

موسسه آموزش عالی آزاد
با مجوز رسمی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

آزمون آزمایشی تحصیلات تکمیلی
(دوره‌های کارشناسی ارشد)
سال ۱۳۹۴

آزمون ۱۰۰ درصد دوم
دفترچه حل تشریحی

مهندسی شیمی

کد (۱۲۵۷)

- ۳۱- گزینه ۴ درست است.
۳۲- گزینه ۳ درست است.
۳۳- گزینه ۳ درست است.
۳۴- گزینه ۱ درست است.
۳۵- گزینه ۱ درست است.
۳۶- گزینه ۴ درست است.
۳۷- گزینه ۴ درست است.
۳۸- گزینه ۲ درست است.
۳۹- گزینه ۱ درست است.
۴۰- گزینه ۱ درست است.

- ۱۱- گزینه ۱ درست است.
۱۲- گزینه ۳ درست است.
۱۳- گزینه ۴ درست است.
۱۴- گزینه ۲ درست است.
۱۵- گزینه ۳ درست است.
۱۶- گزینه ۳ درست است.
۱۷- گزینه ۲ درست است.
۱۸- گزینه ۳ درست است.
۱۹- گزینه ۲ درست است.
۲۰- گزینه ۲ درست است.

- ۱- گزینه ۴ درست است.
۲- گزینه ۱ درست است.
۳- گزینه ۱ درست است.
۴- گزینه ۲ درست است.
۵- گزینه ۴ درست است.
۶- گزینه ۳ درست است.
۷- گزینه ۴ درست است.
۸- گزینه ۴ درست است.
۹- گزینه ۲ درست است.
۱۰- گزینه ۳ درست است.

انتقال حرارت ۱ و ۲

۳۱- گزینه ۲ درست است.
معادله حرارت در شرایط پایا و یک بعدی و k ثابت:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \Rightarrow \dot{q} = -k \frac{d^2T}{dx^2} = -15(600x - 100) \Rightarrow \dot{q} = 1500 - 9000x$$

بنابراین با افزایش x ، \dot{q} کاهش می‌یابد.

۳۲- گزینه ۳ درست است.
در جریان آرام داریم:

$$\begin{aligned} \overline{Nu} &= 2Nu_{x=L} \Rightarrow \overline{Nu} = 80 \\ \overline{Nu} &= \frac{\overline{h}L}{k} \Rightarrow \overline{h} = \frac{80 \times 1}{4} = 20 \frac{W}{m^2 \cdot K} \\ \dot{q}^* &= \overline{h}(T_s - T_\infty) = 20(80 - 30) = 1000 \frac{W}{m^2} \end{aligned}$$

۳۳- گزینه ۴ درست است.

با استفاده از معادله انرژی در سیالات داریم:

از آنجا که افت فشار ۴ برابر شده است، پس f نیز ۴ برابر شده است و طبق رابطه زیر h نیز ۴ برابر می‌شود:

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Rightarrow \Delta P \propto f$$

$$\frac{C_f}{2} = \frac{f}{8} = \frac{h}{\rho C_p V}$$

بنابراین طبق رابطه سرمایه‌ش نیوتن $q = h\Delta T$ ، انتقال حرارت نیز ۴ برابر می‌شود.

۳۴- گزینه ۲ درست است.

سطح لوله در حال دریافت شار حرارتی ثابت است، پس:

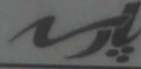
$$\dot{Q} = \dot{m} C_p (T_{m,o} - T_{m,i}) \Rightarrow T_{m,o} = \frac{\dot{Q}}{\dot{m} C_p} + T_{m,i}$$

از آنجا که حرارت دریافتی لوله ثابت است ($\dot{Q} = q^* \pi D L$)، با افزایش سرعت (در نتیجه افزایش \dot{m})، دمای سیال در خروج از لوله ($T_{m,o}$) کاهش می‌یابد.

از آنجا که جریان آرام و توسعه یافته است عدد نوسلت ثابت می‌باشد و در نتیجه h نیز ثابت است ($Nu_D = \frac{hD}{k} = 4/36$). بنابراین با توجه به ثابت بودن

شار (q^*)، طبق رابطه زیر با افزایش سرعت و کاهش دمای سیال در خروجی ($T_{m,o}$)، دمای سطح لوله (T_s) نیز کاهش می‌یابد.

$$q^* = h(T_s - T_{m,o}) \Rightarrow T_s = \frac{q^*}{h} + T_{m,o}$$



۳۵- گزینه ۲ درست است.

$$q = UA_1(\Delta T_{LM})_1 = UA_2(\Delta T_{LM})_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{(\Delta T_{LM})_2}{(\Delta T_{LM})_1}$$

از طرفی می‌دانیم اختلاف دمای متوسط لگاریتمی مبدل ناهمسو بیشتر از مبدل همسواست پس:

$$(\Delta T_{LM})_2 > (\Delta T_{LM})_1 \Rightarrow A_1 > A_2$$

۳۶- گزینه ۴ درست است.

$$Gr_x = \frac{g\beta\Delta T x^3}{\nu^2}, \quad Nu_x = \frac{h_x x}{k}$$

$$Nu_x \propto Gr_x^{1/4} \Rightarrow Nu_x \propto x^{3/4} \Rightarrow h_x \propto x^{-1/4}$$

$$Nu_x \propto Gr_x^{1/3} \Rightarrow Nu_x \propto x \Rightarrow h_x \text{ مستقل از } x \text{ است}$$

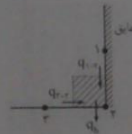
۳۷- گزینه ۳ درست است.

$$A_3 F_{31} = A_1 F_{13} \Rightarrow F_{13} = \frac{A_3}{A_1} F_{31} = \frac{\pi \times 2 \times 1}{\pi \times 2^2} \times 0.35 = 0.0875$$

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \Rightarrow F_{12} = 1 - 0.0875 = 0.9125$$

بنابراین ضریب دید قاعده‌ها نسبت به هم ۰/۳ است ($F_{12} = F_{21} = 0.3$)

۳۸- گزینه ۴ درست است.



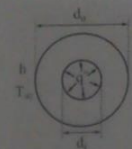
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} \Rightarrow$$

$$q_{1-2} + q_{3-2} - q_b + \dot{q} \left(\frac{\Delta x \times \Delta y \times 1}{4} \right) = 0$$

$$k \left(\frac{\Delta x}{2} \times 1 \right) \left(\frac{T_1 - T_2}{\Delta y} \right) + k \left(\frac{\Delta y}{2} \times 1 \right) \left(\frac{T_3 - T_2}{\Delta x} \right) - h \left(\frac{\Delta x}{2} \times 1 \right) (T_2 - T_w) + \dot{q} \left(\frac{\Delta x \times \Delta y}{4} \right) = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 + T_3 + \frac{\dot{q} \Delta x \Delta y}{2k} + \frac{h \Delta x}{k} T_w}{\frac{h \Delta x}{k} + 2}$$

$$\frac{100 + 127 + \frac{10^4 \times 0.1 \times 0.1}{2 \times 20} + \frac{200 \times 0.1 \times 20}{20}}{\frac{200 \times 0.1}{20} + 2} = 83.17^\circ C$$

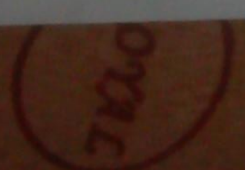
۳۹- گزینه ۴ درست است.



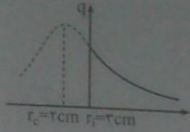
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st}$$

$$q^* A_{in} - h A_{out} (T - T_w) = m C \frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{q^* (\pi d_1^2) - h (\pi d_2^2) (T - T_w)}{\rho C \frac{\pi}{6} (d_2^3 - d_1^3)} = \frac{6(q^* d_1^2 - h d_2^2 (T - T_w))}{\rho C (d_2^3 - d_1^3)}$$



$$r_c = \frac{k}{h} = \frac{0.2}{10} = 0.02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$$



گزینه ۴ درست است.

از آن جا که شعاع لوله از شعاع بحرایی غلیظ بیشتر است. قراردادن غلیظ همواره باعث کاهش انتقال حرارت از لوله می شود.

گزینه ۴ درست است.

معادله حرارت در شرایط سه بعدی و k ثابت

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 2/5 \times 10^{-4} [2+6-4 + \frac{-200}{25}] = -8/1001 \frac{^\circ\text{C}}{\text{s}}$$

گزینه ۲ درست است.

برای اینکه استفاده کردن از بره نوجه داشته باشد باید ضریب تاثیر بره (e_f) بزرگتر از ۲ باشد $(e_f > 2)$. بنابراین برای بره طولی داریم:

$$e_f > 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{kP}{hA_c}} > 2 \Rightarrow \frac{kP}{hA_c} > 4 \Rightarrow \frac{hA_c}{kP} < \frac{1}{4}$$

گزینه ۳ درست است.

$$Nu_D = \frac{hD}{k} \Rightarrow h = \frac{kNu_D}{D} = \frac{kRe^{0.8} Pr^n}{D}$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{Nu_2}{Nu_1} \times \frac{D_1}{D_2} = \left(\frac{Re_2}{Re_1}\right)^{0.8} \times \frac{D_1}{D_2} = \left(\frac{V_2 D_2}{V_1 D_1}\right)^{0.8} \left(\frac{D_1}{D_2}\right) = (2)^{0.8} (2) = 2^{1.8} \Rightarrow h_2 = 2^{1.8} h = 3.15 h$$

لازم به ذکر است که $2^{1.8} < 2^{2.0} < 2^{2.5}$ می باشد یعنی $\sqrt{8} < 2^{1.8} < 4$ است به عبارت دیگر $2^{1.8}$ عددی بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ۴ است $(\sqrt{8} > 2)$

گزینه ۱ درست است.

از آنجا که سیال ساکن است داریم:

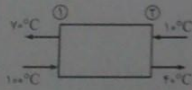
$$Nu_D = 2 \Rightarrow \frac{hD}{k_f} = 2 \Rightarrow h = \frac{2k_f}{D} = \frac{2 \times 1}{0.2} = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

موازنه انرژی برای کره:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} \Rightarrow \dot{E}_g = \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{q}_0 V = hA(T_s - T_\infty)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_0 = \frac{h(4\pi R^2)(T_s - T_\infty)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3h(T_s - T_\infty)}{R} = \frac{3 \times 10 \times 40}{0.1} = 12 \frac{\text{kW}}{\text{m}^3}$$

گزینه ۱ درست است.



$$\Delta T_1 = 100 - 70 = 30$$

$$\Delta T_2 = 40 - 10 = 30$$

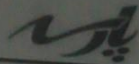
از آنجا که $\Delta T_1 = \Delta T_2$ است می توان نشان داد که $\Delta T_{LM} = \Delta T_1 = \Delta T_2$ است پس:

$$Q = UA\Delta T_{LM} = 1000 \times 6 \times 30 = 180 \text{ kW}$$

ترمودینامیک

گزینه ۴ درست است.

$$W = - \int_1^2 v dp + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2}$$



$$Pv = P_1 v_1 = \text{const} \rightarrow W = - \int_1^2 \frac{P_1 v_1}{P} dP + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = P_1 v_1 \ln \frac{P_1}{P_2} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2}$$

$$Q = \text{const} \rightarrow A_1 V_1 = A_2 V_2 \rightarrow V_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 V_1 \Rightarrow V_2 = 4V_1 \Rightarrow V_2 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\rightarrow W = 10^5 \times 10^{-3} \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}(4)^2 [1 - 16] = -110 - 120 = -230 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

۴-گزینه ۴ درست است.

$$I = T_0 \Delta s_{\text{tot}} = T_0 [\Delta s_{\text{sys}} + \Delta s_{\text{sur}}] = T_0 \left[(s_2 - s_1) - \frac{Q_{\text{sys}}}{T_0} \right]$$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} = 2 \ln 4 - \ln 8 = 0.7 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$Q = \Delta U + W = C_v (T_2 - T_1) + W = 750 + (10 \times (-100)) = -250 \text{ kJ} \rightarrow I = 400 \left[0.7 + \frac{250}{400} \right] = 530 \text{ kJ}$$

۴-گزینه ۴ درست است.

$$g = h - Ts \rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_P = \left(\frac{\partial h}{\partial h}\right)_P - T \left(\frac{\partial s}{\partial h}\right)_P - s \left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_P$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial h}\right)_P = 1, \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_P = T \rightarrow \left(\frac{\partial s}{\partial h}\right)_P = \frac{1}{T}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = C_p \rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_P = \frac{1}{C_p}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_P = 1 - T \times \frac{1}{T} - s \times \frac{1}{C_p} = -\frac{s}{C_p}$$

۱-گزینه ۱ درست است.

$$\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T}\right)_{P, x_1} = -\bar{s}_1 \rightarrow \mu_1 = - \int \bar{s}_1 dT + f(P, x_1) \rightarrow \mu_1 = \left(\frac{T^3}{3} + \frac{T^2}{2}\right) P + 3PTx_1 + f(P, x_1)$$

$$\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial P}\right)_{T, x_1} = \bar{v}_1 \rightarrow \bar{v}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{T^3}{3} + \frac{T^2}{2}\right) + 3Tx_1 + g(P, x_1) = T \left[T \left(\frac{T}{6} + \frac{1}{4}\right) + 3x_1 \right] + g(P, x_1)$$

۳-گزینه ۳ درست است.

$$\ln f = \sum x_i \ln \frac{\hat{f}_i}{x_i} = \sum x_i \ln \hat{f}_i - \sum x_i \ln x_i$$

$$\sum x_i \ln x_i < 0 \rightarrow \ln f > \sum x_i \ln \hat{f}_i$$

۲-گزینه ۲ درست است.

$$\bar{M}_1 = M + (1 - x_1) \frac{dM}{dx_1}$$

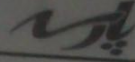
$$M = 3x_1 + 11 + 2x_1(1 - x_1) = -2x_1^2 + 5x_1 + 11 \rightarrow \bar{M}_1 = (-2x_1^2 + 5x_1 + 11) + (1 - x_1)(-4x_1 + 5)$$

$$\rightarrow x_1 = 0.5 \rightarrow \bar{M}_1 = 13 + 1/5 = 14/5$$

۱-گزینه ۱ درست است.

$$\ln \phi = \int_0^P \frac{z-1}{P} dP, z = \frac{Pv}{RT} \rightarrow \ln zRT - \ln V = \ln P$$

$$\rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dZ}{Z} - \frac{dV}{V}, P=0 \rightarrow Z=1, V=\infty$$



$$m_c = m_1 - m_2 = m_1 \frac{m_1}{2} \Rightarrow m_c = \frac{m_1}{2}$$

$$Q_{c,v} = \frac{m_1}{2} (h_1 + u_2 - 2u_1) = \frac{m_1}{2} (h - u)$$

$$h - u = Pv \Rightarrow Q_{c,v} = \frac{m_1}{2} \times Pv = \frac{Pv}{2} \Rightarrow Q_{c,v} = \frac{12 \times 10^3 \times 1}{2} = 6000 \text{ kJ}$$

۵۸- گزینه ۳ درست است.

داریم:

$$Tds = dh - vdp$$

$$P = \text{cte} = 5 \text{ bar} \Rightarrow Tds = dh \Rightarrow \frac{dh}{ds} = T$$

پس باید نما را در آن لحظه پیدا کنیم.

$$\left. \begin{aligned} V &= R \times 10^{-3} \\ PV &= nRT \end{aligned} \right\} , n = 2 \text{ mol} \Rightarrow T = \frac{5 \times 10^5 \times R \times 10^{-3}}{2 \times R} = 2/5 \times 10^2 = 250 \text{ K} \Rightarrow \frac{dh}{ds} = T = 250$$

۵۹- گزینه ۳ درست است.

از قانون راولت داریم:

$$y_1 P = x_1 \gamma_1 P_1^{\text{sat}} \Rightarrow P = \gamma_1 P_1^{\text{sat}} \Rightarrow P = \gamma_A P_A^{\text{sat}} = \gamma_B P_B^{\text{sat}}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma_A P_A^{\text{sat}}}{\gamma_B P_B^{\text{sat}}} = 1 \Rightarrow \frac{\gamma_A}{\gamma_B} = \frac{P_B^{\text{sat}}}{P_A^{\text{sat}}} = \frac{150}{50} = 3 \Rightarrow \gamma_A = 3\gamma_B$$

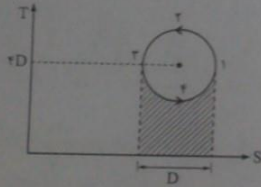
۶۰- گزینه ۱ درست است.

$$\Delta S = S_g + \int \frac{dQ}{T}$$

S_g همواره یک مقدار مثبت می‌باشد و مقدار آن به هیچ عنوان منفی نمی‌باشد بنابراین آنترپی یک سیستم زمانی کاهش می‌یابد که از آن سیستم گرما بگیریم.

۶۱- گزینه ۱ درست است.

سیکل یخچال و پمپ‌های حرارتی پادساعتگرد می‌باشد.



$$\text{cop} = \frac{Q_L}{W} = \frac{Q_H - W}{W} = \frac{3 - 4 - 1}{1} = \frac{\text{مساحت زیر فرآیند 3-4-1}}{\text{مساحت محصور به سیکل}} = \frac{4D \times D - \frac{1}{2} \times \frac{\pi D^2}{4}}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{16}{\pi} - \frac{1}{2}$$

۶۲- گزینه ۳ درست است.

آنترپی در یک سیستم بسته می‌تواند کاهش، افزایش، یا ثابت بماند.

گزینه ۱.

$$w = \int pdv = p\Delta V \quad , \quad Q = u_2 - u_1 + p_2 v_2 - p_1 v_1 \Rightarrow (u_2 + p_2 v_2) - (u_1 + p_1 v_1) = H_2 - H_1$$

۶۳- گزینه ۳ درست است.

$$A + \frac{1}{2}B \rightleftharpoons C \Rightarrow 2A + B \rightleftharpoons 2C, \Delta H = -500 \times 2 \text{ kJ}$$

اگر واکنش بالا را معکوس کنیم:

$$2C \rightleftharpoons 2A + B, \Delta H = 500 \times 2 \text{ kJ}$$

و با واکنش E جمع نماییم:

$$\left. \begin{array}{l} 2C \rightleftharpoons 2A + B \\ D + B \rightleftharpoons E \end{array} \right\} \Rightarrow 2C + D \rightleftharpoons 2A + E$$

$$\Rightarrow \Delta H_3 = 500 \times 2 + 200 = 1200 \text{ kJ}$$

۶۴- گزینه ۲ درست است.

سیکل برایتون دارای دو تحول آنتروپی ثابت و دو تحول فشار ثابت می‌باشد.

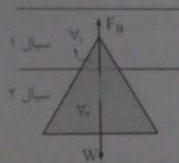
۶۵- گزینه ۴ درست است.

اگر جزء A از قانون هنری بیرونی کند جزء B نیز از قانون لوئیس بیرونی می‌نماید.

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = k_A x_A + f_B x_B \rightarrow P_1 = x_A (k_A - f_B) + f_B \\ P_1 = B x_A + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k_A - f_B = B \\ f_B = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow k_A = 11$$

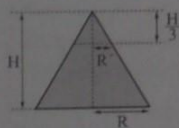
مکانیک سیالات

۶۶- گزینه ۳ درست است.



$$W = F_B$$

$$\gamma_s V = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2$$



$$\frac{H}{3} = \frac{R'}{R} \Rightarrow R' = \frac{R}{3}$$

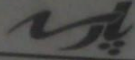
$$V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 \left(\frac{H}{3}\right) = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 \left(\frac{H}{3}\right) = \frac{1}{27} \left(\frac{1}{3} \pi R^2 H\right) \Rightarrow V_1 = \frac{1}{27} V$$

بنابراین حجم قسمتی از مخروط که در سوال ۱ است $\frac{1}{27}$ کل حجم مخروط و حجم قسمتی از مخروط که در سوال ۲ می‌باشد $\frac{26}{27}$ کل حجم مخروط است.

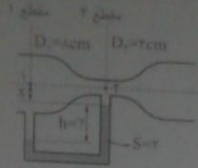
پس

$$\gamma_s V = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 \Rightarrow (\rho_s g)(V) = (\rho g) \left(\frac{1}{27} V\right) + (4\rho g) \left(\frac{26}{27} V\right)$$

$$\Rightarrow \rho_s = \frac{\rho}{27} + \frac{104\rho}{27} = \frac{105\rho}{27} = \frac{35}{9} \rho$$



۶۷- گزینه ۳ درست است.
معادله برنولی بین نقاط ۱ و ۲



$$P_1 + \frac{1}{2} \rho_w V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho_w V_2^2 \rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho_w (V_2^2 - V_1^2)$$

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \rightarrow V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = 4 V_1 \rightarrow V_2 = 4 \frac{m}{s}$$

$$\rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho_w (16 - 1)$$

$$\rightarrow P_1 - P_2 = \frac{15}{2} \rho_w \quad (I)$$

معادله مانومتری بین ۱ و ۲ از طریق مانومتر:

$$P_1 + \cancel{\gamma_w s} + \gamma_w h - \gamma_w s - \cancel{\gamma_w s} = P_2 \Rightarrow P_1 - P_2 = \gamma_w (s - 1) \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \frac{15}{2} \rho_w = \gamma_w (s - 1) \Rightarrow h = \frac{15}{2g(s-1)} = \frac{15}{20(1)} = 0.75m = 75cm$$

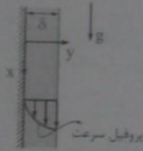
۶۸- گزینه ۳ درست است.

در هر سه حالت، نیروی وارد بر دیوارها از طرف جت آب برابر است با $F_j = \dot{m}V$ که در این رابطه \dot{m} دبی جرمی آب و V سرعت آب قبل از برخورد به دیوارها می‌باشد. در هر سه حالت a, b, c، یکسان است اما با استفاده از معادله برنولی می‌توان نشان داد که سرعت جت آب قبل از برخورد به دیوار در حالت a از دو حالت دیگر کمتر است، پس نیروی وارد بر دیوار a از دو حالت دیگر کمتر است (گزینه ۳).
لازم به ذکر است که سرعت جت آب قبل از برخورد به دیوار b از c بیش‌تر است و داریم:

$$F_b > F_c > F_a$$

۶۹- گزینه ۱ درست است.

اگر معادله ناوراستوکس در جهت x با فرضیات زیر را بنویسیم:



۱- جریان دائم

۲- یک جهته (سرعت فقط در جهت x)

۳- توسعه یافته $(\frac{\partial}{\partial x} = 0)$

۴- عدم تغییرات در جهت عمود بر صفحه $(\frac{\partial}{\partial z} = 0)$

۵- عدم وجود گرادیان فشار $(\frac{\partial p}{\partial x} = 0)$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g$$

$$\Rightarrow \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \rho g = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\gamma}{\mu} \Rightarrow u = -\frac{\gamma}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2$$

$$\left. \begin{array}{l} @ y = 0, u = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ @ y = \delta, \tau = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{\gamma}{\mu} \delta \end{array} \right\} \Rightarrow u = -\frac{\gamma}{2\mu} y^2 + \frac{\gamma}{\mu} \delta y$$

$$Q = \int u dA = \int_0^{\delta} \left(-\frac{\gamma}{2\mu} y^2 + \frac{\gamma}{\mu} \delta y \right) b dy$$

b: عرض دیوار در جهت عمود بر صفحه

$$\Rightarrow \frac{Q}{b} = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\mu} \delta^3 \Rightarrow \delta = \left(\frac{3\mu \left(\frac{Q}{b} \right)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3 \times (6 \times 10^{-4})}{9 \times 10^3} \times 0.04 \right)^{\frac{1}{3}} = (8 \times 10^{-9})^{\frac{1}{3}} = 2 \times 10^{-3} = 2mm$$

۷۰- گزینه ۲ درست است.

روش اول

$$\left. \begin{aligned} h_f &= f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \\ h_f &= \frac{4\tau_w}{\gamma} \frac{L}{D} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_w = \frac{1}{8} f \rho V^2 \xrightarrow{f = \frac{64}{Re}} \tau_w = \frac{1}{8} \frac{64\mu}{\rho V D} \rho V^2 \Rightarrow \tau_w = \frac{8\mu V}{D} \Rightarrow V = \frac{1}{8} \frac{D \tau_w}{\mu}$$

روش دوم

$$u = 2\bar{V} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} = -\mu \times 2\bar{V} \left(\frac{-2r}{R^2} \right) = \frac{4\mu \bar{V} r}{R^2}$$

$$\tau_w = \tau_{r=R} \Rightarrow \tau_w = \frac{4\mu \bar{V}}{R} = \frac{8\mu \bar{V}}{D} \Rightarrow \bar{V} = \frac{1}{8} \frac{D \tau_w}{\mu}$$

۷۱- گزینه ۱ درست است.

با قرار دادن نقطه (۱) بر روی سطح آزاد مخزن A و نقطه (۲) بر روی سطح آزاد مخزن B معادله انرژی را بین نقاط ۱، ۲ می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{f1} + h_{f2}$$

$P_1 = P_2 = 0$ می‌باشد زیرا فشار در هر دو سطح آزاد برابر با فشار اتمسفر است. از طرفی به علت بزرگ بودن مخازن می‌توان از سرعت سیال در سطح آزاد مخازن صرف نظر کرد یعنی $V_1 = V_2 = 0$. با قرار دادن مبدأ بر روی نقطه ۱. $z_1 = 0$ و $z_2 = 10$ خواهد شد از طرفی داریم:

$$h_{f1} = 4 \Rightarrow f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 4$$

از آنجاکه قطر لوله بین مخزن A و پمپ و قطر لوله بین پمپ و مخزن B یکسان است با توجه به یکسان بودن دبی این دو لوله می‌توان گفت سرعت سیال در هر دو یکسان است. پس برای محاسبه h_{f1} از h_{f2} کمک می‌گیریم.

$$h_{f2} = f \frac{(4L)}{D} \frac{V^2}{2g} = 4 \left(f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \right) = 4 \times 4 = 16 \text{ m}$$

با اضمال مطالب گفته شده در معادله انرژی داریم:

$$0 + 0 + 0 + h_p = 0 + 0 + 10 + 4 + 16 \Rightarrow h_p = 30 \text{ m}$$

۷۲- گزینه ۳ درست است.

برای جریان آرام از روی صفحه تخت (جریان پلازیوس) داریم:

$$F_D = \frac{0.664 \rho U_{\infty}^2 A}{\sqrt{Re_L}} = \frac{0.664 \rho U_{\infty}^2 A}{\sqrt{\frac{U_{\infty} L}{\nu}}} \Rightarrow F_D \propto U_{\infty}^{1/2} \Rightarrow \left(\frac{F_D}{F_D} \right)_2 = \left(\frac{U_{\infty,2}}{U_{\infty,1}} \right)^{1/2} = (4)^{1/2} = (4)^{3/2} = (2^2)^{3/2} = 2^3 = 8$$

۷۳- گزینه ۱ درست است.

هنگام حرکت با سرعت حد، سرعت جسم ثابت و در نتیجه شتاب حرکت صفر است. پس:

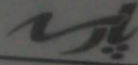
$$\sum F = ma \Rightarrow \sum F = 0 \Rightarrow$$

$$W = F_B + F_D \Rightarrow \gamma_s V = \gamma_{oil} V + \frac{1}{2} C_D \rho_{oil} V^2 A$$

در رابطه فوق A، مساحت تصویر شده کره در صفحه عمود بر حرکت است. $(A = \pi R^2)$ پس:

$$V = \sqrt{\frac{2V(\gamma_s - \gamma_{oil})}{\rho_{oil} C_D A}} = \sqrt{\frac{2 \times \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_s - \rho_{oil}) g}{\rho_{oil} C_D \pi R^2}} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{8(\rho_s - \rho_{oil}) R g}{3 C_D \rho_{oil}}}$$





صفحه ۷

$$v = \sqrt{\frac{B(3/5\rho_w - 0/8\rho_w)Rg}{C_D(0/8\rho_w)}} = \sqrt{\frac{B}{3} \times \frac{2/7 \times 0/05 \times 10}{0/8 \times 0/5}} = 3 \frac{m}{s}$$

مکنه اگر کره در حین سقوط از قانون استوکس عبوری می‌گردد (جریان حزشی)، $C_D = \frac{24}{Re}$ بوده و در نتیجه باید به جای عبارت F_{D2} عبارت $3\mu Dv$ را قرار

می‌دهیم و به عبارت زیر می‌رسیم:

$$v = \frac{D^2(\rho_s - \rho_{fluid})g}{18\mu}$$

۳۵- گزینه ۱ درست است

در شرایط بنده می‌خواهیم خروجی از سوراخ مخزن (1) با می‌خواهیم خروجی از سوراخ مخزن (2) برابر است.

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow A_1 V_1 = A_2 V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{A_2}{A_1} = 2 \quad (I)$$

با نوشتن معادله برابری بین سطح آزاد هر مخزن و خروجی سوراخ آن مخزن داریم:

$$V_1 = \sqrt{2gh_1} \quad (II)$$

$$V_2 = \sqrt{2gh_2}$$

$$(I), (II) \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh_2}} = 2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = 4$$

۳۵- گزینه ۱ درست است

فرم دیفرانسیلی معادله بیوستگی:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \left(\rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \left(\rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = 0$$

از آن جا که p تابع x و y نمی‌باشد و موافق سرعت در جهت z وجود ندارد داریم:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial p}{\partial y} = 0 ; w = 0$$

پس معادله بیوستگی به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\frac{dp}{dx} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \begin{matrix} u = -2x \\ v = 3y \end{matrix}$$

$$\frac{dp}{dx} + \rho(-2) + \rho(3) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\rho \Rightarrow \frac{dp}{\rho} = -dx \xrightarrow{\int} \ln \rho = -x + c_1 \Rightarrow \rho = c_2 e^{-x}$$

۳۶- گزینه ۱ درست است

$$T = \frac{\pi \mu \omega R^4}{2h} \quad \text{مختصر لازم برای دوران دیسک}$$

$$P = T\omega \Rightarrow P = \frac{\pi \mu \omega^2 R^4}{2h} \quad \text{توان لازم برای دوران دیسک}$$

بنابراین با دو برابر شدن R و نصف شدن ω ، توان لازم برای دوران دیسک ۴ برابر می‌شود.

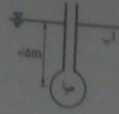
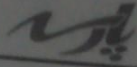
۳۷- گزینه ۳ درست است

طبق تعریف افت فشار در آستانه بلند شدن دران جامد (آستانه سیالیت و شناور شدن) برابر است با

$$\Delta P = (\rho_f - \rho)g(1 - \epsilon)L$$

۳۸- گزینه ۳ درست است

اختلاف فشار هدای داخلی حباب و آب خارج از حباب برابر است با (البته در انتهای حل سوال):



$$\Delta P = P_{\text{air}} - P_{\text{water}} = \frac{4\sigma}{d} \Rightarrow P_{\text{air}} = P_{\text{water}} + \frac{4\sigma}{D} = \gamma h + \frac{4\sigma}{D} = 10^4 \times 0.5 + \frac{4 \times 0.025}{0.5 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^4 + 0.2 \times 10^3 = 5.2 \text{ kPa}$$

و از آنجا که فشار در عمق h متری از سطح آزاد را به صورت نسبی نوشتیم ($P = \gamma h$) پس جواب به دست آمده نیز نسبی است.
نکات: در ابتدا حباب هوا را برش می‌زنیم.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_{\text{air}} A - P_{\text{water}} A = F_{\sigma} \Rightarrow (P_{\text{air}} - P_{\text{water}}) A = \sigma (\pi D)$$

$$\Rightarrow \Delta P = P_{\text{air}} - P_{\text{water}} = \frac{\sigma (\pi D)}{\pi D^2} = \frac{4\sigma}{D}$$

لازم به ذکر است که اختلاف فشار داخل و خارج حباب آب در هوا برابر با $\Delta P = \frac{8\sigma}{D}$ است زیرا با برش زمین حباب آب، دو خط تر شده وجود دارد که به آن‌ها نیروی کشش سطحی وارد می‌شود یعنی $F_{\sigma} = 2 \times \sigma \pi D$ است.

نتیجه: اگر حباب هوا در آب وجود داشت: $\Delta P = \frac{4\sigma}{D}$

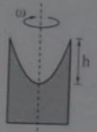
اگر حباب آب در هوا وجود داشت: $\Delta P = \frac{8\sigma}{D}$

۷۹- گزینه ۳ درست است.

شکل نهایی سطح آزاد در اثر دوران به صورت مقابل خواهد بود:

$$\omega = 500 \text{ rpm} = 500 \times \frac{2\pi}{60} \times \frac{\pi \approx 3}{\pi} \rightarrow \omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$h = \frac{R^2 \omega^2}{2g} = \frac{(16 \times 10^{-4}) (25 \times 10^2)}{20} = 0.2 \text{ m}$$



بنابراین حجم آب بیرون ریخته برابر است با: $V = \frac{1}{2} \pi R^2 h$

پس از بیرون ریختن آب داخل ظرف و متوقف کردن ظرف، حجم فضای خالی بالای سطح آزاد با حجم آب تخلیه شده برابر است با:

$$\pi R^2 h' = \frac{1}{2} \pi R^2 h \Rightarrow h' = \frac{1}{2} h = 0.1 \text{ m}$$

بنابراین عمق آب باقی مانده برابر است با: $0.4 - 0.1 = 0.3 \text{ m}$

۸۰- گزینه ۳ درست است.

$$\Delta P = \Delta P(p, \mu, V, L, D, e)$$

$$n = 7$$

$$[\mu] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1} \Rightarrow m = 3 \Rightarrow \text{تعداد گروه‌های بدون بعد} = n - m = 4$$

بررسی گزینه ۱: ۳ گروه بدون بعد دارد و صحیح نیست.

بررسی گزینه ۲: $\frac{\Delta P}{\rho V^2 L^2}$ بدون بعد نیست. در ضمن ۴ جزء متغیرهای این سوال نیست.

بررسی گزینه ۴: ۴ جزء متغیرهای این سوال نیست.

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

کنترل فرآیندها

۱- گزینه ۱ درست است.

$$t \rightarrow \infty \rightarrow c_A = 0 \rightarrow a = 0$$

$$t = 0 \rightarrow c_A = 10 \rightarrow b = 10$$

$$\tau = \frac{V}{q} = 5 \text{ min} \rightarrow c_A(5 \text{ min}) = 10e^{-\frac{5}{5}} = 10e^{-1}$$

$$C_{A_0} - C_A = 10 - 10e^{-1} = 10(1 - e^{-1})$$

۲- گزینه ۴ درست است.

$$G(s) = \frac{4}{\frac{1}{2}s^2 + 1/6s + 1} \rightarrow \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\tau\xi = 1/6 \rightarrow \xi = \frac{1/6}{\sqrt{2}} > 1$$

بنابراین سیستم پرمیو است

۳- گزینه ۳ درست است.

$$B = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 10$$

$$A = 15 - 10 = 5$$

$$\text{فرافت} = \frac{5}{10} = 0/5$$

$$\text{نسبت فروکش} = \left(\frac{A}{B}\right)^2 = 0/25$$

۴- گزینه ۱ درست است.

$$\left[(R_1 - C_1)G_1G_2G_4 + R_2 - \left(C_2 - \frac{C_2}{G_7} \right) \right] G_5G_6G_7 = C_2$$

$$(R_1 - C_1)G_1G_2G_3 = C_1 \Rightarrow \text{از حلقه بالایی داریم} \quad \frac{C_2}{R_1} = \frac{G_1G_2G_4G_5G_6G_7}{(1+G_1G_2G_3)(1+G_5G_6G_7-G_5G_6)}$$

۵- گزینه ۲ درست است.

$$\text{offset} = SR(s) \left[1 - \frac{C}{R} \right]_{s \rightarrow 0}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{e^{-0/4s}}{2(s+1)}}{1 + \frac{e^{-0/4s}}{2(s+1)}} = \frac{e^{-0/4s}}{2(s+1) + e^{-0/4s}}, \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{offset} = 1 \times \left[1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{2}{3}$$

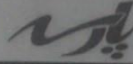
۶- گزینه ۲ درست است.

$$\text{نقطه جدایی: } \sum_{j=1}^m \frac{1}{s-z_j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{s-p_j}$$

$$z_1 = 0, \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -2 \rightarrow \frac{1}{s} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \Rightarrow s^2 + 3s + 2 = s^2 + 2s + s^2 + s \rightarrow s^2 - 2 = 0 \rightarrow s = \pm\sqrt{2}$$

چون نشانه بین (-1) و (-2) هستند $-\sqrt{2}$ قابل قبول است

$$\text{مخرج تابع انتقال مدار بسته: } (s+1)(s+2) + k_c s = 0$$



$$s = -\sqrt{2} = -1/4 \Rightarrow (-1/4+1)(-1/4+2) - 1/4k_c = 0 \Rightarrow k_c = \frac{-2/4}{1/4} < 0$$

و چون k_c همواره منفی است، بنابراین سیستم همواره نوسانی است.

۸۷- گزینه ۱ درست است.

آزمون روت برای سیستم‌های دارای نرم نمایی به کار نمی‌رود.

۸۸- گزینه ۴ درست است.

چون ابتدا شیب منفی است، سپس مثبت شده و دوباره منفی می‌شود، بنابراین ریشه صورت بین ریشه‌های مخرج قرار دارد.

$$\frac{1}{\tau_3} < \frac{1}{\tau_1} < \frac{1}{\tau_2} \Rightarrow \tau_2 < \tau_1 < \tau_3$$

۸۹- گزینه ۳ درست است.

$$AR = \frac{1}{\omega \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

$$\phi = -\omega\tau - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(-\omega\tau)$$

$$\omega = 0 \rightarrow AR = \infty \rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega = 1 \rightarrow AR = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}} \rightarrow \phi = -\tau - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(-\tau)$$

$$\omega = \infty \rightarrow AR = 0 \rightarrow \phi = -\infty$$

بنابراین دیاگرام نایکوئیست مطابق گزینه ۳ می‌باشد.

AR از ∞ به سمت صفر کاهش و ϕ نیز از $-\frac{\pi}{2}$ تا $-\infty$ کاهش می‌یابد.

۹۰- گزینه ۳ درست است.

$$G_1(s) \text{ مقدار نهایی: } \lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + a}{s^2 + 2as + 4b} = \frac{a}{4b} \Rightarrow \frac{a}{4b} = \frac{b}{a} \Rightarrow a^2 = 4b^2$$

$$G_2(s) \text{ مقدار اولیه: } \lim_{s \rightarrow \infty} sG_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{bs^2 + bs}{as^3 + 2s^2 + 2as} = \frac{b}{a}$$

۹۱- گزینه ۴ درست است.

$$\pm j \Rightarrow \omega_n = 1$$

$$\text{فرکانس طبیعی } \omega_n = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 1 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi$$

۹۲- گزینه ۳ درست است.

سیستم‌هایی که دارای noise بالایی هستند، به علت نوسانات زیاد در خروجی از فرستنده، حامل مشتق‌گیر دائماً در حال کار است، به همین علت برای این سیستم این کنترل کننده مناسب نمی‌باشد.

۹۳- گزینه ۴ درست است.

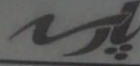
$$GH(s) = \frac{k+1}{(s+1)^2} \rightarrow GH(i\omega) = \frac{k+1}{(i\omega+1)^2}$$

$$|GH(j\omega)| = 1 \Rightarrow \frac{k+1}{|(i\omega+1)^2|} = 1 \rightarrow k+1 = 1 + \omega^2 \rightarrow k = \omega^2$$

$$\text{حاشیه فاز} = P.M = 60^\circ = 180^\circ + \phi \Rightarrow \phi = \angle GH(i\omega_g)$$

$$\phi = \angle(1+k^2) - \angle(1+i\omega)^2 = 0 - 2 \tan^{-1} \omega_g$$

$$\phi = -2 \tan^{-1} \omega_g = -180^\circ + 60^\circ = -120^\circ$$



$$\tan^{-1} \omega_g = 60 \Rightarrow \omega_g = \sqrt{3} \rightarrow k = \omega_g^2 = 3$$

۹۴- گزینه ۳ درست است.

در محاسبه لاپلاس این تابع، از قضایای زیر استفاده می‌شود:

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{F(s)}{s}, \quad \mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$$

بنابراین:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin t\} = \frac{1}{(s+2)^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}\int_0^1 e^{-2t} \sin t dt = \frac{1}{s[(s+2)^2 + 1]} = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

۹۵- گزینه ۳ درست است.

قطب‌ها و صفرهای مکان می‌توانند اعدادی مختلط یا حقیقی باشند اما از آن جا که اگر یک عدد مختلط قطب یا صفر مکان باشد حتماً مزدوج آن نیز قطب یا صفر مکان است. همانند مثال زیر

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

قطب‌های P و صفرهای Z این مکان عبارتند از:

$$z_1 = -1$$

$$p_1 = -2, \quad -i+2, \quad -1-i$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود اگر $-1+i$ قطب مکان باشد، $-1-i$ (مزدوج آن) نیز قطب مکان است بنابراین محل همرسی مجانب‌ها برابر است با:

$$\gamma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{(-2-1+i-1-i) - (-1)}{3-1} = -\frac{3}{2}$$

که به وضوح نشان می‌دهد در محاسبه $\sum p_i$ حلمات $+i$ و $-i$ با هم حذف می‌شوند و لذا محل همرسی مجانب‌ها همواره عددی حقیقی است.

انتقال جرم و عملیات واحد ۱ و ۲

۹۶- گزینه ۳ درست است.

با موازنه انرژی در فیلم بخار داریم:

$$N_A (M_A \lambda_A) + N_B (M_B \lambda_B) = 0$$

$$\frac{N_A}{N_B} = -\frac{M_B \lambda_B}{M_A \lambda_A} = -\frac{(112/5 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}) \times (78 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}})}{(78 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}) \times (94 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}})} = -1/2$$

در فرآیند تقطیر جزء فرار از فاز مایع به فاز بخار منتقل می‌شود و جزء غیر فرار از فاز بخار به فاز مایع منتقل می‌شود. از این رو انرژی لازم برای تبخیر یک جزء یا انرژی آزاد شده در میعان جزء دیگر با هم برابر هستند.

در شرایطی که گرمای نهان تبخیر مولی دو ماده بر حسب $\frac{\text{kcal}}{\text{kmol}}$ با هم برابر باشد $\frac{N_A}{N_B} = -1$ خواهد شد این همان فرضی است که در محاسبات تقطیر به روش مک کیب از آن استفاده می‌شود.

۹۷- گزینه ۱ درست است.

این مسئله از نوع نفوذ در جزء ساکن است ($\sum N_i = N_A$) لذا

$$N_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dr} + \frac{C_A}{C} N_A$$

با توجه به حلالیت کم هلیوم در غشاه می‌توان از فرض رقیق بودن مخلوط استفاده کرد. (از جمله دوم سمت راست معادله بالا صرفنظر می‌کنیم).

$$N_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dr}$$

از طرفی در مختصات استوانه و در شرایط پایدار:



$$G_A = N_A (2\pi rL) = \text{تعداد}$$

$$G_A = \frac{-2\pi L D_{AB} \int_{R_1}^{R_2} dC_A}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}} = \frac{2\pi L D_{AB} C_A^*}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$G_A = \frac{2\pi \times (1\text{m}) \times \left(\frac{2 \times 10^{-12} \text{m}^2}{\text{s}}\right) \times \left(\frac{10^{-6} \text{kmol}}{\text{m}^3}\right)}{\ln\left(\frac{10}{10}\right)}$$

$$G_A = \frac{2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 10^{-12} \times 10^{-6}}{0.4} = 3 \times 10^{-17} \frac{\text{kmol}}{\text{s}}$$

۹۸- گزینه ۴ درست است.

و اینکه نفوذ توأم با واکنش کند باشد. سرعت واکنش شیمیایی کنترل کننده سرعت انتقال جرم است و لذا ضریب انتقال جرم مستقل از ضریب نفوذ مولکولی خواهد بود $(n=0, k_c = D_{AB}^n)$

۹۹- گزینه ۲ درست است.

با توجه به تعریف سطح فعال سینتی (A_g) می توان نوشت:

$$A_g = A_T - 2A_d$$

که در معادله بالا، A_d سطح ناحیه ناپودانی (Down Comer) و A_T سطح مقطع کل برج است. لذا:

$$A_T = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} \times (2)^2 = \pi = 3.14 \text{m}^2$$

$$A_d = 3.14 - 2 \times 0.32 = 2.5 \text{m}^2$$

۱۰۰- گزینه ۳ درست است.

افت فشار به ازای هر سینی در برج های سینی دار در حدود سه برابر افت فشار به ازای HETP (ارتفاع معادل یک مرحله تئوری) در برج های پر شده با پرکن های نامنتظم می باشد. این نسبت در برج های پر شده با پرکن های منظم به حدود 10 می رسد یعنی افت فشار به ازای یک سینی در برج های سینی دار حدود 10 برابر افت فشار به ازای HETP در برج های پر شده با پرکن های منظم است. لذا

$$\frac{A}{B} = 3 \text{ تا } 10$$

۱۰۱- گزینه ۲ درست است.

$$\overline{Sh} = 0.6 \times (10000)^{\frac{1}{2}} \times (1000)^{\frac{1}{3}} = 600$$

$$\frac{\bar{k}_L L}{D_{AB}} = 600$$

$$\bar{k}_L = \frac{600 D_{AB}}{L}$$

مطابق تئوری فیلمی:

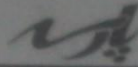
$$\bar{k}_L = \frac{D_{AB}}{Z_F}$$

لذا از تساوی روابط فوق می توان نوشت:

$$Z_F = \frac{L}{600} = \frac{3\text{m}}{600} = 0.005\text{m} = 5\text{mm}$$

۱۰۲- گزینه ۳ درست است.

با افزایش شست جریان آب سرد ورودی به کندانسور بار حرارتی کندانسور افزایش می یابد. افزایش بار حرارتی کندانسور موجب ازدیاد نسبت جریان پرکنشی می شود. با افزایش R خلوص محصول بالای برج افزایش می یابد. لذا هر عاملی که موجب ازدیاد رفلکس شود باعث افزایش خلوص محصول بالای برج می شود.



۱-۳ گزینه ۴ درست است

چون F بین آرئوپ و ماده غیر فرار فرار گرفته است و نیز با توجه به اینکه تمامی جوش آرئوپ از تمامی جوش جزء غیر فرار (B) بیشتر است لذا ماده با نقطه جوش بالا یعنی آرئوپ از پایین برج خارج می‌شود و ماده با نقطه جوش کمتر یعنی جزء غیر فرار از بالای برج خارج می‌شود. جهت به سمت مویقت F مقایسه تمام جوش بین مخلوط آرئوپ و ماده غیر فرار انجام می‌شود و گرنه نقطه جوش ماده فرار از هر دوی این‌ها کمتر است.

۱-۴ گزینه ۱ درست است

این مسئله بر اساس این نکته حل می‌شود که

محل تلاقی خط کار هر ناحیه با خط $(y = x)45^\circ$ - مختصات نقطه تعادل آن ناحیه را می‌دهد.
بنابراین از تلاقی خط کار این ناحیه با خط $y=x$ داریم

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$$

$$x = 0.75 = x_{DM}$$

$$y = \frac{RD - S}{(R+1)D}x + \frac{Dx_D + Sx_B}{(R+1)D}$$

$$x = \frac{Dx_D + Sx_B}{D + S} = x_{DM}$$

لازم به ذکر است معادله خط کار بین S و F به صورت زیر است

از تلاقی خط کار فوق با خط $y=x$

۱-۵ گزینه ۴ درست است

که در رابطه با

گشتت جریان خوراک ورودی

S گشتت جریان محال ورودی

و X نقطت جزء اصلی در خوراک ورودی

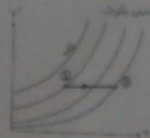
و Y نقطت جزء اصلی در محال ورودی

و Z نقطت جزء اصلی در فاز Extract خروجی

و W نقطت جزء اصلی در فاز Raffinate خروجی

۱-۶ گزینه ۴ درست است

مسیر تحول در فضای رطوبت



با توجه به مسیر تحول فوق

۱- حساب خشک‌گرایش می‌باشد $(T_{DB} > T_{WB})$

۲- حساب مرطوب‌گرایش می‌باشد $(T_{WB} > T_{DB})$

۳- رطوبت مطلق هوا ثابت می‌ماند $(Y_2 = Y_1)$

۴- رطوبت نسبی هوا کم می‌شود $(RH_2 > RH_1)$

۵- اختلاف تمامی حساب خشک‌گ و مرطوب‌گ هوا زیاد می‌شود

۶- آنتالپی هوا افزایش می‌یابد $(H = C_p(T_{DB} - T_{ref}) + Y \lambda)$

۱۰۷- گزینه ۴ درست است.

اقتصاد تبخیر کننده تک مرحله‌ای از معادله زیر بدست می‌آید:

$$E = \frac{V}{S}$$

که در معادله بالا V ظرفیت و S مقدار بخار مصرفی است. اگر در ظرفیت ثابت، این تبخیر کننده به سیستم تراکم مجدد بخار مجهز شود مقدار بخار مصرفی برابر خواهد شد با:

$$\bar{S} = S - V$$

و لذا اقتصاد تبخیر کننده برابر خواهد بود با:

$$\bar{E} = \frac{V}{\bar{S}} = \frac{V}{S - V} = \frac{\frac{V}{S}}{1 - \frac{V}{S}} = \frac{E}{1 - E}$$

$$\bar{E} = \frac{0/9}{1 - 0/9} = 9$$

سایرین

۱۰۸- گزینه ۴ درست است.

۱۰۹- گزینه ۴ درست است.

چون جامد در دمای اشباع سطحی وارد می‌شود و لذا تا زمانی که آبهای سطحی آن گرفته می‌شود دمای آن در دمای حباب مرطوب هوا ثابت باقی می‌ماند و به محض ظهور لکه‌های خشک روی سطح جامد، دمای جامد شروع به افزایش می‌کند.

۱۱۰- گزینه ۱ درست است.

۱۱۱- گزینه ۳ درست است.

با توجه به تعریف q و با توجه به اینکه $T_F < T_L$ است (یعنی خوراک به صورت مایع سرد وارد برج می‌شود) می‌توان نوشت:

$$q = \frac{H_{G1} - H_F}{H_{G1} - H_L} = 1 + \frac{C_p \Delta T}{\lambda}$$

$$q = 1 + \frac{80 \times (80 - 30)}{20000} = 1/2$$

$$\text{نسب خط خوراک} = \frac{q}{q-1} = \frac{1/2}{1/2-1} = 6$$

۱۱۲- گزینه ۲ درست است.

$$\beta = \frac{\left(\frac{C}{A}\right)_E}{\left(\frac{C}{A}\right)_R} = \frac{\left(\frac{25}{5}\right)}{\left(\frac{30}{60}\right)} = 10$$

فاز E فاز غنی از حلال (B) است.

فاز R فاز غنی از همزاد (A) است.

۱۱۳- گزینه ۲ درست است.

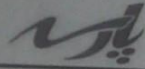
$$\frac{1}{K_x} = \frac{1}{k_x} + \frac{1}{mk_y}$$

$$\frac{L'}{K_x a} = \frac{L'}{k_x a} + \frac{L'}{mG'} \frac{G'}{k_y a}$$

$$H_{totL} = H_{iL} + AH_{iG}$$

۱۱۴- گزینه ۳ درست است.

هر عاملی که باعث ازدیاد غلظت جامد در محلول خروجی از تبخیر کننده شود باعث افزایش احتمال پدیده نمکی شدن می‌شود.



$$\begin{cases} Fx_f = Lx_L \\ F = L + V \end{cases}$$

$$x_L = \frac{x_f}{1 - \frac{V}{F}}$$

$F \uparrow \rightarrow \frac{V}{F} \downarrow \rightarrow$ کاهش احتمال نمکی شدن $x_L \rightarrow$ کم می‌شود

$P \uparrow \rightarrow T_L \uparrow$ (نقطه جوش محلول) $\rightarrow \Delta T = T_S - T_L \downarrow \rightarrow Q \downarrow \rightarrow V \downarrow \rightarrow x_L \downarrow$

$P_{\text{steam}} \uparrow \rightarrow T_{\text{steam}} \uparrow \rightarrow \Delta T \uparrow \rightarrow Q \uparrow \rightarrow V \uparrow \rightarrow \frac{V}{F} \uparrow \rightarrow x_L \uparrow$

افزایش احتمال نمکی شدن

$L \uparrow \rightarrow x_L \downarrow \rightarrow$ کاهش احتمال نمکی شدن

۱۱۵- گزینه ۴ درست است.

ضریب جذب $A = \frac{L}{mG}$ که در آن L دبی مایع، G دبی گاز و m شیب خط تعادلی است بنابراین گزینه‌های ۱ تا ۳ موجب کاهش ضریب جذب شده و فقط گزینه ۴ آن را افزایش می‌دهد.

سینتیک و طرح راکتورهای شیمیایی

۱۱۶- گزینه ۱ درست است.

از آنجائیکه R به صورت برگشت پذیر به S تبدیل می‌شود، بنابراین براساس قانون اثر جرم، A به طور بیوسه به R تبدیل شده و R نیز به S تبدیل می‌شود. در پایان فقط S در سیستم وجود خواهد داشت و غلظت‌های A و R صفر خواهند شد.

۱۱۷- گزینه ۲ درست است.

$$x_A = \frac{\rho C_p \Delta T}{-C_{A0} \Delta H_r} \rightarrow 0/6 = \frac{\Delta T}{50} \rightarrow \Delta T = 30^\circ C$$

۱۱۸- گزینه ۴ درست است.

$$-r_A = K_1 C_A + K_2 C_A = (K_1 + K_2) C_A = K C_A$$

برای واکنش درجه اول، زمان نیمه عمر برابر است با:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{K} = \frac{\ln 2}{K_1 + K_2} = \frac{0/7}{1+4} = 0/14$$

۱۱۹- گزینه ۳ درست است.

در راکتور mixed، میزان R تأثیری بر میزان تبدیل ندارد.

۱۲۰- گزینه ۱ درست است.

برای واکنش درجه اول در فشار ثابت:

$$-\ln \left(1 - \frac{\Delta V}{e_A V_0} \right) = kt$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 0/2, e_A = \frac{V_{x_{A=0}} - V_{x_{A=0.2}}}{V_{x_{A=0}}} = \frac{1/4 - 1}{1} = 0/4, t = 2 \text{ min}$$

$$-\ln \left(1 - \frac{0/2}{0/4} \right) = k \times 2 \rightarrow k = 0/35 \text{ min}^{-1}$$

$$\rightarrow -r_A = -\frac{1}{V} \frac{dN_A}{dt} = 0/35 C_A$$

۱۲۱- گزینه ۳ درست است.

برای واکنش درجه صفر در حالت حجم ثابت:

$$\frac{dP_A}{dt} = K_p \rightarrow P_A = P_{A_0} - K_p t \quad (1)$$

برای واکنش در شرایط حجم ثابت

$$P_A = P_{A_0} \frac{a}{\Delta n} (\pi - \pi_0) \quad (II)$$

$$\frac{(I),(II)}{aA \rightarrow rR} \rightarrow K_p t = \frac{a}{\Delta n} (\pi - \pi_0)$$

$$\begin{cases} aA \rightarrow rR \\ a=1 \rightarrow \Delta n = r-1 \\ @ t=0 \rightarrow \pi_0 = 1 \\ @ t=1 \rightarrow \pi = 2 \end{cases} \Rightarrow K_p (r-1) = 1 \quad (III)$$

برای واکنش در شرایط فشار ثابت برای واکنش درجه صفر:

$$-r_A = -\frac{dC_A}{dt} = K_c \rightarrow \frac{1}{\varepsilon_A} \ln(1 + \varepsilon_A x_A) = \frac{K_c}{C_{A0}} t \rightarrow \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \frac{K_c \varepsilon_A}{C_{A0}} t \quad (IV)$$

$$rV = V_0(1 + \varepsilon_A x_A)$$

$$(V) \begin{cases} K_c = K_p (RT)^{n-1} = \frac{K_p}{RT} \\ C_{A0} = \frac{P_{A0}}{RT} = \frac{y_{A0} P_0}{RT} = \frac{1 \times 1}{RT} = \frac{1}{RT} \\ \varepsilon_A = \frac{r-1}{1} = r-1 \end{cases} \xrightarrow{(III),(IV),(V)} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \frac{K_p \times (r-1) \times T}{RT \times \frac{1}{RT}} = t \xrightarrow{@ t=1} V = V_0 \times e = e$$

۱۲۲ - گزینه ۴ درست است.

در راکتور mixed:

$$\tau = \frac{C_{A0} - C_A}{-r_A} = \frac{C_{A0} - C_A}{K_1 C_A}$$

$$\tau = \frac{C_{R0} - C_R}{-r_R} = \frac{-C_R}{K_2 C_R - K_1 C_A}$$

$$C_R = C_{A0} \tau \frac{K_1}{(1 + K_1 \tau)(1 + K_2 \tau)}$$

$$\Rightarrow \frac{dC_R}{dT} = 0, \quad \frac{dC_R}{dT} = \frac{\partial C_R}{\partial K_1} \frac{dK_1}{dT} + \frac{\partial C_R}{\partial K_2} \frac{dK_2}{dT}$$

$$\Rightarrow (1 + K_1 \tau)(1 + K_2 \tau) k_{10} \frac{E}{RT^2} \exp\left(\frac{-E}{RT}\right)$$

$$-K_1 (1 + K_2 \tau) k_{10} \tau \frac{E}{RT^2} \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) - K_1 (1 + K_1 \tau) k_{20} \tau \frac{E}{RT^2} \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (1 + K_1 \tau)(1 + K_2 \tau) k_{10} - K_1 (1 + K_2 \tau) k_{10} \tau - K_1 (1 + K_1 \tau) k_{20} \tau =$$

$$(1 + K_1 \tau) k_{10} - K_1 (1 + K_1 \tau) k_{20} \tau = 0$$

$$\Rightarrow k_{10} + k_{10} k_{20} \tau \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) - k_{20} k_{10} \tau \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) - k_{20} k_{10} \tau^2 \exp\left(\frac{-2E}{RT}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k_{20} k_{10} \tau^2} = \exp\left(\frac{-2E}{RT}\right) \Rightarrow \frac{1}{T_{opt}} = \frac{R}{2E} \ln(k_{20} k_{10} \tau^2)$$

۱۲۳ - گزینه ۲ درست است.

افزایش تدریجی دما $\Rightarrow E_1 < E_2$, $E_1 < E_3$ به دلیل این که

۱۲۴ - گزینه ۱ درست است.

برای تولید حداکثر مقدار B باید واکنش $A \xrightarrow{K_1} R$ تقویت و واکنش $R \xrightarrow{K_2} S$ تضعیف شود و انرژی اکتیواسیون واکنش یک بیش تر از واکنش دو است. بنابراین افزایش دما همواره به نفع واکنش با انرژی اکتیواسیون بالا (واکنش یک) می باشد. برای تولید حداکثر مقدار R باید دما حداکثر مقدار ممکن یعنی 380°K باشد.

$$T = 380 = 100 + 70t \rightarrow t = 4 \text{ hr}$$

۱۲۵- گزینه ۴ درست است.

$K = 0/2 \text{ min}^{-1}$ واکنش درجه اول است $(A \xrightarrow{K} R)$

$$\tau_1 = \frac{C_{A_2} - C_{A_1}}{K C_{A_1}}, \quad \tau_2 = \frac{C_{A_1} - C_{A_2}}{K C_{A_2}}$$

$$C_{A_2} = C_{A_1} (1 - x_{A_2}) = 0/25 C_{A_1}$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{C_{A_2} - C_{A_1}}{K C_{A_1}} + \frac{C_{A_1} - 0/25 C_{A_1}}{K (0/25 C_{A_1})} \rightarrow \frac{d(\tau_1 + \tau_2)}{dC_{A_1}} = 0 \rightarrow C_{A_1}^2 = 0/25 C_{A_2}^2 \rightarrow C_{A_1} = 0/5 C_{A_2}$$

$$\rightarrow \tau_1 = \frac{C_{A_2} - 0/5 C_{A_2}}{K (0/5 C_{A_2})} = \frac{1}{K} = 5 \text{ min} \rightarrow \frac{V_1}{v_0} = 5 \rightarrow V_1 = 5 \times v_0 = 350 \text{ lit} \rightarrow V_1 = V_2 = 350 \text{ lit}$$

۱۲۶- گزینه ۱ درست است.

۱۲۷- گزینه ۲ درست است.

گزینه ۱: سرعت واکنش برابر است با تعداد مول های A که در واحد زمان و در واحد حجم تبدیل یا تولید می شوند.

گزینه ۳: با افزایش E جمله نمایی کاهش، در نتیجه K کاهش می یابد. $K = K_0 e^{-\frac{E}{RT}}$

گزینه ۴: در صورتی که محصول کمی مورد نیاز باشد از راکتور batch استفاده می شود.

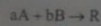
رابطه ثابت سرعت واکنش با دما به صورت کلی $K = K_0 T^n e^{-\frac{E}{RT}}$ است.

(آرینوس): $n=0$ و تئوری برخوردی، $n=0/5$ و حالت واسطه، $n=1$ تغییرات ثابت سرعت با دما اصولاً با نرم اکسپونشیال انجام می شود، بنابراین هر سه رابطه نتایج تقریباً یکسانی در صورت وقوع تغییرات دما دارند.

۱۲۸- گزینه ۳ درست است.

چون واکنش ابتدایی گفته شده، بنابراین واکنش درجه دوم است. لذا راکتور plug یعنی $R=0$ مناسب است.

۱۲۹- گزینه ۳ درست است.



$$C_R = C_{A_0} \left(\frac{C_{R_0}}{C_{A_0}} + \frac{r}{a} x_A \right) \rightarrow C_R = 0/5 (0/2 + x_A) \rightarrow C_R = 0/1 + 0/5 x_A$$

۱۳۰- گزینه ۲ درست است.

$$\tau = \frac{C_{A_0} x_A}{-r_A} = \frac{C_{A_0} x_A}{0/2 C_A} = \frac{C_{A_0} x_A}{0/2 \frac{C_{A_0} (1-x_A)}{1+\epsilon_A x_A}} \rightarrow 1 = \frac{x_A (1+0/8 x_A)}{0/2 (1-x_A)} \rightarrow 0/2 - 0/2 x_A = x_A + 0/8 x_A^2$$

$$\epsilon_A = \frac{\Delta n}{a} y_A = \frac{2-1}{1} \times 0/8 = 0/8, \quad \tau = \frac{150}{150} = 1 \text{ min}$$

$$\rightarrow 4x_A^2 + 6x_A - 1 = 0 \rightarrow x_A \begin{cases} x_A = 0/15 \checkmark \\ x_A < 0 \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \frac{V}{v_F} = \frac{V}{v_0 (1 + \epsilon_A x_A)} = \frac{1}{1 + (0/8 \times 0/15)} = 1/12 \quad \square 0/89$$

ریاضیات (کاربردی - عددی)

۱۳۱- گزینه ۲ درست است.

این معادله برنولی است که در آن $P(x) = -1$ و $q(x) = x$ ، $n = 5$ با استفاده از تغییر متغیر $V = y^{-4}$ و تقسیم طرفین به y^5 خواهیم داشت

$$\frac{dV}{dx} + 4V = -4x \rightarrow \text{که یک معادله خطی است} \Rightarrow V e^{4x} = -4 \int x e^{4x} dx + c$$

$$\Rightarrow V = -4e^{-4x} \left(\frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{16} \right) + c e^{-4x} \Rightarrow V = -x + \frac{1}{4} + c e^{-4x} \xrightarrow{V = \frac{1}{y^4}} \frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + c e^{-4x}$$

۱۳۲- گزینه ۳ درست است.

از تغییر متغیر $x + y = z^2$ استفاده می‌کنیم:

$$x + y = z^2 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(z^2 - x) = 2z \frac{dz}{dx} - 1$$

جای گذاری در معادله اصلی:

$$2z \frac{dz}{dx} - 1 = z \Rightarrow \frac{2z}{z+1} dz = dx \Rightarrow \int \frac{2z}{z+1} dz = \int dx \Rightarrow 2z - 2\ln(z+1) = x + c$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+y} - 2\ln(\sqrt{x+y}+1) = x + c$$

۱۳۳- گزینه ۳ درست است.

به علت وجود تقارن در دو طرف جاذب و قرار گرفتن $x=0$ در مرکز صفحه:

$$\frac{dC_A}{dz}(x=0, t) = 0 \text{ (شرط مرزی نوع دوم)}$$

بنابراین تابع مشخصه غلظت در راستای x به صورت $\cos \lambda x$ خواهد بود.

و به دلیل این که در $x=L$ شرط مرزی نوع سوم داریم (برای ماده A به طریق جابه‌جایی به به سطح رسیده و با نفوذ وارد می‌گردد)

$$D_{AB} \left. \frac{dC_A}{dz} \right|_{z=L} = F(C_{\infty} - C)$$

λ از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\tan \lambda_n L = \frac{F}{D \lambda_n}$$

۱۳۴- گزینه ۳ درست است.

از گزینه‌ها مشخص است که از توزیع دما در جهت طول صرف‌نظر شده است. برای استوانه که منبع گرمایی q'' در آن قرار دارد معادله توزیع دما به صورت

$$\frac{k}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dT}{dr} \right] + q'' = 0 \text{ خواهد بود که در این سوال } (n + bT) = 0 \text{ با تغییر متغیر } \theta = a + bT \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\frac{1}{br} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\theta}{dr} \right] + \frac{\theta}{k} = 0 \Rightarrow r\theta'' + \theta' + \frac{b}{k} r\theta = 0 \Rightarrow r^2\theta'' + r\theta' + r^2 \frac{b}{k} \theta = 0$$

که به شکل معادله بسل درجه اول است پس جواب به شکل $C_1 J_0 \left(r \sqrt{\frac{b}{k}} \right) + C_2 Y_0 \left(r \sqrt{\frac{b}{k}} \right)$ خواهد بود و چون محدود $T(0) = 0$ است لذا $C_2 = 0$ و

$$\text{لذا جواب به شکل } T = C J_0 \left(r \sqrt{\frac{b}{k}} \right) \text{ می‌باشد.}$$

۱۳۵- گزینه ۱ درست است.

تکته: از روش ترکیب متغیرها تنها زمانی می‌توان استفاده کرد که:

(۱) سیستم دارای بعد مشخصه تعریف نشده‌ای باشد (∞)

(۲) تابع به ازای دو شرط مرزی متفاوت با یک شرط مرزی و یک شرط اولیه دارای مقادیر یکسان باشد. مشخص است که این دو شرط تنها در گزینه یک صادق است.

۱۳۶- گزینه ۱ درست است.

شرط نعامد این است که $\int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx = 0$ حاصل ضرب تابع زوج و فرد یک تابع فرد است، پس:

تابع f_2 و f_4 زوج و f_1, f_3 و f_5 فرد هستند.

$$\int_{-1}^{+1} f_2(x)f_3(x)dx = \int_{-1}^{+1} f_2(x)f_1(x)dx = \int_{-1}^{+1} f_2(x)f_3(x)dx = 0$$

۱۳۷- گزینه ۲ درست است.

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\text{لاپلاس گیری} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} [sT(x,s) - T(x,0)] = \frac{d^2 T(x,s)}{dx^2}$$

که یک معادله درجه دو همگن است.

$$T(x,0) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T(x,s)}{dx^2} - \frac{s}{\alpha} T(x,s) = 0$$

$$T(x,s) = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right)$$

پس

در میله خیلی بلند یا دمای اولیه صفر باید یک شرط مرزی به صورت $T(\infty, t) = 0$ داشته باشیم.

$$T(\infty, t) = 0 \Rightarrow T(\infty, s) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$T(a, t) = Q\delta(t) \Rightarrow T(a, s) = Q \Rightarrow C_2 = Q \exp\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} a\right) \Rightarrow T(x, s) = Q \exp\left(-\left(x-a\right)\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)$$

۱۳۸- گزینه ۲ درست است.

برای استفاده از روش فروبیوس، $x = 1$ باید نقطه تکیه منظم باشد که این شرط تنها در گزینه ۲ صدق می‌کند.

$$y'' + \frac{x^2}{1-x} y' + \frac{1}{(1-x)^2} y = 0$$

$$p(x) = \frac{x^2}{1-x}, \quad q(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)p(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^2 q(x) = 1$$

۱۳۹- گزینه ۳ درست است.

با توجه به تعریف تابع خطا داریم:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\operatorname{erf}(T) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\pi\sqrt{\pi}}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos(\operatorname{erf}(T)) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

۱۴۰- گزینه ۴ درست است.

محل قرارگیری مبدأ می‌تواند تعیین کننده نوع تابع مکانی باشد چنانچه $x = 0$ در سمت عایق انتخاب شود تابع مکانی از نوع \cos و چنانچه در سمت برف انتخاب شود تابع مکانی از نوع \sin خواهد بود و در هر دو حال به علت این که شرط مرزی متفاوت می‌باشد $\lambda = \frac{2n+1}{2L}\pi$ خواهد بود.

۱۴۱- گزینه ۳ درست است.

از آن جایی که تابع f یک تابع پیوسته است باید در بازه $[a, b]$ در نقطه a مقدار تابع f منفی و در نقطه b مقدار آن مثبت باشد و بالعکس بنابراین با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ درست است.

$$f(1) = 2 - 1 - \sin 1 - 1 = -\sin 1 < 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \sin\frac{3}{2} - 1 = 2 - \sin\frac{3}{2} > 0$$

۱۴۲- گزینه ۱ درست است.

$$f(x) = (x^2 - 1)e^x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 e^{x_0} - e^{x_0}}{(x_0^2 + 2x_0 - 1)e^{x_0}} = \frac{x_0^3 + 2x_0^2 - x_0 - x_0^2 + 1}{x_0^2 + 2x_0 - 1} = \frac{8 + 4 - 2 + 1}{4 + 4 - 1} = \frac{11}{7}$$

۱۴۳- گزینه ۲ درست است.

هرچه از یک سطح دورتر شویم اثر دمایی آن سطح کمتر خواهد شد بنابراین دما با فاصله از سطح نسبت عکس دارد بنابراین این روش میان‌بایی این خواهد بود که دمای هر سطح را در فاصله بین نقطه و سطح مقابل آن ضرب کنیم و بر مجموع فواصل تقسیم کنیم، بنابراین

$$\frac{40 \times 5 + 10 \times 20 + 0 \times 5 + 20 \times 10}{20 + 10 + 5 + 5} = 15^\circ\text{C}$$

۱۴۴- گزینه ۴ درست است.

$$\int_0^2 f(x) \square \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{1}{3}(1 + 4 \times 7 + 21) = \frac{50}{3}$$

$$\int_0^2 f(x) = \frac{4}{3}x^3 + x^2 + x \Big|_0^2 = \frac{32}{3} + 4 + 2 = \frac{50}{3}$$

بنابراین خطا صفر است.

یک راه آسان این است که از آن جایی که روش سیمپسون برای توابع درجه ۳ و کمتر بدون خطا می‌باشد پس خطا برابر صفر می‌شود.

۱۴۵- گزینه ۴ درست است.

$$y'(1) = y(0) + hf(x_0, y_0) = 1 + 1 \times (1 + 0) = 2$$

$$y(1) = y(0) + \frac{1}{2}h[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)] = 1 + \frac{1}{2} \times 1[(1 + 0) + (2 + 1)] = 1 + \frac{1}{2}(4) = 3$$

۱۴۶- گزینه ۱ درست است.

همان‌طور که شکل نشان می‌دهد مقدار خطا در سیستم به یک مقدار ثابت میل کرده است و به صفر نرسیده است بنابراین می‌توانیم بگوییم که این سیستم پایدار است ولی همگرا نیست، مثلاً به طور مداوم جواب به صورت ۱ و -۱ می‌شود. در این صورت مقدار اختلاف آن‌ها ثابت است اما همگرا نیست.

۱۴۷- گزینه ۱ درست است.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\cos r}{k} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \left[2r \frac{dT}{dr} + r^2 \frac{d^2T}{dr^2} \right] + \frac{\cos r}{k} = 0 \Rightarrow r^2 \frac{d^2T}{dr^2} + 2r \frac{dT}{dr} + r^2 \frac{\cos r}{k} = 0$$

$$\Rightarrow r \frac{d^2T}{dr^2} + 2 \frac{dT}{dr} + r \frac{\cos r}{k} = 0 \Rightarrow T_{i+1} \left[\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta r^2} \right] + 2 \left[\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta r} \right] + T_i \frac{\cos r_i}{k} = 0$$

$$\Rightarrow T_{i+1} \left[\frac{r_i}{\Delta r^2} + \frac{1}{\Delta r} \right] - T_i \left[\frac{2r_i}{\Delta r^2} \right] + T_{i-1} \left[\frac{r_i}{\Delta r^2} - \frac{1}{\Delta r} \right] + T_i \frac{\cos r_i}{k} = 0$$

۱۴۸- گزینه ۲ درست است.

با توجه به ثابت ماندن یک نقطه (نقطه ابتدایی) و استفاده از دو نقطه جهت محاسبه ریشه این روش منطبق بر روش نابجایی می‌باشد در ضمن در روش تکرار ساده فقط از یک نقطه استفاده می‌شود و در روش نیوتن ووتری از شیب معان استفاده شده و نقاط ثابت نمی‌باشند.

۱۴۹- گزینه ۲ درست است.

با تغییر متغیر $u = c - c_{\infty}$ خواهیم داشت.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u(r,0) = u_0, \quad u(0,t) = \text{محدود}, \quad u(R,t) = 0$$

$$u(r,t) = c - c_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} \cdot e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$

$$c(r,t) = c_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{r} \cdot e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$

$$T(r,z) = F(r) \cdot \tau(z)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (rF') = -\frac{\tau''}{\tau} = -\lambda^2$$

$$r^2 F'' + rF' + \lambda^2 r^2 F = 0 \Rightarrow R(r) = c_1 J_0(\lambda r) + c_2 Y_0(\lambda r)$$

$$\tau'' - \lambda^2 \tau = 0 \rightarrow \tau(z) = c_3 \sinh(\lambda z) + c_4 \cosh(\lambda z)$$

چون دما و در نتیجه $F(r)$ در $r=0$ محدود است پس $c_2 = 0$ می باشد. جواب در راستای r شامل $J_0(\lambda_n r)$ خواهد بود.

که مشخصاً جواب معادله بالا به شکل زیر است:

۱۵۰ - گزینه ۴ درست است.

با جداسازی متغیرها داریم: