

## پاسخ کوئز دوم

حل ① تابع  $F: A \rightarrow B$  ،  $g: B \rightarrow C$  ، و  $g \circ F: A \rightarrow C$  داریم .

الف) فرض کنید  $y \in C$  دلخواه باشد . چون  $g \circ F$  پوشاست پس  $x \in A$  موجود است که  $(g \circ F)(x) = y$  . پس  $g(F(x)) = y$  داریم .  $F(x) \in B$  پس  $g$  پوش است .

ب) فرض کنید  $x_1, x_2 \in B$  و  $F(x_1) = F(x_2)$  . خواهیم داشت  $g(F(x_1)) = g(F(x_2))$  . پس  $(g \circ F)(x_1) = (g \circ F)(x_2)$  . چون  $g \circ F$  یک به یک است داریم  $x_1 = x_2$  . پس  $F$  یک به یک است .

حل ② داریم  $h: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{پوش}} D$  و  $D$  نامتناهی . چون  $D$  نامتناهی است پس بنا به نکته ۳ هر ۳ از بخش کار دنیال (۲) ،  $\text{card } \mathbb{N} \leq \text{card } D$  . پس بنا به قضیه شاپ

کافی است نشان دهیم که  $\text{card } D \leq \text{card } \mathbb{N}$  . برای این منظور (بنا بر نکته ۵ همان قسمت)

کافی است نشان دهیم تابعی یک به یک چون  $F: D \rightarrow \mathbb{N}$  موجود است . تابع  $F$  را به شکل زیر تعریف می کنیم :

به لای هر  $d \in D$  ،  $n \in \mathbb{N}$  موجود است که  $h(n) = d$  ( $h$  پوش است) .

پس  $h^{-1}(\{d\}) \subseteq \mathbb{N}$  نامتناهی است . پس بنا به خوش ترتیبی اعداد طبیعی ،  $h^{-1}(\{d\})$  یک

کوچکترین عضو دارد . آنرا  $n_d$  می نامیم و تعریف می کنیم  $F(d) = n_d$  به لای هر  $d \in D$

$F$  تابعی یک به یک است (هر چند واضح است ولی کسی به آن بیان نکرده!) .