Subject

Date ۹۲,۲,۲

توابع دو متغیره: $z = f(x,y)$

$\Delta PP_0 = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$f: A \to B \qquad y = f(x) \qquad \lim f(x) = L \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$z = f(x,y) \qquad \lim z \to L \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : |P-P_0|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$

شعاع همسایگی: $N_\varepsilon = (A(x_0,y_0), \varepsilon)$

• قواعد و قضایای حد در توابع یک متغیره با دو متغیره برابر است. ⇐

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f \pm g) = L_1 \pm L_2$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f \times g) = L_1 \times L_2$

مثال: ثابت کنید حد تابع $f(x,y) = xy\sin\frac{1}{xy} + y\cos x$ وقتی که $(x,y) \to (0,0)$ میرود برابر صفر خواهد بود.

$\Delta PP_0 = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow |xy\sin\frac{1}{xy} + y\cos x|<\varepsilon$

$|x+y| \le |x|+|y| \Rightarrow |x||y|\underbrace{|\sin\frac{1}{xy}|}_{0<\downarrow<1} + |y|\underbrace{|\cos x|}_{0<\downarrow<1} \le \varepsilon \Rightarrow |x||y|+|y| \le \varepsilon$

$$* \begin{cases} |x| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta \\ |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta \end{cases} \Rightarrow |x||y| < \delta^2 \Rightarrow |x||y|+|y| < \delta^2+\delta \le \varepsilon$$

⇐ حل معادله درجه ۲ برای یافتن δ

حدهای مکرر (محاسبه حد توابع ۲ متغیره)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = L_1 \\ \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = L_2 \end{cases}$$

ممکن است حدهای تکراری وجود داشته باشند ولی حد را نداشته باشیم و برعکس.

* shahrsaz.blog.com

Subject

Date

در محاسبه‌ی حد توابع چندمتغیره چنانچه مسیرهای متفاوتی را انتخاب کنیم می‌بایست حاصل حد به پارامتر خاصی وابسته باشد

چنانچه حد به پارامتر بستگی داشت تابع فاقد حد خواهد بود.

مثال: نشان دهید حد زیر وجود ندارد؟ $f(x,y)=\dfrac{3x-2y}{2x+3y} \quad (x,y)\to(0,0)$

با فرض مسیر $y=mx$: $f(x,mx)=\dfrac{3x-2mx}{2x+3mx}=\dfrac{(3-2m)x}{(2+3m)x}=\dfrac{3-2m}{2+3m} \Rightarrow$ چون حد به پارامتر m وابسته است پس تابع دارای حد نیست

مثال: وجود یا عدم وجود حد زیر را بررسی کنید؟

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin x + x\sin y = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(\sin x + x\sin y)\right)=L_1=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}(\sin x + x\sin y)\right)=L_2=0$$

مشتق‌های جزئی توابع چندمتغیره: با توجه به تعاریف مشتق‌های توابع یک متغیره داریم.

$$z=f(x,y) \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}=f_{(x)}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}=f_y$$

$$* \ \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{x^2} \qquad * \ f_x=\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial xy}=f_{yx}=(f_y)_x$$

دیفرانسیل تابع $\quad y=f(x) \qquad df=\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow dy=f'(x)dx \Rightarrow$ در توابع چندمتغیره $\boxed{df=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot dy}$

دیفرانسیل تابع ۲ متغیره

Subject

Date

مثال: مشتق تابع زیر را حساب کنید.

$$f(x,y)=e^{x}\cos x^{2}y-\sin^{2}\frac{1}{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Rightarrow e^{x}\cos x^{2}y-2xye^{x}\sin x^{2}y-\frac{2}{x^{2}y}\sin\frac{1}{xy}\cdot\cos\frac{1}{xy}$$

↳ مشتق نسبت به x، y

۹۲,۲,۹

دیفرانسیل توابع دو متغیره:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\times dx+\frac{\partial f}{\partial y}\times dy$$

اگر تابع دو متغیره داشته باشیم اما هر کدام از مؤلفه‌ها خود از دو متغیر پیروی کنند یعنی:

$$z=f(x,y,z)\Rightarrow \begin{aligned} x&=g(t,s)\\ y&=h(t,s)\\ z&=\varphi(t,s)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\\ \frac{\partial f}{\partial s}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\end{aligned}\right\}$$

مشتق جزئی برای توابع چند متغیره

مثال: اگر $z=f(x,y)=\sin(x-y^{2})$ ، $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ برای $r=1$ ، $\theta=\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial\theta}$ ؟

$x=0 \quad y=1$

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\qquad \frac{\partial f}{\partial r}=\cos(x-y^{2})\times\underbrace{\cos\theta}_{0}-2y\cos(x-y^{2})\times\underbrace{\sin\theta}_{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}=-2y\cos(x-y^{2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=\cos(x-y^{2})(-r\underbrace{\sin\theta}_{1})-2y\cos(x-y^{2})\cdot r\underbrace{\cos\theta}_{0}=-r\cos(x-y^{2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial\theta}=-3\cos(1)$$

Subject

Date

مثال: اگر $z=f(x-y,\ y-x)$ باشد $\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0\right)$ ثابت کنید مهم برای امتحان (VIP)

$$\begin{cases} x-y=t \\ y-x=s \end{cases} \qquad z=f(t,s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}\times\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}\times(1)+\frac{\partial f}{\partial s}(-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial t}\times\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\times\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial t}\times(-1)+\frac{\partial f}{\partial s}(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad \blacksquare$$

مثال: فرض کنید $u=f\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z},\ \frac{z}{x}\right)$ باشد ثابت کنید $\leftarrow$ $z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}=0$

مشتق سوئی برای دو متغیر:

مشتق سوئی تابع $u=f(x,y)$ در جهت بردار یکه‌ی $\vec{v}=(a,b)$ را با نماد D_{vf} نمایش می‌دهند و این مشتق برابر است

$D_{vf}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{f(x+\Delta a,\ y+\Delta b)-f(x,y)}{\Delta v}$ (پس مشتق سوئی عبارت است از شیب منحنی تراز)

$$D_{vf}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \qquad v=i\cos\theta+j\sin\theta$$

θ را از فرمول بالا بدست می‌آوریم

تعبیر هندسی مشتق سوئی برابر است با شیب منحنی تراز در نقطه‌ی $P_0(x_0,y_0,z_0)$ در جهت بردار $v=(a,b)$

مشتق سوئی تابع ۳ متغیره برابر خواهد بود با:

$$D_{vf}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma$$

در توابع ۳ متغیره زوایایی که شیب منحنی تراز با بردار یکه v می‌سازد به صورت α و β و γ خواهد بود

Subject

Date

مثال: مشتق سویی تابع $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z$ را در سوی بردار $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ را در نقطه‌ی $P(1,-3,4)$ به دست آورید.

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \qquad D_{\vec{v}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{2}{3} + \frac{\partial f}{\partial y}\times -\frac{2}{3} + \frac{\partial f}{\partial z}\times\frac{1}{3}$$

$$D_{\vec{v}}f = \frac{4x}{3} + \frac{4y}{3} + \frac{2}{3} \xrightarrow[\text{در نقطه}]{} \frac{4}{3} - \frac{12}{3} + \frac{2}{3} = -2$$

گرادیان یک تابع دو متغیره $f(x,y)$ را با ∇ نشان می‌دهند و برابر است با $grad(f) = \nabla f$

یعنی گرادیان یک تابع در یک نقطه برابر یک بردار است. $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_x, f_y)$

اگر $D_{f\vec{v}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma = \left(\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k\right)\times(i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma) = \nabla f \times \vec{v}$

نتیجه: مشتق سویی تابع برابر است با گرادیان تابع در بردار واحد $\vec{v}$ (تعمیم)

۹۲/۲/۱۶

نشان دهید که گرادیان رویه‌ی $f(x,y,z) = c$ بر بردار مماس در نقطه‌ی موضعی $P(x,y,z)$ عمود می‌باشد. برای این کار به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$u = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ بردار مماس $\Rightarrow du = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy + \frac{\partial f}{\partial z}.dz = 0$$

با عبارت دیگر $\left(\frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy + \frac{\partial f}{\partial z}.dz\right)(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = 0$

$$\nabla f . u' = 0$$

مثال: معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 3z$ در نقطه‌ی $P(-1,1,2)$ را بنویسید.

$\nabla f = 2x + 2y - 3 \Rightarrow \nabla(-1,1,2) \Rightarrow (-2,2,3)$ بردار نرمال

Subject

Date

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$-2(x+1)+2(y-1)-3(z-2)=0 \qquad -2x+2y+2-3z=0$

تابع ضمنی: تابعی که متغیر وابسته و مستقل قابل تشخیص نباشند (قابل تفکیک نباشند) ← y دارای توان غیر از یک باشد.

دستور تابع مشتق ضمنی $y'_x = -\dfrac{f'(x)}{f'(y)}$

مثال: اگر $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(y,z)=0 \end{cases}$ ثابت کنید $\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$

تابع ضمنی چند متغیره را تابع ضمنی گویند.

$df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot dy = 0 \quad A \quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$

$dg = 0 \qquad \Rightarrow B \quad \dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z}$

? ? ? ?

$A \times B \rightarrow$

هرگاه مشتق تابعی دارای ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی زوج باشد نتیجه می‌گیریم که این ریشه‌ها نقاط Max و Min منحنی نخواهند بود زیرا مشتق به ازای این ریشه‌ها تغییر علامت نمی‌دهد.

نقاط بحرانی: نقاطی که مشتق در آنها صفر است [illegible]

ماکسیمم و مینیمم توابع ۲ یا چند متغیره:

برای اینکار به شرح زیر عمل می‌کنیم.

$z = f(x,y) \qquad 1.\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \ , \ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$

$2.\ D: \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$

نقطه $P(a,b)$ را نقطه اکسترمم مینیمم گوییم هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد

۱) اگر $D>0$ ولی $0<\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ یا $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ آنگاه (a,b) نقطه ماکزیمم نسبی است

۲) اگر $D>0$ ولی $0>$ " " " آنگاه (a,b) نقطه مینیمم نسبی است.

۳) اگر $D<0$ باشد آنگاه نقطه (a,b) نقطه زینی است.

۴) اگر $D=0$ در چنین حالتی نتیجه خاصی حاصل نمی شود

مثال: Max و Min و نقاط زینی تابع ۲ متغیره ی $3+2x+2y-2x^2-2xy-y^2$ را در صورت وجود بیابید.

۹۲،۲،۲۳

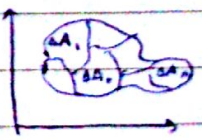
انتگرال دوگانه:

شرط لازم انتگرال گیری پیوستگی آن است. چنانچه تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ روی صفحه ی بسته ی D پیوسته باشد انتگرال

دوگانه ی این تابع را روی صفحه ی بسته ی D به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\lim \sum f(x_i, y_i)\, \Delta A_i \Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dA$$

A_i ← مساحت قطعه



$d_A = dx \cdot dy$

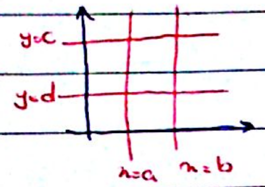
یا $d_A = dy \cdot dx$

سطح بسته ی D را مستطیل گوییم هرگاه یکی از ۳ شرط زیر برقرار باشد:

Subject

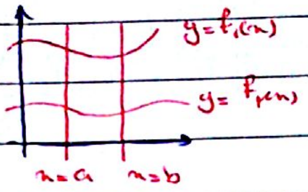
Date

1:



$$\Rightarrow \int_a^b\int f(x,y)\,dy\,dx \;\text{ یا }\; \int_d^c\int f(x,y)\,dx\,dy$$

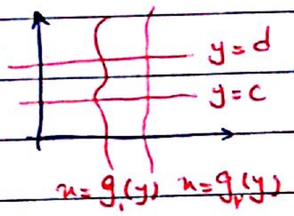
2:



$$\Rightarrow \int_a^b\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

اولویت با خطوط است

3:

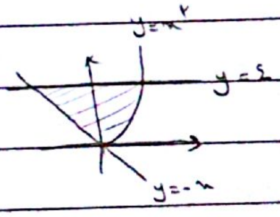


$$\Rightarrow \int_c^d\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال: محاسبه انتگرال دوگانه‌ی $\int_D\int dA$ روی سطح بسته‌ی D محدود به منحنی $x=\sqrt{y}$ و $y=-x$ و خط $y=4$ را بیابید

$\boxed{x=\sqrt{y}} \Rightarrow y=x^2$

$y=-x$ یا $\boxed{x=-y}$



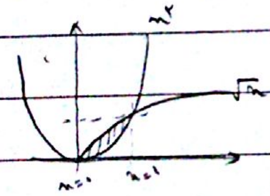
حالت ۳:

$$\int_0^4\int_{-y}^{\sqrt{y}} 1\,dx\,dy = \int_0^4 x\Big|_{-y}^{\sqrt{y}} dy =$$

$$=\int_0^4(\sqrt{y}+y)\,dy = \frac{2}{3}y\sqrt{y}+\frac{1}{2}y^2\Big|_0^4$$

$$=\frac{2}{3}\times 8+8-0=\frac{40}{3}$$

مثال: انتگرال دوگانه‌ی $\int_D\int xy^2dx$ را روی سطح D محدود به منحنی $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ را محاسبه کنید



$$\int_D\int xy^2dx = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}xy^3\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{3}(x^3\sqrt{x}-x^7)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^3\sqrt{x}-x^7\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{8}x^8\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{7}-\frac{1}{8}\right]=\frac{3}{56}$$

$$\frac{16-7}{56}=\frac{9}{56}$$

یا روش دیگر $\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy^2\,dx\,dy$

می‌توان از دو روش حل کرد

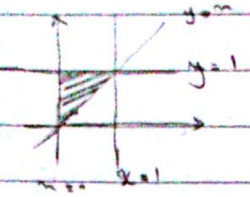
nesin

Subject

Date

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^1\int_x^1 \sqrt{1-y^2}\,dy\,dx = ?$$



تغییر حدود $\Rightarrow$ $x=y$, $x=0$; $y=0$, $y=1$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 x\sqrt{1-y^2}\Big|_0^y\,dy$$

$$\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy \times \frac{-2}{-2} = -\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dA = ?$$

$y=x$
$x=0$
$y=1$