ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه دوازدهم

استاد : دکتر قصوری

رشته : کارشناسی ارشد مهندسی مکاترونیک

دانشگاه : آزاد واحد کاشان

تهیه وتنظیم : ابراهیم شهنازی

سرفصل مطالب جلسه دوازدهم

فضای هیلبرت :

طبق تعریف دو عنصر (f, g) را متعامد می‌گوییم که حاصلضرب داخلی‌شان صفر باشد.

اگر عناصر $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ در فضای هیلبرت، عناصر مستقل خطی باشند هدف آن است که بتوان در همان فضا عناصر $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ را مشخص نمود به گونه‌ای که با یکدیگر متعامد باشند.

$$H : \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$$
$$\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$$

$$(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$v_0 = u_0$$

$$v_1 = u_1 - \frac{(u_1, v_0)}{(u_0, u_0)} u_0$$

$$(v_1, v_0) = (u_1, v_0) - \frac{(u_1, v_0)}{\cancel{(u_0, u_0)}} \cancel{(u_0, v_0)} = 0 \Rightarrow \underbrace{v_1 \perp v_0}_{\text{عمود}}$$

$$v_0 = u_0$$

بنابراین ثابت کردیم که دو عنصر متعامد هستند (ضرب داخلی‌شان صفر شد).

$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_0)}{(v_0, v_0)} v_0 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1$$

$$(v_2, v_0) = \cancel{(u_2, v_0)} - \frac{\cancel{(u_2, v_0)}}{\cancel{(v_0, v_0)}} \cancel{(v_0, v_0)} - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} \cancel{(v_1, v_0)} = 0$$

$$(v_2, v_1) = (u_2, v_1) - \frac{(u_2, v_0)}{(v_0, v_0)} \cancel{(v_0, v_1)} - \frac{(u_2, v_1)}{\cancel{(v_1, v_1)}} \cancel{(v_1, v_1)} = 0$$

$$V_k = U_k - \frac{(U_k, V_0)}{(V_0, V_0)} V_0 - \dots - \frac{(U_k, V_{k-1})}{(V_{k-1}, V_{k-1})} V_{k-1}$$

مثال ۱)

مثال ۱) در فضای هیلبرت با عناصر $H = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ با حاصلضرب زیر

$$(f, g) = \int_a^b f \cdot g \; w(x)\, dx$$

$a = -1 \qquad w(x) = 1 \Rightarrow (f, g) = \int_{-1}^{1}$

$b = 1$

مطلوبست محاسبه $\{V_0, V_1, \dots, V_n\}$ (عناصر متعامد)

$$V_0 = U_0 = 1$$

$$V_1 = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)} \times 1 = \text{(I)}$$

$$(x, 1) = \int_{-1}^{1} x \times 1 \, dx = x^2/2 \Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$(1, 1) = \int_{-1}^{1} 1 \times 1 \, dx = x \Big|_{-1}^{1} = 2$$

$$\text{(I)} \; V_1 = x - \frac{0}{2} = x$$

$$V_2 = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} \times 1 - \frac{(x^2, x)}{(x, x)} \times x = \text{(II)}$$

$$(x^2, 1) = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = 2/3$$

$$(x^2, x) = \int_{-1}^{1} x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$(x, x) = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2/3$$

$$\text{II} \quad v_2 = x^2 - \frac{2/3}{2} - \frac{0}{2/3} x = x^2 - 1/3$$

[illegible]:

$1 \perp x$

$1 \perp x^2 - 1/3$

$x \perp x^2 - \frac{1}{3}$

$$(1, x^2 - 1/3) = 0$$

$$= \int_{-1}^{1} 1 \times (x^2 - 1/3) \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

مثال ۲) مثال فوق را با $w_{(x)} = 1/\sqrt{1 - x2}$ **تکرار نمایید.**

$$v_0 = u_0 = 1$$

$$v_1 = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)} \times 1 = x - \frac{0}{\pi} = x$$

تابع فرد

$$(x, 1) = \int_{-1}^{1} \frac{x \times 1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \times -\sin\theta \, d\theta = -\sin\theta\Big|_{\pi}^{0} = 0$$

تابع زوج

$$x = \cos\theta \longrightarrow \theta = \text{Arc}\sin x$$

$$(1, 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = 2\int_{\pi/2}^{0} -d\theta = 2\pi/2 = \pi$$

$$v_2 = x^2 - \frac{(x^2,1)}{(1,1)}\times 1 - \frac{(x^2,x)}{(x,x)}x$$

$$(x^2,1) = \int_{-1}^{1} \frac{x^2\times 1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\times -\sin\theta\, d\theta$$

$\cos\theta = x$

$$= \cancel{2}-\int_{\pi/2}^{0} \frac{1+\cos 2\theta}{\cancel{2}}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

در کران بالا و پایین جابجا می‌شود

$$(x^2,x) = \int_{-1}^{1} \frac{x^2\times x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0 \qquad (x,x) = \pi/2$$

فرد

$$v_2 = x^2 - \frac{\pi/2}{\pi}\times 1 - \frac{0}{\pi/2}x = x^2 - \tfrac{1}{2}$$

مثال ۳)

مثال 3) تابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ در فاصله $[0,1]$ بوسیله کثیرالجمله (چندجمله‌ای) درجه سوم به بهترین وجه تقریب بزنید.

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$\int_0^1 (f(x) - P_n(x))\,P_k(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\right)x^k\,dx = 0$$

$$k=0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\,dx \Rightarrow \text{(I)}$$

$$k=1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1 (a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4)\,dx \Rightarrow \text{(II)}$$

$k=2 \Rightarrow$

$k=3 \Rightarrow$

دستگاه معادله چهار مجهول مقادیر a_0 و a_1، a_2، a_3 محاسبه می‌گردد.

(I) $k=0 \Rightarrow \ln 2 - \cancel{\ln 1} = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} \Big|_0^1$

(II) $\ln 2 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4}$

ادامه را خودتان حل کنید...

تمرین ۱)

تمرین ۱) بهترین تقریب درجه 2 را برای تابع $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ در فاصله $[-1,1]$

بوسیله چندجمله‌ای درجه 2 ، بهترین دسته تقریب بزنید.

مثال ۴)

تابع $f(x)=e^{-x}$ در فاصله $[-1,1]$ را به صورت چندجمله‌ای مرتبه دوم به کمترین مربع تقریب زده شود

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\int_{-1}^{1} \left(e^{-x} - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\right) x^k \, dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x} x^k \, dx = \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\, x^k \, dx$$

$$k=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{-x}\, dx = \int_{-1}^{1} a_0 + a_1 x + a_2 x$$

$$\Rightarrow -e^{-x}\Big|_{-1}^{1} = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}$$

$$\Rightarrow e^{1} - e^{-1} = 2a_0 + \frac{2a_2}{3} \qquad \sinh 1 = \left(a_0 + \frac{a_2}{3}\right)$$

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-x}\, dx}_{dV} = \int_{-1}^{1} a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3\, dx \Rightarrow$$

$$-x e^{-x}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x}\, dx = a_1 \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \Rightarrow -e^{-1} - \cancel{e^{1}} + \cancel{e^{1}} - e^{-1} = \frac{2a_1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{[illegible]} \Rightarrow a_1 = -3e^{-1}$$

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^{-x}\, dx}_{dv} = \int_{-1}^{1} a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4\, dx$$

$$-x^2 e^{-x}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2x e^{-x}\, dx = -e^{-1} + e^{1} + 2(-2e^{-1}) = -5e^{-1} + e^{1}$$

$$\Rightarrow -5e^{-1} + e^{1} = a_0 \tfrac{2}{3} + a_2 \tfrac{2}{5}$$

$$e^{1} - e^{-1} = 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3}\right)$$

$$-5e^{-1} + e^{1} = \tfrac{2}{3} a_0 + \tfrac{2}{5} a_2 \longrightarrow a_1 = -3e^{-1}$$