فصل هفتم: تقریب حل‌های آزمون، توابع وزن و تربیع گاوس برای مسائل چند بعدی

مقدمه

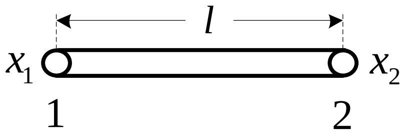
در این فصل نحوه ایجاد توابع وزن و آزمون را برای مسائل دو و سه بعدی تشریح می‌کنیم.

مثل قبل توابع تقریب را با $\theta(x,y)$ نمایش می‌دهیم که θ می‌تواند پارامتری اسکالر مانند دما باشد.

در انتهای فصل هم با روش انتگرال‌گیری عددی تربیع گاوس در چند بعد آشنا می‌شویم.

××

یادآوری از مسائل یک بعدی: المان یک‌بعدی دو گرهی

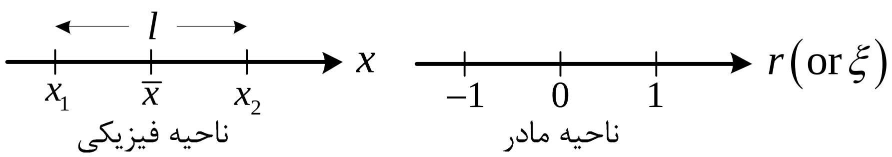


ابتدا مسأله یک بعدی را مرور و تکمیل می‌کنیم.

می‌دانیم تابع شکل المان دو گرهی در مختصات کلی عبارت است از:

(۱-۷)

انتگرال‌گیری عددی ابتدا روی ناحیه مادر انجام شده سپس حاصل به ناحیه فیزیکی (کلی) نگاشت می‌شود.



××

با توجه به اینکه در $x=x_1$ داریم $r=-1$ و در $x=x_2$ داریم $r=+1$ ، رابطه زیر بین مختصات مادر r و مختصات فیزیکی x برقرار است:

(۲-۷)

با جاگذاری در معادله (۷-۱) توابع شکل در مختصات مادر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$N_1(r)=\frac{1-r}{2} \quad , \quad N_2(r)=\frac{1+r}{2}$$ (۳-۷)

مختصات مادر (parent) را مختصات طبیعی (natural) هم می‌نامند.

××

علاوه بر مختصات فیزیکی و مادر از مختصات دیگری به نام مختصات طولی (length coordinate) استفاده می‌کنیم.

دلیل اصلی استفاده از مختصات طولی بهره‌گیری از فرمول‌های انتگرال‌گیری ساده آن است.

مختصات طولی بر خلاف مختصات فیزیکی (x) و مادر (r) شامل دو مختصات L_1 و L_2 می‌شود.

البته به زودی خواهیم دید که این دو مختصات از هم مستقل نیستند و رابطه زیر بین آنها برقرار است:

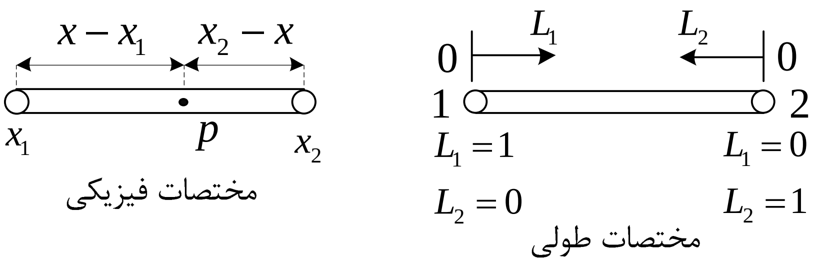
(۴-۷)

××

نقطه دلخواه p را در المان زیر در نظر بگیرید. مختصات طولی L_1 و L_2 بصورت زیر تعریف می‌شوند:

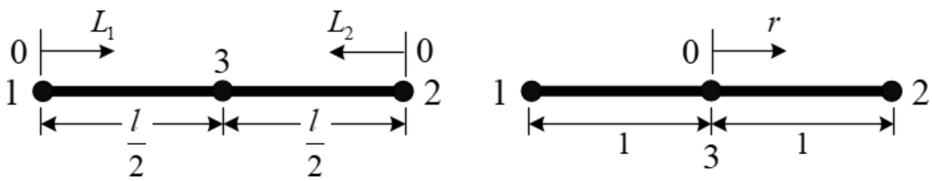
(۵-۷)

می‌توان نشان داد برای المان خطی دو گرهی $N_1 = L_1$ و $N_2 = L_2$ هستند.



××

المان یک‌بعدی سه گرهی



با این المان در فصل‌های قبل آشنا شدیم.

توابع شکل این المان به ترتیب بر حسب مختصات طولی و مادر عبارت است از:

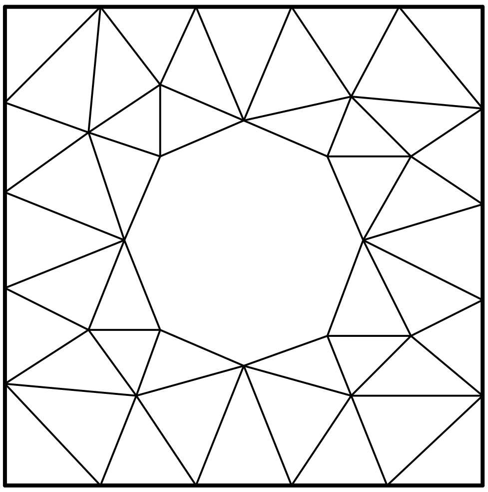
(۶-۷)

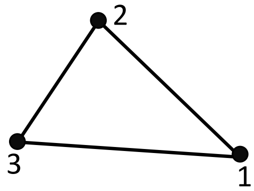
$$N_1 = -\frac{1}{2} r(1-r) \quad , \quad N_2 = \frac{1}{2} r(1+r) \quad , \quad N_3 = (1+r)(1-r)$$ (۷-۷)

××

مسائل دوبعدی: المان مثلثی سه گرهی

این المان C^0 که در شکل نشان داده شده است ساده‌ترین المان مورد استفاده در دو بعد است.





××

المان مثلثی سه گرهی

در این المان مثلثی، توابع آزمون در مختصات کلی با تابعی خطی از مختصات فضایی x و y تقریب زده می‌شوند:

$$u = c_1 + c_2 x + c_3 y \qquad (۸-۷)$$

$$\theta(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \qquad (۹-۷)$$

معادله اخیر را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

(۱۰-۷)

همانطور که می‌بینیم تعداد ضرایب α با تعداد گره‌های المان برابر است.

××

مشابه حالت یک بعدی برای گره‌های المان می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1\\ \theta_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2\\ \theta_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} \tag{۱۱-۷}$$

یا به عبارت دیگر:

(۱۲-۷)

××

با جاگذاری از رابطه (۷-۱۲) در رابطه (۷-۱۰) خواهیم داشت:

(۱۳-۷)

این معادله را می‌توان بر حسب توابع شکل المان $\tilde{\mathbf{N}}$ بصورت زیر نوشت:

$$\theta(x,y) = N_1\theta_1 + N_2\theta_2 + N_3\theta_3 = \begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\boldsymbol{\theta}} \tag{۱۴-۷}$$

××

با توجه به دو معادله اخیر، توابع شکل المان در مختصات کلی برابرند با:

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{1}{2A}\left(x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right)\\ N_2 &= \frac{1}{2A}\left(x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right)\\ N_3 &= \frac{1}{2A}\left(x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right)\end{aligned} \tag{۱۵-۷}$$

در این معادله، A مساحت المان مثلثی است که با رابطه مقابل حساب می‌شود:

(۱۶-۷)

××

برای این توابع شکل نیز قاعده زیر برقرار است:

(۱۷-۷)

یعنی:

$$N_1(x_1,y_1)=1,\quad N_2(x_1,y_1)=0,\quad N_3(x_1,y_1)=0$$
$$N_1(x_2,y_2)=0,\quad N_2(x_2,y_2)=1,\quad N_3(x_2,y_2)=0$$
$$N_1(x_3,y_3)=0,\quad N_2(x_3,y_3)=0,\quad N_3(x_3,y_3)=1$$

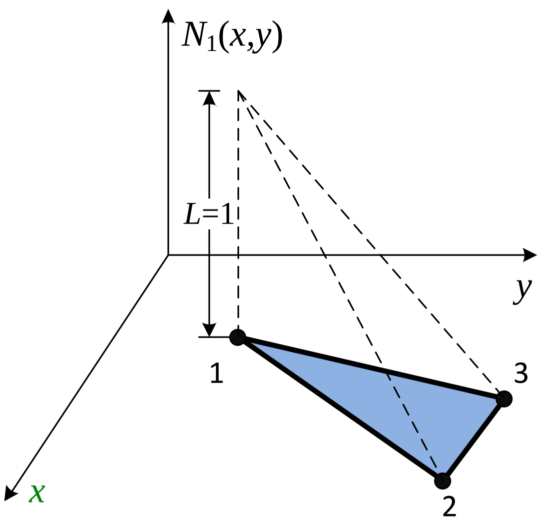
ضمناً جمع توابع شکل المان در هر نقطه در داخل یا روی مرز المان برابر واحد است:

$$\sum_{i=1}^{n_{en}} N_i(x,y)=1 \tag{۱۸-۷}$$

××

در این معادله n_{en} تعداد گره‌های المان و (x,y) مختصات نقطه‌ای دلخواه در داخل یا روی مرز المان است.

در المان‌های خطی تابع شکل مربوط به هر گره در آن گره یک است اما بصورت خطی تغییر کرده و در گره‌های دیگر صفر می‌شود.



××

گرادیان (مشتق) تابع شکل را مانند قبل با نمایش می‌دهیم که برای المان مثلثی سه گرهی مساوی است با:

$$\vec{\nabla}\theta=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x}\theta_1+\dfrac{\partial N_2}{\partial x}\theta_2+\dfrac{\partial N_3}{\partial x}\theta_3\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y}\theta_1+\dfrac{\partial N_2}{\partial y}\theta_2+\dfrac{\partial N_3}{\partial y}\theta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

(۱۹-۷)

××

با توجه به معادله (۷-۱۵) ماتریس $\vec{\mathbf{B}}$ برای این المان بصورت زیر بدست می‌آید:

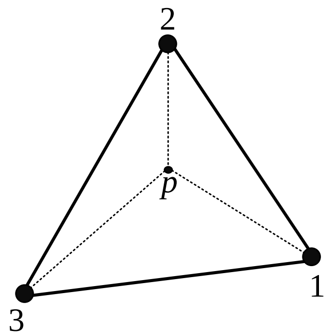
(۲۰-۷)

همانطور که می‌بینیم برای این المان ماتریس $\vec{\mathbf{B}}$ روی المان ثابت است.

این امر از آن نشأت می‌گیرد که تابع شکل المان تابعی خطی از مختصات است.

چون گرادیان (مشتق) تابع شکل عموماً در معادلات اجزاء محدود ظاهر می‌شود محاسبه آن حائز اهمیت است.

××



مختصات مساحتی (area coordinate) برای المان‌های مثلثی

مشابه با مختصات طولی (در حالت یک بعدی) تعریف می‌گردد.

$$L_1=\frac{\text{area}\ \ p23}{\text{aera}\ \ 123}\quad,\quad L_2=\frac{\text{area}\ \ p13}{\text{aera}\ \ 123}\quad,\quad L_3=\frac{\text{area}\ \ p12}{\text{aera}\ \ 123}\quad,\quad L_1+L_2+L_3=1 \qquad (۲۱-۷)$$

××

با توجه به این روابط واضح است که:

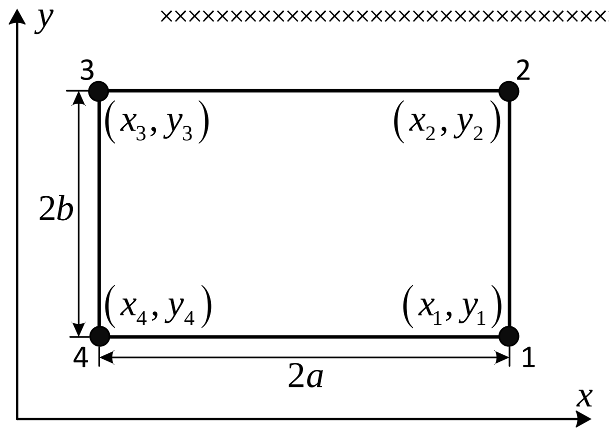
$$\begin{aligned}
&L_1(x_1,y_1)=1 \quad , \quad L_1(x_2,y_2)=0 \quad , \quad L_1(x_3,y_3)=0\\
&L_2(x_1,y_1)=0 \quad , \quad L_2(x_2,y_2)=1 \quad , \quad L_2(x_3,y_3)=0\\
&L_3(x_1,y_1)=0 \quad , \quad L_3(x_2,y_2)=0 \quad , \quad L_3(x_3,y_3)=1
\end{aligned} \qquad (۲۲-۷)$$

همچنین داریم:

(۲۳-۷)

براحتی می‌توان نشان داد برای المان مثلثی سه گرهی $N_i = L_i$ است.

××



المان مستطیلی چهار گرهی

شماره‌گذاری موضعی گره‌ها مانند قبل بصورت پادساعتگرد انجام می‌شود.

چون این المان چهار گره دارد باید چندجمله‌ای مورد استفاده برای تابع θ دارای چهار پارامتر باشد.

××

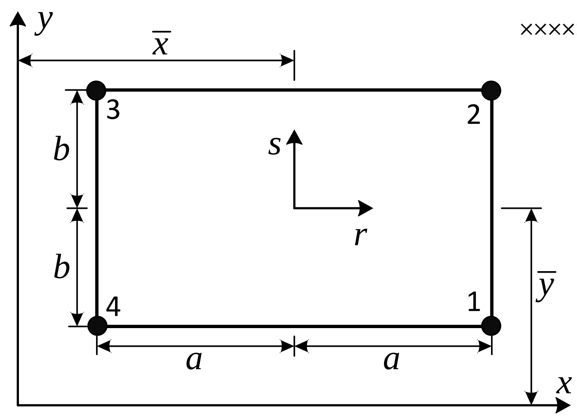
با توجه به این مطلب θ بصورت زیر تعریف می‌شود:

(۲۴-۷)

توابع شکل برای این المان در مختصات کلی عبارتند از:

$$\begin{cases} N_1 = -\dfrac{1}{A}(x-x_4)(y-y_2) \quad , \quad N_2 = \dfrac{1}{A}(x-x_3)(y-y_1) \\ N_3 = -\dfrac{1}{A}(x-x_2)(y-y_4) \quad , \quad N_4 = \dfrac{1}{A}(x-x_1)(y-y_3) \end{cases} \qquad \text{where} \quad A = 4ab \tag{۲۵-۷}$$

××



مختصات مادر (طبیعی) برای المان مستطیلی مطابق شکل زیر تعریف می‌گردد:

(۲۶-۷)

لذا خواهیم داشت:

$-1 \le r \le +1 \quad , \quad -1 \le s \le +1$

××

توابع شکل در مختصات مادر بصورت زیر هستند:

(۲۷-۷)

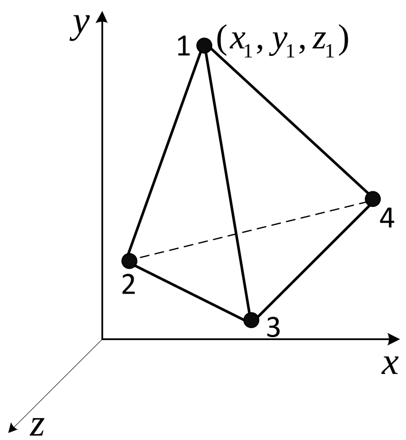
بنابراین تابع θ برحسب این توابع شکل عبارت است از:

$$\theta = \sum_{i=1}^{4} N_i(r,s)\theta_i = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)\theta_1 + \frac{1}{4}(1+r)(1+s)\theta_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)\theta_3 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)\theta_4 \qquad (۲۸-۷)$$

××

مسائل سه‌بعدی: المان چهارگرهی چهاروجهی

نمونه‌ای از این المان در شکل نشان داده شده است.



- هر گرهی را می‌توان به عنوان گره اول در نظر گرفت،
- وقتی از گره اول به سه گره بعدی نگاه می‌کنیم شماره‌گذاری سه گره بعدی باید بصورت پادساعتگرد باشد.

××

تابع θ در این المان بر حسب مختصات کلی عبارت است از:

(۲۹-۷)

یا به عبارت دیگر:

$$\theta(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \qquad (۳۰-۷)$$

در نتیجه در گره‌های المان خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\theta_1(x,y)&=\alpha_1+\alpha_2x_1+\alpha_3y_1+\alpha_4z_1\\ \theta_2(x,y)&=\alpha_1+\alpha_2x_2+\alpha_3y_2+\alpha_4z_2\\ \theta_3(x,y)&=\alpha_1+\alpha_2x_3+\alpha_3^ey_3+\alpha_4z_3\\ \theta_4(x,y)&=\alpha_1+\alpha_2x_4+\alpha_3y_4+\alpha_4z_4\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x_1&y_1&z_1\\1&x_2&y_2&z_2\\1&x_3&y_3&z_3\\1&x_4&y_4&z_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}$$

××

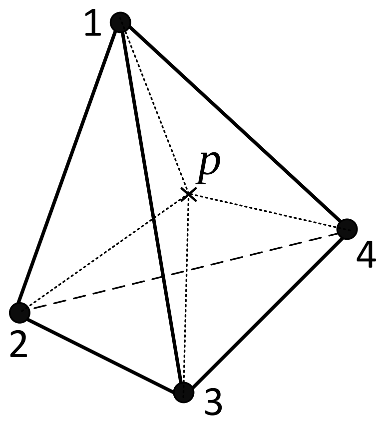
با کمک ماتریس معکوس خواهیم داشت:

$$\theta=\begin{bmatrix}1&x&y&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x_1&y_1&z_1\\1&x_2&y_2&z_2\\1&x_3&y_3&z_3\\1&x_4&y_4&z_4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1&N_2&N_3&N_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\end{bmatrix}\qquad (۳۱\text{-}۷)$$

توابع شکل $\tilde{\mathbf{N}}$ با حل این معادله ماتریسی بدست می‌آید.

××

$$\begin{aligned}&L_1=\frac{\text{volume}\ \ p234}{\text{volume}\ \ 1234}\quad,\quad L_2=\frac{\text{volume}\ \ p134}{\text{volume}\ \ 1234}\\ &L_3=\frac{\text{volume}\ \ p124}{\text{volume}\ \ 1234}\quad,\quad L_4=\frac{\text{volume}\ \ p123}{\text{volume}\ \ 1234}\quad,\quad L_1+L_2+L_3+L_4=1\end{aligned}\qquad (۳۲\text{-}۷)$$



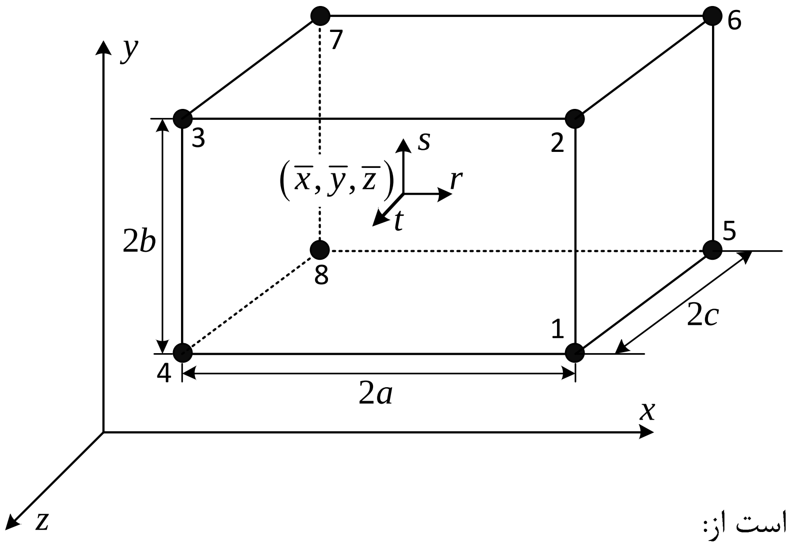
××

$$L_1=\frac{\text{volume}\ \ p234}{\text{volume}\ \ 1234}=\frac{\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}}{\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}} \qquad (۳۳-۷)$$

با استفاده از معادله بالا و معادله (۷-۳۱) می‌توان نشان داد $N_i=L_i$ است.

××××××××××××××××××××××××××××××××××××

المان مکعب مستطیلی هشت گرهی



تابع θ در این المان بر حسب مختصات کلی عبارت است از:

$$\theta(x,y,z)=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4z+\alpha_5xy+\alpha_6yz+\alpha_7zx+\alpha_8xyz$$

مختصات مادر این المان بصورت زیر تعریف می‌گردد:

(۳۴-۷)

××

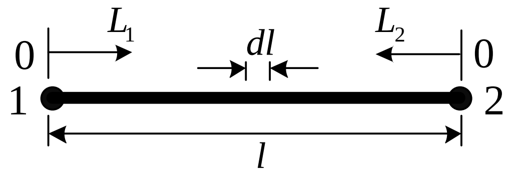
به جای (r,s,t) می‌توان از نماد (ξ,η,ζ) هم استفاده نمود.

توابع شکل در مختصات مادر بصورت زیر هستند:

$$N_1=\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)\quad,\quad N_2=\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)$$
$$N_3=\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)\quad,\quad N_4=\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)$$
$$N_5=\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)\quad,\quad N_6=\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)$$
$$N_7=\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)\quad,\quad N_8=\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$$
(۷-۳۵)

××

چند فرمول انتگرال‌گیری ساده



هدف اصلی از معرفی مختصات طولی، مساحتی و حجمی استفاده از چند فرمول انتگرال‌گیری ساده بر حسب آنها بود.

فرمول انتگرال‌گیری مناسب بر حسب مختصات طولی عبارت است از:

(۷-۳۶)

در رابطه بالا l طول المان بین گره‌های ۱ و ۲ و dl دیفرانسیل طول المان است.

××

مثال (۷-۱): اگر نیروی جسمی $\vec{\mathbf{b}}$ در طول المان ثابت باشد بردار نیروی گرهی المان دو گرهی در اثر نیروی جسمی را حساب کنید.

حل: می‌دانیم بردار نیروی گرهی در اثر نیروی جسمی برابر است با:

$$\tilde{\mathbf{f}}_b^e=\int_V \vec{\mathbf{N}}^T\vec{\mathbf{b}}dV=\int_{x_1}^{x_2}\vec{\mathbf{N}}^T bAdx=bA\int_{x_1}^{x_2}\begin{bmatrix}N_1\\N_2\end{bmatrix}dx$$

از طرفی برای المان دو گرهی $N_i=L_i$ است بنابراین:

××

فرمول انتگرال‌گیری مناسب بر حسب مختصات مساحتی عبارت است از:

$$\int_A L_1^{\alpha} L_2^{\beta} L_3^{\gamma} dA = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} 2A \qquad (۳۷-۷)$$

مثال(۷-۲): اگر ماتریس سختی ناشی از همرفتی در جسم دوبعدی به ضخامت h بصورت $\int_A N_1 N_2 h dA$ باشد و از المان مثلثی سه گرهی استفاده کنیم مقدار این انتگرال را محاسبه نمایید.

حل: برای المان مثلثی سه گرهی $N_i = L_i$ است بنابراین:

××

فرمول انتگرال‌گیری مناسب بر حسب مختصات حجمی عبارت است از:

$$\int_V L_1^{\alpha} L_2^{\beta} L_3^{\gamma} L_4^{\delta} dV = \frac{\alpha!\beta!\gamma!\delta!}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+3)!} 6V \qquad (۳۸-۷)$$

مثال(۷-۳): یکی از ترم‌های نیروی گرهی المان ناشی از نرخ تولید گرمای Q (بر واحد حجم) از رابطه $\int_V N_2 Q dV$ بدست می‌آید. این انتگرال را برای المان چهار وجهی چهار گرهی محاسبه نمایید.

حل: برای المان چهار وجهی چهار گرهی $N_i = L_i$ است بنابراین:

××

المان‌های ایزوپارامتریک

در بخش‌های قبل تابع شکل المان‌ها در مختصات مادر برای المان‌های مستطیلی (دو بعد) و مکعب مستطیلی (در سه بعد) داده شد.

عموماً در مسائل واقعی برای مدلسازی دقیق هندسه مسأله نیازمند به استفاده از المان‌هایی با اشکال پیچیده‌تر هستیم.

به این منظور از یک ویژگی المان‌های ایزوپارامتریک کمک می‌گیریم که منجر به پیشرفتی بزرگ در روش اجزاء محدود گردید.

××

در المان‌های ایزوپارامتریک می‌توان مختصات فیزیکی (x,y,z) را با همان توابع شکلی که برای تعیین تابع پارامتر θ کاربرد داشتند بدست آورد.

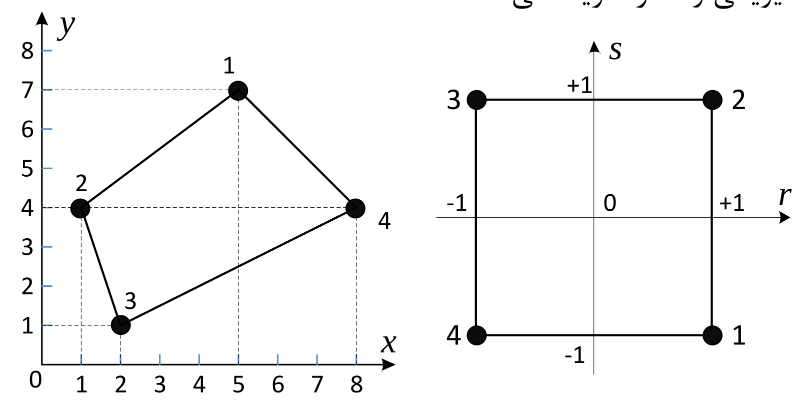
یعنی به بیان ریاضی:

(۳۹-۷)

در این رابطه n تعداد گره‌های المان، N_i تابع شکل مربوط به گره i در مختصات مادر و (x_i,y_i,z_i) مختصات گره i در مختصات فیزیکی هستند.

در واقع رابطه (۳۹-۷) نگاشتی یک به یک بین ناحیه فیزیکی و مادر تعریف می‌کند.

××



(الف) (ب)

××

مختصات گره‌های المان در دستگاه مختصات فیزیکی عبارت است از:

مطابق با معادله (۳۹-۷) برای این المان چهارضلعی می‌توان نوشت:

$$x=\sum_{i=1}^{n}N_i x_i = N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3+N_4x_4=\frac{(1+r)(1-s)}{4}5+$$
$$\frac{(1+r)(1+s)}{4}1+\frac{(1-r)(1+s)}{4}2+\frac{(1-r)(1-s)}{4}8=\frac{s}{2}(r-5)+4-r$$

××

و همچنین:

$$y=\sum_{i=1}^{n}N_i y_i = N_1y_1+N_2y_2+N_3y_3+N_4y_4=\frac{(1+r)(1-s)}{4}7+$$

$$\frac{(1+r)(1+s)}{4}4+\frac{(1-r)(1+s)}{4}1+\frac{(1-r)(1-s)}{4}4=\frac{3r}{2}-\frac{3s}{2}+4$$

به عنوان مثال در گره اول المان ایزوپامتریک داریم:

××

همانطور که می‌بینیم نگاشت (۷-۳۹) مختصات گره اول المان را به درستی تعیین می‌کند.

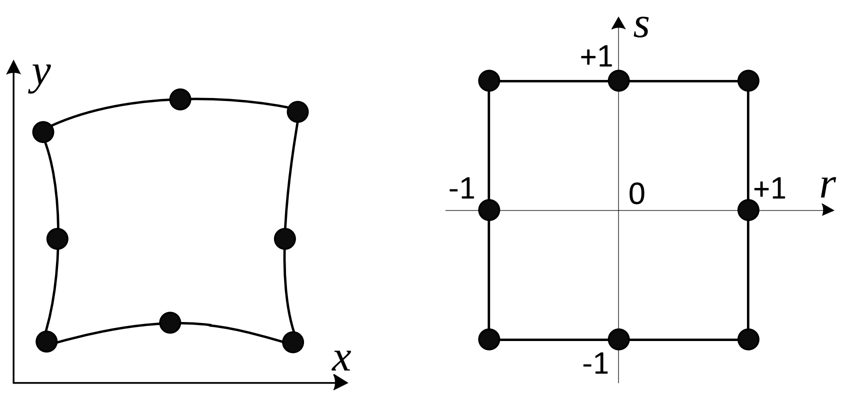
مختصات سایر گره‌ها و نیز نقاط المان را هم می‌توان با کمک این نگاشت در مختصات فیزیکی بدست آورد.

به عنوان مثال نقطه متناظر با نقطه $(r,s)=(1.0,0.75)$ در مختصات فیزیکی عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} x=\dfrac{0.75}{2}(1-5)+4-1=1.5 \\ y=\dfrac{3(1)}{2}-\dfrac{3(0.75)}{2}+4=4.375 \end{vmatrix}$$

××

در شکل زیر المانی مرتبه دوم با اضلاع منحنی در مختصات فیزیکی به المان ایزوپارامتریک مرتبه دوم در مختصات مادر نگاشته شده است.



××

فرمولاسیون ایزوپارامتریک در دو بعد

سپس نتیجه با کمک تبدیلات مناسب به ناحیه فیزیکی برگردانده می‌شود.

جهت محاسبه انتگرال‌ها در ناحیه مادر لازم است مشتقات توابع شکل را از ناحیه فیزیکی به ناحیه مادر تبدیل کنیم.

به عبارت دیگر باید انتگرال‌ها طوری تبدیل شوند که متغیرهای (r,s) جایگزین متغیرهای (x,y) شوند.

چون متغیرهای (r,s) و (x,y) به هم ارتباط دارند (طبق معادله (۷-۲۶)) می‌توان نوشت:

(۴۰-۷)

×××

بنابراین مشتقات تابع شکل N_i برابرند با:

(۴۱-۷)

یا به فرم ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (۴۲-۷)$$

ماتریس ۲×۲ سمت راست معادله بالا ماتریس ژاکوبین نام داشته و با $\tilde{\mathbf{J}}$ نشان داده می‌شود.

×××

یعنی ژاکوبین تبدیل از مختصات فیزیکی به مادر برابر است با:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \qquad (۴۳-۷)$$

ضمن اینکه از درس حساب دیفرانسیل به یاد داریم:

$$dx\,dy = \left|\det \tilde{\mathbf{J}}\right| dr\,ds \qquad (۴۴-۷)$$

دترمینان ماتریس ژاکوبین که در این معادله بکار رفته ژاکوبین نامیده می‌شود.

×××

با ضرب معادله (۷-۴۲) در $\tilde{\mathbf{J}}^{-1}$ مشتقات توابع شکل از ناحیه فیزیکی به مادر تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial s} \end{bmatrix} \qquad (۴۵-۷)$$

ماتریس ژاکوبین هم با استفاده از معادله (۷-۳۹) بصورت زیر قابل محاسبه است:

(۴۶-۷)

××

مثال (۷-۴): انتگرال زیر را از ناحیه فیزیکی المان شکل (الف) به ناحیه مادر شکل (ب) تبدیل کنید.

$$I = \iint_{\Omega^e} x \frac{\partial N_3}{\partial x}\, y \frac{\partial N_3}{\partial y}\, dxdy$$

حل: برای نگاشت موجود بین این دو المان بدست آوردیم:

$$x = \sum_{i=1}^{n} N_i x_i = \frac{s(r-5)}{2} + 4 - r \qquad , \qquad y = \sum_{i=1}^{n} N_i y_i = \frac{3r-3s}{2} + 4$$

حال طبق معادله (۷-۴۵) داریم:

××

بنابراین باید ماتریس ژاکوبین و معکوس آن را بیابیم. به این منظور از معادله (۷-۴۶) بهره می‌گیریم:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \sum \dfrac{\partial N_j}{\partial r} x_j & \sum \dfrac{\partial N_j}{\partial r} y_j \\ \sum \dfrac{\partial N_j}{\partial s} x_j & \sum \dfrac{\partial N_j}{\partial s} y_j \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}}_{11} &= 5\frac{1}{4}(1-s) + 1\frac{1}{4}(1+s) - 2\frac{1}{4}(1+s) - 8\frac{1}{4}(1-s) = \frac{s}{2} - 1 \\ \tilde{\mathbf{J}}_{12} &= 7\frac{1}{4}(1-s) + 4\frac{1}{4}(1+s) - 1\frac{1}{4}(1+s) - 4\frac{1}{4}(1-s) = \frac{3}{2} \\ \tilde{\mathbf{J}}_{21} &= -5\frac{1}{4}(1+r) + 1\frac{1}{4}(1+r) + 2\frac{1}{4}(1-r) - 8\frac{1}{4}(1-r) = \frac{r}{2} - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

××

در نتیجه داریم:

$$\vec{\mathbf{J}}=\begin{bmatrix}\frac{s}{2}-1 & \frac{3}{2}\\ \frac{r}{2}-\frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \det\left(\vec{\mathbf{J}}\right)=\frac{21-3r-3s}{4}\quad,\quad \vec{\mathbf{A}}=\vec{\mathbf{J}}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{r+s-7} & \frac{2}{r+s-7}\\ \frac{2(r-5)}{3(r+s-7)} & \frac{2(s-2)}{3(r+s-7)}\end{bmatrix}$$

حال می‌توان مشتقات تابع شکل را محاسبه نمود:

××

و:

بنابراین انتگرال I در ناحیه مادر بصورت زیر خواهد بود:

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{s(r-5)}{2}+4-r\right)\left(\frac{-r-s}{2(r+s-7)}\right)\left(\frac{3r-3s}{2}+4\right)\left(\frac{4s-3r+7}{6(r+s-7)}\right)\left(\frac{21-3r-3s}{4}\right)drds$$

××

انتگرال‌گیری به روش تربیع گاوس در دو و سه بعد

با نگاشت از ناحیه فیزیکی به ناحیه مادر با انتگرال‌هایی به شکل زیر مواجه می‌شویم که محاسبه عددی آنها مبحث بعدی این فصل است:

(۴۷-۷)

فرمول انتگرال‌گیری تربیع گاوس در یک بعد را به راحتی می‌توان به مسائل دو و سه بعدی تعمیم داد.

این فرمول در دو بعد بصورت زیر است:

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}f\left(r,s\right)drds=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}w_i w_j f\left(r_i,s_j\right) \qquad (۴۸\text{-}۷)$$

××

در این رابطه n تعداد نقاط گاوس در جهت r و m تعداد نقاط در جهت s است.

به همین صورت در سه بعد خواهیم داشت:

(۴۹-۷)

تمرین سری پنجم

با استفاده از روش تربیع گاوس و با بهره‌گیری از دو نقطه گاوس در هر جهت نشان دهید حاصل انتگرال I در مثال (۴-۷) برابر 0.6037 است. I را به روش تحلیلی (هم در مختصات فیزیکی و هم در مختصات مادر) هم حساب کنید. استفاده از کدنویسی متلب برای حل توصیه می‌شود.

××

مثال (۷-۵)

انتگرال زیر را به روش تربیع گاوس محاسبه و با جواب دقیق مقایسه کنید.

حل: عبارت زیر انتگرال بر حسب r از درجه ۲ و بر حسب s از درجه ۵ است.

بنابراین استفاده از ۲ نقطه گاوس در جهت r و ۳ نقطه گاوس در جهت s کفایت می‌کند.

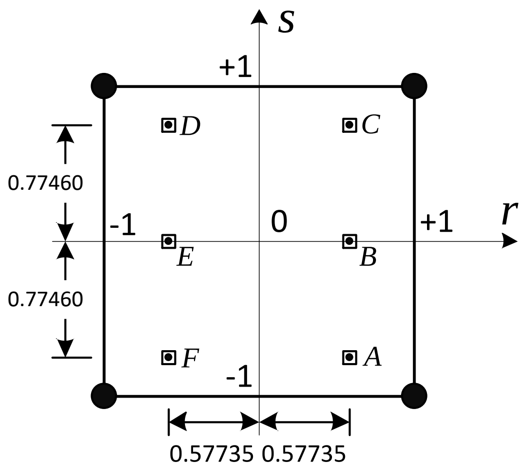
با توجه به این مطلب روی هر المان جمعاً ۶=۳×۲ نقطه گاوس خواهیم داشت.

××

عبارت زیر انتگرال یعنی $\left(r^2+rs\right)s^4$ را با $f\left(r,s\right)$ مشخص می‌کنیم.

این عبارت را در هر یک از نقاط A تا F محاسبه کرده

و در ضرایب وزن مربوط به آن ضرب می‌کنیم.



××

با انتگرال‌گیری تحلیلی مقدار دقیق انتگرال I=0.26667 بدست می‌آید که تا ۵ رقم معنی‌دار با روش گاوس برابر است.

Point	r_i	s_j	w_i	w_j	$f(r_i, s_j)$	$w_i w_j f(r_i, s_j)$
A	+0.57735	-0.77460	1.00000	0.55556	-0.04100	-0.02278
B	+0.57735	0.00000	1.00000	0.88889	0.00000	0.00000
C	+0.57735	+0.77460	1.00000	0.55556	0.21800	0.15611
D	-0.57735	+0.77460	1.00000	0.55556	-0.04100	-0.02278
E	-0.57735	0.00000	1.00000	0.88889	0.00000	0.00000
F	-0.57735	-0.77460	1.00000	0.55556	0.21800	0.15611
						$\sum = 0.26666$

××

کد متلب مربوطه به صورت زیر است:

```
ngpr=2;      ngps=3;                                        % Number of Gauss points
r=[-1/3^0.5,1/3^0.5];      s=[-0.7745966692, 0, 0.7745966692];
                                                            % Coordinates of Gauss points
Wr=[1.0, 1.0];       Ws=[0.555555555556, 0.8888888888889, 0.555555555556];
                                                            % Gauss weights
I=0;
 for i=1:ngpr
   for j=1:ngps
      I=I+ Wr(i)* Ws(j)*(r(i)^2+r(i)*s(j))*s(j)^4;
   end
end
```