو شرط زاویه و اندازه را برآورده می‌دهند، ریشه‌های معادله مشخصه یا قطب‌های حلقه بسته هستند.

در بسیاری از موارد $G(s)H(s)$ شکل یک یا بیشتر بهره k است و معادله مشخصه را می‌توان به صورت

$$1 + k \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = 0 \quad \text{در بر نوشت}$$

مکان ریشه سیستم مکان قطب‌های حلقه بسته به ازای تغییرات بهره از صفر تا ∞ است برای شروع ترسیم مکان ریشه یک سیستم

داشتن موقعیت قطب‌های حلقه باز و صفرهای حلقه باز ضروری است

مکان هندسی به‌تعداد ریشه‌های معادله مشخصه، اشاره دارد.

نکات لازم: ۱) شان درون قطب‌ها در صفر مختلط به صورت $\times$ (ضروری) و شان درون صفرها در صفر مختلط به صورت $\circ$ (اختیاری) باشد

قواعد اساسی برای رسم مکان ریشه‌ها:

۱) یافتن تابع تبدیل حلقه باز:

ابتدا معادله مشخصه = مخرج تابع تبدیل حلقه بسته را در بر می‌آوریم و به صورت $1 + GH = 0$

$$1 + GH = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + k \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = 0$$

الیه اگر تابع تبدیل حلقه باز را داشته باشیم می‌توانیم آن را به دست آوریم.

مکان ریشه‌ها با صفر و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز رسم می‌شوند و در نهایت شکل ریشه‌ها را می‌توانیم

تابع تبدیل حلقه بسته به دست آوریم.

p_i ها قطب‌های حلقه باز که در صفر s علامت (x) ناشی دارد می‌شوند می‌توانند صفر، ساده و مکرر و مختلط باشند

z_i ها صفرهای حلقه باز که در صفر s علامت (o) می‌توانند صفر، ساده و مکرر و مختلط باشند

k پارامتر مورد نظر است که محدوده آن $0 < k < \infty$ است و یا $-\infty < k < 0$

در مرحله اول صفرها و قطب‌های حلقه باز را در صفر s مشخص می‌کنیم

2. تعیین مستوی از محور حقیقی که جزو مکان رسم شده :

از اولین صفر یا قطبی که در منتهی الیه سمت راست صفحه است ، شروع به شمارش مقدار صفرها و قطبهای کنیم (خود آن را هم حساب میکنیم) آخر مجموع نقطه به نقطه شمارش عددی فرد باشد :

سمت چپ این صفر یا قطبی که روی آن هستیم جزو مکان است و آخر زوج باشد جزو مکان

نخواهد بود .

نکته : (صفرها ، قطبهای مختلف به دلیل زوج بودن تأثیری در شمارش ندارند و می توان آن را از دید شمارش نادیده گرفت)

نکته : با توجه به رسم طاقول رسم مکان رسم $|G(s)H(s)|$

$$\frac{|K| |s-z_1| |s-z_2| \dots}{|s-p_1| |s-p_2| \dots} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad |K| = \frac{|s-p_1| |s-p_2| \dots}{|s-z_1| |s-z_2| \dots}$$

از رابطه بالا نتایج زیر را می توان استنتاج کرد :

الف - روی صفرها K مثبت و روی قطبها K منفی است .

ب - با توجه به اینکه در سیستمی عملی "تعداد قطبها" مقدار K در $s \rightarrow \infty$ می باشد

ج - تمام شاخه های منتهی مکان رسم ها ، از قطبها شروع شده و به سمت صفر یا ∞ (صفرهای

در بی نهایت) می رود .

3. محاسبه های مکان رسم ها :

با فرض اینکه تعداد قطبهای حلقه باز از تعداد صفرهای حلقه باز بیشتر باشد یعنی $(n > m)$ با محاسبه خواص مکان رسم ها در ازای $s \rightarrow \infty$ به سمت محاسبه های منتهی می گذریم .

در صورت وضع محاسبه : $n - m =$ تعداد بی نهایت ها

آخر در تابع تبدیل حلقه باز ، تعداد صفرها = تعداد قطبها به بی نهایت نزدیک می شود .

محاسبه تلاقی محاسبه ها با محور حقیقی :

$$\delta = \frac{\sum \text{Re}(p_i) - \sum \text{Re}(z_i)}{n - m}$$

زاویه محاسبه که با محور حقیقی :

$$\gamma = \begin{cases} \pm \frac{(2h+1)}{n-m} \times 180^\circ , & K > 0 , h = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1) \\ \pm \frac{2h}{n-m} \times 180^\circ , & K < 0 , h = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

نکته : معمولاً برای رسم مکان $K > 0$ در نظر است تقریب و صفحه اش را به رسم مکان برای $K < 0$ نگاه

مثال ۱۱: سیستم کنترل با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+8s+32)}$ و زاویه میانی؟
در محل تقاطع آن با محور حقیقی به سمت راست داریم: $(K > 0)$

$n-m = 4 \rightarrow$ ۴ کابینه داریم $s_{1,2} = -4 \pm 4j, s_3 = -4, s_4 = 0$

$\delta = \frac{\sum \text{Re}(p_i) - \sum \text{Re}(z_i)}{n-m} = \frac{0-4-4-4-0}{4} = -3$ محل تقاطع با محور حقیقی

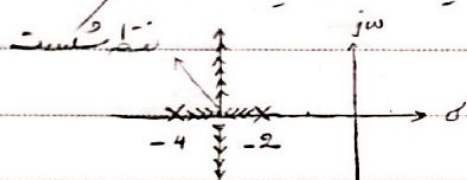
$\gamma = \frac{\pm(2h+1)}{n-m} \times 180 = \frac{(2h+1)}{4} \times 180 \quad h = 0, 1, 2, 3$

$\gamma = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$

۴ مسیر نقطه شکست و عرض مکان است:

در عدد شش مکان است بین در قطب حلقه باز ردی محور حقیقی باشد، است که یک نقطه شکست بین در تقاطع به وجه می آید.

حقیقی در عدد شش مکان است که بین در صفر مجاور ردی محور حقیقی باشد (یکی از صفرهای تواندار ۲).
یک نقطه عرضی بین در صفر به وجه می آید.



رای مثال ۱۲: $GH = \frac{K}{(s+2)(s+4)}$

در صورتی که معادله نقطه شکست را به صورت زیر در برداشت داریم:

$A(s) + KB(s) = 0 \rightarrow K = \frac{-A(s)}{B(s)} = 0$
 $\frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow A'B - B'A = 0 \rightarrow A'B = B'A \rightarrow s = ?$

انحل این معادله به حسب s نقطه شکست به دست می آید، یا می توان گفت اگر

$GH(s) = \frac{A}{B} \rightarrow A'B - B'A = 0 \rightarrow A'B = B'A \rightarrow s = ?$

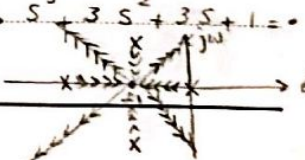
نکته: تمامی جواب های حقیقی به دست آمده برای نقطه شکست، و همواره قابل قبول اند، اما اگر نقطه

شکست در دست آمده مختلط باشند حتماً باید از معادله $1 + KGH = 0$ جایگزین کنیم اگر K عدد حقیقی سه تایی قبول آید اما اگر $K =$ عدد مختلط قابل قبول نیست.

نکته: برای ردی محور حقیقی K معادله مقدار حفره بردی نقطه شکست اختیار می کنند.

نکته: اگر جوابی از معادله ① به دست آید به تعداد $r+1$ شاف در نقطه شکست به هم برخورد می کنند زاویه بین شاف ها $\frac{\pi}{r+1}$ است.

مثال ۱۳: $GH = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$ $(4s^3 + 12s^2 + 12s + 4) = 0 \rightarrow s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0$
 $s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s^2 + 4s^2 + 4s \rightarrow (s+1)^3 = 0 \rightarrow$
 $s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s$ شاف $\frac{\pi}{3+1} = \frac{\pi}{4}$ زاویه



(5) زاویه خروج از قطب و مختلط و زاویه ورود به صفر مختلف است :
روش اول :

$$\theta_{Pi} = 180^\circ + \angle [(s - P_i) G(s) \cdot H(s)] \Big|_{s=P_i}$$

$$\theta_{Zi} = 180^\circ - \angle \left[\frac{G(s) \cdot H(s)}{(s - Z_i)} \right] \Big|_{s=Z_i}$$

با توجه به اینکه صفرها و قطبهای مختلط مزبور هستند مکان رسم که نسبت به محور حقیقی متقارن است
از این جهت زاویه خروج از قطب برای یکی از صفر و قطبهای مزبور یکی است .
روش دوم برای یافتن زاویه خروج از قطب و ورود به صفر :

الف - از قطب به صفر برداریم به نام صفر که در قطب و دیگر اصل می کشیم .

ب - در هر قطب به صفر (به غیر صفرها و قطبها برداریم) یک خط افقی رسم می کنیم .

ج - روی این خط در جهت مثلاً شای شروع به حرکت می کنیم تا خطی را وصل کنیم نقطه آزمون و صفر یا قطب
را قطع کند

$$\theta_{Pi} = (2k+1)180^\circ - \angle \text{صفرها} + \angle \text{می دانیم}$$

د - زاویه را می خوانیم سپس :

$$\theta_{Pi} = (2k+1)180^\circ - (\text{مجموع زوایای قطبها} - \text{مجموع زوایای صفرها})$$

$$\theta_{Zi} = - [(2k+1)180^\circ - (\text{مجموع زوایای قطبها} - \text{مجموع زوایای صفرها})]$$

نکته مهم : آخر تقاب با صفر روی هم را اشتباه (تکرار) مثلاً $s_1 = s_2 = 0$ نخواهیم زدایای سایر قطبها را وارد
کنیم ، به مقدار قطب با صفر روی هم را وارد را اضافه می کنیم . اما هرگاه زاویه حقیقی این صفرها و قطبها
را نخواهیم حساب کنیم ، باید عدد در برت آمده را به m تقسیم کنیم .

$$G(s)H(s) = \frac{k(s^2 - 2s + 5)}{(s-1)(s^2 + 6s + 18)}$$

$$\text{صفرها : } Z_{1,2} = 1 \pm 2j$$

$$\text{قطبها : } P_{1,2} = -3 \pm 3j \quad P_3 = 1$$

مثال :

زاویه ورود به صفر مختلط Z_1

$$\theta_{Z_1} = - \left[- \left(90 + \tan^{-1} \frac{5}{4} + (2\pi - \tan^{-1} \frac{1}{4}) \right) + 90 \right]$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 51.34° $2 \times 180^\circ - 14.03^\circ$

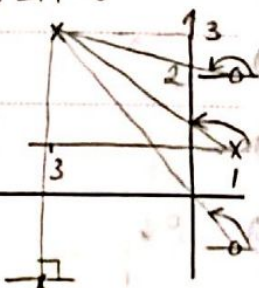
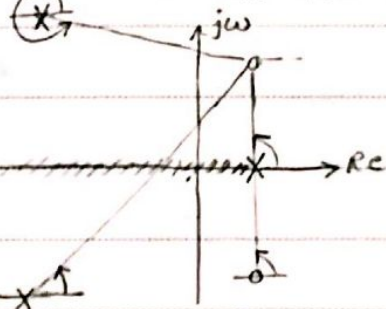
$$\theta_{Z_1} = - [(2k+1)180^\circ - 2\pi - 51.34^\circ + 14.03^\circ] = 217.3^\circ$$

$k=0$

$$\theta_{P_1} = (2k+1)180^\circ - \left(90 + \left(180 - \tan^{-1} \frac{3}{4} \right) - \left(180 - \tan^{-1} \frac{1}{4} \right) - \left(180 - \tan^{-1} \frac{5}{4} \right) \right)$$

$$90 + 143.13^\circ - 165.96^\circ - 128.66^\circ$$

$$= 241.49^\circ$$



16 محل تقاطع مکان ریشه ها با محور موهومی :

به دروس قبلی محاسبه است :

1 - به کمک محاسبه بیداری روت

2 - در معادله مشخصه به جای s ، ω قرار داده سمت حقیقی و موهومی معادله را برای صفر

تعدادی ردهیم و معادله های حاصل را برای یافتن ω در K حل میکنیم .

رسم مکان ریشه ها برای $K < 0$:

تفاوتی که زیر را با مندرج منفی $K > 0$ دارد :

1 محل مکان روی محور حقیقی تمام نقاط به جز نقاط مربوط به $K > 0$ است .

2 زاویه مجانب ها $(\pm 2h(180^\circ))$ است $\frac{n-m}{n-m}$

3 زاویه خروج از قطب و ورود به صفر را به جای 180° از صفر کم میکنیم

4 بجای حرکت از قطب به سمت صفر ، حرکت نقلی که از صفر به قطب است .

در K برابر دستورالعمل های $K > 0$ صادق است

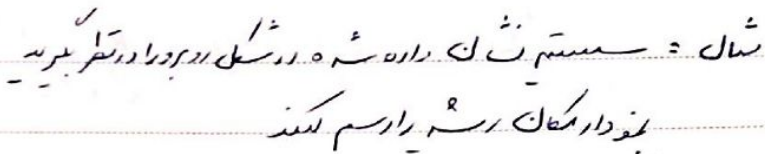
نکات :

1 مکان به ازای $K=0$ از قطب شروع شده و با افزایش K حفره را به صفرهای رسانده .

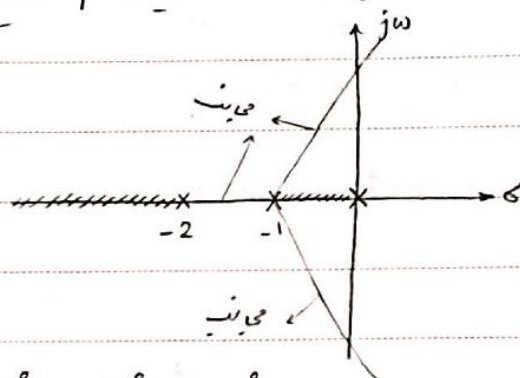
2 برای بیداری سیستم تا مرتبه n مکان ریشه باید بیدار باشند (سمت چپ محور حقیقی باشند)

بنابراین اگر مکان به سمت راست هم نفوذ کرده باشد باید در نقطه تلاقی مکان با محور موهومی مقدار

K را بدینسان ، این نقطه حد اکثر مقدار K را به نامی دهد ، که با این مقدار K سیستم بیدار و با بیش از آن نابیدار است



سنت هاشم زده مکان روی محور حقیقی می باشد



3 تا میف داریم

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{محل بحرہ دیابت کے با محور حقیقی} = \frac{\sum \text{Re}(p_i) - \sum \text{Re}(z_i)}{n-m} = \frac{0-1-2-0}{3} = -1$$

ابتدا داریم بین نقطه مفرد ۱- نقطه شکست داشته باشیم

$$\frac{1}{s^3 + 2s^2 + s^2 + 2s} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{A}{B}$$

$$A'B = B'A \rightsquigarrow 3s^2 + 6s + 2 = 0 \rightsquigarrow \frac{-3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

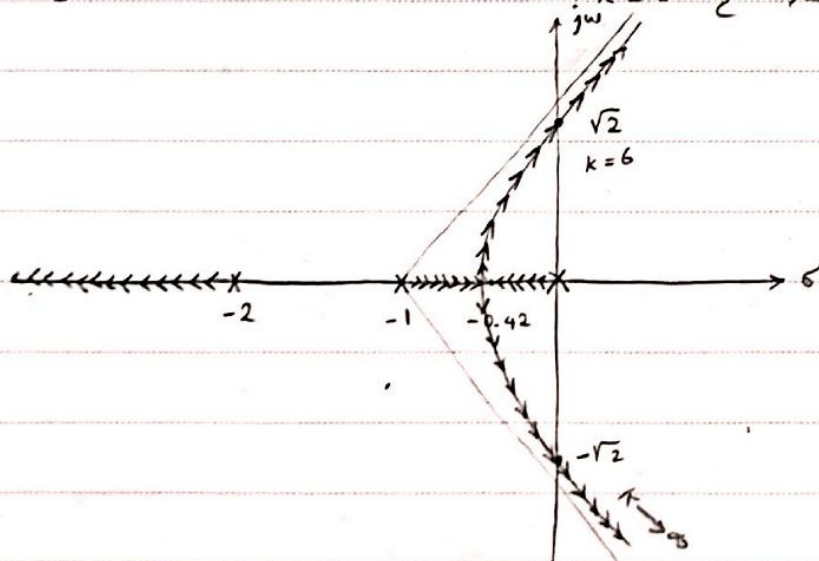
$$\left. \begin{array}{l} -1.5 \\ -0.422 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{غیر} \\ \text{قرار} \end{array}$$

نقاطی که مکان بسته برآک ها محور باشد را قطع می کنند : معادله محکم $S^3 + 3S^2 + 2S + K = 0$

$$3s^2 + K = 0 \rightarrow s = \pm \sqrt{\frac{K}{3}} j$$

نہ براہِ بخود امکان رہے مجدد مودودی رابر $\sqrt{2} +$

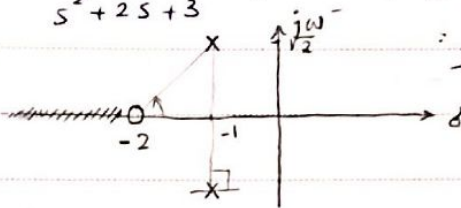
قطع می کند و مقدار K از نقطه سطح $K = 6$ است



مثال: سیستم با تابع تبدیل حلقه باز $G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}$ و $H(s) = 1$ دارد. تقریباً به نمودار مکان ریشه دارسیم کنید:

$$z_i = -2$$

$$p_i = -1 \pm \sqrt{2}j$$



که بر مگر حقیقی مضبوط است $n-m = 2-1 = 1 \rightarrow$ این تپ داریم

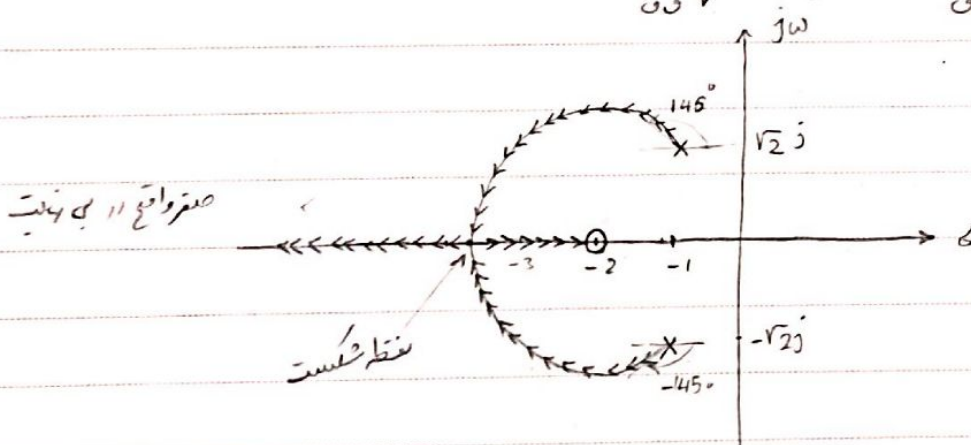
زاویه خروج از قطب را با بر تعیین کنیم
 $[2K+1]180 - (90 - 54.74) = 144.74^\circ = 145^\circ$
 زاویه خروج از قطب با این زاویه به تدارک مکان ریشه حول محور حقیقی زاویه خروج از قطب با این -145° است

بین صفر واقع در -2 و صفر واقع در $s=0$ نقطه شکست (بر مگر) داریم:

$$A'B = B'A \rightarrow s^2 + 2s + 3 = (s+2)(2s+2) \Rightarrow 2s^2 + 6s + 4 = s^2 + 2s + 3$$

$$\rightarrow s^2 + 4s + 1 = 0 \rightarrow s = -3.73 \text{ و } s = -0.268$$

✓ غ ق ✗ غ ق



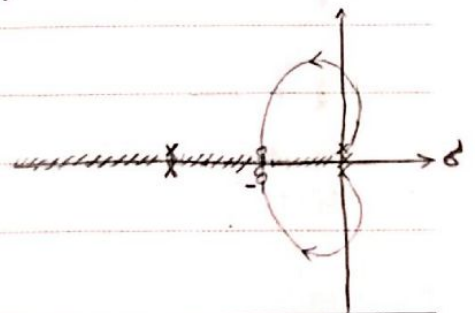
مثال: در تابع تبدیل حلقه باز $G_H = \frac{K(s+1)^4}{s^3(s+2)^2}$ زاویه خروج از قطب $s=0$ حقیقی است؟ و زاویه خروج از قطب $s=0$ را در هر دو ریشه

$$\theta_{P_0} = \frac{(2K+1)180 - [2 \times 0 - 4 \times 0]}{2} = 60^\circ$$

3 حول سه قطب $s=0$ داریم

$$\theta = \frac{-[(2K+1)180 - (3 \times 180 - 0)]}{4} = -90^\circ$$

$$z_i \quad \downarrow \quad 4$$



شکل:

مکان صفرها و پoles: $G(s)H(s) = \frac{k(s+2)}{s^2(s+4)}$ نسبت به تبدیل حلقه باز

$$P_i = 0, 0, -4$$

$$Z_i = -2$$

$$n-m = 3-1 = 2 \rightarrow$$

2 تا مجانب داریم

$$\sum \text{Re}(P_i) - \sum \text{Re}(Z_i) = \frac{-4 + 2}{2} = -1$$

$$\text{زاویه مجانبها: } \frac{(2l+1)180}{n-m} = \frac{180(2l+1)}{2} = 90, 270$$

$$\theta_{P_0} = \frac{(2k+1)180 - (0-0)}{2} = \frac{180}{2} = 90$$

زاویه خروج از قطب $s=0$

اطلاعات دیگری لازم نیست به راحتی می توان مکان را رسم نمود.

شکل: برای تابع تبدیل حلقه باز $GH = \frac{k s}{s^2 + 2s + 4}$ مکان را رسم کنید

$$P_i = -1 \pm \sqrt{3}j$$

$$Z_i = 0$$

$$\text{زاویه خروج از قطب 0: } (2k+1)180 - [90 - (180 - \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1})]$$

$$= 210$$

زاویه خروج از نقطه بین به علت تغییر است -210

بین صفر واقع در مبدأ و صفر واقع در ∞ انتظار داریم نقطه شکست باشد

$$A'B = B'A \rightarrow 1x(s^2 + 2s + 4) = s(2s + 2) \rightarrow s^2 - 4 = 0 \rightarrow s = \pm 2$$

$$\checkmark \text{ ق ق } s = -2$$

$$s^3 + 4s^2 + ks + 2k = 0$$

$$\begin{array}{r|l} s^3 & 1 \quad k \\ s^2 & 4 \quad 2k \\ s^1 & \frac{k}{2} \rightarrow k=0 \times \\ s^0 & 2k \end{array}$$

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت $G(s)H(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 5)}{s^2(s+2)(s+3)}$ است.

$P_i = 0, 0, -2, -3$

$Z_i = -1 \pm 2j$

$n-m = 4-2 = 2 \rightarrow$

2 کایب داریم

زاویه کایب ها: $\frac{(2l+1)180}{n-m} = \frac{(2l+1)180}{2} = 90, 270$

2 محل برخورد کایب ها: $\phi = \frac{\sum Re(P_i) - \sum Re(Z_i)}{n-m} = \frac{-2-3 - (-1-1)}{2} = -1.5$

$\phi = -1.5$

انتقال داریم بین قطب 2 و -3 نقطه شکست داشته ایم

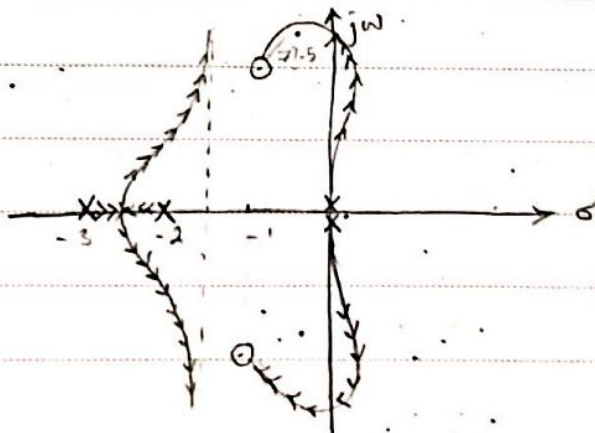
$A'B = B'A \rightarrow \frac{A}{B} = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2(s^2 + 5s + 6)} = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^4 + 5s^3 + 6s^2}$

$(2s+2)(s^4 + 5s^3 + 6s^2) = (4s^3 + 15s^2 + 12s)(s^2 + 2s + 5)$

$(2s+2)(s^3 + 5s^2 + 6s) = (4s^2 + 15s + 12)(s^2 + 2s + 5)$

بعد از این معادله نقطه شکست بدست می آید
زاویه خروج از قطب 0 را می توانیم بدست آوریم: $\theta_{P_0} = \frac{(2K+1)180 - (0+0 - (\tan^{-1}2 + 360 - \tan^{-1}2))}{2} = \frac{180}{2} = 90$
خارج از قطب ابتدا $K=1$

زاویه ورود به صفر را می توانیم بدست آوریم: $\theta_z = -((2K+1)180 - (\tan^{-1}2 + \tan^{-1}1 + 2 \times (180 - \tan^{-1}2) - 90))$
 $= -288.44 = 71.56$



دیاگرام بُد :

درایج دیاگرام اندازه و زاویه (فاز) تابع تبدیل در محورهای مختصات به ازای فرکانس های مختلف رسم می شود.

محور مختصات : اندازه را به جای مدرمطلق بر حسب dB (دسیبل) تقسیم بندی می کنند.
 $s = j\omega$ واحد dB $20 \log |$

برای رسم دیاگرام بُد خردی یک سیستم با تابع تبدیل $G(s)$:

از طرفین مختصات یک بریم $Y(s) = G(s) X(s)$

$$20 \log |Y(j\omega)| = 20 \log |G(j\omega)| + 20 \log |X(j\omega)|$$

بنابراین تابع تبدیل با دو محور است که داده می شود :
 (1) اندازه $\leftarrow$ هر دو بر حسب فرکانس
 (2) زاویه فاز

عنصر اصلی در کاترگوری دیاگرام بُد : معادل عمل ضرب (تقسیم) با حاصل جمع است

نکته : معنی تقریب اندازه در دیاگرام بُد را می توان با بی نظای آن تقریب زد.
 از کار بردهای بارز دیاگرام بُد بررسی پاسخ فرکانسی سیستم ها و جریان کشته ها است که در واقع بدون کاترگوری مورد بُد نتیجه ای نخواهد داشت.

برای رسم دیاگرام بُد هر تابع تبدیل (4 عامل هستند) :

(1) ضریب بهره یا بهره K

(2) عامل s ($j\omega$) = شیب قدر و عامل $\frac{1}{s}$ ($\frac{1}{j\omega}$) = استرال ضریب

(3) عامل درجه اول $\frac{1}{1+Ts}$ = $\frac{1}{1+j\omega T}$

(4) عامل درجه دوم $\frac{1}{1+2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n}+(\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$

معنی هر ترمیمی (تابع تبدیل) را به صورت ترکیب 4 عامل بالا می توان نوشت و دیاگرام بُد در آن را در دست آورد.

1) ضریب بهره یا بهره K :

K عدد ثابت است، تغییر K هیچ تغییری در زاویه (فاز) ایجاد نمی کند.

تغییر بهره K باعث بالا یا پایین رفتن نمودار اندازه می شود.

(بدون هیچ وجه باعث شده شدن یا باز شدن شکل در راستای افقی نمی شود.)

برای بالا بردن نمودار اندازه به اندازه a میسر $20 \log K = a$ $\leftarrow K_{new} = 10^{(a/20)}$

برای پایین بردن نمودار اندازه به اندازه a میسر $20 \log K = -a$ $\leftarrow K_{new} = 10^{(-a/20)}$

مغضی بد اندازه برای بهره ثابت K : یک خط افقی است که از $20 \log K$ عبور می کند.

معنی بد فاز برای بهره ثابت K : صفر است

نکته : مقدار dB اعداد بزرگتر از صفر است و برای اعداد کوچکتر از واحد منفی خواهد بود.

نکته : عوامل S و $\frac{1}{S}$ (مثلاً ضریب انتقال ضریب) بسیار قدر محدود در "فرکانس های پایین"

بسیار تاثیر گذارند و در بالا فراموشی های اندازه و فاز در هر سیستمی در فرکانس های پایین کاملاً

از این عوامل پردی می کنند.

2) عامل S : (صفر در مبدأ)

حمله S دارای فاز 90° می باشد (این باز همواره ثابت است)

اثبات : $(\omega = 0 \rightarrow \tan^{-1} \frac{\omega}{0} = \tan^{-1} \infty = 90^\circ)$

معنی اندازه در بالا فراموشی بد یک خط مستقیم با شیب $\frac{20 \text{ dB}}{\text{dec}}$ است $\leftarrow \frac{20 \text{ dB}}{\text{dec}}$

$$20 \log |\omega| = 20 \log |j\omega|$$

اندازه

$$-20 \rightarrow \omega = 0.1 \rightarrow 20 \log |0.1| = 20 \log 10^{-1} = -20 \text{ مثلاً}$$

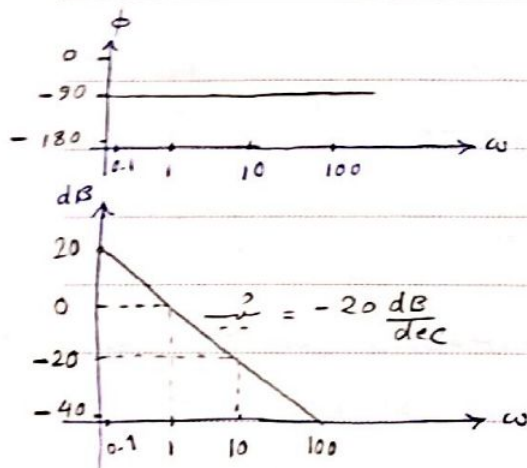
بنابراین :

(از $\omega = 1$ $G_H = 0 \text{ dB}$ می نذر)

اگر در تابع تبدیل S^n داشته باشیم آنگاه :

در نمودار اندازه : شیب خط به جای $\frac{20 \text{ dB}}{\text{dec}}$ میسر $20n \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$

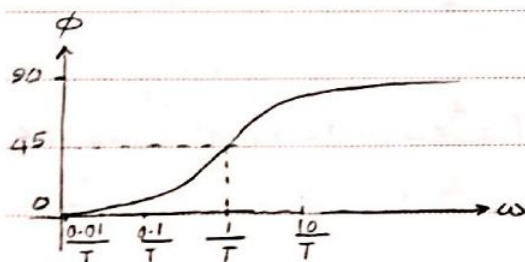
در نمودار زاویه (فاز) : به جای 90° میسر $90^\circ n$



(3) عامل $\frac{1}{s}$ = (تغییر در دینامیک)
عبارت $\frac{1}{s}$ در واقع دارای فاز عمودار ثابت -90° است.

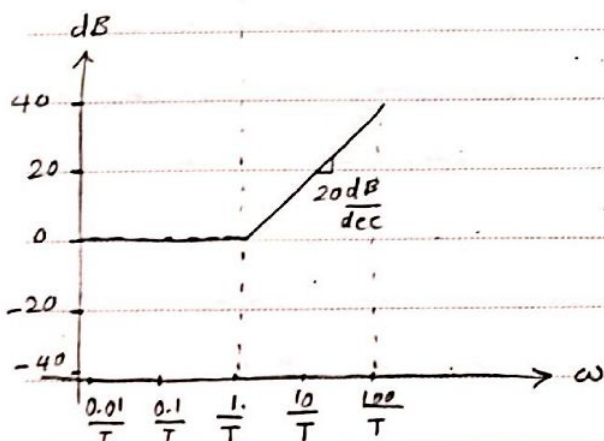
مقدار اندازه آن یک خط مستقیم با شیب $-20 \frac{dB}{dec}$ است
 $20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log |\omega|$
مثلاً: $-20 \log 100 = -20 \log 10^2 = -40 \frac{dB}{dec}$

بنابراین:
اگر در تابع تبدیل قطب به صورت $\frac{1}{s^n}$ داشته باشیم آنوقت:
در نمودار اندازه: شیب خط به جای $20 \frac{dB}{dec}$ به $-20n \frac{dB}{dec}$ می‌شود.
در نمودار فاز (زاویه): به جای -90° به $-90^\circ n$ می‌شود.

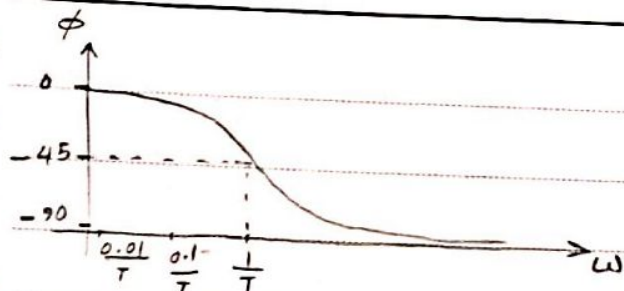


(4) عامل $(1+Ts)$ = (از واقع هر منفی)
 $\frac{1}{1+Ts} = \frac{1}{1+j\omega T}$

این جبهه دارای فازی است که:
از صفر به سمت 90° تغییر می‌دهد و در $\omega = \infty$ به 90° می‌رسد.
نقطه عطف یعنی فاز در فرکانس گوشه $(\frac{1}{T})$ است.
فرکانس گوشه: فرکانسی که در آن درجه فاز به 45° می‌رسد و این فرکانس از بسیاری صفر قرار دادن هر عامل بدست می‌آید.
مثلاً برای عامل $(1+Ts)$ و $(s + \frac{1}{T})$ فرکانس گوشه $\frac{1}{T}$ است.



$20 \log |(1+Ts)| = 20 \log |1+j\omega T|$
 $= 20 \log \sqrt{1+(\omega T)^2}$
یعنی اندازه: تا فرکانس گوشه یک خط افقی است.
و از فرکانس گوشه یک خط مستقیم با شیب $-20 \frac{dB}{dec}$ می‌شود.



5. عامل $(\frac{1}{Ts+1})$: (ردافع هر دو قطب غیر صفری)

$$\angle \frac{1}{Ts+1} = - \angle Ts+1 = - \tan^{-1} \frac{\omega}{1/T}$$

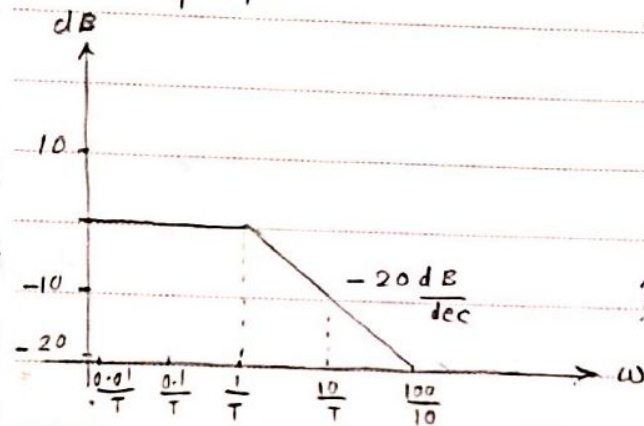
دارای مقدار فاز صاف است که :

از صفر شروع شده و در $\omega = \infty$ به -90° می رسد .
نقطه عطف : یعنی فاز در فرکانس گوشه $\frac{1}{T}$ اتفاق می افتد

$$20 \log \left| \frac{1}{Ts+1} \right| = -20 \log \sqrt{1+(T\omega)^2}$$

یعنی اندازه و تغییرات گوشه یک خط افقی ثابت

دارد فرکانس گوشه به دور یک خط مستقیم $-20 \frac{dB}{dec}$ می آید



تغییر تبدیل $\frac{1}{1+Ts}$ متخفیف یک فیلتر پایین گذر را دارد .
تغییر تبدیل $1+Ts$ متخفیف یک فیلتر بالا گذر را دارد .

6. عامل $[s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2]^n$

$$\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right]^n = \left[\frac{1}{1 + 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n}) + (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \right]^n$$

$n=1$ یا -1

در این حالت در محاسبه داریم

مقدار از محاسبه در نمودار که ثبت : خطوط شکسته ای که از بیدستی آن که به هم محدود و تقریبی حاصل

محاسبه اول همه محاسبه فرکانس پایین = یک خط افقی که از 0 dB می گذرد .

محاسبه دوم همه محاسبه فرکانس بالا = خطی مستقیم با شیب $-40 \frac{dB}{dec}$ است .

این دو محاسبه در فرکانس $\omega = \omega_n$ به هم می رسند ، این فرکانس گوشه محاسبه دارد 2 است

1. همه عامل درجه دوم به صورت حاصل ضرب در عامل درجه اول ، تقریبی حقیقی ظاهر می شود

2. همه عامل درجه دوم به صورت حاصل ضرب در عامل درجه اول ، تقریبی حقیقی ظاهر می شود

نکته : در جدول جدول فرکانس $\omega = \omega_n$ یک اوج ثبت می شود و محدود دارد .

مقدار این اوج ثبت به کلاً رابطه به مقدار ζ است .

مقدار فاز: از صفر شروع شده و در 180° می‌رسد.
دارای یک نقطه عطف در 90° است که این نقطه عطف در نواحی گوشه قرار دارد.

سیستم مینیم فاز و غیر مینیم فاز:

سیستم مینیم فاز: تابع انتقالی که در سمت راست محور ω هیچ صفر یا قطبی نداشته باشد.
نقطه: در تمام سیستم مینیم فاز قابل پیش بینی است و یک سیستم غیر مینیم فاز رفتار غیر معمول دارد.

نکات اساسی و مهم برای رسم نمودارهای بده:

(1) فرکانس ω که گوشه برای عامل ω در مدار است، قطب و صفر هستند.

(2) فرکانس ω که گوشه برای عامل در مدار $\omega = \omega_n$ است. مقدار صفر و مقدار قطب.

در یک تابع انتقالی مینیم فاز زلاویه فاز زمانی که $\omega \rightarrow \infty$ برابر $90(n-m)$ است.

در یک سیستم غیر مینیم فاز هر چه می‌توان از نکته بالا استفاده کرد و باید زاویه فاز را می‌سپارد.

در یک سیستم غیر مینیم فاز هر چه می‌توان از نکته بالا استفاده کرد و باید زاویه فاز را می‌سپارد.

در یک سیستم غیر مینیم فاز هر چه می‌توان از نکته بالا استفاده کرد و باید زاویه فاز را می‌سپارد.

در یک سیستم غیر مینیم فاز هر چه می‌توان از نکته بالا استفاده کرد و باید زاویه فاز را می‌سپارد.

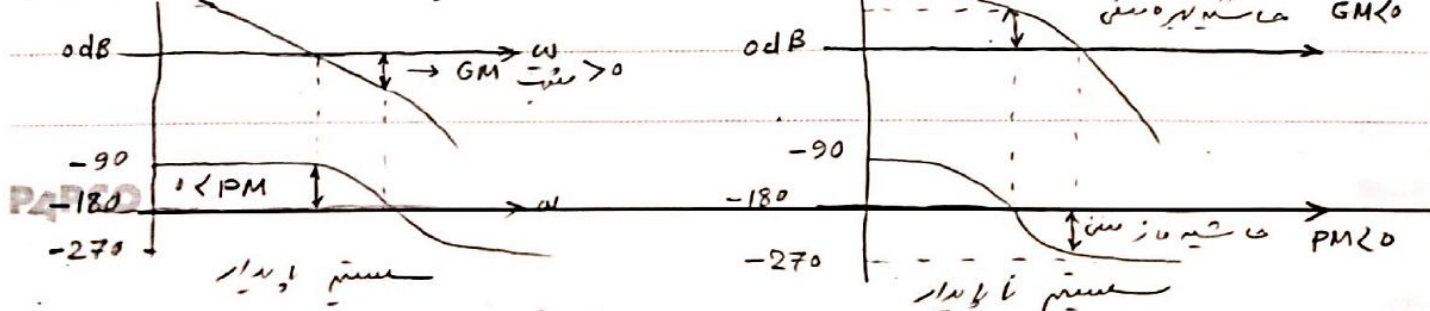
خواهیم پایداری و حد فاز و حد بهره در دسترس بماند:

در بده، اگر اندازه تابع تبدیل حلقه باز در حلقه باز 180° است، حتماً از پایداری.

این معیار است. اگر $20 \log |GH| < 0$ (در حالی که فاز 180° است) آنگاه پایداری.

حد بهره بده: اختلاف اندازه GH با اندازه صفر در حلقه باز GH ، 180° باشد GM است.

حد فاز بده: اختلاف فاز GH با فاز 180° است در حالی که اندازه GH 0 dB است (PM).



شال: دیاگرام اندازه برای سیستم با $G(s) = \frac{1000 s}{(s+1)(s+10)}$ را در دست آورید:
انتقال مقب و صفهای سیستم را به صورت $(1+Ts)$ درسی آوریم تا K و آنکه سیستم یکین شده

$$G(s) = \frac{1000 s}{(s+1) 10 (1 + \frac{1}{10} s)} = \frac{100 s}{(s+1) (1 + \frac{1}{10} s)} \quad \frac{1}{T} = 10$$

$\frac{1}{T} = 1$ نرم استاندارد $1+Ts$

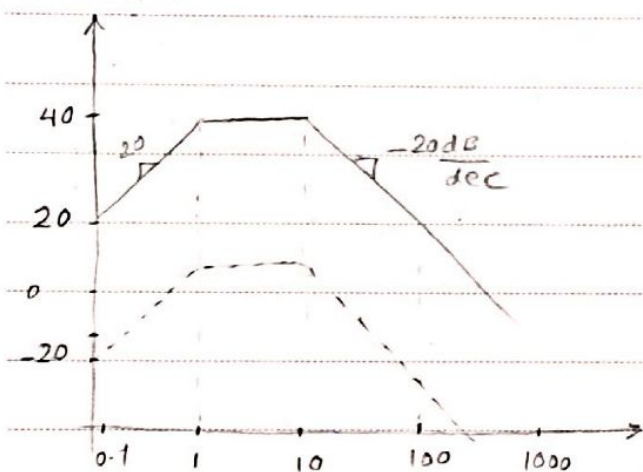
$K=100 \rightarrow 20 \log 100 = 40 \text{ dB}$ 40 dB نمودار را با لای برد.

برای برای نمودار عوامل یکین شده (صفه و مقب در بعدا یعنی عوامل s و $\frac{1}{s}$ هستند) در اینجا s

داریم که دیاگرام اندازه آن $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ بعدا پس نمودار در ابتدا دارای شیب $20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ است

کرنه علت $K=100$ به سمت بالا شیب 40 dB دارد می شود

$|G(j\omega)| \text{ dB}$



از $\omega=1$ قطب $(s+1)$ شیب نمودار را از 20 به 40 تغییر می دهد

گوشه اش خنثی می کند محول $s+1$ به این نرم

است -20 تغییرات از 40 به 20 در 10 تغییر می دهد

نمودار دوگانه از فرکانس 10 که قطب بعدی برابر

شیب نمودار را -20 به -40 تغییر می دهد

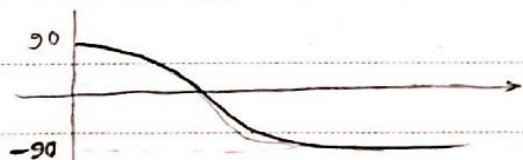
از فرکانس گوشه 10 به بعد قطب $(s+10)$ تغییر

نمودار است $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ به نمودار شیب دارد

$$\angle G(s) = +90 - \tan^{-1} \frac{\omega}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega}{10}$$

$$\omega \rightarrow 0 \rightarrow \angle GH = 90$$

$$\omega \rightarrow \infty \rightarrow \angle GH = +90 - 90 - 90 = -90$$

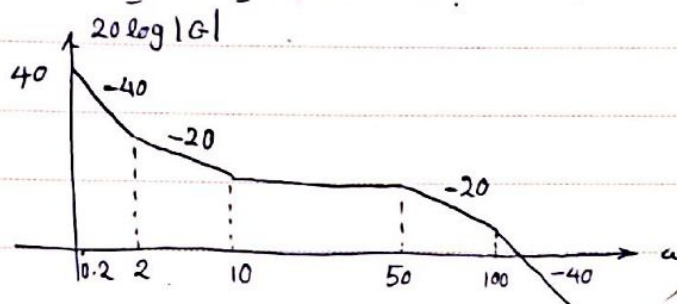


$$(n-m)x - 20 = -20 \quad \text{شیب پایی}$$

$$(n-m)x - 90 = -90 \quad \text{فاز پایی}$$

نکته: چون سیستم مستقیم فاز است می دانستیم از لال که

مثال: برای گرام انداز (Bode) سیستم به صورت تابع تبدیل سیستم به چه صورت بوده است؟



می دانیم در ابتدای نمودار بهره K و
صفر و قطبهای در مبدأ تاثیر ندارند
از روی شیب ابتدایی نمودار واضح است که

سیستم دو قطب در مبدأ داشته است $(\frac{1}{s^2})$ برای بدست آوردن عرض از مبدأ حاصل
از بهره K و قطبهای در مبدأ داریم:

$$20 \log K - 40 \log 0.2 = 40$$

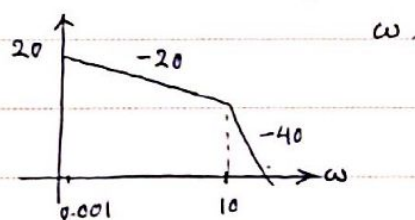
$$\rightarrow 20 (\log K - 2 \log 0.2) = 40 \rightarrow \log K - \log (0.2)^2 = 2$$

$$\rightarrow \log \left(\frac{K}{0.04} \right) = 2 \rightarrow \frac{K}{0.04} = 100 \rightarrow \boxed{K=4}$$

$$\text{بنابراین: } G(s) = \frac{4 \left(1 + \frac{1}{2}s\right) \left(1 + \frac{1}{10}s\right)}{s^2 \left(s + \frac{1}{50}s\right) \left(1 + \frac{1}{100}s\right)}$$

$n-m=2 \leftarrow$ شیب پایانی -40 که باعث تغییرات دارد.

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستم با گرام انداز Bode سیستم به چه صورت آورده:



همانند قبل داریم:

$$20 \log K - 20 \log 0.001 = 20$$

$$\rightarrow \log \left(\frac{K}{0.001} \right) = 1 \rightarrow \frac{K}{0.001} = 10 \rightarrow K = 0.01$$

$$G(s) = \frac{0.01}{s \left(1 + \frac{1}{10}s\right)}$$