

① گاندر مربعی شکلی با مختصات $x = \pm 2$ و $y = \pm 2$ در نظر بگیرید. با استفاده از انتگرال تابع تعریفی خارج کردن نقطه تکینگی از گاندر انتگرالهای زیر را روی این گاندر خاص محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{z dz}{2z+1}$ ب) $\int \frac{\cosh z}{z^2} dz$

ج) $\int \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi i}{2}} dz$ د) $\int \frac{f(z)}{z(2z+1)^2} dz$ «تعریفی $f(z)$ »

② فرض کنید C دایره $z = e^{i\theta}$ باشد ابتدا نشان دهید که برای هر عدد صحیح a و ثابت a

$\int \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$ انتگرال رویه رو برقرار است:

سپس بازنویس انتگرال بر حسب θ و اصول زیر را استخراج کنید:

$$\int_0^{2\pi} e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta = 2\pi$$

③ اگر $0 < r < 1$ باشد روابط زیر را اثبات کنید:

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \sin \theta + r^2}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$

④ سری لورانیه ارائه دهید که به نمایش تابع زیر منجر شود
(الف)

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

جواب: $1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n}}$ راضی

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1 \quad \text{ب) با مشتق گیری از سری مکرر لورن}$$

ضرایب‌های زیر را بدست آورید:

$$* \frac{1}{(1-z)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

$$* \frac{1}{(1-z)^r} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) z^n$$

⑤ با استفاده از ضرب و تقسیم‌های سری‌های توانی، عبارات زیر را اثبات کنید

الف) $\frac{e^z}{z(z^r+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{r}z - \frac{5}{4}z^2 + \dots$ و « $0 < |z| < 1$ »

ب) $\frac{1}{z^r \sinh z} = \frac{1}{z^r} - \frac{1}{4} \frac{1}{z} + \frac{7}{240} z + \dots$ و « $0 < |z| < \pi$ »

⑥ نقاط تکین و حساب مانده‌های موارد زیر را بیابید

الف) $\frac{1}{z^r + a^r} =$

ب) $\frac{1}{(z^r + a^r)^r} =$

ج) $\frac{z^r}{(z^r + a^r)^r} =$

د) $\frac{z e^{iz}}{z^r + a^r} =$