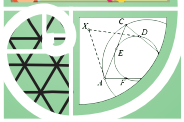
وبگاه المپیاد ریاضی ایران

پرگار

فصل‌نامه کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی ایران، شمارهٔ چهارم، بهار ۱۳۹۳



گپی با یک معلم ریاضی: بهمن اصلاح‌پذیر (۲)

آمار و اطلاعات: المپیاد جهانی در یک نگاه

اثبات هندسی قضیهٔ پونسله چهارنقطه‌ای

سوالات و راه‌حل‌های مرحلهٔ دوم امسال

مقالهٔ کوتاه: مجموعِ مجموعه‌ها

پاسخ مسائل شمارهٔ گذشته

چندوجهی مرتضی

بازی و معما

اعداد خوب

مسائل

بسم الله الرحمن الرحیم

پرگار | فصل‌نامهٔ کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی ایران

سال دوم، شماره چهارم، بهار ۱۳۹۳

صاحب امتیاز: کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی ایران

سردبیر: عرفان صلواتی

هیئت تحریریه: دکتر آرش رستگار، حمیدرضا زیارتی، مهدی اعتصامی‌فرد، عرفان صلواتی، مرتضی ثقفیان، مصطفی عین اله زاده، علی خزلی، حسام‌الدین رجب‌زاده، جواد عابدی، محمد قیاسی، امیرعلی معین‌فر، پویا هنریار، ماهان ملیحی، هادی خدابنده، محمد جواد شعبانی زهرایی، حسین حضرتی

همکاران این شماره: مبین یحیی‌زاده، ماهان تجربه‌کار، سید محمدحسین سیدصالحی، ریحانه ملکیان، فرنوش هاشمی،

صفحه بندی: امیرعلی معین‌فر

طرح روی جلد: محمد قیاسی

وبگاه: MathYSC.com/journal/

رایانامه: Pargar@MathYSC.ir

فهرست

مطالب این شماره . . . . . آ

مقدمه

سردبیر ۱

چندوجهی‌های مرتضی

ثقفیان ۲

گپی با یک معلم ریاضی: بهمن اصلاح‌پذیر (۲)

قیاسی ۸

اعداد خوب

ملکیان ۱۷

سوالات و راه‌حل‌های مرحلهٔ دوم امسال

. . . . . ۲۴

اینفوگرافیک: المپیاد جهانی در یک نگاه

عابدی ۳۹

مقاله کوتاه: مجموعِ مجموعه‌ها

حسین حضرتی ۴۳

اثبات هندسی قضیهٔ پونسله در حالت $n = ۴$

هاشمی ۴۶

مسائل

خدابنده، تجربه‌کار، حضرتی، سیدصالحی، شعبانی، یحیی‌زاده ۵۲

بازی و معما

حمیدرضا زیارتی ۵۵

پاسخ مسائل شمارهٔ گذشته

هنریار ۵۹

مسأله ویژهٔ این شماره، تپه‌های شنی

. . . . . ۶۸

این شمارهٔ پرگار تقدم می‌شود

به معلم بزرگ ابوریحان بیرونی

مقدمه

با سلام به خوانندگان محترم پرگار،
بالاخره شماره بهار ۹۳ پرگار با تأخیری طولانی در انتهای تابستان منتشر شد. معمولاً فصل تابستان، فصلی پُرکار برای المپیاد ریاضی و دست‌اندرکاران آن است. اعزام تیم به المپیاد جهانی، برگزاری دوره تابستانی و امسال علاوه بر آن‌ها، برگزاری دو رویداد جالب، دومین المپیاد همزمان و اولین المپیاد هندسه که انشالله در شماره تابستان گزارشی از آن‌ها ارائه خواهد شد، برنامه‌هایی بودند که کم و بیش همه همکاران پرگار را مشغول کرده بودند و دلیل اصلی تأخیر در انتشار شماره بهار نیز همین امر بوده است. به هر حال باید از همه دوستانی که با وجود مشغله زیاد، در آماده‌سازی این شماره همکاری نمودند تشکر کنم.
در این شماره دو مقاله ریاضی بسیار خواندنی داریم. مقاله‌ای هندسی در مورد رؤیت‌پذیری رئوس چندوجهی‌ها و مقاله‌ای با موضوع نظریه اعداد در مورد نمایش اعداد طبیعی به صورت مجموع مربع‌ها.
بخش ثابت فصل‌نامه‌های بهار، سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحله دوم است که این شماره نیز از این قاعده مستثنی نیست.
از این شماره بخش‌های جدیدی نیز به فصل‌نامه اضافه شده است. بخش مقالات کوتاه که هدف آن ارائه مفاهیم ریاضی به شکلی مختصر و مفید است و این شماره آن به مفهوم مجموعِ مجموعه‌ها اختصاص دارد.
همچنین از این شماره، بخش جذاب دیگری با نام اینفوگرافیک به فصل‌نامه اضافه شده است. سعی می‌شود اینفوگرافیک در قالب تصویری و مفهومی ارائه شود چرا که ارائه اعداد و ارقام و اطلاعات متنی، درک عمیقی در خواننده از موضوع مورد بررسی ایجاد نمی‌کند. در این شماره موضوع مورد بررسی، المپیاد جهانی ریاضی است.
بخشی دیگر نیز به نام مقالات دانش‌آموزی به فصل‌نامه اضافه شده است که مقالات برگزیده دانش‌آموزان را منتشر می‌کند. در این شماره مقاله‌ای با موضوع اثباتی هندسی برای حالت خاصی از قضیه پونسله از یکی از دانش‌آموزان به دست ما رسیده که منتشر می‌شود.
یکی از بخش‌های خواندنی این شماره نیز، مصاحبه با آقای اصلاح‌پذیر است. این مصاحبه، در ادامه مصاحبه‌ای که در شماره قبل از ایشان منتشر شد، انجام شده است، ولی از آنجا که موضوع این قسمت از مصاحبه متفاوت بود، آن را در شماره‌ای جداگانه منتشر کردیم.
امیدواریم مطالب این شماره، مورد استفاده خوانندگان پرگار قرار گیرد.

عرفان صلواتی،
سردبیر

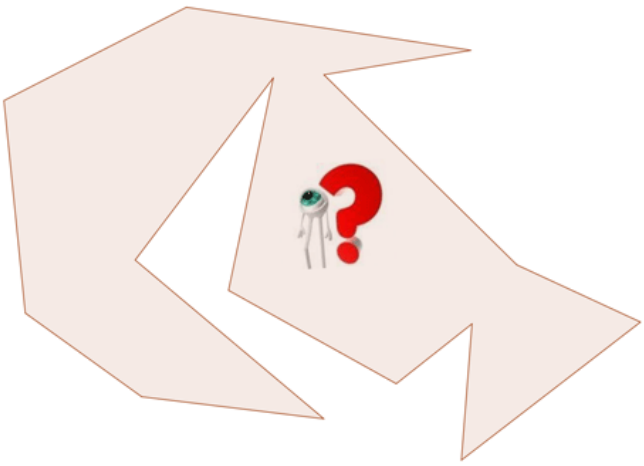
مرتضی ثقفیان
کارشناسی ارشد
علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف

چندوجهی‌های مرتضی

مقدمه

فرض کنید در اتاقی خالی ایستاده‌اید که به شکل یک چندضلعی دلخواه است، و به دور تا دور خود نگاه می‌کنید. چه می‌بینید؟ طبیعتاً تعدادی از دیوارهای اتاق را می‌بینید! اما آیا همواره همهٔ دیوارها را به طور کامل می‌بینید؟ اصلاً آیا در هر اتاقی که قرار گیرید، همواره دیواری وجود دارد که آن را به طور کامل ببینید؟

به این‌گونه مسائل، مسائل دیدنی(!)[1] می‌گویند. این‌گونه مسائل کاربرد زیادی در بینایی ماشین، گرافیک کامپیوتری و برنامه‌ریزی حرکت دارند. نسخه‌های مختلفی از مسائل دیدنی وجود دارد، از جمله وجود اجسامی در اتاق که مانع دید شود، یا مسئلهٔ مشهور نگهبانی از موزه و نگهبانی از نگهبانان و غیره. سؤال اصلی این است که تصویری که از یک نقطهٔ داخل یک اتاق دیده می‌شود چیست و چه خواصی دارد؟



شکل ۱.۲. مسائل دیدنی!

[1] مسائل دیدنی:)

مسائل

در این‌جا قصد دارم هشت مسئله مطرح کنم که آن‌ها را مسائل نقطهٔ نورانی مرتضی(!) نام‌گذاری می‌کنم، نکتهٔ جالب این است که اگرچه صورت آن‌ها شبیه به یکدیگر است ولی برای حل هر یک از آن‌ها باید مسیری را در پیش بگیریم که با دیگری متفاوت است.

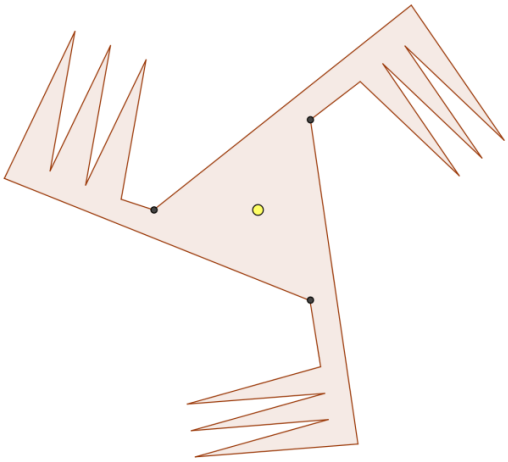
لازم است اشاره کنم که چند ماه قبل به همراه برخی از دوستانم از جمله دوست خوبم جعفر نام‌دار، روی این مسائل نقطهٔ نورانی فکر کردیم و به نتایج شگفت‌انگیزی رسیدیم! این نتایج را با شما در میان خواهم گذاشت. به خصوص شما را به تفکر و تعمّق دربارهٔ مسئلهٔ چهارم دعوت می‌کنم که به زودی به آن خواهم پرداخت.

نقطهٔ نورانی در چند ضلعی

مسائل اول تا سوم، دربارهٔ نقطهٔ نورانی در چندضلعی هستند که پاسخ آن‌ها قبلاً به دست آمده است:

مسئلهٔ اول: یک نقطهٔ نورانی درون یک چندضلعی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از رئوس چندضلعی روشن می‌شود؟

پاسخ. حداقل ۳ تا. هرچه مثال بزنید حتماً حداقل سه رأس در آن روشن می‌شوند. نکتهٔ مهم این‌جا است که می‌توان چندضلعی را مثلث‌بندی کرد (چرا؟) و این نقطه در یکی از مثلث‌ها می‌افتد، بنابراین رئوس آن مثلث را می‌بینند. می‌توان چندضلعی‌هایی ساخت که نقطه‌ای در آنها موجود باشد که از آن نقطه تنها ۳ تا از رئوس چندضلعی روشن شود. (شکل ۲.۸)



شکل ۲.۲. اگر در نقطهٔ زرد رنگ بایستید تنها ۳ تا از رئوس این چندضلعی را می‌بینید.

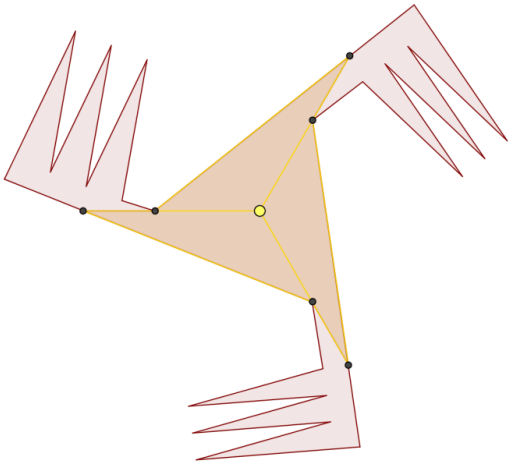
مسئلهٔ دوم: یک نقطهٔ نورانی درون چندضلعی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از اضلاع چندضلعی به طور کامل روشن می‌شود؟

پاسخ. صفر! چندضلعی‌هایی وجود دارند که نقطه‌ای در آنها موجود باشد که هیچ ضلعی را به طور کامل روشن نکند. (شکل ۳.۸)

مسئلهٔ سوم: یک نقطهٔ نورانی درون چندضلعی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از اضلاع چندضلعی (هرچند بخشی از آن

ضلع) روشن می‌شود؟

پاسخ. حداقل ۳ تا. اگر اضلاع چندضلعی را دیوارهای بلندی فرض کنیم این نقطه در دورتادور خود دیوار می‌بیند. پس کل ۳۶۰ درجهٔ حول این نقطه دیوار است. از طرفی هر دیوار (ضلع) می‌تواند کمتر از ۱۸۰ درجه از دید این نقطه را داشته باشد. پس حداقل ۳ تا دیوار مختلف روشن می‌شود. می‌توان چندضلعی‌هایی ساخت که نقطه‌ای در آنها موجود باشد که از آن نقطه بخشی از تنها ۳ تا از اضلاع چندضلعی روشن شود. (شکل ۳.۸)



شکل ۳.۲. اگر در نقطهٔ زرد رنگ بایستید بخشی از تنها سه تا از یال‌های این چندضلعی را می‌بینید و هیچ یالی را به طور کامل نمی‌بینید.

به طور کلی در صفحه با توجه به قابلیت مثلث‌بندی چندضلعی‌ها پاسخ مسائل فوق مشخص است. به عنوان تمرین می‌توانید پاسخ سه مسئلهٔ فوق را وقتی نقطهٔ مورد نظر خارج از چندضلعی باشد به دست آورید.

نقطهٔ نورانی در چند وجهی

اما در فضای سه‌بعدی اوضاع کمی تفاوت می‌کند. چندوجهی‌ها در فضای سه‌بعدی بسیار پیچیده‌تر و متنوع‌تر از چندضلعی‌ها در صفحه هستند و یافتن حکم کلی دربارهٔ آن‌ها نیازمند شهود و بررسی بیشتری است.

اگر بخواهیم مسائل فوق را در دنیای سه‌بعدی هم مطرح کنیم، باید به دنبال یافتن پاسخ‌هایی برای مسائل زیر باشیم:

مسئلهٔ چهارم: یک نقطهٔ نورانی درون یک چندوجهی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از رئوس چندوجهی روشن می‌شود؟

مسئلهٔ پنجم: یک نقطهٔ نورانی درون یک چندوجهی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از یال‌های چندوجهی به طور کامل روشن می‌شود؟

مسئلهٔ ششم: یک نقطهٔ نورانی درون یک چندوجهی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از یال‌های چندوجهی (هرچند بخشی از آن یال) روشن می‌شود؟

مسئلهٔ هفتم: یک نقطهٔ نورانی درون یک چندوجهی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از وجوه چندوجهی به طور کامل روشن می‌شود؟

مسئلهٔ هشتم: یک نقطهٔ نورانی درون یک چندوجهی ساده قرار دارد. حداقل چند تا از وجوه چندوجهی (هرچند بخشی

از آن وجه) روشن می‌شود؟

پیش از ارائهٔ مطالبی دربارهٔ مسئلهٔ چهارم، مختصری از نتایجی که دربارهٔ مسائل پنجم تا هشتم به دست آمد، ارائه می‌دهم و سپس به بررسی مسئلهٔ چهارم می‌پردازم که جالب‌ترین مسئله در این بین است، پس حدوداً یک صفحه وقت دارید که روی مسئلهٔ چهارم فکر کنید. ("یک صفحه وقت داشتن" عبارت مناسبی است. به نظر من صفحه می‌تواند واحد نسبی شمارش زمان باشد، چون سرعت خواندن آدم‌ها با هم تفاوت دارد!)

پاسخ مسئلهٔ پنجم صفر است! شاید با کمی تلاش و شهود فضایی بتوانید مثالی ارائه دهید که هیچ یالی کاملاً روشن نشود. اگر نتوانستید در انتهای این نوشتار مثال را خواهید دید.

پاسخ مسئلهٔ ششم عددی بین ۴ و ۶ است، یعنی ثابت شده که هر نقطهٔ نورانی بخشی از لااقل ۴ یال را روشن می‌کند و از طرفی مثال‌هایی وجود دارد که در آن‌ها بخشی از تنها ۶ یال روشن می‌شود. ولی صادقانه بگویم، مسئلهٔ ششم تنها مسئله‌ای در این بین است که هنوز راه‌حل کاملی برای آن ارائه نشده است.

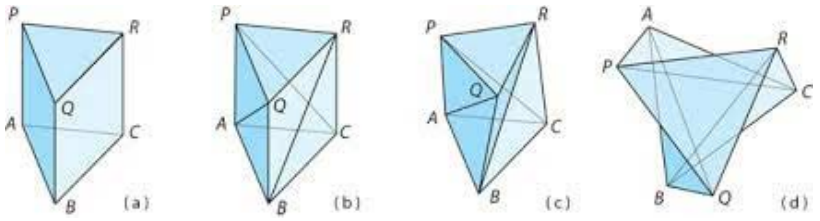
دربارهٔ مسئلهٔ هفتم باید بگویم که پاسخ صفر است! کافی است به چندضلعی شکل ۳.۸ ارتفاع دهیم و درواقع اتاق را کاملاً سه‌بعدی در نظر بگیریم و نقطه را متناظراً درون حجم حاصل با ارتفاع دل‌خواهی قرار دهیم. این نقطه علاوه بر دیوارها، کف و سقف اتاق را هم به طور کامل روشن نمی‌کند.

مسئلهٔ هشتم هم در نوع خود جالب توجه است. اگر در نقطهٔ نورانی بایستید به هر طرف که نگاه کنید وجوه چندوجهی را می‌بینید. از طرفی هر وجه کمتر از نیمی از تصویر کروی شما را می‌پوشاند. پس درواقع می‌خواهیم کره (تصویری که ناظر در نقطهٔ نورانی می‌بیند) را به تعدادی بخش (تصویر وجوه) افراز کنیم که هیچ بخشی شامل دو نقطهٔ روبروی قطری از کره نباشد. می‌توانید با کمی حالت‌گیری ثابت کنید که حداقل ۴ بخش برای این کار لازم است. پس همواره بخشی از حداقل چهار وجه دیده می‌شود. ارائه مثالی که در آن دقیقاً چهار وجه روشن شود هم کار دشواری نیست.

حالا همه چیز برای بررسی مسئلهٔ چهارم آماده است. در نگاه اول به نظر می‌رسد که پاسخ مسئله، ۴ باشد و مثال‌های مختلف هم به همین عدد یا اعداد بزرگتر منجر می‌شود. اما چگونه اثبات کنیم که پاسخ نمی‌تواند کمتر از چهار باشد؟ اصلاً آیا چندوجهی وجود دارد که از نقطه‌ای درون آن، تنها یک، دو یا سه رأس دیده شود؟ یا حتی هیچ رأسی؟!

مثلاً اگر بتوان مشابه مثلث‌بندی در صفحه، هر چندوجهی در فضای سه‌بعدی را به چهاروجهی‌ها افراز کرد، آن‌گاه نقطهٔ نورانی همواره در یک چهاروجهی قرار می‌گیرد و در نتیجه حداقل ۴ رأس را روشن می‌کند.

متأسفانه چنین افرازی همیشه میسر نیست! در سال ۱۹۲۸ شخصی به نام شونهارت[۲] یک چندوجهی (شکل ۴.۸) ارائه کرد که قابل افراز به چهاروجهی‌ها نیست، حتی همهٔ قطرهای آن خارج از چندوجهی قرار می‌گیرند. چندوجهی شونهارت درواقع یک منشور مثلثی است که وجه بالای آن را دوران داده‌ایم و وجوه کناری را برای اینکه خم نشوند، اصلاح کرده‌ایم.

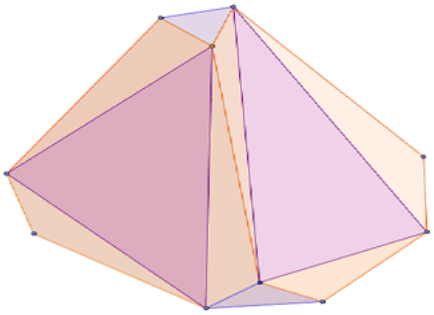


شکل ۴.۲. چندوجهی شونهارت حاصل از دوران وجه بالایی یک منشور مثلثی

[۲] شونهارت:)

اما همین چندوجهی شونهارت را در نظر بگیرید، اگر در نزدیکی وسط وجه پایین آن یک نقطهٔ نورانی قرار دهید تنها سه رأس پایین روشن می‌شوند! طبیعی است که ما[۳] با دیدن چنین مثالی برای تنها ۳ رأس روشن، به این فکر افتادیم که شاید با چرخاندن برخی از وجوه چندوجهی‌ها بتوانیم تعداد رئوس روشن را کمتر کنیم و یا حتی آن را به صفر برسانیم! اگر یک چندوجهی موجود باشد که از نقطهٔ علامت‌خورده‌ای داخل آن هیچ یک از رئوسش روشن نشود، به چنین چندوجهی عجیبی چندوجهی مرتضی می‌گوییم! پس مسئله بر سر بودن یا نبودن چندوجهی مرتضی است!

واقعیت این است که مدتی پس از ناکامی در یافتن چنین چندوجهی، بالاخره در ماجرای جالبی پاسخ مسئله پیدا شد. در واقع روزی من به شدت سرما خوردم و از شدت سرماخوردگی شب تا به صبح خواب بر چشمان ما[۴] نیامد. در اثنای مبارزه با بیماری ایده‌ای برای ساختن یک چندوجهی مرتضی به ذهنم رسید (چرا؟!) و آن این بود که یک چهاروجهی منتظم در نظر بگیریم و رئوس آن را تا همسایگی کوچکی برش دهیم، سپس وجوه ایجاد شده را بچرخانیم، چیزی شبیه به شکل ۵.۲. نیمه‌شب به وسیلهٔ نرم‌افزار شکل مورد نظر را رسم کردم و همه چیز به نظر درست می‌آمد اما مطمئن نبودم زیرا چک کردن خواص شکل سه‌بعدی در یک صفحهٔ دوبعدی (مانیتور) کار دشواری است. پس هیجان‌زده کاغذ و چسب و قیچی و وسایل دیگر را برداشتم و برش و چسباندن را آغاز کردم تا چندوجهی را بسازم. وضعیت مضحکی شده بود، نیمه‌شب وقتی همه خواب بودند یک بیمار در حال درست کردن کاردستی بود!

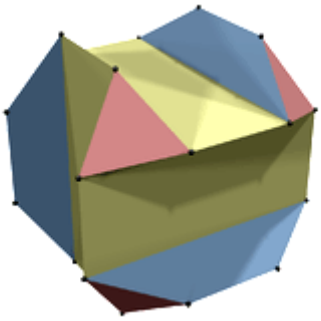


شکل ۵.۲. ماحصل تلاش‌های مذبوحانه در یک شب سرد برای یافتن چندوجهی مرتضی!

هرچه آن را می‌ساختم در جایی مشکل به وجود می‌آمد و تا صبح موفق به این کار نشدم، چند روز بعد وقتی سلامتی کامل را بازیافتم موضوع را با دوستان و همکاران مطرح کردم و پس از تلاش‌هایی به وسیلهٔ نرم‌افزار موفق شدیم نشان دهیم که برای چهاروجهی چنین کاری ممکن نیست، با این حال به نظر می‌رسید ایده برای چندوجهی دیگری کار کند. تا این‌که همان شب دوست خوبم علی خزلی موفق شد اولین چندوجهی مرتضی را به وسیلهٔ نرم‌افزار به‌دست آورد. من هم با کاغذ آن را ساختم تا اطمینان کامل کسب کنیم.

خب! این (شکل ۶.۲) یک چندوجهی مرتضی است که از بریدن رئوس یک مکعب و سپس چرخاندن وجوه جدیدِ آن به‌دست آمده است! این چندوجهی دارای ۲۴ رأس و ۲۶ وجه و ۴۸ یال است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید از مرکز این چندوجهی هیچ یک از رئوس آن، و در نتیجه هیچ یالی به طور کامل دیده نمی‌شود، پس پاسخ مسئلهٔ پنجم هم صفر است. شکلی که از مرکز این چندوجهی دیده می‌شود یک مکعب است که یال‌های آن لابلای هم فرو رفته‌اند.

[۳] من، جعفر نام‌دار و سایر دوستان
[۴] همان "من" به صورت ادبی



شکل ۶.۲. یک چندوجهی مرتضی! اگر در مرکز این چندوجهی قرار گیرید هیچ یک از رئوس را نمی‌بینید. شکلی که از مرکز این چندوجهی دیده می‌شود یک مکعب است که یال‌های آن لابلای هم فرو رفته‌اند.

چندوجهی‌های مرتضی دیگری هم وجود دارند. مسئلهٔ چندوجهی مرتضی با کمترین تعداد رئوس هنوز حل نشده است. پاسخ کامل مسئلهٔ ششم هنوز مشخص نیست ولی به نظر می‌رسد پاسخ برابر با ۶ است. به طور کلی مسئلهٔ یافتن حداقل تعداد نگهبانان لازم برای نگهبانی از یک موزهٔ سه‌بعدی به شکل یک چندوجهی، مسئلهٔ بسیار دشواری به نظر می‌رسد. مسئلهٔ دیگری نیز وجود دارد و آن همان مسئلهٔ چهارم برای حالتی است که نقطه نورانی خارج از چند وجهی باشد که شما را دعوت می‌کنم به این مسئله نیز فکر کنید و دست‌آورد هایتان را برای ما بفرستید. [۵]

[۵] در این کتاب مطالب جالبی برای علاقه‌مندان وجود دارد:
O'Rourke, Joseph (1987), Art Gallery Theorems and Algorithms, Oxford University Press, ISBN 0-19-503965-3.

محمد قیاسی
دانشجوی کارشناسی ارشد
علوم کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف

گپی با یک معلم ریاضی: بهمن اصلاح‌پذیر (۲)

همانطور که در شماره‌ی قبل اشاره کردیم مصاحبه‌ای که با آقای اصلاح پذیر انجام دادیم در دو بخش برگزار شد که بخش اول این مصاحبه در مورد استاد پرویز شهریاری بود و در شماره‌ی پیشین منتشر شد. در این شماره نیز بخش دوم مصاحبه را که در مورد خود آقای اصلاح پذیر است آورده ایم و شما را به مطالعه‌ی این مصاحبه‌ی خواندنی دعوت می‌کنیم.

ما دوست داریم بدانیم که شما خودتان از چه زمانی وارد کار تدریس و معلمی شدید.

من درست از سه چهار ماه بعد از انقلاب مشغول تدریس بودم. البته کارهای قبلی من کارهای متنوعی بوده‌اند. یکی از کارهایی که کردم هواشناسی علمی بوده است. در هواشناسی علمی جدید که من کار می‌کردم ریاضیات خیلی خوبی می‌خواست. بعد یک مقداری مجبور شدم کارهای فنی دیگری بکنم. مثلاً در زمینه‌ی پل ساختن کار می‌کردم. یکی از پل‌های بزرگ استان بوشهر را ساختم. بعدش هم درس می‌دادم. علاقه خاصی به ریاضیات و اینکه خودم ریاضیات را بخوانم داشتم و یادگرفتن برایم خیلی مهم بود، اینکه خودم بخوانم، خودم بفهمم و خودم یاد بگیرم. به همین جهت اگر چیزی را می‌گفتم، بلد بودم چون خودم خوانده بودم و خودم یاد گرفته بودم. اصل کاری هم که من در زندگیم دوست داشتم منطق هستش. من منطق را خیلی دوست داشتم همین الان هم دارم کتابهای منطق را ترجمه می‌کنم. کار اصلیم این بود که با ریاضیات پیوند داشت و دوست داشتم منطق را بخوانم، منطق را یاد بگیرم و درس بدهم و سر کلاس تا جایی که ممکن است طرح بکنم.

از اول انقلاب در آموزش پرورش بودم و سال ۶۷ آمدم تهران. آن وقت من در یکی از روستاها درس می‌دادم و وقتی آمدم تهران، در منطقه ۱۷ رفتم سر کلاس و درس دادم. کم کم مدرسه‌های نمونه دولتی به کار دعوتم کردند و مدرسه‌ی علامه‌حلی معلم هندسه نداشت و بچه‌ها خودشان یک روز آمدند به دنبالم و گفتند بیا درس بده.

بله، ما افتخار شاگردی شما را داشتیم. در چند کلمه اگر بخواهید ریاضیات را تعریف کنید چه می‌گویید؟

ببینید من الان تجربه‌ی خودم را می‌گویم و فکر می‌کنم از این حرف خیلی اعتراض برخواهد انگیخت ولی چیزی که وجود دارد ریاضیات به نظرم یک امر ذاتی و فطری است. بعضی‌ها این کار را دوست دارند و صحبت از این نیست که اکتساب بکنند. این را دوست دارند یعنی این نوع تفکر را، این نوع استدلال کردن را، این نوع منطق را اصلاً دوست دارند و در ذاتشان هست.

به همین جهت آدم‌های خاصی هم هستند، ویژگی‌های‌خاصی دارند و یکی از جالب‌ترین چیزهایی که من دیدم آن‌هایی که واقعاً این کار را دوست داشتند چه حالا در بین اساتید دانش‌گاه چه در این‌جا، سالم‌ترین افراد اجتماع بودند و می‌توان

گفت که نسبت به سایر اقشار اجتماعی، ریاضی‌دان‌ها سالم‌ترین اقشار اجتماعی اند. این خودش نکته‌ی خیلی خیلی مهمی است و مسئله‌ای است که وجود دارد. تقریباً مثلاً در مدارس همه‌ی معلم‌ها هم‌دیگر را اذیت می‌کنند ولی مثلاً معلم‌های ریاضی کمتر پیش می‌آید که هم‌دیگر را اذیت کنند و هم‌کاری بین معلم‌های ریاضی زیادتر است و یک سؤالی را که بلد نیستند از آن دیگری می‌پرسند، جواب می‌دهند و هیچ مسئله‌ای نیست. کسی هم که ریاضی می‌خواند چون تفکر منطقی خیلی خوبی پیدا می‌کند، چیزی که برای من ارزش دارد این است که انسان ارزش‌مندی برای اجتماعش می‌شود و از این فرد می‌شود همه نوع استفاده‌ای در اجتماع کرد.

چنان که الان خودتان هم دیده‌اید که همه‌ی بچه‌های المپیادیمان جاهای مختلفی که رفته‌اند خوش‌استعداد هستند، ریاضیات هم خوب می‌دانند و در کارهای دیگر هم آدم‌های خیلی مرتب و شسته رفته‌ای هستند. از این نظر تقویت کردن ریاضیات قابل توجه است. و چیز دیگری هم بگویم که این را هم از پرویز شهریاری من دارم این است که ریاضیات و تفکر ریاضی در مکتب فکری ما ایرانی‌ها وجود دارد. این خیلی اهمیت دارد که ما این را بدانیم. یعنی شما وقتی یک فرش ایرانی را در زیر پایتان نگاه می‌کنید انواع و اقسام نقش‌های هندسی و ترکیبات و تبدیلات هندسی را در آن می‌بینید. پس نشان می‌دهد که این تفکر ظریف ریاضی در فرهنگ ما وجود دارد. چنان که در حوزه‌های علمیه هم برای این که آدم‌ها بهتر مطالب را یاد بگیرند یکی از درس‌هایی که می‌گذاشتند مثلاً هندسه بوده است و خیلی از این آدم‌هایی که مشهور هستند هندسه‌های خوبی هم بلد بوده‌اند. این نشان می‌دهد که در فرهنگ ما، در فرهنگ ایرانی‌ها ریاضیات خیلی خوب است. ما خیلی کشور ثروت‌مندی نیستیم ولی خوب بالاخره در جهان در المپیادها مقام‌های یکم، دوم، پنجم، ششم، هشتم را می‌گیریم و نسبت به کشورهای دیگر که آن همه امکانات دارند ما می‌بینیم که بچه‌های ما موفق‌اند پس باید یک زمینه‌ای وجود داشته باشد و این زمینه در فرهنگ ما هست. کافی است که در فرهنگمان این را تقویت بکنیم. اگر این تقویت را بتوانیم انجام بدهیم خیلی دستاوردهای بزرگی داریم. واقعاً هم دستاوردهایمان در رشته‌ی ریاضی بیشتر از سایر رشته‌هاست تا جایی که من فکر می‌کنم و دیدم. من خودم که یک مدت زیادی تیزهوشان درس داده‌ام و بچه‌های المپیادی را دیدم واقعاً ۵ درصد، این بچه‌ها نیاز به آموزش دارند و ۹۵ درصد خودجوش می‌روند جلو و کارهایشان را انجام می‌دهند مطالعات خودشان را می‌کنند و این نشان می‌دهد که آن پایه‌ها خیلی قوی است.

امیدواریم که دولت‌مردان خوب متوجه باشند که این نهادِ بسیار قوی‌ای برای تربیت انسان‌هاست. این قدر هم ما راجع به تربیت و این حرف‌ها که صحبت می‌کنیم وقتی بچه را به ریاضیات علاقه‌مند بکنیم کلی از حواشی اجتماعی ناجور از نظر تربیتی کم می‌شود. به همین جهت نه فقط به خاطر علم، این را تقویت بکنیم که می‌توانیم و پایه‌هایش را هم داریم، امیدوارم این طور باشد و همین طور به خاطر ریاضیات از بزه‌کاری‌های اجتماعی کم می‌شود.

اگر از شما بخواهیم که چند نفر از تاثیرگذارترین افراد در آموزش ریاضی کشور را نام ببرید چه کسانی را می‌گویید؟

آموزش عالی ما یک جنبه‌ی سینه به سینه دارد، فرهنگ ما یک جنبه‌های سینه به سینه‌ی قوی دارد. مثل موسیقی است. ما در موسیقی که نُت نداشتیم. می‌نشستند و پهلوی من می‌زدند و من هم یاد می‌گرفتم و برای شما می‌زدم. این سینه به سینه هر چیزی را نقل کردن در فرهنگ ما بسیار قوی است. مثلاً در مورد دکتر هشترودی چیزی شما به صورت مکتوب به آن صورت نمی‌بینید ولی استاد ریاضی خوبی بوده و آن چیزی که به دانش‌جویش داده دانش‌جویش را پرورش داده، بحث سر میزان علمش نیست. می‌توانیم بگوییم دکتر هشترودی در این نوع آموزش اثر بسیار زیادی داشته بر اینکه افراد پرورش فکر خوبی پیدا کنند. ولی کسی که سازمان‌دهی ریاضیات بسیار قوی داشته و ارزش‌مند است دکتر مصاحب بوده، کارهایی که انجام داده بی‌مانند است و سازمان‌دهی آموزشی هم خودش یک مسئله‌ای هست. اینکه چه‌گونه دانش‌کده تاسیس کنیم، چه‌گونه دانشجو تربیت کنیم، چه‌گونه کتاب بنویسیم. در این‌ها تفکر منظم دکتر مصاحب بی‌مانند است و تاثیر بسیار زیادی گذاشته است. من در دانش‌گاه تهران بودم و دانش‌گاه تهران هم می‌توانم این طوری بگویم که ریاضیات جنگ جهانی دومی بود، استادها برای جنگ جهانی دوم بودند. البته این را به شوخی می‌گویم بچه‌ها می‌گفتند که جنگ جهانی دوم همه در اروپا داشتند جنگ می‌کردند و کسی درس نمی‌خواند و ایرانی‌ها که رفته بودند آنجا زود می‌توانستند دکترا بگیرند و برگردند و دانش‌گاه تهران کلی استادهای این طوری داشت.

ولی خوش‌بختانه دانش‌گاه صنعتی که درست شد من تجربه‌ی فردیم هست که دانش‌گاه صنعتی نه به خاطر فردیت استادهایش بل‌که در مجموع کل دانش‌گاه صنعتی برای پیش‌رفت ریاضیات در ایران بسیار نقش بزرگی داشته، دارد و انشاءالله هم به کمک شما جوان‌ها خواهد داشت. این دیگر فرد فردش زیاد اهمیت ندارد باید به کل داستان نگاه بکنیم و دیگر زمان یک فرد و این‌ها گذشته است. آن مکتبی که الان دانش‌گاه صنعتی شریف چه در قدیمش و چه در حالا و چه در بعد دارم می‌بینم خیلی آینده‌ی امیدوارکننده‌ای دارد به نظر من یک چیزی است که هم‌چنان که ما مثلاً می‌توانیم بگوییم که در مجارستان یک جور مکتب ریاضی مخصوص به خودش را دارد، بچه‌های دانش‌گاه صنعتی هم صاحب این مکتب خواهند بود یعنی یک مکتب ریاضیات ایرانی می‌شود آن‌جا برپا کرد که در آینده بگوییم این مال این مکتب است مثل مکتب وین در اتریش یا مکتب کاناپ و ویتگنشتاین در آلمان که تربیت شده اند. برای چنین مکتبی اگر حمایت بشود به نظر من دانش‌گاه صنعتی می‌تواند این کار را انجام بدهد و تاثیرش را در آینده ببیند. امیدوارم که این‌طور بشود.

آقای اصلاح پذیر از چه زمانی با المپیاد ریاضی همکاری داشتید؟

آن زمانی که من آمدم مدرسه‌ی علامه‌حلی که حدود سال ۶۷ و ۶۸ بود بچه‌های خیلی خوبی بودند و مثل حالا نبود که دوپینگشان بکنند. بچه‌ها می‌آمدند یک سؤالی می‌کردند که آقا این چه می‌شود و اگر بلد بودی بهشان جواب می‌دادی و خودشان راه می‌افتادند و به دنبال مطلب می‌رفتند. در علامه‌حلی مشغول بودم تا این‌که دعوت شدم و چند دوره‌ی تابستان در باش‌گاه درس داده بودم. یکی دو بار هم با تیم رفتیم و با بچه‌ها بودیم. و الان هم که در خدمتتون هستیم.

سرزنده باشید. یک سؤالی که من دارم این است که دانش‌آموزان ایران در سؤال‌های هندسه‌ی المپیاد خیلی قوی ظاهر می‌شوند. دلیلش چیست؟

داستانش همین است که ببینید ما اصلاً نقاشیمان نقاشی مینیاتور است یعنی دانه‌دانه‌های موی سر آدم را می‌شود روی آن شمرد و این دقت عمل بی‌اندازه را نشان می‌دهد. مثال قالی را که گفتم اگر نگاه بکنید می‌بینید که گره گره این‌ها را به هم چسبانده‌اند تا این قالی شده است. فرهنگ ما فرهنگ مینیاتوری ظریف خوش فکری است اصلاً به طور کلی ما بسیار ملت خوش‌فکری هستیم از این نظر، نمی‌خواهم بگویم که برتری نژادی داریم به کسی و می‌خواهم تفاوت فرهنگ را بگویم. شما همان قالی را که بروی می‌بینی که در مغولستان هم قالی را می‌بافند ولی فقط یک مثلث بزرگ در وسطش است و مثل این قالی‌های ما که در نمی‌آید. این فرهنگ ما، فرهنگ ظریفی که وجود داشته و خوش‌فکری و خوش‌سلیقگی، هم‌راه با زیبایی‌شناسی که هم‌راهش بوده، ریاضیات را خیلی تقویت کرده به ویژه هندسه که یک خورده تجریدش بیشتر است و برای بچه‌ها زمینه‌ی بیش‌تری را در آموزش ایجاد کرده است. یعنی شما دیده‌اید که برای بچه‌ها در ابتدا هندسه درس سختی هم هست درس آسانی نیست ولی بچه های که می‌روند به دنبال المپیاد یا اینکه کتاب می‌خوانند یا یک بخش از کتاب هندسه‌ی کورت را می‌خوانند بعد از سه چهار ماه دیگر خودشان صاحب نظر می‌شوند. شما الان تعداد قابل توجهی مدرس هندسه‌ی جوان دارید که همه شان بیست سالشان است بیست و یک سال، بیست و دو سالشان است و به راحتی هندسه درس می‌دهند و این نشان‌دهنده‌ی پایه‌های قوی این است. به نظر من در رشته‌های دیگر کم‌تر است و به این قدرت دانش‌آموز تربیت نمی‌کند. مثلاً ما ترکیبیات را به این قدرت در دبیرستان‌ها کار نمی‌کنیم ولی در هندسه هم معلمش را داریم هم زمینه‌هایش را و فرهنگمان آمادگی زیادی برای آموزش هندسه دارد.

اگر بخواهید به مسئولین آموزش و پرورش کشور توصیه‌ای بکنید، پیش‌نهادی بکنید چه می‌گویید؟

همین که عرض کردم به نظر من این نصیحت‌ها، که این کار را نکنید این کارها بد است این کارها فلان است دیگر هیچ کدامشان اثر ندارد ولی تعلیم و تربیت در شاخه‌ی ریاضیات انسان را با فکر منظم بار می‌آورد انسان را سالم بار می‌آورد و چون یک برون‌گرایی خاصی هم بوده، البته من نمی‌خواهم بیرون‌گرایی را تشویق بکنم، آن طوری که در رشته‌های دیگر دانش‌جو پرورش پیدا می‌کند که برود پول در بیاورد که اصلاً وقتی به یک دانش‌کده‌ای وارد می‌شود حساب می‌کند که ۶ سال بعد فارغ‌التحصیل می‌شود و فلان مقدار تومن پول در می‌آورد. در صورتی که دانشجوهای ما وارد رشته‌ی ریاضی که می‌شوند اصلاً تصور این را ندارند که بخواهند فارغ التحصیل بشوند و بروند پول دربیاورند. در جامعه‌ی امروزی این سلامت فکر را بیش‌تر از این نمی‌شود تامین کرد و به همین جهت من در همه‌ی سمینارها گفتم که عوض همه‌ی این کارهایی که می‌گویید این ریاضیات را در مجالستان تشویق کنید، در دانش‌کده‌ها تقویت کنید ولی متاسفانه این را به صراحت بگویم که بالعکس عمل کرده‌اند به ویژه در آموزش عالی که خیلی جای تاسف دارد مثلاً دیدم که پارسال برای لیسانس ریاضی از تعداد واحدهای آموزش ریاضی کم کرده‌اند و به جایش تاریخ و جغرافیا و از این جور درس‌ها گذاشته‌اند یا فوق لیسانس خیلی ضعیف‌تر شده است که این کار باید یک جایی جلویش گرفته شود. حیف است این‌جا این بچه‌ها با این استعداد و این رشته‌ی خوب که وقتی ما در دنیا می‌گوییم ریاضیات، ریاضیات یک چیز پایه‌ای هست

همه چیز در آن هست مثلاً کامپیوتر هست، هوش مصنوعی هست و غیره. حیف است که این رشته را ضعیف کنیم ولی الان متاسفانه آن هم به خاطر این که در خیلی از دانش‌گاه‌هایمان آن استادهایی که برای ریاضیات مورد نظرمان هستند، حضور ندارند و به تربیت استاد خیلی کم توجهی شده است. حالا شاید باز هم در دانش‌گاه صنعتی یک تعداد زیادی جوان و استادهای جدید تربیت بشوند که انشاءالله بروند و در آنجاها یک مقداری نیروی محرکه‌ای بشوند و حرکتی پیش بیاید و بهتر بشود. هر چیزی که احتیاج به پرورش دارد این که ما آن را رها بکنیم به حال خودش اصلاً جریان درستی نیست.

من امیدوارم که دولت‌مردان به این مسئله کاملا متوجه باشند که آموزش ریاضی بخش خیلی مهمی است و اصلا هم نروند به سمت آموزش و پرورشی که در آنگلوساکسون رایج است. چیزی که نظر من هست این است که طرز فکر ما و کار ما هیچ شباهتی به ریاضیاتی که آنگلوساکسون‌ها می‌خوانند ندارد. یعنی دانش‌آموزی که من تربیت می‌کنم در دبیرستان هیچ شباهتی به دانش‌آموزی که در کانادا تربیت می‌شود ندارد. میزان اطلاعاتی که می‌تواند داشته باشد اصلاً مشابه آن نیست. قدرت تحقیق، قدرت فکر اصلاً مشابه آن نیست و باید روی این مکتب ملی خودمان که مال خودمان است و اینکه چه‌گونه خواندیم چه‌گونه حساب یاد گرفتیم و ... تکیه کنیم. این‌که من به عنوان یک عضو آموزش دفتر تالیف وقتی می‌دیدم که کتاب درسی می‌خواهیم بنویسیم باید برویم کتاب انسیتیم امریکایی را باز کنیم و از روی آن کتاب بنویسیم واقعا متأسف می‌شدم. همه هم می‌دانند که در همه ی آن شوراها هزاران بار گفتم که دست از این انسیتیم امریکایی بردارید، دو نفر آدم دعوت بکنید که بیایند بگویند که آقا ما مشتق را که درس داده‌ایم چه‌گونه گفتیم که خوب در آمده است. لزومی نداریم که برویم انسیتیم امریکایی را نگاه کنیم تا ببینیم که چگونه است و متأسفانه این الان در بخشی از نظام آموزشی کشور حاکم است که باید با آن مبارزه کرد و آن را کنار گذاشت به ویژه این‌که ما مکتب فکری‌مان هیچ شباهتی به آنگلوساکسون‌ها ندارد. من نمی‌گویم که مثلاً آمار در دنیای امروز مهم نیست آمار هم مهم است ولی از آمار در آن کشور به یک نحو دیگری استفاده می‌شود. شخصی صبح که بلند می‌شود می‌خواهد برود اینترنت و ببیند بورس کجا نوسان کرده است و قیمت سهام کجا بالا و کجا پایین آمده است. اون احتیاج به یک آمار دارد و دانش‌آموز من احتیاج به یک آمار دیگری دارد. این‌ها فرق می‌کند و به این مسئله باید واقعاً توجه بکنیم که ما چیز دیگری هستیم با تفکر دیگری با زمینه‌های فرهنگی دیگری و این خیلی متفاوت است. اگر برگردیم و بیاییم روی همین مسائلی که هست و امکانات خودمان را و آنچه که در داخل کشور خودمان هست را تمرکز بدهند، در مورد ریاضیات واقعاً کشور غنی‌ای هستیم و خوبی ریاضیات هم این است که هر جای دنیا که باشد به صورت مسئله و جزوه و قضیه و گزاره و این‌ها همه از آن با خبر می‌شوند که فلان‌جا چنین مسئله‌ای حل شده است و خیلی هم دست و بالمان بسته نیست که چیز جدیدی را بیاوریم و آموزش بدهیم و به نظر من این توان

را داریم و خیلی خوب است که این رشته ها تقویت بشوند نه این‌که بیایند کم بکنند و مثلاً بگویند که رشته‌ی شیمی سه واحد ریاضیات بخواند بلکه در این میان رشته‌ای‌ها و جاهای دیگر، رشته‌ی ریاضی را در آموزش عالی خیلی تقویت بکنند و امیدوارم که این طور بشود.

خیلی ممنون. آقای اصلاح پذیر به نظر شما مهم‌ترین ویژگی یک معلم خوب چیست؟

ببینید من تمام تجربه‌ام در زندگیم این بوده است که اگر معلم درسی را که می‌دهد بلد باشد وقتی سر کلاس می‌رود مشکل ندارد و فقط ۱۰ درصد، مشکلات دیگر پیدا می‌کند. معلمی دچار مشکل است که آن درسی را که سر کلاس می‌دهد به درستی بلد نیست. به همین جهت با بچه‌ها گل‌آویز می‌شود و فشار می‌آورد. به نظر من بزرگ‌ترین ویژگی معلم که گاهی اوقات در این کلاس‌های بازآموزی می‌گویم این است که شما وقتی معلم خوبی هستید که بتوانید مسئله‌ی خوبی برای بچه انتخاب کنید و حل کنید. این‌که کتاب نوشته است یا این‌که این نکته را داریم که مسئله‌ای نیست. شما چه چیزی را به بچه ارائه می‌کنید که وقتی آن را حل کرد کارش درست بشود. مثلاً من در علامه‌حلی به بچه ها که حالا خوب بودند، نمی‌خواهم بگویم که این روش برای همه‌ی دانش‌آموزان کار می‌کند، بعضاً بچه ها از کتاب هندسه‌ی کورت فصل یک، دو، سه را هم حل می‌کنند یا از کتاب یاگلوم جلد یک، دو، سه را می‌خواندند هم توانش را داشتند هم می‌توانستند. این‌که با بچه‌ها کلیشه‌ای رفتار می‌کردند چیز بدی از کار در آمده است. بزرگ‌ترین هنر این است که این بچه، این دانش‌آموز به چه مسئله‌ای احتیاج دارد. در مورد استادش هم همین‌طور است. شما مثلاً فلان استاد دانش‌گاه را دیده‌اید که وقتی درس می‌دهد ممکن است که یک مثالی را از دوران ریاضیات یونان باستان مطرح کند ولی از آن یک نتیجه‌ی بسیار زیبایی را می‌گیرد که شما لذت ببرید. یکی هم آخرین مسئله‌ی روز را مطرح می‌کند و شما هیچ نتیجه‌ای از آن نمی‌گیرید و خسته و کسل هم می‌شوید و بیرون می‌آیید. نحوه‌ی انتخاب سؤالی که برای بچه‌ها حل می‌شود تعیین‌کننده‌ی هویت معلم است که آن معلم چه قدر این درس را می‌داند و هم‌چنین باعث پیش‌رفت بچه‌ها می‌شود. یعنی راه را برای بچه نشان می‌دهد که این‌جا درس بخوان. بزرگ‌ترین حسنش به نظر من این است که این خاصیت را داشته باشد.

البته در اطراف ما مسائل اجتماعی بدی وجود دارد. مسئله‌ی کلاس خصوصی و این حرف‌ها وجود دارد و خوب کاری‌اش هم نمی‌توانیم بکنیم. به هر حال تا وقتی کنکور هست این کلاس‌ها خواهد بود و بچه‌ها می‌روند. آن‌ها دیگر این چیزهای حاشیه‌ای اجتماعی است. یکی از مواردی که خیلی پرویز شهریاری با آن مخالف بود همین مسئله‌ی کنکور بود چون این چیزها را می‌دید.

شما اگر مثلاً الان نگاه کنید به این بیلبوردهایی که در خیابان هست. می‌بینید مثلاً نوشته فلان کلاس کنکور در مدرسه‌ی فلان و اسامی را که نگاه بکنید نوشته که دیفرانسیل مهندس فلانی یا گسسته‌ی دکتر فلانی، یا این‌که آن درس دیگر داروساز فلانی اصلا معلوم نیست چه کسی دارد چه کار می‌کند و چه درس می‌دهد. خدا کند که یک روزی کنکور برداشته شود و ما هم خلاص بشویم از شر این داستان‌های حاشیه‌ای که اطرافمان هست و آن کسانی که شایسته‌اند درسی که دوست دارند را بدهند.

ممنون. آقای اصلاح پذیر شما چندین جلد کتاب تالیف هم کرده‌اید در مورد آنها توضیح هم می‌دهید؟ یک کتاب اصول اقلیدس هست، کتاب هندسه‌ی ۲ هست، حالا خودتان به‌تر می‌دانید.

من برای آموزش و پروش، دو تا کتاب نوشتم یکی کتاب حسابان، یکی هندسه‌ی دو که کتاب‌های رسمی آموزش پرورش هستند و یکی هم کتاب هفتم. این سه تا کتاب برای آموزش و پرورش هستند که در آنها شرکت داشته‌ام و نوشته‌ام.
اولین بار کتاب هندسه‌ی کورت را ترجمه کردم که یک کتابی است که بچه‌ها در علامه‌حلی می‌خواستند. البته بعد انتشارات فاطمی به صورت تمیزتر و مرتب‌تری در آورد. یک سری تبدیلات بود که نصفه‌کاره رها کردم، سر کلاس هم اگر دیده باشید وقتی برای بچه‌ها حل می‌کردم به تبدیلات یک جنبه‌ی جبری داده بودم که بچه‌ها معادله‌وار ببینند و در تبدیلات ۱ و ۲ سعی کردم این کار را بکنم که خیلی هم به پایان نرساندم. دیگر کتاب المپیادهای ریاضی در جهان را ترجمه کردم که برای زی فنگ و آندرسکو هست و دیگر کتاب اصول اقلیدس را ترجمه کردم.

یک کتاب هندسه‌ی ۲ هم غیر از کتاب درسی بود.

بله، آموزش هندسه‌ی ۱ و ۲ی خودم هم هستند. کتاب‌ها را این‌طوری جمع بزنید سیزده چهارده جلد می‌شود.

بله. به‌ترین کتاب‌هایی که خوانده‌اید کدام کتاب‌ها بوده‌اند؟

من وقتی هندسه می‌خواستم درس بدهم بهترین کتابی که داشتیم کتاب یاگلوم و کتاب کورت بود.

منظورتان تبدیلات هندسی یاگلوم است؟

بله. کتاب کورت واقعاً عالی بود که این کتاب‌ها واقعا ارزش‌مند بودند. البته یک کتاب هندسه‌ی قدیمی برای سال ۱۳۱۵ مرحوم حسین هورفر با پروفسور رضا که بعداً رئیس دانش‌گاه شما شد نوشته‌اند. از آن کتاب خیلی خوشم می‌آید که هندسه است به همراه استاتیک در فیزیک که بخش استاتیکش را هم درس داده است و خیلی خیلی خوب این دو موضوع رو با هم مطرح کرده که تاثیر زیادی روی من از نظر آموزش داشت.
دیگر خواندن همین مقالات ریاضی مثل مجلات یکان و مجلات آشتی با ریاضیات و مجله‌ی ریاضی دانش‌کده‌ی خودتان، نشر ریاضی و این‌ها تاثیرات خوبی روی من داشته‌اند. باز چیزی که روی من بسیار تاثیر داشت این بود که هر بار یک امتحان المپیادها برگزار می‌شد سؤال‌ها را که نگاه می‌کردم یک روح تازه‌ای می‌گرفتم. سؤالات خیلی خوبی طرح می‌شود و آدم قوه‌ی ابتکارش رشد می‌کند. دوباره انگار چیزهای جدید می‌بیند و به نظر من برای یک معلم خیلی خوب است. دیگر این‌که بقیه‌ی چیزهای کلاسیک را خواندم مثل کتاب توماس و غیره و کتاب مصاحب هم بخش منطقش خیلی قوی بود و خیلی دوست داشتم و اثر بخش بود و مجموعه ها و منطق را من از آن یاد گرفتم.

معلمان شما چه کسانی بودند؟ و به‌ترین معلم‌هایی که داشتید؟

به‌ترین معلمی که دوست داشتم و بسیار بسیار معلم و شخص شریفی بود شخصی بود به نام آقای صدیق‌آرا. بسیار بسیار

برای برای بچه‌های کلاس زحمت می‌کشید. مثل پرویز شهریاری یا غیره و این‌ها که در مدرسه‌ی خوارزمی بودند معلم تاپ تاپ نبود ولی دل‌سوزیش برای بچه‌ها و زحمتی که می‌کشید خیلی زیاد بود.

معلم دبیرستان شما بودند؟

بله.

در چه دبیرستانی بودید؟

دبیرستان دکتر هوشیار می‌رفتم که روبه‌روی دانش‌گاه [دانش‌گاه صنعتی شریف] خودتان بود. آن زمان آنجا بیابان و باغ و این‌ها بود و این مدرسه را آن‌جا درست کردند. ما مدرسه‌مان در ابتدا میدان انقلاب حالا بود و بعد نمی‌دانم چه شد و چه مسائلی پیش آمده بود که رفتند یه مدرسه وسط آن بیابان‌ها درست کردند و ما را از این‌جا به آن‌جا منتقل کردند. آن زمان از پپسی‌کولا به آن طرف‌تر دیگر جزء ناحیه‌ی ژاندارمری بود، کسی آن‌جا نبود و باغ و زراعت و کشاورزی بود ما هم مدرسه‌مان را برده بودند در آن وسط و هیچ معلمی حاضر نشد که بیاید آن‌جا درس بدهد. وسط سال بود ما هم هیچ کاری نمی‌توانستیم بکنیم.

این شخص گفت من می‌آیم آنجا و درس می‌دهم. هم می آمد جبر می‌گفت هم مثلثات می‌گفت و هم هندسه، چون کسی نبود به ما درس بدهد. ولی با کمال میل می‌آمد و به ما درس می‌داد. و همه‌ی اون راه را می‌بایست پیاده می‌رفت یعنی تا شرکت واحد تا سر پپسی‌کولا پیاده می‌آمد تا آنجا و درس می‌داد. تا جایی که من دیدم خیلی مرد شریفی بود، خیلی خیلی مرد شریفی بود.

به عنوان سؤال پایانی، توصیه شما به دانش‌آموزی که بخواهد فراتر از سطح دبیرستان ریاضی یاد بگیرد، چیست؟

ببینید همیشه تصور این را داشته باشید که در همه‌ی زندگی همین‌طور است که یک قله‌ی کوه از یک طرف فقط راه ندارد. هر کسی از یک راهی می‌تواند به طرف آن قله‌ی کوه برود. پس این‌که من بگویم که فقط از این راه می‌شود ریاضیات را خوب یاد گرفت من به این اعتقادی ندارم. این‌که با این کتاب فقط می‌شود یاد گرفت اعتقادی ندارم و یک روزی که برای بچه‌ها داشتم صحبت می‌کردم گفتم بچه‌ها بالعکس این تفکری که وجود دارد که این را مرتب بخوانیم آن را مرتب بخوانیم من توصیه می‌کنم در هم بخوانید و آنقدر بخوانید تا چیزی را که دوست دارید در آن پیدا بکنید و حرکت کنید. اگر وادار بکنیم دانش آموزمان را که همه چی بخواند و بعد انتخاب کند شاید دانش‌آموزمان خیلی موفق بشود ولی اگر از

پیش بخواهیم راه را برایش بکشیم می‌شود همان داستان دوپینگ کردن برای بچه‌ها که تا یک جاهای خوبی هم آنها را جلو می آوریم ولی از یک جایی دیگر نمی‌آیند و حالا اگر در هم خوانده باشد آن وقت آن چیزی را که دوست دارد در آن پیدا کرده است. من الان یکی دو تا از بچه‌های المپیاد ریاضی که طلا گرفته‌اند را می‌بینم که روزی یک دفعه غر می‌زنند که ما نمی‌خواهیم ادامه‌ی تحصیل بدهیم. درصورتی که این‌ها درست همان کسانی بودند که در هم نخواندند و راه را برایشان کشیدند و آن‌ها در آن راه، راه رفتند. من با این مخالفم. بگذارید بچه‌ها همه چی بخوانند، همه چیز ببینند، دوست داشته باشند و بروند به دنبالش و یاد بگیرند.

حالا در مورد خود من مدرسه که می‌رفتیم و آدم‌های تیپ ماها و آن زمان، مثلاً می‌گفتند که یک نفر هست در مدرسه‌ی البرز چهار تا مسئله‌ی حساب استدلالی حل کرده که خیلی خوبه. از بچه‌ها آن کسانی که دوست داشتند می‌رفتند می‌دیدند که داستان چیست و چه اتفاقی افتاده است و باز این در فرهنگ ما وجود دارد اگر آزادش بگذاریم. این نوع جست‌وجو برای علم در فرهنگ ما هست.

تاریخ طبری را کسی که نوشته می‌گوید که من وقتی می‌خواستم یک واقعه‌ی تاریخی را بپرسم و مثلاً می‌گفتند که در فلان شهر یک آدمی هست که می‌داند، من گاهی اوقات شده که می‌آمدم شهرری که جنوب تهران می‌شود شاید پنج فرسخ پیاده می‌رفتم که یک نفر را پیدا کنم که به من جواب بدهد که آقا فلان داستان چه طوری اتفاق افتاد و می‌نوشتم. پس این نوع جست‌وجوی علم در فرهنگ ما وجود دارد. اگر خرابش نکنیم و اگر به آن امکان بدهیم. دیگر موارد هم هین‌طورند، مثلاً بروید سراغ خیام می‌بینید که همین‌طوری کسب علم کرده است. بروید سراغ بیرونی می‌بینید که همین‌طوری کسب علم کرده است و این در ما وجود دارد پس فقط کافیست که ما بچه ها را این را تقویت کنیم که دوست داشته باشند که بروند و یک چیزی را یاد بگیرند حالا ممکن است آن درس ریاضی باشد و ریاضی‌دان خوبی خواهد شد. اگر فیزیک باشد فیزیک‌دان خوبی خواهد شد. تقویت این مسئله به عهده‌ی ماست. زمینه‌اش را فراهم کردن به عهده‌ی ماست که این کار را انجام بدهیم. شما خودتان هم دیده اید که گاهی اوقات بچه‌های المپیادی‌ای از شهرستان‌های دور افتاده‌ای می‌آیند که شاید جمعاً دو تا کتاب خوانده یک کتاب خوانده یا شاید بعضی کتاب ها را اصلا ندیده ولی آن استعداد ذاتیش بچه را این‌جا آورده و چه قدر هم خوش‌فکر است و چه قدر هم خوب کار می‌کند. دیگر از این به‌تر بشریت چیزی سراغ ندارد یعنی از این زیباتر چیزی وجود ندارد که انسان نگاه بکند یک نفر چه قدر ذات اصیلی دارد که از پس این مسائل به این مشکلی بر می‌آید و این جای ستایش است.

ولی آن جانی که نیوشاست و خواستار هست شما را پیدا می‌کند، همیشه خوش بین باشید، دنبال شما می آید و از چیزهایی که شما بلدید حتماً استفاده خواهد شد مبادا نا امید بشوید. بالاخره یک کسی پیدا می‌شود که از آدم استفاده می‌کند و جلو می‌رود. این امیدواری که ما داشته باشیم که این کاری را که انجام می‌دهیم و این دانش‌آموز هرز نمی‌رود خیلی مهم است.

تشکر می‌کنیم از آقای اصلاح‌پذیر که درخواست ما را پذیرفتند. بهشان زحمت دادیم خیلی صحبت‌های خوبی بود خود من به شخصه خیلی استفاده کردم. ممنون
خواهش می‌کنم.

ریحانه ملکیان
دانشجوی کارشناسی
ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

اعداد خوب

مقدمه

درست است که همهٔ عددها دوست‌داشتنی‌اند، ولی داشتن یک ویژگی خاص بعضی از آن‌ها را "خوب" می‌کند. بگذارید واضح‌تر حرف بزنم: عدد "خوب" را عددی تعریف می‌کنیم که بتوان آن را به صورت جمع دو مربع کامل نوشت.
در این مقاله ابتدا چند لم و قضیه را بیان و اثبات می‌کنیم تا با اعداد خوب کاملاً آشنا شویم. در ادامه $R(n)$ را تابعی تعریف می‌کنیم که میزان خوبی عدد n را اندازه می‌گیرد. به بررسی این تابع می‌پردازیم و با معرفی تابعی جدید و رویکرد هندسی به آن، با عددی به عنوان میانگین $R(n)$ها مواجه می شویم که هر چند عدد معروفی است، اما فکر نمی‌کنم انتظار دیدنش را در این نوشته داشته باشید!
در انتها به اعداد "یه کمی(!)خوب" می‌پردازیم. یعنی اعدادی که به صورت جمع سه مربع کامل قابل نمایش‌اند.

چه اعدادی خوب هستند؟

سعی می‌کنیم اعداد طبیعی را به صورت جمع دو مربع کامل نمایش دهیم:

$$\begin{array}{ccc} ۱ = ۱^۲ + ۰^۲ & ۲ = ۱^۲ + ۱^۲ & ۳? \\ ۴ = ۲^۲ + ۰^۲ & ۵ = ۲^۲ + ۱^۲ & ۶? \\ ۷? & ۸ = ۲^۲ + ۲^۲ & ۹ = ۳^۲ + ۰^۲ \\ ۱۰ = ۳^۲ + ۱^۲ & ۱۱? & \dots \end{array}$$

می‌بینیم که اعداد ۳، ۶، ۷ و ... خوب نیستند. فکر می‌کنید ایراد کار کجاست؟
به راحتی می‌توان فهمید که اعداد به فرم $۴k + ۳$ خوب نیستند. برای اثبات کافیست حالات مختلف همنهشتی $m^۲ + n^۲$ به پیمانهٔ ۴ را در نظر بگیرید، خواهید دید که $m^۲ + n^۲ \not\equiv ۳ \ (۴)$ (پیمانهٔ ۴).
اما وجود عدد ناخوبی(!) مثل ۶ که به فرم $۴k + ۳$ نیست، نشان می‌دهد که باید به بررسی ادامه دهیم.

لم ۱. حاصل ضرب دو عدد خوب، خوب است.

اثبات. فرض کنید $m = a^۲ + b^۲$ و $n = c^۲ + d^۲$ و a, b, c, d اعدادی صحیح هستند:

$$\begin{aligned} mn = (a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) &= (a^۲c^۲ + b^۲d^۲) + (a^۲d^۲ + b^۲c^۲) \\ &= (a^۲c^۲ + b^۲d^۲ + ۲abcd) + (a^۲d^۲ + b^۲c^۲ - ۲abcd) \\ &= (ac + bd)^۲ + (ad - bc)^۲. \end{aligned}$$

□

پس فقط کافیست به دنبال اعداد خوب اول بگردیم. دیدیم که ۲ خوب است و اگر $n \overset{۴}{\equiv} ۳$، n خوب نیست. هم‌چنین می‌توان ثابت کرد که هر عدد اول به فرم $۴k + ۱$ خوب است.(برای دیدن اثبات این مطلب می‌توانید به مرجع [۱] مراجعه کنید.)
تا کنون می‌دانیم اگر عددی عامل اول به فرم $۴k + ۳$ نداشته باشد خوب است، اما قضیه‌ای وجود دارد که بیان می‌کند برای خوب بودن یک عدد شرط ضعیف‌تری هم کافیست.

قضیه ۲. عدد طبیعی n خوب است اگر و فقط اگر در تجزیهٔ n به عوامل اول، توان اعداد اول به فرم $۴k + ۳$ زوج باشد.

برای اثبات این قضیه ابتدا به یک لم توجه می‌کنیم:

لم ۳. اگر p عدد اول به فرم $۴k + ۳$ باشد و $p|a^۲ + b^۲$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ آنگاه $p|a$ و $p|b$.

اثبات. اگر p یکی از اعداد a یا b را عاد کند، به وضوح حکم برقرار است.پس فرض می‌کنیم p هیچ‌یک از a و b را عاد نمی‌کند.

$$p|a^۲ + b^۲ \Rightarrow a^۲ \overset{p}{\equiv} -b^۲ \Rightarrow (a^۲)^{\frac{p-۱}{۲}} \overset{p}{\equiv} (-۱)^{\frac{p-۱}{۲}} (b^۲)^{\frac{p-۱}{۲}} \Rightarrow a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} -b^{p-۱}.$$

(توجه کنید $\frac{p-۱}{۲}$ فرد است.)

حال چون $(a,p)=(b,p)=1$، از قضیهٔ فرما خواهیم داشت:

$$a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1 \overset{p}{\equiv} b^{p-1}.$$

پس:

$$1 \overset{p}{\equiv} a^{p-1} \overset{p}{\equiv} -b^{p-1} \overset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow 2 \overset{p}{\equiv} 0.$$

و با این تناقض اثبات به پایان می‌رسد. □

اثبات. $(\Longrightarrow)$

عدد n را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$n = 2^m p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \cdots q_t^{2\beta_t}.$$

p_iها اعداد اول به فرم $4k+1$ و q_iها اعداد اول به فرم $4k+3$ هستند و $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$.
عبارت $2^m p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ طبق لم ۱ عددی خوب است، پس برابر است با a^2+b^2 که $a,b \in \mathbb{Z}$. عبارت $q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \ldots q_t^{2\beta_t}$ هم مربع کامل است، پس برابر است با c^2 که $c \in \mathbb{N}$. حال:

$$n = (a^2+b^2)c^2 = (ac)^2 + (bc)^2,$$

پس n خوب است.

$(\Longleftarrow)$

فرض می‌کنیم $n = x^2+y^2\ (x,y \in \mathbb{Z})$ خوب باشد ولی در تجزیهٔ n عامل اولی مانند p با توان فرد موجود باشد و $p \overset{4}{\equiv} 3$.
پس $n = p^{2\alpha+1}m = x^2+y^2$ که $(m,p)=1$. بنابر لم ۳:

$$p | x^2+y^2 \Rightarrow x = px_1, y = py_1\ (x_1, y_1 \in \mathbb{Z}).$$

پس:

$$p^{2\alpha+1}m = p^2x_1^2 + p^2y_1^2 \Rightarrow p^{2\alpha-1}m = x_1^2 + y_1^2.$$

از خوب بودن $p^{2\alpha+1}m$ خوب بودن $p^{2\alpha-1}m$ را نتیجه گرفتیم، با ادامهٔ این روند پس از متناهی گام می‌توان به تساوی $pm = x'^2 + y'^2\ (x', y' \in \mathbb{Z})$ رسید.
با استفادهٔ مجدد از لم ۳ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p | x'^2 + y'^2 \quad &\Rightarrow \quad x' = px'', y' = py''\ (x'', y'' \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow \quad pm = p^2x''^2 + p^2y''^2 \Rightarrow m = p(x''^2 + y''^2) \\ &\Rightarrow \quad p | m \end{aligned}$$

اما $p|m$ با فرض $(p,m)=1$ در تناقض است.

$\square$

یک عدد چقدر می‌تواند خوب باشد؟

بعد از شناسایی اعداد خوب می‌توان به این فکر کرد که یک عدد چقدر می‌تواند خوب باشد؟ به عبارت دیگر، هر عدد را به چند طریق می‌توان به صورت جمع دو مربع کامل نوشت؟
تابع $R:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ را برابر با تعداد این نمایش‌ها تعریف می‌کنیم:

$$R(n):=\{\text{تعداد زوج‌های مرتب } (p,q) \text{ که } p,q\in\mathbb{Z} \text{ و } p^2+q^2=n\}.$$

با اندکی تأمل می‌توان دریافت:

$$\begin{array}{lll} R(0)=1 & R(1)=4 & R(2)=4 \\ R(3)=0 & R(4)=4 & R(5)=8 \\ R(6)=0 & R(7)=0 & R(8)=4 \\ R(9)=4 & R(10)=8 & \dots \end{array}$$

می‌دانیم هر عدد اول به فرم $4k+1$ خوب است. قضیهٔ زیر دانسته‌های ما را کامل‌تر می‌کند:

قضیه ۴. هر عدد اول به فرم $4k+1$ نمایش یکتایی به صورت جمع دو مربع کامل دارد.

اثبات. فرض کنیم $p\overset{4}{\equiv}1$ و $p=a^2+b^2=c^2+d^2 (a,b,c,d\in\mathbb{N})$، در نتیجه:

$$p^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \qquad (*)$$

از طرفی:

$$\begin{aligned}(ac+bd)(ad+bc) &= a^2cd+b^2cd+abc^2+abd^2\\ &= (a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab=p(ab+cd).\end{aligned}$$

پس $p|ac+bd$ یا $p|ad+bc$. (چرا؟)
فرض کنیم حالت اول اتفاق می‌افتد. اثبات در حالت دوم هم مشابه است. پس $\exists k\in\mathbb{N}$ که $kp=ac+bd$، حال طبق $(*)$ داریم:

$$p^2=k^2p^2+(ad-bc)^2\Rightarrow ad=bc.$$

اما چون $(a,b)=(c,d)=1$ (چرا؟) پس $a|c$ و $c|a$ در نتیجه $a=c$ و همین‌طور $b=d$. $\square$

پس اگر $p\overset{4}{\equiv}1$، داریم: $R(p)=8$ (توجه کنید که $a\neq b$ و به جایگشت $\pm a$ و $\pm b$ با هم در زوج مرتب‌ها نیز دقت کنید.)

پس اگر p اول باشد:

$$R(p) = \begin{cases} ۸ & p \overset{۴}{\equiv} ۱ \\ ۰ & p \overset{۴}{\equiv} ۳ \\ ۴ & p = ۲ \end{cases}$$

می‌بینیم که تابع R حتی در دامنهٔ اعداد اول هم نوسانی است (مثل ما آدم‌ها، خوب بودن در میان اعداد هم ویژگی بسیار متغیری است!) و این نوسان‌ها تمام‌شدنی نیستند. توجه کنید که مجموعهٔ اعداد اول به فرم $۴k+۳$ و مجموعهٔ اعداد اول به فرم $۴k+۱$ هر دو نامتناهی هستند. برای اثبات اولی می‌توانید به استدلالی شبیه برهان اقلیدس برای نامتناهی بودن اعداد اول فکر کنید. حکم دوم سخت‌تر است و به این راحتی اثبات نمی‌شود، ولی قضیه‌ای منسوب به دیریکله وجود دارد که از این حکم بسیار قوی‌تر است و شاید دانستنش جالب باشد:

قضیهٔ دیریکله. فرض کنید a و b دو عدد طبیعی باشند که $(a,b)=۱$، در این‌صورت در مجموعهٔ $\{a+kb|k\in\mathbb{N}\}$ نامتناهی عدد اول وجود دارد!

واضح است که نامتناهی بودن اعداد اول، نامتناهی بودن اعداد اول به فرم $۴k+۳$ و نامتناهی بودن اعداد اول به فرم $۴k+۱$، همگی حالات خاصی از این قضیه هستند.
به تابع $R(n)$ بازمی‌گردیم. از آنجا که مقادیر این تابع نامنظم است، به امید یافتن نظمی به بررسی میانگین مقادیر آن می‌پردازیم. تابع $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را به این‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$T(n) := \sum_{k=۰}^{n-۱} R(k).$$

حال همه چیز آماده است تا به هیجان‌انگیزترین قسمت این مقاله بپردازیم:

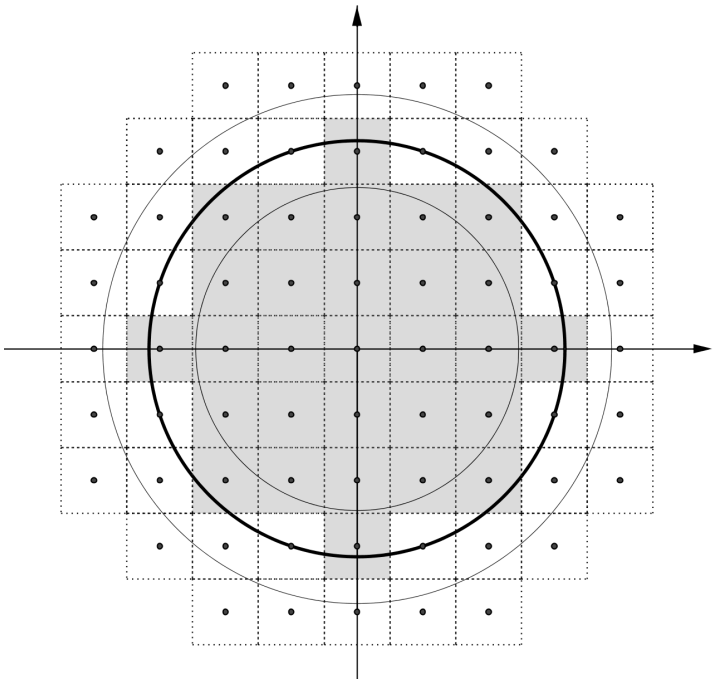
وقتی n به بینهایت میل می‌کند، $\frac{T(n)}{n}$ یعنی میانگین مقادیر تابع R در اعداد صحیح و نامنفی کمتر از n، به π میل می‌کند!

به عبارت دیگر:

قضیه ۵. به طور متوسط به π طریق می‌توان یک عدد طبیعی را به صورت جمع دو مربع کامل نوشت!

گاوس در سال ۱۸۰۰ اثبات جالبی برای این حکم فوق العاده زیبا ارائه کرده است:

اثبات. در دستگاه مختصات دکارتی، دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{n}$ در نظر بگیرید. برای هر نقطهٔ مشبکه‌ای (یعنی نقطه‌ای که هر دو مؤلفه‌اش عدد صحیح‌اند) مانند (p,q) که درون دایره واقع شده، داریم: $p^۲+q^۲<n$.
یعنی این نقطه بیانگر یکی از راه‌های نوشته شدن عدد $p^۲+q^۲$ به شکل جمع دو مربع کامل است، پس به اندازهٔ یک واحد در $R(p^۲+q^۲)$ و در نتیجه در $T(n)$ تاثیر دارد.
از طرفی متناظر با هر $۰\le k\le n-۱$، می‌توان $R(k)$ تا زوج مرتب مانند (a,b) پیدا کرد که $a^۲+b^۲=k<n$، یعنی $R(k)$ تا نقطهٔ مشبکه‌ای درون دایرهٔ به شعاع $\sqrt{n}$.
پس $T(n)$ تعداد نقاط مشبکه‌ای درون دایرهٔ به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع $\sqrt{n}$ است.



شکل ۱.۴

حال به شکل ۱.۴ توجه کنید. صفحهٔ مختصات را با مربع‌های به ضلع ۱ شبکه‌بندی کرده‌ایم، به طوری که نقاط مشبکه‌ای در مرکز مربع‌ها واقع شوند. متناظر با هر نقطهٔ مشبکه‌ای یک مربع داریم و بالعکس. پس $T(n)$ برابر مساحت تشکیل‌شده از مربع‌هایی است که مرکز آن‌ها درون دایره است.

شهوداً واضح است که برای هر n، مساحت این ناحیه تقریبی برای مساحت دایرهٔ به شعاع $\sqrt{n}$ است و با افزایش n این تقریب بهتر و بهتر می‌شود. این شهود را دقیق می‌کنیم:

اگر نقطه‌ای مشبکه‌ای درون دایره باشد، فاصله‌اش تا هر نقطه از مربع واحد حولش، حداکثر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. بنابراین کل این مربع درون دایرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{n}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ قرار می‌گیرد. مشابهاً اگر مرکز یک مربع درون دایره نباشد، اشتراک آن با درون دایرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{n}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ تهی است. پس $T(n)$ بین مساحت‌های دو دایره به شعاع‌های $\sqrt{n}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\sqrt{n}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ واقع است. در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{n}-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲\pi < T(n) < (\sqrt{n}+\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲\pi \\
\Longrightarrow\ &(n-\sqrt{۲n}+\frac{۱}{۲})\pi < T(n) < (n+\sqrt{۲n}+\frac{۱}{۲})\pi \\
\Longrightarrow\ &(۱-\sqrt{\frac{۲}{n}}+\frac{۱}{۲n})\pi < \frac{T(n)}{n} < (۱+\sqrt{\frac{۲}{n}}+\frac{۱}{۲n})\pi.
\end{aligned}
$$

حد هر دو عبارت $(۱-\sqrt{\frac{۲}{n}}+\frac{۱}{۲n})\pi$ و $(۱+\sqrt{\frac{۲}{n}}+\frac{۱}{۲n})\pi$ در بینهایت برابر π است. پس وقتی $n\to\infty$، داریم:

$$\frac{T(n)}{n}\to\pi.$$

□

فرمول‌های صریحی برای محاسبهٔ $T(n)$ وجود دارد. مثلاً:

$$T(n) = ۱ + ۴(\lfloor \frac{n}{۱} \rfloor - \lfloor \frac{n}{۳} \rfloor + \lfloor \frac{n}{۵} \rfloor - \ldots).$$

برای $R(n)$ هم دستوری شناخته شده که منسوب به لژاندر است:

$$R(n) = ۴(M - N),$$

که M تعداد مقسوم‌علیه‌های n به فرم $۴k + ۱$ و N تعداد مقسوم‌علیه‌های n به فرم $۴k + ۳$ است.

اعداد یه کمی خوب!

حال وقت آن رسیده که کمی به اعداد "یه کمی خوب" بپردازیم. مشابه قضیهٔ ۲، قضیه‌ای در مورد این اعداد وجود دارد:

قضیه ۶. n را نمی‌توان به صورت جمع ۳ مربع کامل نوشت، اگر و فقط اگر $n = ۴^t k$ که $t \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$، $k \in \mathbb{N}$ و $k \overset{۸}{\equiv} ۷$.

در انتها بیایید به این فکر کنیم که چه اعدادی را می‌توان به صورت جمع چهار مربع کامل نمایش داد؟
زیاد منتظرتان نمی‌گذارم، قضیهٔ زیر پاسخ لاگرانژ به این سؤال است:

قضیه ۷. هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت جمع چهار مربع کامل نوشت!

کتاب‌نامه

[۱] رؤیا بهشتی زواره، مریم میرزاخانی، نظریهٔ اعداد، مجموعهٔ کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی، انتشارات فاطمی (۱۳۷۸)

[۲] راس هانسبرگر، ابتکارهایی در ریاضیات، ترجمهٔ سیامک کاظمی، ریاضیات پیش‌دانشگاهی، مرکز نشر دانشگاهی (۱۳۷۱)

[3] W. Sierpinski, *Elementary theory of numbers*, North-Holland Mathematical Library, North Holland (1988)

سوالات و راه‌حل‌های مرحلهٔ دوم امسال

آزمون مرحلهٔ دوم سی و دومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۱ و ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۳ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحلهٔ اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند.

دفترچهٔ پیشِ رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه حل آن‌هاست. در تدوین راه حل‌ها جنبهٔ آموزشی این امر مد نظر قرار گرفته و برای بعضی سؤالات بیش از یک راه حل ارائه شده است. لازم به ذکر است که سؤالات راه حل‌های دیگری هم دارند که در این دفترچه ذکر نشده‌اند.

۱. فروش‌گاهی مسئول پخش ۱۰۰ سبد کالا است. هر سبد باید شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ باشد. می‌دانیم که مجموعاً ۱۰۰۰ کیلوگرم برنج و ۳۰۰۰ عدد تخم‌مرغ در سبدها وجود دارد ولی در برخی سبدها مقدار این دو کالا کم‌تر یا بیش‌تر از مقدار یادشده است. کارمندان فروش‌گاه می‌توانند در هر مرحله دو سبد را انتخاب و هر مقدار دلخواه برنج و هر تعداد تخم‌مرغ آن دو سبد را جابه‌جا کنند. دست‌کم در چند مرحله می‌توان، با شروع از هر وضعیت اولیه‌ای، برنج و تخم‌مرغ همهٔ سبدها را با هم برابر کرد؟

راه حل. پاسخ مسئله ۹۹ است. ابتدا وضعیت اولیه‌ای را در نظر بگیرید که در آن همهٔ تخم‌مرغ‌ها در یک سبد باشند. در این صورت در هر مرحله حداکثر یک سبد جدید دارای تخم‌مرغ می‌شود. بنابراین حداقل ۹۹ مرحله لازم است تا همهٔ سبدها دارای تخم‌مرغ شوند. اکنون ادعا می‌کنیم با هر وضعیت اولیه در ۹۹ مرحله می‌توان همهٔ سبدها را درست کرد. (درست یعنی شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ) در هر مرحله، از بین سبدهایی که هنوز درست نشده‌اند، سبدی با بیشترین میزان برنج و سبدی با بیش‌ترین تعداد تخم‌مرغ را در نظر بگیرید. به وضوح سبد اول حداقل ۱۰ کیلوگرم برنج دارد و سبد دوم حداقل ۳۰ عدد تخم‌مرغ دارد. (ممکن است این دو سبد یکی باشند، در این صورت همین سبد و یک سبد دل‌خواه دیگر را انتخاب کنید.) با جابجایی اجناس بین این دو سبد می‌توان یک سبد با دقیقاً ۱۰ کیلوگرم برنج و دقیقاً ۱۰ عدد تخم‌مرغ ساخت. بنابراین در هر مرحله می‌توان حداقل یک سبد را درست کرد، پس از ۹۹ مرحله ۹۹ سبد درست شده‌اند، پس سبد آخر نیز خود به خود درست شده است.

۲. مربع $ABCD$ مفروض است. دو نقطهٔ N و P، به‌ترتیب، روی اضلاع AB و AD به شکلی انتخاب شده‌اند که $PN = NC$ و نقطهٔ Q روی پاره‌خط AN طوری انتخاب شده که $\widehat{NCB} = \widehat{QPN}$. ثابت کنید:

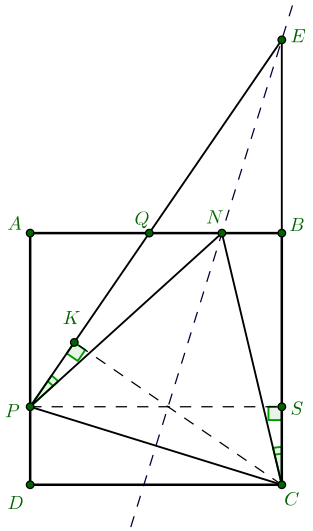
$$\widehat{BCQ} = \frac{۱}{۲}\widehat{PQA}.$$

راه حل. خط PQ را امتداد می‌دهیم تا خط BC را در نقطهٔ E قطع کند. طبق فرض $PN = NC$، پس $\angle NPC = \angle PCN$. همچنین می‌دانیم $\angle QPN = \angle NCB$. از جمع این دو رابطه درمی‌یابیم مثلث EPC متساوی‌الساقین است. در این مثلث ارتفاع‌های CK و PS را رسم می‌کنیم. چون مثلث EPC متساوی‌الساقین است $PS = CK$. از طرفی PS برابر طول ضلع مربع است پس $CK = CB$. در چهارضلعی $QBCK$ مجموع زاویه‌های $\angle QBC$ و $\angle CKQ$ برابر ۱۸۰ درجه است. در نتیجه این چهارضلعی محاطی است و

$$\angle BCK = \angle AQP.$$

توجه کنید که دو مثلث قائم‌الزاویه CKQ و CBQ به حالت وتر و یک ضلع ($CQ = CQ, CK = CB$) همنهشت هستند. بنابراین QC نیمساز $\angle KQB, \angle KCB$ است و

$$\angle BCQ = \frac{\angle KCB}{۲} = \frac{\angle AQP}{۲}.$$



۳. اعداد حقیقی و نامنفی x، y و z مفروض هستند. می‌دانیم:

$$۲(xy + xz + zy) = x^۲ + y^۲ + z^۲.$$

ثابت کنید:

$$\frac{x + y + z}{۳} \geq \sqrt[۳]{۲xyz}.$$

راه حل نخست:
فرض کنید $x \geqslant y \geqslant z$

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲(xy + yz + zx)$$
$$\Rightarrow ۱x^۲ + x(-۲y - ۲z) + y^۲ + z^۲ - ۲yz = ۰$$
$$\Rightarrow x = (y + z) \pm \sqrt{(y + z)^۲ - y^۲ - z^۲ + ۲yz} = (y + z) \pm ۲\sqrt{yz} = (y + z) \pm ۲\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^۲$$
$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{z} \text{ یا } \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

که با فرض $x \geqslant y \geqslant z$ تنها حالت $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$ یا معادلا $x = y + z + ۲\sqrt{yz}$ رخ می‌دهد. حال با جای‌گذاری x در حکم به نابرابری معادل زیر می‌رسیم

$$\frac{y + z + ۲\sqrt{yz} + y + z}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{۲(y + z + ۲\sqrt{yz})yz}$$

برای اثبات نابرابری بالا ابتدا فرض کنیم $y = ۰$ ولی در این حالت حکم اصلی مسئله واضح است چون سمت راست صفر و سمت چپ مثبت است. حال فرض کنید y مخالف صفر است ($y = ۰$ بدیهی است) و دو طرف حکم معادل بالا را بر y تقسیم کنید و فرض کنید $\frac{z}{y} = t$ پس باید ثابت کنیم:

$$\frac{۲t + ۲\sqrt{t} + ۲}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{۲(t + ۱ + ۲\sqrt{t})t}$$

که این هم با استفاده از نابرابری حسابی-هندسی به دست می‌آید:

$$\frac{۲t + ۲\sqrt{۲t} + ۲}{۳} = \frac{(\sqrt{t} + ۱) + (\sqrt{t} + ۱) + ۲t}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{(\sqrt{t} + ۱)^۲ ۲t}$$
$$= \sqrt[۳]{۲(t + ۱ + ۲\sqrt{t})t}$$

راه حل دوم:
فرض کنید $x \geqslant y \geqslant z$

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲(xy + yz + zx)$$
$$\Rightarrow x^۲ + x(-۲y - ۲z) + y^۲ + z^۲ - ۲yz = ۰$$
$$\Rightarrow x = (y+z) \pm \sqrt{(y+z)^۲ - y^۲ - z^۲ + ۲yz} = (y+z) \pm ۲\sqrt{yz} = (y+z) \pm ۲\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^۲$$
$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{z} \text{ یا } \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

که با فرض $x \geqslant y \geqslant z$ تنها حالت $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$ یا معادلا

$$x = y + z + ۲\sqrt{yz}$$

رخ می‌دهد. حال با جایگذاری x در حکم به نابرابری معادل زیر می‌رسیم

$$\frac{y + z + ۲\sqrt{yz} + y + z}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{۲(y + z + ۲\sqrt{yz})yz}$$

فرض کنید $A = \frac{y+z}{۲}$ و $B = \sqrt{yz}$ حال چون $A \geqslant B$ (نابرابری حسابی-هندسی) می‌توان فرض کرد $A = B + e$ که $e \geqslant ۰$ در این صورت با جای‌گذاری $A = B + e$ در رابطهٔ قبل به حکم معادل زیر می‌رسیم

$$۲B + \frac{۴e}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{۲(۴B + ۲e)B^۲}$$

حال اگر دو طرف را به توان سه برسانیم به حکم معادل زیر می‌رسیم

$$(۲B + \frac{۴e}{۳})^۳ \geqslant ۸B^۳ + ۴eB^۲$$

اما داریم:

$$(۲B + \frac{۴e}{۳})^۳ = ۸B^۳ + ۳(۲B)^۲\frac{۴e}{۳} + ۶B(\frac{۴e}{۳})^۲ + (\frac{۴e}{۳})^۳ \geqslant ۸B^۳ + ۱۶B^۲e \geqslant ۸B^۳ + ۴eB^۲$$

پس رابطهٔ مورد نظر ثابت شد.

۴. تمام جواب‌های طبیعی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$n^{n^n} = m^m.$$

راه حل نخست:
عدد طبیعی k و عدد صحیح نامنفی t را طوری انتخاب می‌کنیم که k بر n بخش‌پذیر نباشد و $m = kn^t$. (ابتدا t را بزرگ‌ترین عدد صحیح نامنفی در نظر می‌گیریم که m بر n^t بخش‌پذیر باشد، سپس k را برابر حاصل تقسیم m بر n^t در نظر می‌گیریم.) با این جای‌گذاری در تساوی اصلی خواهیم داشت

$$n^{n^n} = m^m = (kn^t)^{kn^t}$$

از دو طرف رادیکال به فرجهٔ n^t می‌گیریم

$$n^{n^{n-t}} = (kn^t)^k = k^k n^{kt}$$

دو طرف را بر n^{kt} تقسیم می‌کنیم

$$n^{n^{n-t}-kt} = k^k \qquad (۱.۵)$$

اگر $t \geq n$ آن‌گاه $m = kn^t \geq n^t \geq n^n$، پس $n^m \geq n^{n^n}$ و در نتیجه

$$m^m = n^{n^n} \leq n^m \Rightarrow m \leq n \Rightarrow n^n \leq n \Rightarrow n \leq ۱ \Rightarrow n = ۱$$

و جواب $m = n = ۱$ به دست می‌آید.
اما اگر $n > t$ آن‌گاه $n - t$ مثبت است و $n^{n-t} - kt$ عددی صحیح. فرض کنید $s = n^{n-t} - kt$، در این صورت $n^s = k^k$.
اگر $s < ۰$ آن‌گاه یک طرف تساوی اخیر ناصحیح می‌شود، در حالی که طرف دیگر صحیح است. اگر $s = ۰$ آن‌گاه $k = ۱$ که در انتها بررسی شده. فرض کنیم $s > ۰$، در این صورت اگر عدد اولی تنها یکی از n و k را بشمارد آن‌گاه این عدد اول تنها یکی از دو طرف تساوی $n^s = k^k$ را می‌شمارد که این ممکن نیست. پس عوامل اول n و k یکسان‌اند. فرض کنید $n = p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_r^{\alpha_r}$ و $k = p_۱^{\beta_۱} \cdots p_r^{\beta_r}$ تجزیهٔ این دو عدد به عوامل اولشان باشد، در این صورت

$$n^s = k^k \Rightarrow (p_۱^{\alpha_۱})^s \cdots (p_r^{\alpha_r})^s = (p_۱^{\beta_۱})^k \cdots (p_r^{\beta_r})^k$$

از برابری توان‌های هر عدد اول در دو طرف تساوی نتیجه می‌گیریم

$$p_i^{\alpha_i s} = p_i^{\beta_i k} \Rightarrow \alpha_i s = \beta_i k \Rightarrow \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{k}{s}$$

اگر $s \geq k$ آن‌گاه $\beta_i \geq \alpha_i$ و در نتیجه k بر n بخش‌پذیر است که خلاف فرض اولیه است.
اگر $k > s$ آن‌گاه $\alpha_i > \beta_i$ و در نتیجه n بر k بخش‌پذیر است. پس n^{n-t} هم بر k بخش‌پذیر است. از دو طرف تساوی (۱)

رادیکال فرجهٔ k می‌گیریم

$$n^{\frac{n^{n-t}}{k}-t} = k$$

چون توان n در این عبارت صحیح است و k مضربی از n نیست به ناچار $s = ۰$ و $k = ۱$. یعنی $n^{n-t} - t = ۰$، اما

$$t = n^{n-t} \geq n^{۱} \geq n > t$$

و به تناقض می‌رسیم.

راه حل دوم:
ابتدا توجه کنید که اگر $n = ۱$ آن‌گاه $m = ۱$ و جواب $m = n = ۱$ به دست می‌آید. از این به بعد فرض می‌کنیم $n > ۱$.
فرض کنیم $r = \log_n m$، در این صورت $m = n^r$ و

$$n^{n^n} = m^m = (n^r)^{n^r} = n^{rn^r}$$

چون $n > ۱$ باید توان‌های n در دو طرف برابر باشد

$$n^n = rn^r \Rightarrow r = n^{n-r} \tag{۲.۵}$$

از طرفی با گرفتن لگاریتم (پایهٔ n) از دو طرف تساوی $n^{n^n} = m^m$ به دست می‌آوریم

$$n^n = m \log_n m \Rightarrow r = \frac{n^n}{m} \tag{۳.۵}$$

لم. اگر به ازای عددی طبیعی مثل n و عددهایی گویا و مثبت مثل p و q تساوی $n^p = q$ برقرار شود آن‌گاه q عددی طبیعی است.
اثبات. فرض کنید $p = \frac{a}{b}$ و $q = \frac{c}{d}$ نمایش‌های کسری این دو عدد گویا باشند. در این صورت

$$n^p = q \Rightarrow n^{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Rightarrow n^a = \left(\frac{c}{d}\right)^b = \frac{c^b}{d^b} \Rightarrow d^b | c^b \Rightarrow d | c \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

ادامهٔ راه‌حل. بنابر تساوی (۲) r گویاست و بنابر تساوی (۱)، با فرض $p = n - r$ و $q = r$ داریم $n^p = q$. گویا بودن p و q نتیجهٔ مستقیم گویا بودن r است. پس بنابر لم، q باید عددی طبیعی باشد. یعنی r عددی طبیعی است.
اگر $r < n$ آن‌گاه $n^{n-r} \geq n^۱ > r$ در نتیجه تساوی امکان پذیر نیست.
اگر $r > n$ آن‌گاه $n^{n-r} < ۱ < r$ در نتیجه باز هم تساوی ممکن نیست.
اگر $n = r$ آن‌گاه $r = n^{n-r} = ۱$ پس $n = r = ۱$ که خلاف فرض $n > ۱$ است.
در نتیجه تنها جواب $m = n = ۱$ است.

۵. زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی مثبت مانند S را «توانا» گوییم در صورتی که هرگاه a و b دو عضو متمایز آن باشند آن‌گاه دست‌کم یکی از اعداد a^b یا b^a عضو S باشند.

الف. یک مجموعهٔ توانای چهار عضوی مثال بزنید.

ب. ثابت کنید یک مجموعهٔ توانای متناهی، بیش از چهار عضو ندارد.

راه حل.

الف. $\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۱۶}\}$ یک مجموعهٔ توانای ۴ عضوی است:

$$۱^x = ۱, \quad \left(\frac{۱}{۴}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲}, \quad \left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۴}.$$

(البته این مثال را می‌توان با تحلیل صورت کلی مجموعه‌های توانا - همان‌طور که در ادامه خواهد آمد - به دست آورد.)

ب. ابتدا چند خاصیت اساسی عمل به توان رساندن را یادآوری می‌کنیم:

- برای هر عدد مثبت x و اعداد مثبت $a < b$، $a^x < b^x$.
- اگر عدد حقیقی a بیشتر از ۱ باشد، مقدار a^x با افزایش x زیاد می‌شود؛ به عبارت دیگر، اگر $x < y$، $a^x < a^y$.
- اگر عدد حقیقی مثبت a کمتر از ۱ باشد، مقدار a^x با افزایش x کم می‌شود.

حال به سراغ حل مسأله می‌رویم. ابتدا یک لم:

لم. یک مجموعهٔ توانای متناهی نمی‌تواند هم‌زمان شامل یک عضو بزرگتر از ۱ و یک عضو کمتر از ۱ باشد.

اثبات. فرض کنید چنین نباشد. در این‌صورت مجموعهٔ توانای متناهی S وجود دارد که هم شامل عضوی بزرگتر از ۱ و هم شامل عضوی کوچک‌تر از ۱ است. کوچکترین عضو مجموعهٔ S را با a و کوچکترین عضو در میان اعضای بزرگتر از ۱ را با b نمایش می‌دهیم. (بنابر متناهی بودن S چنین اعضایی وجود دارند.) در نتیجه $a < ۱ < b$. داریم $a^b < a^۱ = a$، اما a کوچکترین عضو S است، پس a^b نمی‌تواند در S باشد. همین‌طور $۱ = b^۰ < b^a < b^۱ = b$، اما S شامل عضوی بین ۱ و b نیست، پس b^a هم نمی‌تواند در S باشد. پس هیچ یک از دو عدد a^b و b^a در S قرار ندارند و این توانا بودن S را نقض و لم را ثابت می‌کند. □

با توجه به لم، مجموعه‌های توانای متناهی، دو نوع هستند. نوع اول آن‌هایی هستند که همهٔ اعضای آنها بیشتر یا مساوی ۱ هستند و نوع دوم آن‌هایی هستند که همهٔ اعضای آنها کمتر یا مساوی ۱ هستند.

فرض کنیم S مجموعهٔ توانایی از نوع اول و با بیش از ۳ عضو باشد. همچنین $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$ اعضای بزرگتر از ۱ در S باشند. از آنجایی که S عضو کمتر از ۱ ندارد، تعداد اعضای آن حداکثر یکی از n بیشتر است و در نتیجه $n \geq ۳$. برای هر $۱ \leq i < n$، $a_n^{a_i}$ از a_n بیشتر است، پس در S قرار نمی‌گیرد. پس توانا بودن S ایجاب می‌کند که $a_i^{a_n}$ در S باشد. حال

$$a_۱ < a_۱^{a_n} < a_۲^{a_n} < \cdots < a_{n-۱}^{a_n}$$

n عضو بزرگتر از ۱ در S هستند، از طرف دیگر $a_1 < \cdots < a_n$ همهٔ اعضای بزرگتر از ۱ در S بودند، پس

$$a_2 = a_1^{a_n}, a_3 = a_2^{a_n}, \ldots, a_n = a_{n-1}^{a_n}.$$

حال بیایید توانا بودن S را در مورد a_1 و a_{n-1} بررسی کنیم. (با توجه به $n \geq 3$، $1 < n-1$) با توجه به $a_1 > 1$ داریم:

$$a_1 = a_1^1 < a_1^{a_{n-1}} < a_1^{a_n} = a_2.$$

پس $a_1^{a_{n-1}}$ عددی بین a_1 و a_2 است و چنین عددی در S وجود ندارد. به طریق مشابه:

$$a_{n-1} < a_{n-1}^{a_1} < a_{n-1}^{a_n} = a_n.$$

پس $a_{n-1}^{a_1}$ هم در S قرار ندارد. پس S نمی‌تواند توانا باشد و نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌های توانای نوع اول حداکثر ۳ عضو دارند.

حال فرض کنید S یک مجموعهٔ توانای متناهی از نوع دوم با بیش از ۴ عضو و $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ اعضای کمتر از ۱ در آن باشند. پس n حداقل ۴ است. $a_n < 1$ پس برای هر $1 \leq i < n$، $1 = a_n^0 > a_n^{a_i} > a_n^1 = a_n$. پس $a_n^{a_i}$ در S قرار ندارد و $a_i^{a_n}$ عضو S است. داریم:

$$a_1 = a_1^1 < a_1^{a_n} < a_2^{a_n} < \cdots < a_{n-1}^{a_n} < 1.$$

و در نتیجه مشابه استدلال حالت قبل داریم

$$a_2 = a_1^{a_n}, a_3 = a_2^{a_n}, \ldots, a_n = a_{n-1}^{a_n}.$$

و یا معادلاً

$$a_{n-1} = a_n^{\frac{1}{a_n}},\ a_{n-2} = a_{n-1}^{\frac{1}{a_n}},\ \ldots, a_1 = a_2^{\frac{1}{a_n}}.$$

پس اگر a_n را با a نشان دهیم، اعضای S به صورت زیر هستند:

$$\cdots < a^{\frac{1}{a^2}} < a^{\frac{1}{a}} < a.$$

حال توجه کنید که $a_{n-1} < 1$، پس

$$a_n = a_{n-1}^{a_n} < a_{n-1}^{a_{n-2}} < 1.$$

پس $a_{n-2}^{a_{n-1}}$ در S قرار دارد و چون

$$a_{n-2}^{a_{n-1}} > a_{n-2}^{a_n} = a_{n-1}$$

$a_{n-۲}^{a_{n-۱}} = a_n$ پس داریم:

$$a_{n-۲}^{a_{n-۱}} = \left(a^{۱/a^۲}\right)^{\left(a^{۱/a}\right)} = a \implies a^{a^{(۱/a)-۲}} = a$$
$$\Rightarrow a^{\frac{۱}{a}-۲} = ۱$$

که با توجه به این که $a \neq ۱$ پس $\frac{۱}{a} - ۲ = ۰$ و در نتیجه $a = \frac{۱}{۲}$. پس $a_n = \frac{۱}{۲}, a_{n-۱} = \frac{۱}{۴}, a_{n-۲} = \frac{۱}{۱۶}$. حال $n \geq ۴$ پس $n - ۳ \geq ۱$ و $a_{n-۳} = a_{n-۲}^۲ = \frac{۱}{۲^۸}$. حال شرط توانا بودن را برای $a_{n-۲}$ و $a_{n-۳}$ بررسی می‌کنیم:

$$a_n = \frac{۱}{۲} = \left(\frac{۱}{۲^۴}\right)^{\frac{۱}{۴}} < \left(\frac{۱}{۲^۴}\right)^{\frac{۱}{۲^۸}} = a_{n-۲}^{a_{n-۳}} < ۱.$$

همین‌طور

$$\frac{۱}{۲} < a_{n-۳}^{a_{n-۲}} = \left(\frac{۱}{۲^۸}\right)^{\frac{۱}{۱۶}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} < ۱.$$

پس هیچ یک از دو عدد $a_{n-۲}^{a_{n-۳}}$ و $a_{n-۳}^{a_{n-۲}}$ در S قرار ندارند و شرط توانا بودن نقض می‌شود. پس مجموعه‌های توانای نوع دوم حداکثر ۴ عضو دارند.

پس هر دو نوع مجموعهٔ توانای متناهی حداکثر ۴ عضو دارد.

۶. در انجمن «معمابازان حرفه‌ای» اعضا به تعدادی گروه تقسیم شده‌اند و در پایان هر هفته گروه‌بندی‌ها به شکل خاصی تغییر می‌کند؛ در هر گروه یکی از اعضا به عنوان به‌ترین عضو مشخص می‌شود و همهٔ به‌ترین‌های گروه‌ها از گروه خود جدا شده و تشکیل یک گروه جدید را می‌دهند. اگر گروهی فقط یک عضو داشته باشد همان عضو به گروه جدید می‌رود و گروه قبلی منحل می‌شود. فرض کنید انجمن n عضو دارد و در ابتدا همهٔ اعضا در یک گروه بوده باشند. ثابت کنید هفته‌ای فرا می‌رسد که از آن به بعد تعداد اعضای تمام گروه‌ها حداکثر $1+\sqrt{2n}$ است.

راه حل نخست:

پیش از هر سخنی ابتدا به این نکتهٔ واضح و کلیدی دقت کنید که اگر k گروه با اعضای $1,2,...,k$ داشته‌باشیم، در مرحلهٔ بعد هم k گروه با اعضای $1,2,...,k$ خواهیم داشت. حال به حل سوال توجه کنید.

لم: اگر $n=\binom{k}{2}$ همواره پس از $\binom{k}{2}$ حرکت، در نهایت $k-1$ گروه خواهیم داشت که به ازای هر i که $1\le i<k$ گروهی با i عضو موجود باشد.

اثبات لم: برای $k=2$ بدیهی است و برای $k=3$ نیز داریم $n=\binom{3}{2}=3$ که پس از یک حرکت به حالت یک گروه یک نفره و یک گروه دو نفره می‌رسیم.

فرض می‌کنیم حکم استقرا به ازای هر $1\le k\le m$ برقرار باشد، حال حکم را برای $k=m+1$ اثبات می‌کنیم. بنابرین فرض کنید گروه اصلی گروهی با $\binom{m+1}{2}$ عضو باشد. طبق فرض استقرا پس از $\binom{m}{2}$ حرکت، $m-1$ گروه جدید خواهیم داشت که به ازای هر i که $1\le i\le m-1$ گروهی با i عضو موجود باشد. ضمناً تعداد اعضای گروه اصلی هم برابر با $\binom{m+1}{2}-\binom{m}{2}=m$ است. بنابر این حکم با استقرا اثبات شد.

حال به اثبات باقیماندهٔ سوالات می‌رویم: فرض کنید $n=\binom{k}{2}+t$ به طوری که $n\le\binom{k+1}{2}$ می‌خواهیم اثبات کنیم مرحله‌ای وجود دارد که از آن به بعد تعداد اعضای بزرگترین گروه n نفر است. برای این کار هم به سادگی مانند اثبات لم بالا فرض کنید $\binom{k+1}{2}$ معماباز داریم که $\binom{k+1}{2}-\binom{k}{2}-t$ تا از آنها عضو فرعی و بقیه اصلی هستند. (در واقع تعدادی عضو فرعی اضافه نمودیم.) در هر مرحله هم اولویت برداشت عضو از هر گروه با اعضای اصلی آن گروه می‌باشد (اعضای فرعی تا جای ممکن از همه می‌بازند!). طبق لم می‌دانیم مرحله‌ای وجود دارد که از آن به بعد به ازای هر $1\le i\le k$ ، گروهی با i عضو وجود دارد. در هر مرحله تعداد اعضای هر گروه از k بیشتر نمی‌شود و بدون در نظر گرفتن اعضای فرعی هم این حکم درست است. بنابراین تعداد اعضای اصلی از k بیشتر نمی‌شود. پس حکم به این صورت نتیجه می‌شود:

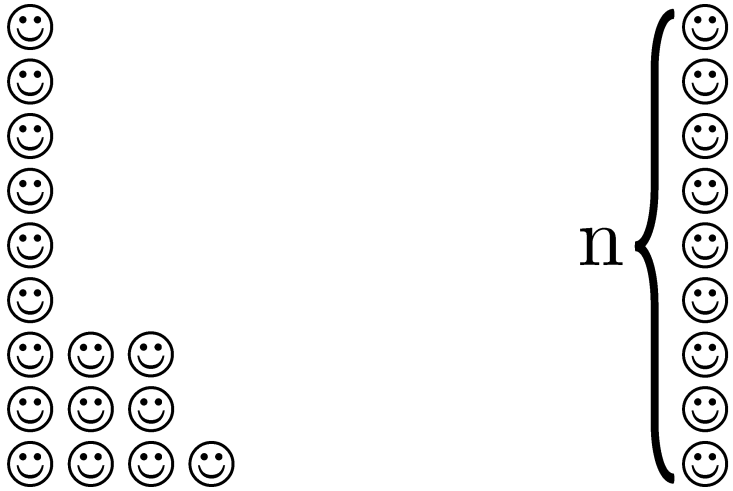
$$\frac{k^2-k}{2}=\binom{k}{2}<n=\binom{k}{2}+t\le\binom{k+1}{2}$$
$$\Rightarrow k^2-k+\frac{1}{4}<2n\Rightarrow(k-\frac{1}{2})^2<2n\Rightarrow k<\sqrt{2n}+\frac{1}{2}<\sqrt{2n}+1$$

راه حل دوم:

توجه کنید که سوال معادل این است که ثابت کنیم اگر در ابتدا یک دستهٔ n تایی از دوایر داشته باشیم و در هر مرحله از هر دسته یک دایره انتخاب کرده و با آنها دسته‌ای جدید ایجاد کنیم، مرحله‌ای فرا خواهد رسید که از آن مرحله به بعد، هر دسته شامل حداکثر $\sqrt{۲n}+۱$ دایره باشد.

برای این که راه حل قابل فهم‌تر باشد تعدادی تعریف کرده و شهودی کلی از اثبات ارائه می‌دهیم و در انتها شهودی که ارائه دادیم را دقیق می‌کنیم.

تعریف ۱: برای هر دسته‌بندی از دوایر، «قیافه» این دسته‌بندی را نمایشی از دایره‌ها گوییم به طوری که هر دسته به شکل ستونی از دوایر باشد و ستون‌ها نیز بر حسب تعداد دوایرشان مرتب شده‌باشند. در شکل زیر قیافهٔ دسته‌بندی (n) را در سمت راست و قیافهٔ دسته‌بندی $(۱,۳,۹,۳)$ را در سمت چپ می‌بینید.



تعریف ۲: یک «پلکان به طول k» شامل $\binom{k+۱}{۲}$ دایره‌است به طوری که دایره‌ها در دسته‌های $۱,۲,۳,۴,...,k$ تایی قرار داشته‌باشند.

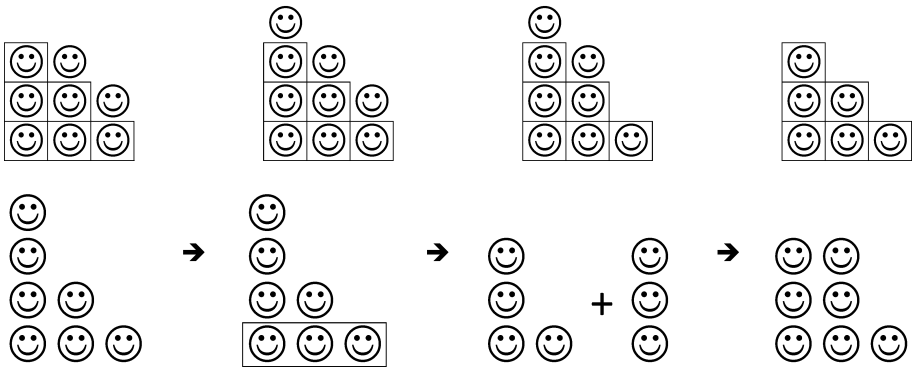
تعریف ۳: یک «پلکان به طول k و تاج t» (که $t \leq k$) پلکانی به طول k است که به t دستهٔ بزرگ‌تر آن یک دایره اضافه کرده‌ایم. در نتیجه شامل $\binom{k+۱}{۲}+t$ دایره‌است که در دسته‌های $۱,۲,...,k-t,k-t+۲,...,k,k+۱$ تایی قرار گرفته‌اند. اگر $t=k+۱$ پلکان به طول k و تاج t را همان پلکان به طول $k+۱$ در نظر می‌گیریم. پس پلکان به طول k و تاج ۰ یک پلکان به طول k است.

تعریف ۴: یک «ساختار پلکانی با m دایره» دسته‌بندی شامل m دایره است که اگر $\binom{k+۱}{۲} \leq m < \binom{k+۲}{۲}$ این دسته‌بندی به شکل پلکانی به طول k و تاج $m-\binom{k+۱}{۲}$ باشد.

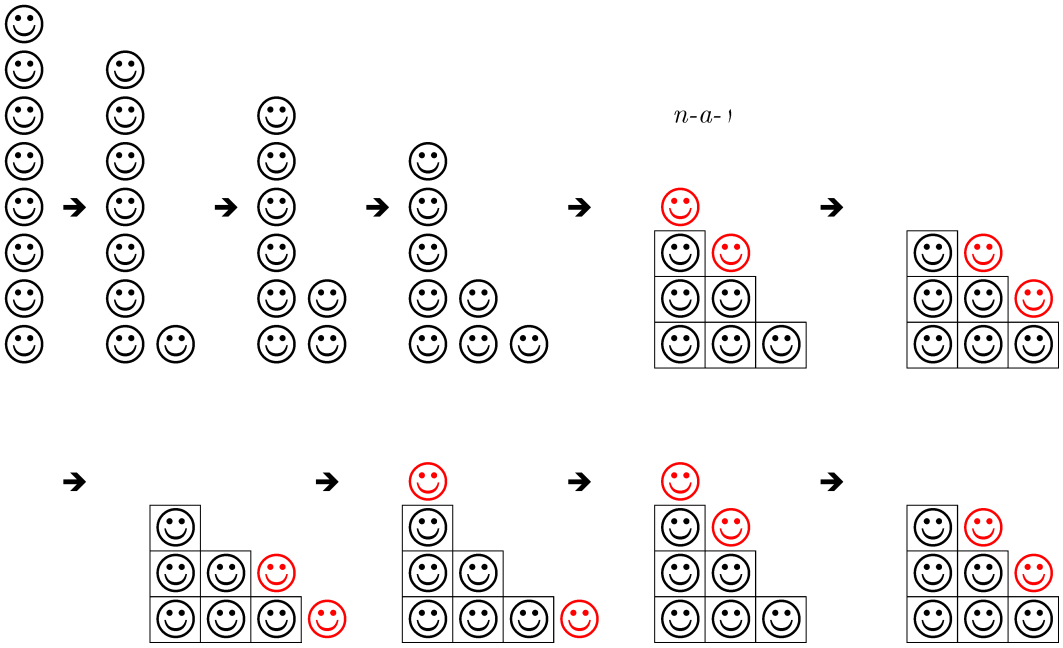
تعریف ۵: یک «پلکان به طول k و تاج t و جایگاه r» (که $t \leq k+۱$) پلکانی با دسته‌های $x_۰,x_۱,...,x_k$ است ($x_۰$ می‌تواند ۰ باشد) که اگر $k-i$ به پیمانهٔ $k+۱$ عضو مجموعهٔ $\{r,r+۱,...,r+t-۱\}$ باشد $x_i=i+۱$ و در غیر این صورت $x_i=i$. پس پلکان به طول k و تاج t و جایگاه ۰ یک پلکان به طول k و تاج t است.

شکل زیر از راست به چپ قیافه یک پلکان به طول ۳، قیافه یک پلکان به طول ۳ و تاج ۲، قیافه یک ساختار پلکانی به طول ۹ و قیافه یک پلکان به طول ۳ و تاج ۲ و جایگاه ۵ را نشان می‌دهد.

نکته ۱: چنانچه یک دسته‌بندی داشته‌باشیم، در هر مرحله قیافهٔ دسته‌بندی به این شکل تغییر می‌کند: سطر پایینی جدا شده و به یک ستون جدید تبدیل می‌شود. سپس این ستون بر حسب تعداد دوایرش در جایگاه مناسب قرار می‌گیرد. برای مثال قیافهٔ دستهٔ $(۲,۱,۴)$ به این شکل تغییر می‌کند:



اکنون فرض کنید $\binom{a+۲}{۲} \leq n < \binom{a+۱}{۲}$ و $b = n - \binom{a+۱}{۲}$ در ادامهٔ راه می‌خواهیم اثبات کنیم دایره‌ها از مرحلهٔ $n-a-۱$ به بعد مانند شکل جمع شده و قیافه‌ها با الگوی خاصی تکرار می‌شوند.



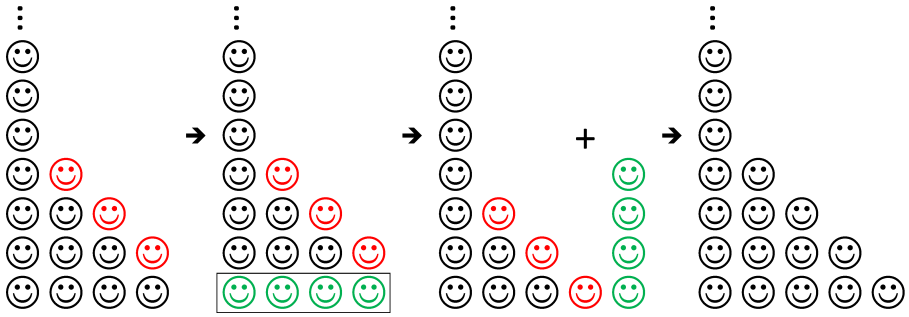
حال به اثبات دقیق می‌پردازیم.

ادعا ۱: در مرحلهٔ lام ($l < n$)، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با l دایره به همراه یک دسته با $n-l$ دایره است.

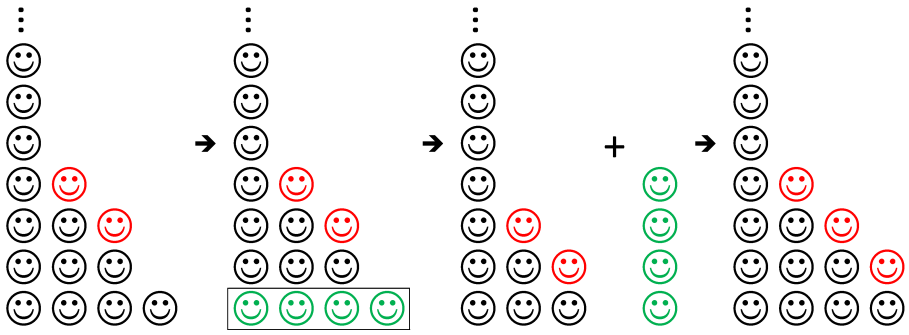
اثبات ادعا: به استقرا روی l حکم را ثابت می‌کنیم. پایهٔ استقرا با توجه به اولین عمل واضح است. برای اثبات گام استقرا توجه می‌کنیم که طبق فرض استقرا در مرحلهٔ $l-۱$ام، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با $l-۱$ دایره به همراه یک دسته با $n-l+۱$ دایره است. حال دو حالت داریم:

حالت نخست: k وجود داشته‌باشد که $l-۱ = \binom{k+۱}{۲} - ۱$. در این حالت پلکانی به طول $k-۱$ و تاج $k-۱$ داریم پس دسته‌ها به طول $۲, ۳, ..., k-۱, k, n-l+۱$ هستند. که در مرحلهٔ بعد طول دسته‌ها برابر $۱, ۲, ۳, ..., k-۲, k-۱, k, n-l$ خواهد شد. که این یک پلکان به طول $k+۱$ به همراه یک ستون با $n-l$ دایره است. پس در این حالت مرحله بعد حاوی یک ستون با $n-l > ۰$ دایره و یک ساختار پلکانی lتایی است.

حالت دوم: $\binom{k}{۲} \leq k-l < \binom{k+۱}{۲} - ۱$ در این حالت ساختار پلکانی به شکل یک پلکان به طول $k-۱$ و تاج به طول نامنفی و کم‌تر از $k-۱$ است. پس در این حالت پلکان شامل دسته‌ای به طول ۱ است. پس طول دسته‌ها به

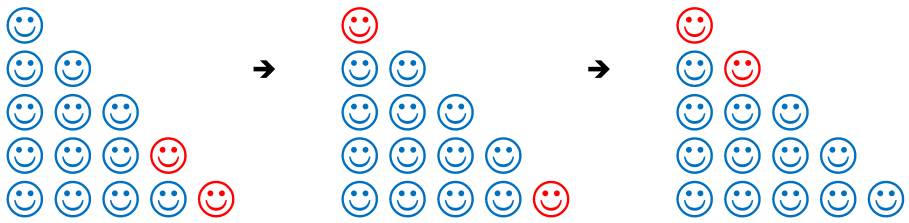


شکل $(۱, ..., k-t-۱, k-t+۱, ...), n-l+۱$ است (طول بزرگترین دستهٔ ساختار k یا $k-۱$ است.). حال با حذف یک دایره از هر دسته و ایجاد دسته‌های جدید دسته‌ای به طول k ایجاد می‌شود و دسته‌های موجود به شکل $([۰,]..., k-t-۲, k-t, ..., k), n-l$ خواهند بود (طول کوچکترین دستهٔ ساختار ۱ یا ۲ خواهد بود.) که این یک ساختار پلکانی با l دایره به همراه یک ستون با $۰ < n-l$ دایره است.



پس در هر دو حالت حکم استقرا را نتیجه گرفتیم و این موجب اثبات ادعا می‌شود.

حال می‌دانیم که ادعای ۱ برای هر $n < l$ درست است. پس این حکم برای $l = n-a-۱$ نیز درست است. پس در مرحلهٔ $n-a-۱$ یک ساختار پلکانی به طول $n-a-۱$ و یک ستون به طول $a+۱$ داریم. از آنجایی که $\binom{a+۱}{۲} < n \leq \binom{a+۲}{۲}$ پس $\binom{a}{۲} \leq n-a-۱ \leq \binom{a+۱}{۲}$ که این نشان می‌دهد که ساختار پلکانی، پلکانی به طول $a-۱$ و تاج به طول مثبت (شاید a) دارد. پس با اضافه کردن دسته به طول $a+۱$ پلکانی به طول a به همراه تاج به طول مثبت (شاید $a+۱$) خواهیم داشت. ادعا می‌کنیم که پس از این، طول هیچ دسته‌ای از $a+۱$ بیشتر نمی‌شود. برای اثبات کل دایره‌های موجود را آبی کرده و تعدادی دایرهٔ قرمز روی پلکان اضافه می‌کنیم تا یک پلکان به طول $a+۱$ ایجاد کنند. با توجه به نکتهٔ ۱، پلکان به طول $a+۱$ پس از هر مرحله به خودش تبدیل می‌شود. پس در قیافهٔ شامل دایره‌های قرمز و آبی، طول دسته‌ها هیچ‌گاه بیشتر از $a+۱$ نمی‌شود. حال اگر در هر مرحله دایره‌های قرمز را در بالای هر دسته قرار دهیم نتیجه می‌شود که دایره‌های قرمز هیچ تأثیری در ساختار دایره‌های آبی ندارند و در نتیجه تعداد دایره‌های آبی در دسته‌هایشان همواره کم‌تر مساوی $a+۱$ است.



حال توجه کنید که

$\binom{a+1}{2} < n \Rightarrow (a+1)^2 - (a+1) < 2n \Rightarrow (a+1)^2 - (a+1) + \frac{1}{4} < 2n \Rightarrow ((a+1) - \frac{1}{2})^2 < 2n \Rightarrow (a+1) - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} \Rightarrow a+1 < \sqrt{2n} + 1$

پس تعداد دایره‌های درون هر دسته همواره کم‌تر از $\sqrt{2n} + 1$ است.

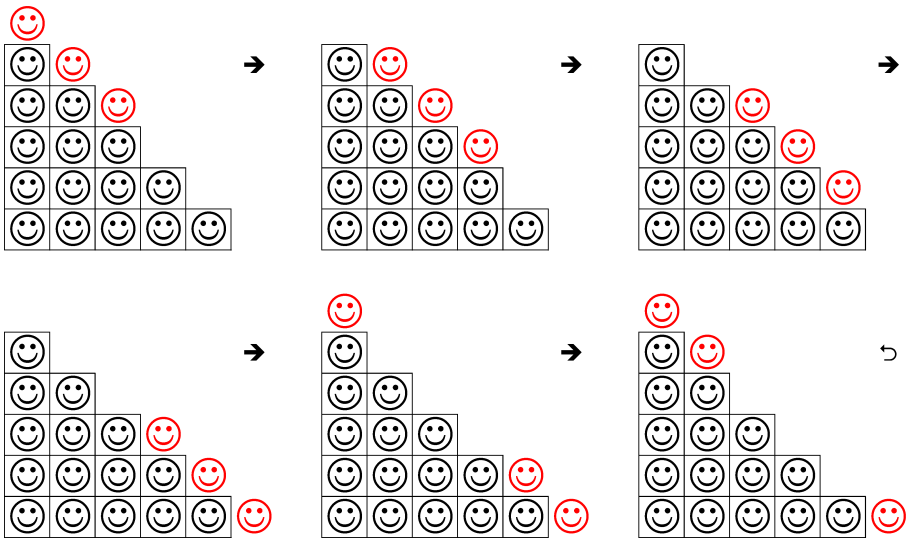
اکنون می‌خواهیم کمی فراتر از راه‌حل سوال رفته و ساختار دسته‌بندی‌ها را پس از مرحلهٔ $n - a + 1$ نیز به دست بیاوریم. توجه کنید که در این مرحله دسته‌بندی ها یک پلکان به طول a و تاج b و جایگاه 0 تشکیل داده‌اند. ادعا ۲: در مرحلهٔ $a - n + 1 + r$ پلکانی به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

اثبات ادعا: برای اثبات ادعا روی r استقرا می‌زنیم. پایه همان نتیجهٔ ادعای ۱ است. برای تکمیل گام استقرا فرض را برای $r - 1$ در نظر گرفته و دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت نخست: a به پیمانهٔ $a + 1$ عضو مجموعهٔ $\{r - 1, r - 2, ..., r + t - 2\}$ نباشد. در این حالت یک پلکان به طول a داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعهٔ x_0 در تعریف پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r دارای صفر دایره است. پس قیافهٔ این دسته‌بندی دارای a دایرهٔ پایینی است و با جدا نمودن این دایره‌ها و ایجاد دستهٔ جدید دستهٔ x_a دارای a دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دستهٔ x_i به جای دستهٔ x_{i-1} قرار گرفته‌است می‌توانیم ادعا کنیم که در دسته‌بندی جدید اگر $a - j$ به پیمانهٔ $a + 1$ عضو مجموعهٔ $\{r, r + 1, ..., r + t - 1\}$ باشد $x_j = j + 1$ و در غیر این صورت $x_j = j$ پس در مرحلهٔ بعدی پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

حالت دوم: a به پیمانهٔ $a + 1$ عضو مجموعهٔ $\{r - 1, r - 2, ..., r + t - 2\}$ باشد. در این حالت یک پلکان به طول a داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعهٔ x_0 در تعریف پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r دارای ۱ دایره است. پس قیافهٔ این دسته‌بندی دارای $a + 1$ دایرهٔ پایینی است و با جدا نمودن این دایره‌ها و ایجاد دستهٔ جدید دستهٔ x_a دارای $a + 1$ دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دستهٔ x_i به جای دستهٔ x_{i-1} قرار گرفته‌است می‌توانیم ادعا کنیم که در دسته‌بندی جدید اگر $a - j$ به پیمانهٔ $a + 1$ عضو مجموعهٔ $\{r, r + 1, ..., r + t - 1\}$ باشد $x_j = j + 1$ و در غیر این صورت $x_j = j$ پس در مرحلهٔ بعدی پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

پس ادعای ۲ نیز ثابت شد. اکنون می‌توانیم ادعا کنیم که پس از مرحلهٔ $a - n - 1$ دسته‌بندی‌ها به نظم واضحی هر $a + 1$ مرحله تکرار می‌شوند و چون پیش از مرحلهٔ $n - a - 1$ دسته‌ای به طول $a + 2$ داشتیم، پس مرحلهٔ $n - a - 1$ اولین مرحله‌ایست که این تناوب شروع می‌شود. پس قیافه‌ی دسته‌بندی‌ها پس از مرحلهٔ $n - a - 1$ مانند شکل زیر خواهد بود:



جواد عابدی
کارشناسی
برق
دانشگاه صنعتی شریف

اینفوگرافیک: المپیاد جهانی در یک نگاه

در این نسخه از فصل‌نامه می‌خواهیم شما را با روش جدیدی از ارائه آشنا کنیم. اینفوگرافیک در واقع یک نمایش گرافیکی از داده‌هاست تا داده‌ها را هرچه بهتر و زیباتر نمایش دهد. در صورتی که می‌خواهید مجموعه‌ای از داده‌ها را به همراه توضیحات ساده ارائه کنید، اینفوگرافیک بهترین روش برای شما خواهد بود.

واژه‌ی اینفوگرافیک ($Infographic$) خلاصه شده‌ی $InformationGraphic$ است که به گرافیک‌های اطلاع‌رسان هم شهرت دارد. این روش امروزه در بسیاری از مقالات، سایت‌ها و کتاب‌ها استفاده می‌شود و به عنوان ابزاری کارآمد شناخته شده است.

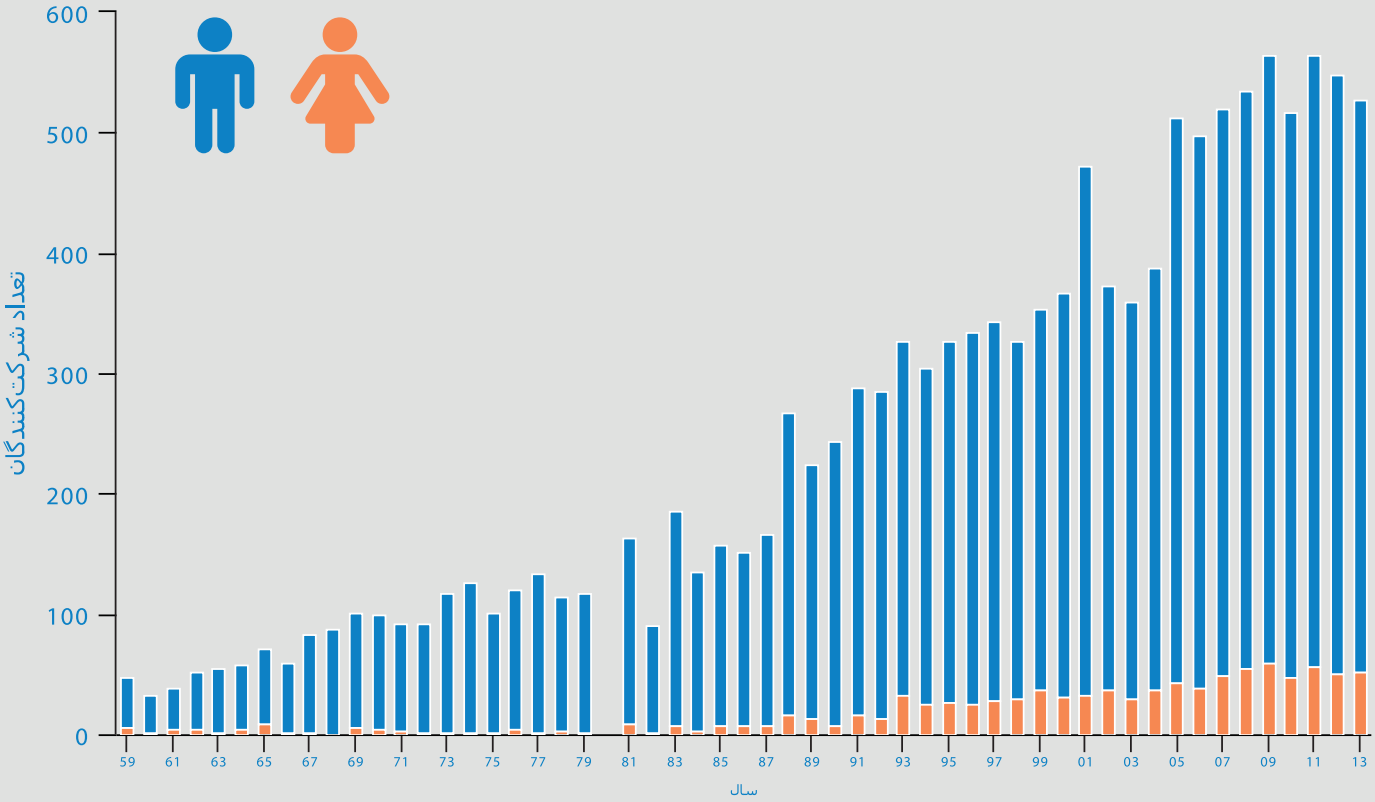
مغز ما علاقه‌مند به درک و تحلیل تصاویر است تا داده‌های متنی. به همین دلیل هرچه اطلاعات را به کمک تصویر نمایش دهیم فهم آن برای مغز راحت‌تر خواهد بود.

از این شماره به بعد سعی می‌کنیم بخشی با محتوای گوناگون به روش اینفوگرافیک داشته باشیم.

موضوع اینفوگرافیک این شماره، المپیاد جهانی ریاضی است که امیدواریم از آن لذت ببرید.

تصویر دسته‌جمعی تیم ملی جمهوری اسلامی ایران در المپیاد جهانی ریاضی سال ۲۰۰۸ به همراه پروفسور پلیکان

المپیاد جهانی ریاضی در یک نگاه



المپیاد جهانی ریاضی از سال 1959 تاکنون برگزار شده است

تنها در سال 1980 به دلیل مشکلات مالی هیچ کشوری میزبانی مسابقات را نپذیرفت

تعداد مدال‌های ایران در IMO

مدال طلا: 38

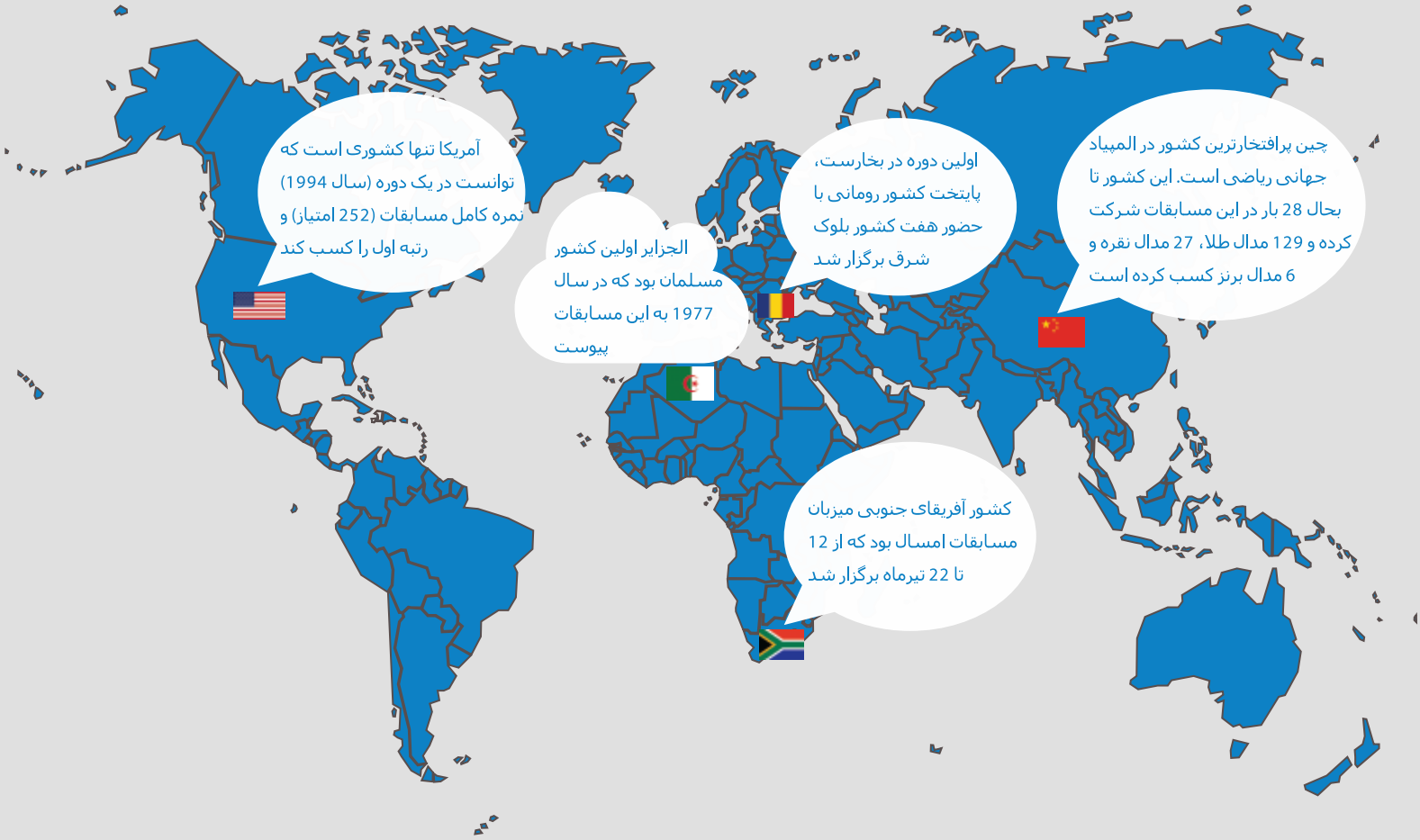
مدال نقره: 80

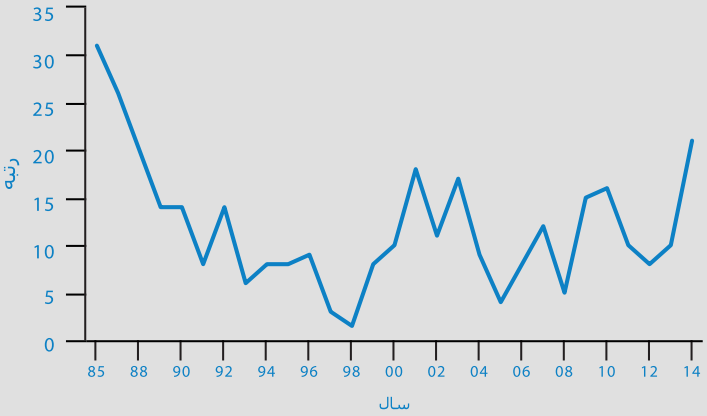
مدال برنز: 32

ایران از سال 1985 تا امروز 29 بار در المپیاد جهانی ریاضی شرکت کرده و هر سال نمایندگان خود را برای این مسابقات اعزام کرده است

المپیاد جهانی ریاضی در یک نگاه

المپیاد در گوشه و کنار جهان





رتبه‌های ایران در سال‌های مختلف در شکل روبرو مشخص شده است

ایران همواره به عنوان یک رقیب جدی در المپیاد جهانی ریاضی مطرح بوده و هست

بزرگترین افتخار ایران کسب رتبه نخست در سال 1998 است که با 5 مدال طلا و یک نقره بدست آمد

المپیاد جهانی ریاضی امسال

نمایی از شهر کیپ‌تاون

مسابقات امسال در شهر کیپ‌تاونِ آفریقای جنوبی برگزار شد

آفریقای جنوبی از سال 1992 در المپیاد جهانی ریاضی شرکت کرده و در مجموع 23 حضور داشته که نتیجه‌ی آن یک مدال طلا، نه نقره و 37 برنز بوده است

امسال 560 دانش‌آموز از 101 کشور در مسابقه شرکت کردند

اعضای تیم کشورمان موفق به کسب چهار نقره و دو برنز شدند و مقام21ام این رقابت‌ها را کسب کردند

تیم ملی المپیاد ریاضی سال ۲۰۱٤ (کیپ تاون)								
		۱	۲	۳	٤	٥	٦	مجموع
IRN۱	علی‌محمدی	۷	٥	۰	۷	۲	۰	۲۱
IRN۲	بهنام‌نیا	۷	۰	۱	۷	۱	۰	۱٦
IRN۳	غلامی	۷	۷	۰	۷	٥	۰	۳٦
IRN٤	حسین‌قلی‌زاده	۷	٦	۱	۷	۱	۰	۲۲
IRN٥	مختاریان	۷	٦	۰	۷	۲	۰	۲۲
IRN٦	سیدصالحی	۷	۳	۰	۷	۷	۰	۲٤
مجموع		٤۲	۲۷	۲	٤۲	۱۸	۰	۱۳۱

سوال سوم آزمون امسال طرح شده توسط ایران بود که اولین سوال هندسه‌ی کشورمان در تاریخ این رقابت‌ها به شمار می‌رفت که در آزمون اصلی وارد شده است

تا بحال پنج سوال از کشورمان به آزمون المپیاد جهانی ریاضی راه یافته است

حسین حضرتی
دانشجوی کارشناسی
مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی شریف

مقاله کوتاه: مجموعِ مجموعه‌ها

تعریف ۱. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از اعداد صحیح باشند، در این صورت جمع آن‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}.$$

به عنوان مثال می‌توان قضیهٔ چهار مربع فرما را به صورت $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}^۲ + \mathbb{Z}^۲ + \mathbb{Z}^۲ + \mathbb{Z}^۲$ نوشت. همچنین حدس گلدباخ به صورت $۲\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{P} + \mathbb{P}$ قابل نمایش است.[۱]

هدف ما بررسی تعداد اعضای $A + B$ بر حسب تعداد اعضای A و B است. کران بالای $|A + B| \leq |A||B|$ به سادگی قابل اثبات است. همچنین می‌توان نشان داد $|A + B| \geq |A| + |B| - ۱$. (نامساوی ۱)

اثبات. فرض کنید $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$ اعضای A و $b_۱ < b_۲ < \cdots < b_m$ اعضای B باشند، در این صورت داریم:

$$a_۱ + b_۱ < a_۲ + b_۱ < \cdots < a_n + b_۱ < a_n + b_۲ < \cdots < a_n + b_m$$

بنابراین $A + B$ حداقل $|A| + |B| - ۱$ عضو متمایز دارد.

از طرفی برای هر m و n مثالی از $|A| = n$، $|B| = m$ و $|A + B| = n + m - ۱$ وجود دارد.[۲] پس نامساوی ۱ بهترین کران پایین است که در حالت کلی می‌توان برای $|A + B|$ اثبات کرد. □

می‌خواهیم بررسی کنیم اگر تمام اعضا را به پیمانهٔ یک عدد طبیعی مثل n در نظر بگیریم، $|A + B|$ بر حسب $|A|$ و $|B|$ چه میزانی است. حالتی که n عددی اول باشد را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲. (کوشی-داونپورت)[۳] اگر $|C|_p$ را برابر تعداد باقی‌مانده‌های متمایز اعضای C به پیمانهٔ p در نظر بگیریم، داریم $|A + B|_p \geq \min\{p, |A|_p + |B|_p - ۱\}$.

---

[۱] در این‌جا $\mathbb{P}$ نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ اعداد اول و $\mathbb{Z}^۲$ نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ اعداد مربع کامل است.

[۲] اگر $A = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $B = \{۱, ۲, \ldots, m\}$، آن‌گاه $A + B = \{۲, ۳, \ldots, m + n\}$.

[۳] Cauchy-Davenport

اثبات. فرض کنید $|A|_p = n$، $|B|_p = m$ و $|A+B|_p = k$.[۴] ابتدا حکم را برای حالت $m+n-1 \geq p$ ثابت می‌کنیم:

$$|\{x\} - B|_p = |-B|_p = |B|_p = m.$$

بنابراین برای هر x، $\{x\} - B$ و A روی هم رفته حداقل $p+1$ عضو دارند، پس باید عضوی مشترک داشته باشند. آن عضو را a بنامید.

$$a \in \{x\} - B \Rightarrow \exists b \in B : a = x - b \Rightarrow a + b = x.$$

بنابراین از آن‌جایی که $a \in A$ و $b \in B$، داریم $x \in A+B$، پس $|A+B|_p = p$. حال اجازه دهید حکم را برای حالت $m+n-1 < p$ بررسی کنیم. در نظر بگیرید:

$$f(x,y) = \prod_{c \in A+B} (x+y-c) = \sum_{i+j \leq k} f_{i,j} x^i y^j.$$

می‌دانیم اگر یک چندجمله‌ای تک‌متغیره با درجهٔ t، تعداد زیادی (بیش از t) ریشه داشته باشد، متحد با صفر است. هدف ما این است که با استفاده از نتیجه‌ای مشابه برای چندجمله‌ای‌های دو متغیره در حالتی که درجهٔ $f(x,y)$ که برابر k است کم باشد ($k < m+n-1$) به تناقض برسیم؛ چون می‌دانیم تعداد ریشه‌های $f(x,y)$ برابر mn است. (در واقع برای هر $a \in A$ و $b \in B$، (a,b) ریشه‌ای از $f(x,y)$ است.)
می‌دانیم برای هر $x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_t \in \mathbb{Z}$، چندجمله‌ای $g(x)$ با ضرایب صحیح و درجهٔ حداکثر $t-1$ وجود دارد که

$$g(x_i) \equiv y_i \pmod{p}.$$

(کافی است در نظر بگیرید

$$g(x) = \sum_{i=1}^{t} y_i \, (x-x_1) \cdots \widehat{(x-x_i)} \cdots (x-x_t) \; \Big((x_i-x_1) \cdots \widehat{(x_i-x_i)} \cdots (x_i-x_t)\Big)^*$$

که در این‌جا $\widehat{(x-x_i)}$ نشان دهندهٔ حذف پرانتز $(x-x_i)$ از ضرب و x^* نشان دهندهٔ وارون ضربی x به پیمانهٔ p است.)
بنابراین برای هر i، چندجمله‌ای $g_i(x)$ با درجهٔ حداکثر $n-1$ وجود دارد که

$$\forall x \in A : g_i(x) \equiv x^i \pmod{p},$$

و همچنین $h_i(x)$ با درجهٔ حداکثر $m-1$ وجود دارد که

$$\forall y \in B : h_i(y) \equiv y^i \pmod{p}.$$

[۴] از این‌جا به بعد منظورمان از A و B مجموعهٔ باقی‌مانده‌های دو مجموعهٔ اصلی A و B بر p است و $A+B$ هم جمع پیمانه‌ای آن‌ها را نشان می‌دهد.

بنابراین برای هر $x \in A$ و $y \in B$ داریم:

$$f(x,y) = \sum_{\substack{i<n \\ j<m \\ i+j\le k}} f_{i,j}x^iy^j + \sum_{\substack{i\ge n \\ i+j\le k}} f_{i,j}g_i(x)y^j + \sum_{\substack{j\ge m \\ i+j\le k}} f_{i,j}x^ih_j(y) \qquad (*)$$
$$\equiv P(x,y) = \sum_{\substack{i<n \\ j<m}} P_{i,j}x^iy^j = \sum_{i\le n-1} t_i(y)x^i \pmod p.$$

بنابراین برای هر $y \in B$ چندجمله‌ای $P_y(x) = P(x,y)$ که چندجمله‌ای تک متغیره با درجهٔ حداکثر $n-1$ بر حسب x است باید حداقل n ریشه داشته باشد،(تمام اعضای A) پس چندجمله‌ای $P_y(x)$ (برای هر $y \in B$) باید به پیمانهٔ p متحد با صفر باشد. یعنی برای هر $y \in B$ باید داشته باشیم $t_i(y) \equiv 0 \pmod p$. به ازای هر i، چندجمله‌ای $t_i(y)$ که از درجهٔ کم‌تر از m است حداقل m ریشه به پیمانهٔ p دارد،(تمام اعضای B) پس باید به پیمانهٔ p متحد با صفر باشد. بنابراین برای هر i:

$$t_i(y) = P_{i,m-1}y^{m-1} + P_{i,m-2}y^{m-2} + \cdots + P_{i,1}y + P_{i,0}$$

به پیمانهٔ p متحد با صفر است. پس برای هر i و j داریم $P_{i,j} \equiv 0 \pmod p$. حال فرض کنید $k < m+n-1$، در این صورت u و v وجود دارند که $u < n$، $v < m$ و $u+v = k$. از آن جایی که جملهٔ x^uy^v در جمع دوم و سوم در تساوی $*$ ظاهر نشده (چرا؟) ضریب این جمله در $P(x,y)$ برابر $f_{u,v}$ است. بنابراین $f_{u,v} = P_{u,v} \equiv 0 \pmod p$. اما به وضوح $f_{u,v} = \binom{k}{v}$، پس از آن‌جایی که $k < p$، $f_{u,v}$ نسبت به p اول است که با رابطهٔ $f_{u,v} \equiv 0 \pmod p$ در تناقض است. تناقض حاصل نشان می‌دهد فرض ما مبنی بر $k < m+n-1$ غلط بوده است. پس $k \ge m+n-1$ و حکم به صورت کامل اثبات می‌شود. □

تمرین

۱. بررسی کنید حالت تساوی $|A+B|_p = |A|_p + |B|_p - 1$ با شرط $|A|_p + |B|_p - 1 < p$ در چه صورتی رخ می‌دهد.

۲. ثابت کنید برای هر $k \in \mathbb{N}$ و عدد اول p، معادلهٔ $a^2 + b^2 \equiv k \pmod p$ جواب دارد.

۳. ثابت کنید برای هر عدد اول $p > 5$ و عدد طبیعی k که بر p بخش‌پذیر نیست، $a^2 + b^2 \equiv k \pmod p$ جوابی دارد که هیچ کدام از a و b بر p بخش‌پذیر نباشند.

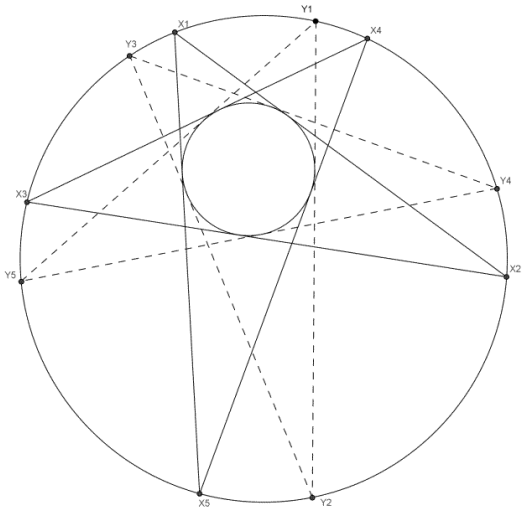
۴. ثابت کنید برای هر عدد اول p و عددهای طبیعی k و l معادلهٔ $a_1^l + a_2^l + \cdots + a_l^l \equiv k \pmod p$ جواب دارد.

برای مطالعهٔ بیش‌تر در مباحث از این دست (در صورت آشنایی با جبر مجرد) می‌توانید به کتاب Structural Additive Theory (2013) نوشتهٔ David J.Grynkiewicz از انتشارات Springer مراجعه کنید.

فرنوش هاشمی
دانش‌آموز ریاضی فیزیک
دبیرستان فرزانگان ۱ تهران

اثبات هندسی قضیهٔ پونسله در حالت $n = ۴$

قضیهٔ «پونسله» بیان می‌کند که اگر دو دایرهٔ $w_۱$ و $w_۲$ متداخل باشند و از نقطه‌ای روی دایرهٔ $w_۲$ مانند $A_۱$ بر دایرهٔ $w_۲$ خطی مماس رسم کنیم تا دایرهٔ $w_۲$ را در نقطهٔ $A_۲$ قطع کند و این عمل را تکرار کنیم و پس از انجام تعداد متناهی از این عمل (n مرتبه) به نقطهٔ $A_۱$ برگردیم آنگاه از هر نقطهٔ دیگری روی $w_۱$ نیز این عمل را شروع کنیم، پس از n مرتبه رسم مماس، به نقطهٔ اولیه برمی‌گردیم.(شکل ۱.۸)

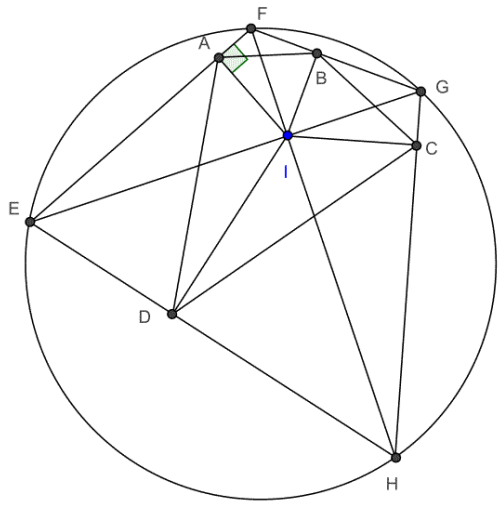


شکل ۱.۸. مسئله پونسله برای $n = ۵$

در این نوشتار ابتدا چند مسئلهٔ سادهٔ هندسی را طرح می‌کنیم و به اثبات آنها می‌پردازیم سپس قضیهٔ پونسله را در حالت $n = ۴$ نتیجه می‌گیریم. به این ترتیب که یک چهارضلعی محاطی و محیطی در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که بین شعاع دایرهٔ محیطی و محاطی آن و هم‌چنین فاصلهٔ مراکز این دو دایره، رابطه‌ای مستقل از شکل چهارضلعی وجود دارد و با داشتن این رابطه قضیه پونسله را برای $n = ۴$ اثبات می‌کنیم.

لم ۱. هر چهارضلعی که هم محیطی و هم محاطی باشد، قابل محاط شدن در یک چهارضلعی دیگر است، به صورتی که آن چهارضلعی محاطی است و قطرهای آن نیز بر هم عمود هستند و محل تقاطع اقطار آن همان I، مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی مفروض است.

اثبات. نیمساز خارجی زاویه‌های $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ را رسم می‌کنیم تا چهارضلعی $EFGH$ ایجاد شود.(شکل ۲.۸)



شکل ۲.۸

آنگاه داریم :

$$\left.\begin{aligned} \angle AFB + \angle AIB &= ۱۸۰^\circ \\ \angle AIB + \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲} = \angle AIB + \angle BAI + \angle IBA &= ۱۸۰^\circ \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \angle AFB = \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲}$$

به طریق مشابه بدست می‌آید که $\angle DHC = \frac{\angle C}{۲} + \frac{\angle D}{۲}$ که نتیجه می‌دهد:

$$\angle AFB + \angle DHC = \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲} + \frac{\angle C}{۲} + \frac{\angle D}{۲} = \frac{\angle A + \angle B + \angle C + \angle D}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

پس $EFGH$ محاطی است.حال داریم :

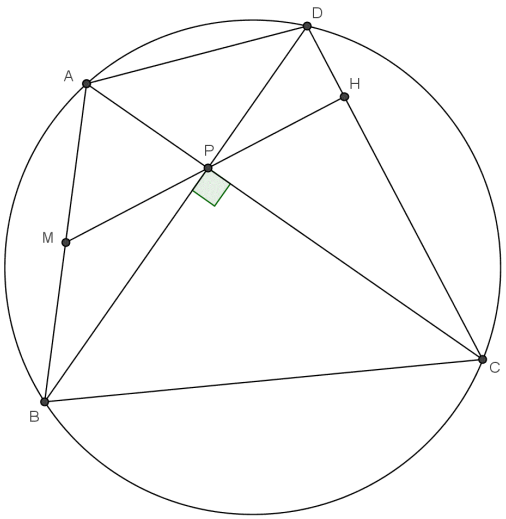
$$\left.\begin{aligned} \angle FIB = \angle FAB = ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} \\ \angle HIC = \angle HDC = ۹۰^\circ - \frac{\angle D}{۲} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \angle FIB + \angle HIC + \angle BIC = \\ ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} + ۹۰^\circ - \frac{\angle D}{۲} - (۱۸۰^\circ - \angle IBC - \angle ICB) \\ = ۳۶۰^\circ - (\frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲} + \frac{\angle C}{۲} + \frac{\angle D}{۲}) \\ = ۱۸۰^\circ \end{cases}$$

در نتیجه F, I و H و به طریق مشابه E, I و G هم‌خط‌اند. پس I محل برخورد اقطار چهارضلعی است. هم‌چنین بدست می‌آید :

$$\left.\begin{array}{l}\angle FIB = \angle FAB = ۹۰^\circ - \dfrac{\angle A}{۲}\\ \angle BIG = \angle BCG = ۹۰^\circ - \dfrac{\angle C}{۲}\end{array}\right\} \Longrightarrow \angle FIB + \angle BIG = ۱۸۰^\circ - \frac{\angle A + \angle C}{۲} = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ$$

پس اقطار این چهارضلعی بر هم عمودند. □

لم ۲. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی محاطی باشد و اقطارش در P بر هم عمود باشند. آنگاه میانهٔ مثلث APB ارتفاع مثلث CPD خواهد بود.(شکل ۳.۸)



شکل ۳.۸

اثبات. میانهٔ مثلث APB را رسم می‌کنیم و ثابت می‌کنیم این میانه بر DC عمود است.
چون PM میانهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه است ، می‌دانیم $PM = AM = BM$ ، که نتیجه می‌دهد مثلث PMB متساوی‌الساقین است. پس داریم :

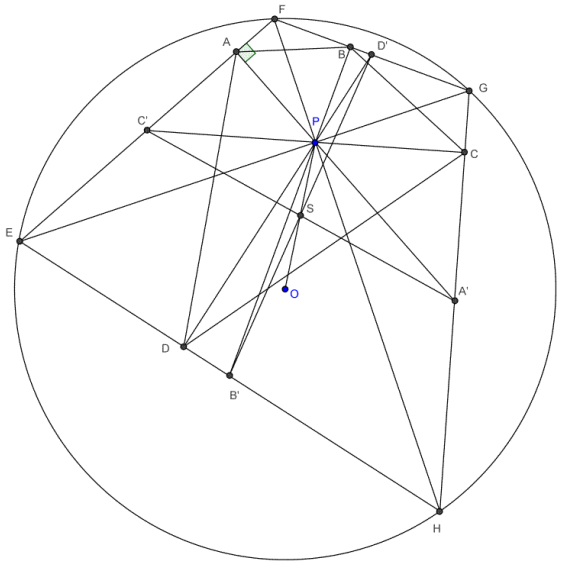
$$\angle DPH = \angle MPB = \angle ABP = \angle PCD \angle PCD$$

□

لم ۳. با توجه به شکل ۲.۸ اگر شعاع دایرهٔ محیطی $EFGH$ و $ABCD$ به ترتیب برابر x و R باشد و P محل برخورد اقطار $EFGH$ باشد آنگاه بدست می‌آید:

$$۴R^۲ = ۲x^۲ - OP^۲$$

اثبات. بنا بر لم ۲ اگر از P بر EH عمود کنیم ، امتداد آن از وسط FG می‌گذرد. به طریق مشابه امتداد همهٔ عمودهای وارد از نقطهٔ P بر اضلاع چهارضلعی از وسط ضلع‌های روبرو می‌گذرند. پس هشت‌ضلعی $ABCDA'B'C'D'$ محاطی خواهدبود.(اثبات به عهده خواننده)



شکل ۴.۸

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} D'F = D'G \\ A'P = A'H = A'G \end{array}\right\} \Rightarrow D'A' \parallel FH \\ \left.\begin{array}{r} D'F = D'G \\ C'P = C'E = C'F \end{array}\right\} \Rightarrow D'C' \parallel EG \\ FH \perp EG \end{array}\right\} \Rightarrow D'C' \perp D'A'$$

حال چون تمام زوایای $A'B'C'D'$ قائمه‌اند ، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع و مستطیل خواهد بود. S را محل تقاطع قطرهای این مستطیل در نظر می‌گیریم،پس S مرکز دایرهٔ محیطی $A'B'C'D'$ و در نتیجه $ABCD$ است.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} D'F = D'G \Rightarrow OD' \perp FG \Rightarrow OD' \parallel PB \\ \text{به طریق مشابه} \Rightarrow OB' \parallel PD \end{array}\right\} \Rightarrow OD'PB' \text{ متوازی‌الاضلاع است} \\ SB' = SD' \end{array}\right\} \Rightarrow S \in OP, OS = SP$$

می‌دانیم در یک متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات طول اضلاع با مجموع مربعات طول قطرها برابر است. پس:

$$OP^۲ + B'D'^۲ = ۲OB'^۲ + ۲OD'^۲ \qquad (۱.۸)$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} (۸.۱) \\ OD' = PB' = \dfrac{EH}{۲} \\ OB' = PD' = D'G \end{array}\right\} \Rightarrow OP^۲ + B'D'^۲ = ۲(GD'^۲ + CD'^۲) = ۲OG^۲ = ۲x^۲ \\ B'D' = ۲R \end{array}\right\} \Rightarrow ۴R^۲ = ۲x^۲ - OP^۲$$

□

لم ۴. در شکل ۲.۸ اگر شعاع دایرهٔ محیطی $EFGH$ ، x و شعاع دایره‌ی محاطی $ABCD$ ، r باشد، آنگاه :

$$r = \frac{x^۲ - OP^۲}{۲x}$$

اثبات. می‌دانیم که P همان I مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی است و داریم: $\angle BGP = \angle BCP$

$$\left.\begin{array}{r} r = PN \Rightarrow r = PC.\sin\angle PCN \\ PC = PH.\sin\angle FHG \\ PH = HG.\sin\angle EGH \end{array}\right\} \Rightarrow r = HG.\sin\angle FGP.\sin\angle FHG.\sin\angle EGH$$

$$\left.\begin{array}{r} \sin\angle FGP.\sin\angle FHG = \dfrac{EF}{۲x}.\dfrac{FG}{۲x} \\ HG.\sin\angle EGH = PH \end{array}\right\} \Longrightarrow r = \frac{EF.FG}{۴x^۲}.PH$$

$$EF.FG = \frac{FP.EG}{\sin\angle EFG} \Rightarrow r = \frac{PH.PF.EG}{۴x^۲.\sin\angle EFG} = \frac{PH.PF}{۲x} = \frac{x^۲ - OP^۲}{۲x}$$

□

نتیجه ۵. با توجه به شکل ۴.۸ قبلاً ثابت کردیم S مرکز دایرهٔ محیطی شکل است و P مرکز دایرهٔ محاطی آن. پس فاصلهٔ مراکز دوایر محیطی و محاطی برابر SP خواهد بود و هم‌چنین طبق اثبات لم ۳ می‌دانیم $OP = ۲SP$ ، پس اگر $SP = d$ باشد آنگاه:

$$r = \frac{x^۲ - (۲d)^۲}{۲x} = \frac{x^۲ - ۴d^۲}{۲x}$$

$$۴R^۲ = ۲x^۲ - ۲d^۲ \Rightarrow ۴R^۲ = ۲x^۲ - ۴d^۲ \Rightarrow ۲R^۲ = x^۲ - ۲d^۲ \Rightarrow R = \sqrt{\frac{x^۲ - ۲d^۲}{۲}}$$

$$۲R^۲ = x^۲ - ۲d^۲ \Rightarrow x^۲ = ۲R^۲ + ۲d^۲ \Rightarrow x = \sqrt{۲R^۲ + ۲d^۲}$$

$$r = \frac{x^۲ - ۴d^۲}{۲x} \Rightarrow x^۲ - ۴d^۲ - ۲xr = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲xr - ۴d^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲R^۲ + ۲d^۲ - ۲r\sqrt{۲R^۲ + ۲d^۲} - ۴d^۲ = ۰ \Rightarrow R^۲ - d^۲ = r\sqrt{۲R^۲ + ۲d^۲}$$

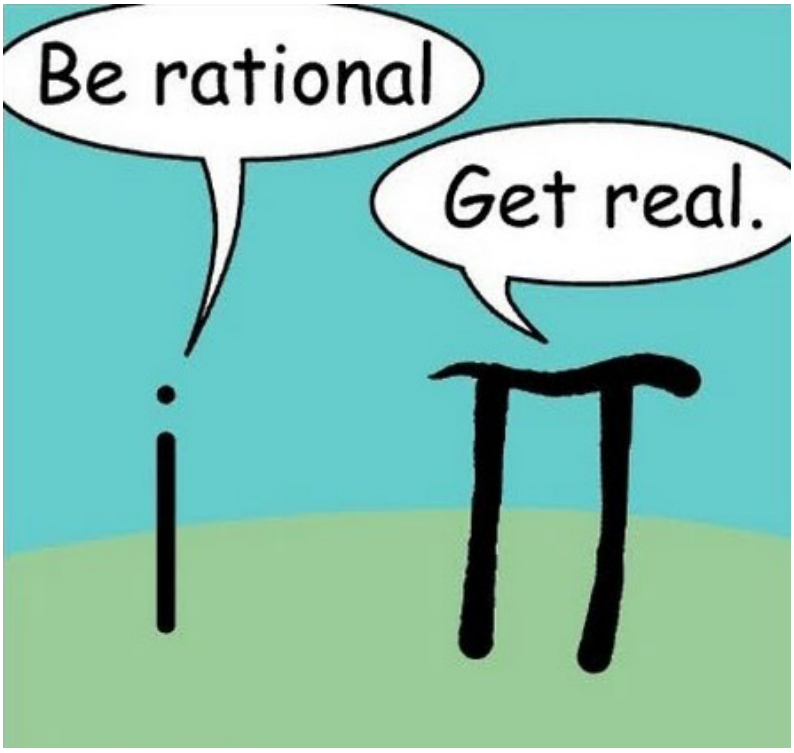
$$\Rightarrow R^۴ + d^۴ - ۲R^۲d^۲ = ۲R^۲r^۲ + ۲d^۲r^۲ \Rightarrow R^۴ + d^۴ - ۲R^۲d^۲ - ۲R^۲r^۲ - ۲d^۲r^۲ = ۰$$

پس برای دو دایرهٔ محاطی و محیطیِ یک چهارضلعی با شعاع‌های r و R به طوری که فاصله مرکزهایشان d باشد رابطهٔ زیر برقرار است :

$$R^۴ + d^۴ - ۲R^۲d^۲ - ۲R^۲r^۲ - ۲d^۲r^۲ = ۰$$

اثبات. حال می‌خواهیم قضیهٔ پونسله را برای $n = ۴$ نتیجه بگیریم. فرض کنید برای دو دایره این رابطه طولی برای $(R, r_۱, d)$ وجود دارد و با شروع از نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ بزرگتر و رسم چهار مماس متوالی بر دایرهٔ کوچکتر، به نقطهٔ اولیه نرسیم و به نقطه‌ای قبل/بعد از آن برسیم. حال مرکز دایرهٔ کوچکتر را تغییر ندهید ولی شعاع آن را کوچک و کوچکتر/بزرگ و بزرگتر کنید و مماس‌ها را همچنان رسم شده فرض کنید، بالاخره در شعاعی مثل $r_۲ \neq r_۱$ چهارمین مماس به نقطهٔ اولیه می‌رسد. پس بنابر رابطهٔ طولی بدست‌آمده این رابطه برای $(R, r_۲, d)$ هم برقرار است. ولی در چندجمله‌ای فوق r فقط با توان دوم و علامت منفی ظاهر شده است، پس نمی‌تواند به ازای $r_۱$ و $r_۲$ برابر با صفر باشد. بنابراین تناقض حاصل نشان می‌دهد که فرض اولیه اشتباه بوده و در همان ابتدا پس از چهار مماس به نقطهٔ اولیه می‌رسیم. □

$e^{i\pi} = -۱!$



هادی خدابنده
دانشجوی کارشناسی
مهندسی نرم‌افزار
دانشگاه صنعتی شریف

ماهان تجربه‌کار
دانشجوی کارشناسی
برق
دانشگاه صنعتی شریف

حسین حضرتی
دانشجوی کارشناسی
عمران
دانشگاه صنعتی شریف

سیدمحمدحسین سیدصالحی
دانش‌پژوه
المپیاد ریاضی
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

محمدجواد شعبانی زهرایی
دانشجوی کارشناسی
مهندسی نرم‌افزار
دانشگاه صنعتی شریف

مبین یحیی‌زاده
دانشجوی کارشناسی
مهندسی نرم‌افزار
دانشگاه صنعتی شریف

مسائل

۱. فرض کنید a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند که $a^۲ + b^۲ = ۱$. ثابت کنید

$$ab + \max\{a, b\} \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

۲. جهان‌گردی که با قطار به شکرستان رفته بود، تمام روز را در شهر قدم زد. در رستورانی واقع در یک میدان شام خورد و تصمیم گرفت به ایستگاه برگردد و در ضمن، تنها از خیابان‌هایی عبور کند که تا آن ساعت فرد بار از آن‌ها گذشته بود. ثابت کنید جهان‌گرد در هر حال می‌تواند با این شرایط خود را به ایستگاه برساند.

۳. تمام سه‌تایی‌های (p, q, r) از اعداد اول را بیابید که $p^q + p^r$ مربع کامل باشد.

۴. مثلث ABC و ω دایرهٔ محیطی آن، داده شده‌اند. فرض کنید l خط مماس بر ω در نقطهٔ A باشد. دایرهٔ به مرکز B و به شعاع AB ضلع AC و خط l را به ترتیب در D و E (غیر از A) قطع می‌کند. ثابت کنید DE از مرکز ارتفاعی مثلث ABC می‌گذرد.

۵. برای عدد طبیعی $n > ۳$ و اعداد حقیقی و مثبت $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ با حاصل‌ضرب واحد ثابت کنید

$$\frac{۱}{۱ + x_۱ + x_۱x_۲} + \frac{۱}{۱ + x_۲ + x_۲x_۳} + \cdots + \frac{۱}{۱ + x_n + x_nx_۱} > ۱$$

۶. گراف جهت‌دار G داده شده. ثابت کنید مجموعهٔ مستقل $S(G)$ از G وجود دارد طوری که به هر رأس G بتوان از رأسی از $S(G)$ با مسیری به طول حداکثر ۲ رسید. (مجموعهٔ مستقل زیر مجموعه‌ای از رأس‌های گراف است که هیچ مسیری بین هیچ دو رأسی از آن وجود ندارد.)

۷. تمام سه‌تایی‌های (a,b,c) از اعداد طبیعی را بیابید که abc بر $(a-۱)(b-۱)(c-۱)$ بخش‌پذیر باشد.

۸. فرض کنید $B_۱, B_۲, \ldots, B_n$، n تا کره به شعاع واحد باشند که به گونه‌ای در فضا قرار گرفته‌اند که هر کره دقیقاً بر دو کرهٔ دیگر مماس است. فرض کنید P نقطه‌ای خارج از همهٔ کره‌ها باشد، و $C_۱, C_۲, \ldots, C_n$، n نقطهٔ تماس باشند. طول مماس وارد از P بر B_i را با t_i نشان می‌دهیم. ثابت کنید $\prod_{i=۱}^n t_i \leq \prod_{i=۱}^n PC_i$.

۹. تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ داده شده است به طوری که برای هر عدد طبیعی n داریم $f(n+f(n))=f(n)$. همچنین می‌دانیم عددی طبیعی مانند $n_۰$ وجود دارد که $f(n_۰)=۱$. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $f(n)=۱$.

۱۰. برای اعداد حقیقی $a_۱<\cdots<a_n$ و $r>۰$ ثابت کنید تعداد سه‌تایی‌های (i,j,k) که $۱\leq i<j<k\leq n$ و $\frac{a_j-a_i}{a_k-a_j}=r$ از $\frac{n^۲}{۴}$ بیش‌تر نیست.

۱۱. مجموعه‌ای $n+۱$ عضوی از اعداد طبیعی داریم که عامل‌های اول اعضای آن در مجموع n تاست. ثابت کنید ضرب تعدادی از اعضای این مجموعه مربع کامل است.

۱۲. عددی حقیقی T با این شرط داده شده:

هر چهار عدد حقیقی نامنفی a,b,c,d با مجموع واحد را می‌توان طوری دور دایره چید که مجموع ضرب عناصر متوالی از T بیش‌تر نشود.

حداقل T را بیابید.

۱۳. اعداد طبیعی m و n (که $m<n$) و آرایشی از اعداد $۱,۲,\ldots,n^۲$ در جدولی $n\times n$ داده شده است. در هر سطر m عدد بزرگتر را قرمز و در هر ستون m عدد بزرگتر را آبی می‌کنیم. حداقل چند خانهٔ بنفش خواهیم داشت؟ (بنفش = قرمز + آبی)

۱۴. دو دایرهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نقاط A و B یکدیگر را قطع کرده‌اند. از نقطهٔ B یک خط می‌گذرانیم به طوری که $\omega_۱$ را در C و $\omega_۲$ را در D (به جز B) قطع می‌کند. Q نقطه‌ای دلخواه روی کمان AC از دایرهٔ $\omega_۱$ است که شامل B نیست. P نقطه‌ای دلخواه روی کمان AD از دایرهٔ $\omega_۲$ است که شامل B نیست. BQ و AC یکدیگر را در X و BP و AD یکدیگر را در Y قطع می‌کنند.O مرکز دایرهٔ محیطی ADC می‌باشد. ثابت کنید چهارضلعی $PYXQ$ محاطی است اگر و تنها اگر OB بر XY عمود باشد.

۱۵. تمام توابع یک‌به‌یک $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید که برای هر $n\in\mathbb{N}$ داشته باشیم $f(f(n))\leq\frac{f(n)+n}{۲}$.

۱۶. ★ زیر مجموعهٔ A از اعداد طبیعی داده شده به طوری که از هر ۱۵۴۶ عدد طبیعی متوالی حداقل یکی در A آمده. ثابت کنید دو عضو از A وجود دارند که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

۱۷. ★ یک توده گردو شامل ۱۰۰۰ گردو داریم. بابک و اشکان با شروع از بابک به نوبت بازی زیر را انجام می‌دهند. هر نفر در نوبت خود ۱ تا ۵ گردو را از توده برمی‌دارد. همچنین این را می‌دانیم که در کل می‌توان ۱۰ بار هم ۶ تا گردو برداشته شود. برای مثال بابک در ۷ مرحله ۶ گردو برمی‌دارد و اشکان در ۳ مرحله ۶ گردو برمی‌دارد بعد از پایان

این ۱۰ مرحله دیگر نمی‌توانند در مراحل بعدی ۶ گردو بردارند. آخرین کسی که بتواند گردو بردارد برنده است. چه کسی استراتژی برد دارد؟

۱۸. ★ مثلث ABC و ω دایرهٔ محیطی آن، داده شده‌اند. T وسط آن کمان BC از ω است که شامل A نیست. T' روبروی قطری T در ω است. اگر H پای عمود وارد از T' بر ضلع AC باشد ثابت کنید دایرهٔ محیطی مثلث AHB از وسط AT می‌گذرد.

۱۹. همهٔ توابع یک‌به‌یک $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که

$$f(x + f(y)) = g(x) + h(y)$$
$$g(x + g(y)) = h(x) + f(y)$$
$$h(x + h(y)) = f(x) + g(y)$$

۲۰. ★ دنباله‌های $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ از اعداد طبیعی در رابطهٔ بازگشتی $a_{i+1} = a_i + \lfloor b_i \rfloor$ و $b_{i+1} = b_i + \lfloor a_i \rfloor$ صدق می‌کنند. ثابت کنید nای وجود دارد که $a_n = b_n$.

۲۱. ★ فرض کنید $A = \{1, 2, \ldots, 2002\}$ و $M = \{1001, 2003, 3005\}$. زیرمجموعهٔ B از A را M-آزاد می‌گوییم اگر جمع هیچ دو عضوی از B در M نباشد. تعداد راه‌های افراز A به دو زیرمجموعهٔ M-آزاد را بیابید.

۲۲. ★ دایره‌های ω_1 و ω_2 با شعاع برابر یکدیگر را در X و Y قطع کرده‌اند. وتر AB از ω_2 موازی با XY رسم شده طوری که بر ω_1 در S مماس باشد. M نقطه‌ای دل‌خواه روی ω_2 است. XY خط‌های AM و BM را به ترتیب در A' و B' قطع می‌کند. SA' برای بار دوم ω_1 را در T قطع می‌کند. ثابت کنید با تغییر M، تقاطع دوم MB' با ω_1 نقطه‌ای ثابت است.

۲۳. در مجموعهٔ A از اعداد ۷۰ رقمی هر کدام از ارقام ۱ تا ۷ دقیقاً ۱۰ بار ظاهر شده‌اند. ثابت کنید هیچ دو عضوی از این مجموعه وجود ندارند که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

۲۴. ثابت کنید

$$2 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \cdots}}}}}$$

۲۵. ★ مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن، ω داده شده است. T وسط آن کمان BC از دایرهٔ ω است که شامل A نیست. نقاط X و Y به ترتیب روی اضلاع AB و AC داده شده‌اند که $\angle XTY = 90 - \angle A/2$. ثابت کنید $XY = BX + CY$.

۲۶. ★★ اعداد طبیعی r و s داده شده اند. دنبالهٔ $\{a_i\}$ از رابطهٔ بازگشتی زیر به دست می‌آید

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{i+1} = ra_i + sa_{i-1}$$

اگر $f_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ برای عددهای طبیعی a و b ثابت کنید $f_a f_b | f_{a+b}$.

حمیدرضا زیارتی
معلم و فعال در زمینه آموزش ریاضی

بازی و معما

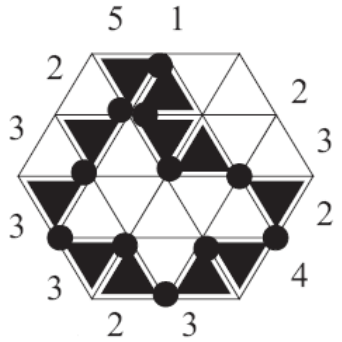
۱. سودوکو زیر را طوری با اعداد ۱ تا ۹ پر کنید که اعدادی که سمت راست و پایین جدول نوشته شده‌اند مجموع سه عدد ۳ رقمی واقع در آن سطر یا ستون باشند. اعداد ۳ رقمی به کمک خطوط مرزی مربع‌های ۳ × ۳ از هم جدا می‌شوند. (به این مثال حل شده برای سودوکو ۲ × ۲ با اعداد دو رقمی توجه کنید)

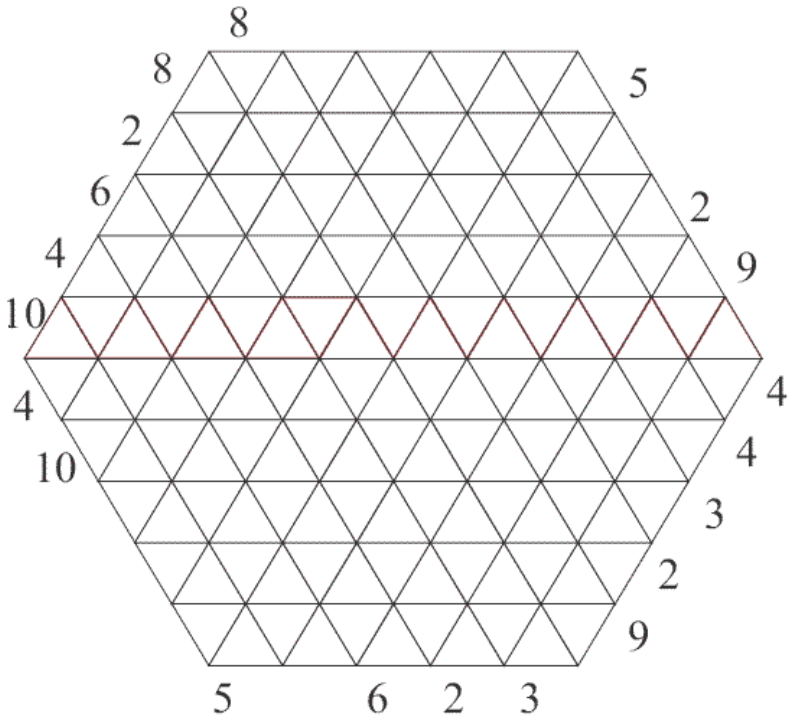
1	2	3	4	46
3	4	2	1	55
2	1	4	3	64
4	3	1	2	55
37	37	73	73	

									2007
									1629
									1881
									1638
									1026
									1737
									1566
									2025
									1476
2223	1548	1098	783	2331	1458	2061	2385	1098	

۲. الف) مثلث ABC چه ویژگی‌هایی داشته باشد تا بتوان آن را به دو مثلث متساوی‌الساقین افراز کرد؟
ب) چه مثلث‌هایی را می‌توان به سه مثلث متساوی‌الساقین افراز کرد؟
ج) ثابت کنید برای هر $n > ۳$، هر مثلث را می‌توان به n مثلث متساوی‌الساقین افراز کرد.

۳. در این معما، زنجیره‌ای از مثلث‌ها را می‌بینید که به کمک لولاهای دایره‌ای به هم وصل شده‌اند. شما باید یک چنین زنجیری را در صفحه‌ی شش‌ضلعی این معما قرار دهید طوری که اعداد کنار جدول، تعداد مثلث‌هایی از زنجیر باشند که در آن راستا قرار دارند. دقت کنید زنجیر نباید از روی خودش رد شود. به مثال حل شده دقت کنید:

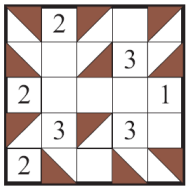


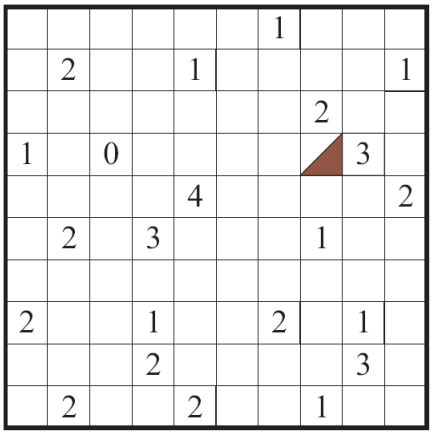


۴. تعداد زیادی ربات در آزمایشگاه قرار دارند. این ربات‌ها نیز مانند انسان‌ها یا راستگو هستند و یا دروغگو. این ربات‌ها جملات زیر را گفته‌اند. راستگو یا درئغگو بودن هر کدام را مشخص کنید:

A: اگر من راستگو باشم، B هم راستگو است.
C: اگر من راستگو باشم، هفته هفت روز دارد.
D: اگر E راستگو باشد، من دروغگو هستم.
F: اگر H دروغگو باشد، I هم دروغگو است.
G: یا H راستگو است یا I دروغگو است.
K: K راستگو است.
L: اگر K راستگو باشد، M دروغگو است.

۵. ۳۲ مثلث را در ۳۲ مربع از مربع‌های خالی جدول طوری قرار دهید که اعداد واقع در خانه‌های جدول تعداد مثلث‌هایی باشد که با این مربع در تماس هستند. هر مثلث دقیقاً نصف یک مربع را اشغال می‌کند و هیچ دو مثلثی نباید حتی یک رأس مشترک داشته باشند. با مثال حل شده برای ۱۱ مثلث دقت کنید:



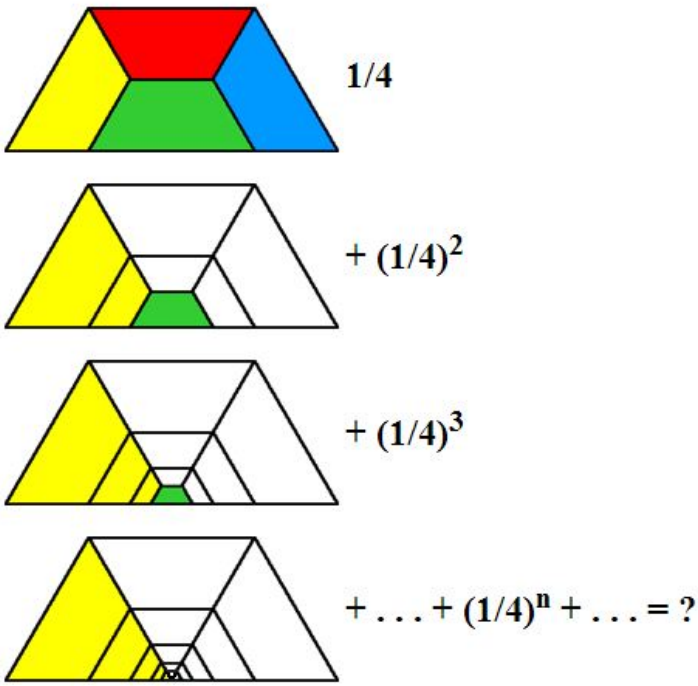


۶. حداقل چند پاره‌خط برای تشکیل ۲۰۰۷ مثلث لازم است؟ (به عنوان مثال، در شکل سمت راست، ۱۰ پاره‌خط، ۳۵ مثلث و در شکل سمت چپ، ۲۰۰۹ پاره‌خط، ۲۰۰۷ مثلث را تشکیل داده‌اند.)

۷. یک رستوران به دلیل تبلیغات تعداد زیادی مشتری جذب کرد ولی به دلیل کیفیت نامناسب غذاها، تعداد مشتری‌ها هفته به هفته کم شد به طوری که تعداد مشتری‌ها در هفته دوم فقط یک مفر بیشتر از $\frac{2}{3}$ مشتری‌های هفته اول بود و مشتری‌های هفته سوم فقط ۲ نفر بیش‌تر از $\frac{2}{3}$ مشتری‌های هفته دوم و مشتری‌های هفته چهارم فقط ۳

نفر بیش‌تر از $\frac{۲}{۳}$ مشتری‌های هفته سوم و به همین ترتیب مشتری‌ها کم می‌شدند تا در هفته‌ی آخر تعداد آن‌ها به ۵۳۳ نفر رسید که باعث تعطیلی رستوران شد. تعداد مشتری‌های این رستوران در هفته اول چند نفر بوده است و رستوران بعد از چند هفته تعطیل شده است؟

بدون محاسبات و شرح!



پویا هنریار
دانشجوی کارشناسی
مهندسی نرم‌افزار
دانشگاه صنعتی شریف

پاسخ مسائل شمارهٔ گذشته

۱. تعداد جواب های معادلهٔ $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{۲۰۱۴}$ را در مجموعهٔ اعداد طبیعی بیابید.

حل. جواب ۴ است.

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{۲۰۱۴}\to\frac{x+y}{xy}=\frac{۱}{۲۰۱۴}\to xy=۲۰۱۴(x+y)$$

اگر $(x,y)=d$ قرار دهیم آنگاه $x=dx_۱$ و $y=dy_۱$ که $(x_۱,y_۱)=۱$ بنابراین

$$d^۲x_۱y_۱=۲۰۱۴d(x_۱+y_۱)\to dx_۱y_۱=۲۰۱۴(x_۱+y_۱)$$

چون $(x_۱,y_۱)=۱$، $(x_۱y_۱,x_۱+y_۱)=۱$ (این را می توان به راحتی تحقیق کرد). پس برای برقراری تساوی فوق می بایست $x_۱y_۱۲۰۱۴$ پس تعداد جواب ها برابر ۴ تاست.

۲. الف) ثابت کنید مجموع وارون اعداد اول نا متناهی است.

حل. می دانیم که $\sum_{n\in\mathbb{Z}^{>۰}}\frac{۱}{n}$ واگراست (چرا؟). این مجموع را می توان به صورت $\prod_{k=۱}^{\infty}(۱+\frac{۱}{p_k}+\frac{۱}{p_k^۲}+...)$ نوشت که $p_۱<p_۲<...$ کل اعداد طبیعی اول به طور صعودی می باشد. چون $۱+\frac{۱}{p}+\frac{۱}{p^۲}+...\le ۱+\frac{۲}{p}$ برای $۲\le p$ بنابراین $\infty>\sum\frac{۱}{n}=\prod_{k=۱}^{\infty}(۱+\frac{۱}{p_k}+\frac{۱}{p_k^۲}+...)\le\prod_{k=۱}^{\infty}(۱+\frac{۲}{p_k})$.

بنابر نابرابری حسابی-هندسی $\left(۱+\frac{۲\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{p_k}}{n}\right)^n=\left(\frac{\sum_{k=۱}^{n}(۱+\frac{۲}{p_k})}{n}\right)^n\ge\prod_{k=۱}^{n}(۱+\frac{۲}{p_k})$. بنابراین $\left(۱+\frac{۲\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{p_k}}{n}\right)^n$ برای n بزرگ می بایست از هر عددی بزرگتر شود. اما اگر $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{p_k}\le m$ باشد آنگاه عبارت مذکور برای کمتر از $e^{۲m}$ می‌باشد (در اینجا از این نکته استفاده شد که $(۱+\frac{۱}{n})^n<e$ که e عدد نپر است) که با آنچه گفته شد در تناقض است. پس مجموع وارون اعداد اول نامتناهی است.

ب) ثابت کنید نامتناهی عدد اول وجود دارند که در نمایش دهدهی آنها بلوک رقمی "۱۳۹۳" آمده باشد.

حل. کافیست نشان دهیم

$$\sum_{n\ has\ no\ ''۱۳۹۳''\ block}\frac{۱}{n}<\infty(*)$$

اما

$$\sum_{n\, has\, no''۱۳۹۲''\, block} \frac{۱}{n} \leq \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{N^k} \# A_{N^k+۱, N^{k+۱}}$$

که در آن $N = ۱۰۰۰۰$ و $A_{m,n} = \{x \in \mathbb{Z}^{>۰} : m \leq x \leq n, x\, has\, no''۱۳۹۲''\, block\}$ و منظور از $\# A$ تعداد اعضای مجموعه ی A می باشد.به وضوح می توان دید $\# A_{m,n} \leq \# A_{۱,n}$ و با کمی دقت می توان دریافت که $A_{۱,N^k} \leq (N-۱)^k + ۱ < ۲(N-۱)^k$ (چرا؟). بنابر این

$$(*) \leq \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{N^k} \# A_{۱,N^{k+۱}} \leq ۲N \sum_{k=۰}^{\infty} (\frac{N-۱}{N})^{k+۱}$$

از آنجا که $\frac{N-۱}{N} < ۱$ و اگر $a < ۱$ سری هندسی $\sum_{k=۰}^{\infty} a^k$ همگراست، بنابراین (*) همگراست و آنچه گفتیم به اثبات می رسد.

۳. ★ یک عدد طبیعی را "دوست داشتنی" می گوییم اگر نتوان آن را به صورت $\frac{x^۲-۱}{y^۲-۱}$ که x, y اعداد صحیح بزرگتر از یک هستند نوشت. ثابت کنید بی نهایت عدد دوست داشتنی وجود دارد.

حل. ادعا می کنیم اگر p عددی اول باشد $p^۲$ را نمی توان به صورت $\frac{x^۲-۱}{y^۲-۱}$ نمایش داد. فرض کنید بالعکس داشته باشیم

$$\frac{x^۲-۱}{y^۲-۱} = p^۲ \to x^۲ - ۱ = p^۲y^۲ - p^۲ \to p^۲ - ۱ = p^۲y^۲ - x^۲ = (py - x)(py + x)$$

اگر $py - x = ۱$ آنگاه $py + x = p^۲ - ۱$ و $۲py = p^۲$ که با فرد بودن p در تناقض است. در غیر این صورت $py - x > ۱$. اگر معادله را به پیمانه ی p در نظر بگیریم داریم $x^۲ \equiv ۱ \pmod p$ و بنابراین $py - x \equiv \pm ۱ \,(mod\, p)$. از آنجایی که $py - x$ مثبت و بزرگتر از ۱ است، $py - x \geq p - ۱$. همچنین x میبایست بزرگتر از ۱ باشد و بنابراین $yp + x > p + ۱$ و در نهایت $(py - x)(py + x) > (p-۱)(p+۱)$ که تناقض است.

۴. ★ تمامی x, y های صحیح را بیابید که در معادله ی زیر صدق کنند:

$$x^۳ + (x+۱)^۳ + \ + (x+۷)^۳ = y^۳$$

حل. جواب ها $(-۵, -۶), (-۴, -۴), (-۳, -۴), (-۲, ۶)$ هستند. فرض کنید

$$P(x) = x^۳ + (x+۱)^۳ + ... + (x+۷)^۳ = ۸x^۳ + ۸۴۰x^۲ + ۴۲۰x + ۷۸۴$$

اگر $x \geq ۰$ آنگاه

$$(۲x+۷)^۳ = ۸x^۳ + ۸۴x^۲ + ۲۹۴x + ۳۴۳ < P(x) < ۸x^۳ + ۱۲۰x^۲ + ۶۰۰x + ۱۰۰۰ = (۲x+۱۰)^۳$$

بنابراین $۲x + ۷ < y < ۲x + ۱۰$ و بنابراین $y = ۲x + ۸, ۲x + ۹$ ولی هیچ کدام از معادلات $P(x) - (۲x+۸)^۳ = ۰$ و $P(x) - (۲x+۹)^۳ = ۰$ ریشه ی صحیح ندارند، بنابراین هیچ جوابی با $x \geq ۰$ یافت نمی شود. سپس توجه کنید که $P(-x-۷) = -P(x)$، بنابراین (x, y) یک جواب است اگرو تنها اگر $(-x-۷, -y)$ یک جواب باشد. بنابراین هیچ جوابی با $x \leq -۷$ یافت نمی شود. بنابراین اگر (x, y) جواب باشد آنگاه $-۶ \leq x \leq -۱$ که در نهایت جواب

های گفته شده را بدست می آوریم.

۵. ★★ فرض کنید $a_1, a_2, ...$ دنباله ای از اعداد صحیح مثبت باشند به طوری که $a_1 > 1$ و برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، a_n کوچکترین عدد طبیعی باشد به طوری که:

$$a_n \notin \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}, \gcd(a_n, a_{n-1}) > 1$$

ثابت کنید این دنباله شامل همه اعداد طبیعی بزرگ تر از یک است.

حل.

لم۱. فرض کنید $n > 1$ عددی صحیح باشد. اگر دنباله شامل نامتناهی مضرب n باشد، آنگاه شامل تمامی مضارب n است.

اثبات لم۱. فرض کنید kn مضرب دلخواهی ازn باشد. $kn + 1$ مضرب ابتدایی n را در دنباله در نظر بگیرید. هرکدام از آنها مقسوم علیه مشترک نابدیهی باkn دارد اعدادی که بلافاصله بعد از آنها می آیند متمایزند و در نهایت بزرگتر از kn می شوند و اینجاست که kn می بایست در دنباله استفاده شده باشد. پس kn در دنباله ی مد نظر ظاهر می‌شود.

لم۲. فرض کنید $n > 1$ عددی صحیح باشد. اگر دنباله شامل نامتناهی مضرب n باشد، آنگاه تمام اعداد صحیح بزرگتر از یک را شامل است.

اثبات لم۲. فرض کنید $m > 1$ عددی طبیعی و دلخواه باشد. با توجه به لم۱، دنباله تمامی مضارب n را داراست بنابراین تمامی مضارب mn را نیز داراست. بنابراین دنباله نامتناهی مضرب m را داراست و بنابراین m را داراست. چون m دلخواه بود اثبات کامل می‌شود.

اثبات مسئله. حال نشان می‌دهیم که دنباله می بایست دارای نامتناهی عدد اول باشد. برای رسیدن به تناقض فرض کنید این دنباله تنها شامل اعداد اول $p_1, p_2, ..., p_k$ باشد. باتوجه به لم ۲ این دنباله متناهی مضرب از هر کدام از آنها را دارد و بنابراین عددی مانند m در دنباله یافت می‌شود که بر هیچ یک از آنها بخش‌پذیر نیست.اگر q کوچکترین عدد اول باشد که مقسوم‌علیه m است، آنگاه q می‌بایست یا قبلا در دنباله آمده باشد یا بلافاصله بعد از m در دنباله بیاید که در هر حال تناقض است.

بنابراین دنباله بی نهایت عدد اول را داراست. برای هر عدد اول p کوچکترین عدد صحیح که با آن مقسوم‌علیه مشترک نابدیهی دارد$2p$ است. بنابراین $2p$ در دنباله آمده یا بلافاصله بعد از p می‌آید. بنابراین نامتناهی عدد زوج در دنباله داریم و بنابه لم۲ اثبات کامل می‌شود.

۶. فرض کنید زیرمجموعه ی A از $\mathbb{R}$ دارای این سه خاصیت باشد

(i) $1 \in A$

(ii) اگر $x \in A$ آنگاه $x^2 \in A$

(iii) اگر $x^2 - 4x + 4 \in A$ آنگاه $x \in A$

ثابت کنید عدد $2000 + \sqrt{2001}$ به این مجموعه تعلق دارد.

حل. حکم سوم را می توان به صورت $(x-2)^2 \in A \to x \in A$ بازنویسی کرد.

$$x \in A \to x^2 \in A \to ((x+2)-2)^2 \in A \to x+2 \in A$$

پس به استقرا ثابت می شود $x \in A \to x + ۲k \in A$ که k عددی طبیعی است.پس چون $۱ \in A$، $۲۰۰۱ \in A$ و بنابه شرط سوم $\sqrt{۲۰۰۱} + ۲ \in A$ و بنابراین $\sqrt{۲۰۰۱} + ۲۰۰۰ \in A$.

۷. فرض کنید $Q(x), P(x)$ چند جمله‌ای های تکین (ضریب بزرگترین توان آنها برابر ۱ است) با ضرایب حقیقی باشند و $degP(x) = degQ(x) = ۱۰$. ثابت کنید اگر معادله ی $P(x) = Q(x)$ جواب حقیقی نداشته باشد، آنگاه $P(x+۱) = Q(x-۱)$ جوابی حقیقی دارد.

حل: از آنجا که هر چند جمله ای از درجه ی فرد ریشه ی حقیقی دارد اگر $P(x)-Q(x) = ۰$ ریشه ی حقیقی نداشته باشد آنگاه می بایست ضریب $x^۹$ در $P(x), Q(x)$ باهم برابر باشد. ولی در این صورت ضریب $x^۹$ در $P(x+۱), Q(x-۱)$ با هم برابر نیست و ایندو نیز تکین اند. بنابراین $P(x+۱) = Q(x-۱)$ دارای جوابی حقیقی است.

۸. برای اعداد حقیقی مثبت a, b, c نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$\sqrt{ab(a+b)} + \sqrt{bc(b+c} + \sqrt{ca(c+a)} > \sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

حل.

$$(\sum_{cyc} \sqrt{ab(a+b)})^۲ = \sum_{cyc} ab(a+b) + ۲\sum_{cyc} \sqrt{ab^۲c(a+b)(b+c)} >$$
$$\sum_{cyc} ab(a+b) + ۶abc > \sum_{cyc} ab(a+b) + ۲abc = (a+b)(b+c)(c+a)$$

۹. ★★ همه تابع ها مانند $f : Q \to R$ را بیابید که برای اعداد گویای a, b, c

$$f(a+b+c) + f(a) + f(b) + f(c) = f(a+b) + f(b+c) + f(c+a) + f(۰)$$

حل. میگوییم تابع f خوب است اگر در تساوی گفته شده در صورت سوال صدق کند.

- اگر $f_۱, f_۲$ خوب باشند، $f_۱ + f_۲$ نیز خوب است.

- برای تمام اعداد حقیقی A, B, C، $f(x) = Ax^۲, f(x) = Bx, f(x) = C$ خوب هستند.

بنابراین تمام چند جمله ای های درجه دوم خوب هستند.

نکته. برای اعداد حقیقی a, b, c, t که $t \neq ۰$، چندجمله ای درجه دوم $P(x)$ موجود است به طوری که داشته باشیم $P(-t) = a, P(۰) = b, P(t) = c$.

لم.عددی صحیح و مثبت مانند n در نظر بگیرید. اگر f خوب باشد آنگاه چندجمله ای درجه دوم $P(x)$ وجود دارد که $f(\frac{m}{n}) = P(\frac{m}{n})$ برای تمام اعداد صحیح m.

اثبات لم. فرض کنید $P(x)$ چند جمله ای درجه دومی باشد که به ازای $x = -\frac{۱}{n}, ۰, \frac{۱}{n}$ برابر با $f(x)$ است و $g(x) = f(x) - P(x)$ را در نظر بگیرید. بنابراین g یک تابع خوب است که در تساوی $g(-\frac{۱}{n}) = g(۰) = g(\frac{۱}{n}) = ۰$ صدق می کند.بدست می‌آوریم $۲g(\frac{۱}{n}) + g(-\frac{۱}{n}) = g(\frac{۲}{n}) + ۳g(۰)$ و بنابر این $g(\frac{۲}{n}) = ۰$. حال برای هر m،

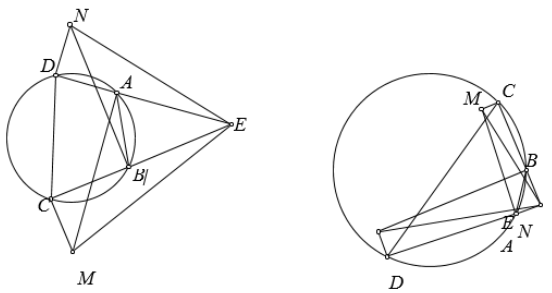
$a = b = \frac{۱}{n}$ و $c = \frac{m-۲}{n}$ در نظر بگیرید. بنابراین

$$g(\frac{m}{n}) + ۲g(\frac{۱}{n}) + g(\frac{m-۲}{n}) = ۲g(\frac{m-۱}{n}) + g(\frac{۲}{n}) + g(۰)$$

و بنابراین $g(\frac{m}{n}) = ۲g(\frac{m-۱}{n}) - g(\frac{m-۲}{n})$ بنابر این اگر هر دوی $g(\frac{m-۱}{n})$ و $g(\frac{m-۲}{n})$ صفر باشند، $g(\frac{m}{n})$ نیز صفر است. بنابراین $g(\frac{m}{n})$ برای تمام اعداد مثبت m برابر ۰ است.به طور مشابه متوجه می شویم $g(\frac{m}{n})$ برای تمام اعداد منفی m نیز برابر ۰ است.

اثبات مسئله. حال تابع خوب دلخواه f را در نظر بگیرید.بنابر لم، چند جمله ای درجه دوم $P(x)$ موجود است که $P(m) = f(m)$ برای تمام اعداد صحیح m. فرض کنید عدد صحیح $\frac{t}{n}$ موجود باشد به طوری که $f(\frac{t}{n}) \neq P(\frac{t}{n})$. با استفاده ی مجدد از لم می توان چند جمله ای درجه دوم $P_۲(x)$ را بدست آورد که $P_۲(\frac{m}{n}) = f(\frac{m}{n})$ برای تمام اعداد صحیح m برقرار باشد. در این صورت می توان دید که $P - P_۲$ متحد باصفر بوده که تناقض است و بنابراین $f \equiv P$ و مسئله حل شده.

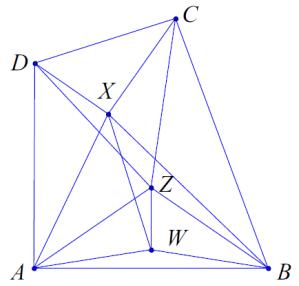
۱۰. فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی باشد و عمود های وارد بر AD, BC در A, C همدیگر را در M قطع می کنند و عمود های وارد بر AD, BC در D, B همدیگر را در N قطع می کنند. اگر خط های AD, BC یکدیگر را در E قطع کنند ثابت کنید $\angle DEN = \angle CEM$.



جواب. می‌دانیم $\angle ACE = \angle ACB = \angle BDA = \angle BDE$ و $\angle CEA = \angle DEB$. بنابراین $\triangle EAC \sim \triangle EBD$. همچنین از آنجایی که $\angle EAM = \angle ECM = ۹۰^\circ$، E, A, C, M روی دایره ای به قطر EM قرار دارند. بنابراین EM قطر دایره محیطی $\triangle EAC$ است. به طور مشابه EN قطر دایره محیطی EBD است. حال تبدیل تشابهی را در نظر بگیرید(دوران، تجانس، انتقال و بازتاب) که $\triangle EAC$ را به $\triangle EBD$ می‌برد.این تبدل همچنین مقابل قطری E در دایره محیطی $\triangle EAC$ را به مقابل قطری E در دایره ی محیطی $\triangle EBD$ میبرد. بنابراین چهارضلعی های $EACM$ و $EBDN$ با یکدیگر متشابه اند و بنابراین $\angle DEN = \angle CEM$.

۱۱. ★ فرض کنید $ABCD$ یک چهار ضلعی محدب باشد به طوری که $AB \nparallel CD$. X نقطه ای درون $ABCD$ است به طوری که $\angle ADX = \angle BCX < ۹۰$ و $\angle DAX = \angle CBX < ۹۰$. اگر عمود منصف های AB و CD در Y با هم برخورد کنند، ثابت کنید $\angle AYB = ۲\angle ADX$.

حل. نقطه‌ی Z را درون $ABCD$ طوری در نظر بگیرید که $AZ = ZB$ و $\angle AZB = ۲\angle ADX$. کافی است نشان دهیم $DZ = CZ$. نقطه‌ی W را درون زاویه $\angle AZB$ طوری قرار دهید که $\triangle AZW$ متشابه با $\triangle ADX$ باشد، یا به بیان دیگر $\triangle BZW$ متشابه با $\triangle BCX$ باشد.



بنابراین $\triangle ADZ$ متشابه با مثلث $\triangle AXW$ و مثلث $\triangle BCZ$ متشابه با مثلث $\triangle BXW$ است.پس نتیجه می شود:

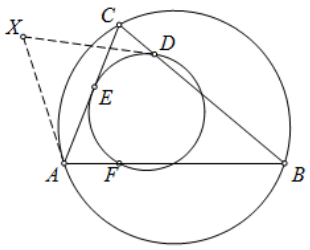
$$\frac{DZ}{XW}=\frac{AD}{AX}=\frac{BC}{BX}=\frac{CZ}{WX}$$

بنابراین $DZ=CZ$.

۱۲. ★ فرض کنید O,I به ترتیب مرکز دوایر محاطی و محیطی مثلث ABC باشند. دایره ی ω_a به BC,AC,AB در نقاط N,M,K (به ترتیب) مماس است. اگر وسط پاره خط KM روی دایره ی محیطی ABC باشد، ثابت کنید N,I,O هم خط اند.

حل. فرض کنید D محل برخورد نیمساز زاویه A با ضلع BC باشد و P نقطه ی وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$. S پای عمود وارد از I بر ضلع BC و L پای عمود وارد از O بر ضلع BC باشد.در این صورت اگر P' وسط KM باشد که روی دایره ی محیطی $\triangle ABC$ قرار دارد آنگاه از آنجا که $AK=AM$، P' روی نیمساز زاویه A می‌باشد و بنابراین $P=P'$. می‌دانیم $PI=PI_a$ (I_a مرکز ω_a است) و P وسط KM است. بنابراین $\square KIMI_a$ متوازی‌الاضلاع است و $KI \parallel I_aM$ بر AC و $MI \parallel I_aK$ بر AB عمود است. اگر پای این دو عمود را به ترتیب W,T بنامیم،آنگاه در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ITM$، داریم $IT=r$ و $TM=a$ که r و a به ترتیب شعاع دایره محاطی داخلی و طول ضلع BC می باشد. و $\angle TIM=\angle BAC$. بنابر این اگر خطی عمود بر BC در نقطه ی B رسم کنیم تا دایره را در نقطه ی Q قطع کند آنگاه $\triangle CBQ \cong \triangle MTI$ و بنابراین $QB=r$. از طرفی O وسط QC است و بنابراین $IS=r=QB=۲OD$. از آنجا که $SL=LN$ و با توجه به قضیه تالس در $\triangle ISN$ حکم نتیجه می‌شود.

۱۳. ★ در مثلث حاده الزاویه ABC با ارتفاع های AD,BE,CF فرض کنید خط مماس بر دایره محیطی مثلث ABC در A و خط مماس بر دایره محیطی مثلث DEF در D یکدیگر را در X قطع می کنند. اگر Y,Z را هم به طور مشابه تعریف کنیم ثابت کنید X,Y,Z همخطند.



حل. فرض کنید $\triangle ABC$ دارای زوایای a,b,c باشد و بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض کنید X,C در یک

طرف AD قرار دارند. بنابراین $\angle XAD = \angle XAC + \angle CAD = b + (۹۰^\circ - c)$. حال $\angle AFC = \angle ADC = ۹۰^\circ$ بنابراین $AFDC$ یک چهارضلعی محاطی است.به همین ترتیب $BDEA$ و $CEFB$ هم چهرضلعی های محاطی هستند.بنابراین

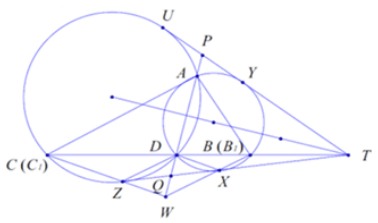
$$\angle XDA = \angle XDE + \angle EDA = \angle DFE + \angle EDA = \angle DFC + \angle CFE + \angle EDA =$$
$$\angle DAC + \angle CBE + \angle EBA = (۹۰^\circ - c) + (۹۰ - c) + (۹۰ - a) = ۹۰ + b - c = \angle XAD$$

بنابراین $\triangle XAD$ متساوی‌الساقین است و $XA = XD$. از آنجا که XA و XD هر دو مماس هستند، بنابراین قوت X نسبت به دایره محیطی $\triangle ABC$ و محیطی $\triangle DEF$ یکی است. بنابراین X روی محوراصلی دودایره قرار دارد. برای Y و Z هم به همین نحو و بنابراین X, Y, Z روی یک خط قرار دارند.

۱۴. ★★ در مثلث ABC، D نقطه ای روی ضلع BC است به طوری که $\angle BAD = \angle CAD$. خط AD مماس مشترک های دوایر محیطی مثلث های ABD, ACD را در نقاط P و Q قطع می کند. ثابت کنید $PQ^۲ = AB.AC$.

حل. فرض کنید $\omega_۱$ و $\omega_۲$ به ترتیب دوایر محیطی $\triangle ABD$ و $\triangle ACD$ باشند. فرض کنید YU و XZ مماس مشترک های $\omega_۱$ و $\omega_۲$ باشند. اگر $YU \parallel XZ$ به راحتی می توان نشان داد که-$AB = AC$. $\angle ADB = \angle ADC = ۹۰^\circ$ و $PQ = AB = AC$ و حکم نتیجه می شود.

پس در ادامه فرض می کنیم خطوط YU و XZ در T یکدیگر را قطع می کنند. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله اینگونه نقاط را برچسبگذاری می‌کنیم:



تجانس τ را در نظر بگیرید که $\omega_۱$ را به $\omega_۲$ می‌برد. به وضوح T مرکز این تجانس است. فرض کنید خط DT، $\omega_۱$ و $\omega_۲$ را دوباره (علاوه برD) به ترتیب در $B_۱$ و $C_۱$ قطع کند. بنابراین $\tau(B۱) = D$ و $\tau(D) = C_۱$ و $\tau(\overset{\frown}{B_۱D}) = \overset{\frown}{DC_۱}$ و بنابراین $\angle B_۱AD = \angle DAC_۱$. حال اگر نقطه ای مانند B' را در نظر بگیریم که روی دایره‌ی $\omega_۱$ از D به طرف A حرکت کند و اگر DB' دایره $\omega_۲$ را دوباره در C' قطع کند، طی این حرکت زاویه $\angle DAB'$ پیوسته افزایش یافته و $\angle C'AD$ پیوسته کاهش می یابد. بنابر این نقاط C, B که $\angle BAD = \angle DAC$ یکتاهستند و نتیجه می شود $B_۱ = B$ و $C_۱ = C$ و همچنین خطوط BC, XZ, YU در T همرس اند.

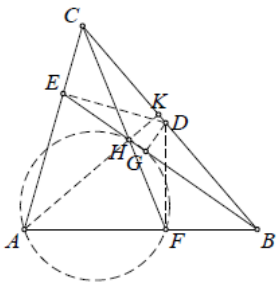
از آنجایی که $\tau(B) = D$ و $\tau(X) = Z$ بنابراین $BX \parallel DZ$. به طور مشابه $XD \parallel ZC$. از آنجا که $BX \parallel DZ$ و ZT بر $\omega_۲$ در Z مماس است $\angle BXT = \angle DZT = \angle ZCD$ و بنابراین چهارضلعی $BCZX$ محاطی است. فرض کنید $\omega_۳$ نشانگر دایره محیطی آن باشد. بنابراین خطوط PQ, CZ, BX محور اصلی $\omega_۱, \omega_۳$ و $\omega_۲, \omega_۳$ و $\omega_۱, \omega_۲$ هستند. بنابراین PQ, CZ, BX همرس‌اند.فرض کنید W نمایانگر نقطه همرسی آنها باشد. بنابراین $DXWZ$ متوازی الاضلاع است و سپس $DQ = QW$ و $PQ = AW$. کافی است نشان دهیم $AW^۲ = AB.AC$. با توجه به چهارضلعی محاطی $ACZD$ و متوازی الاضلاع $DXWZ$ داریم $\angle ACW = \angle ACZ = \angle ZDW = \angle DWX = \angle AWB$.

داریم $\angle BAW = \angle WAC$ بنابراین مثلث‌های $\triangle ABW, \triangle AWC$ متشابه اند و حکم نتیجه می شود.

۱۵. ★★ در مثلث حاده الزاویه ABC نیمساز زاویه A ضلع BC را در D قطع می کند. فرض کنید E, F پای عمودهای وارد از D بر AC, AB باشند. خط های BE, CF یکدیگر را در H قطع می کنند و دایره محیطی مثلث AFH خط BE را در H, G قطع می کند. ثابت کنید مثلثی با طول اضلاع BG, GE, BF قائم الزاویه است.

حل. ابتدا توجه کنید که $\triangle AFD \cong \triangle AED$. حال AH را امتداد دهید تا BC را در K قطع کند. از آنجایی که $AF = AE$ بنابه قضیه سوا داریم:

$$\frac{BK}{CK} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD.\cos B}{CD.\cos C} = \frac{BA.\cos B}{CA.\cos C}$$



که تساوی آخر از قضیه نیمساز نتیجه می‌شود.حال فرض کنید K' پای عمود وارد از A بر BC باشد. بنابر این $\frac{BK'}{CK'} = \frac{BA.\cos B}{CA.\cos C} = \frac{BK}{CK}$ و سپس $K = K'$ و AK بر BC عمود است.

ازآنجا که $\angle AFD = \angle AKD = ۹۰^\circ$، $\square AFDK$ محاطی است. با توجه به قوت B نسبت به دوایر محیطی $\square AFDK$ و $\square AFGH$ داریم $BK.BD = BF.BA = BH.BG$. بنابراین $\square KDGH$ نیز محاطی است. از آنجایی که $\angle DKH = ۹۰^\circ$، DH قطر آن بوده و بنابراین $\angle DGH = ۹۰^\circ$. به بیان دیگر DG عمود بر BE است. بنابراین

$$BG^۲ - GE^۲ = BD^۲ - DE^۲ = BD^۲ - DF^۲ = BF^۲$$

۱۶. ۸ رخ در صفحه ی شطرنج قرار دارند به طوری که هیچ دو تایی یکدیگر را تهدید نمی کنند. ثابت کنید دو تا از فواصل دو بدوی بین این رخ ها با هم برابر است.(منظور از فاصله ی بین دو رخ، فاصله ی بین مرکز های آنهاست)

حل. اگر ۸ رخ در صفحه داشته باشیم بنابرین $\binom{۸}{۲} = ۲۸$ زوج رخ داریم. فاصله‌ی بین هر زوج به صورت $\sqrt{i^۲ + j^۲}(i, j \in \{۱, ۲, .., ۷\})$ می باشد. تعداد اینگونه فواصل دقیقا $\binom{۷}{۲} + ۷ = ۲۸$ است. بنابراین اگر فاصله‌ی زوج رخ ها از هم متمایز باشد، هر کدام از این ۲۸ فاصله دقیقا یک‌بار استفاده شده اند. به طور خاص می بایست دو رخ با فاصله‌ی $\sqrt{۷^۲ + ۷^۲}$ موجود باشند که بدین معناست که می‌باید در دو گوشه‌ی متضاد باشند.پس هیچ رخ دیگری در کناره جدول موجود نیست و بنابراین هیچ زوج رخی فاصله $\sqrt{۶^۲ + ۷^۲}$ از هم ندارند که تناقض است.

۱۷. ★ $۳n$ نقطه روی یک دایره علامت زده شدند به طوری که آن را به $۳n$ قسمت تقسیم کردند که n تای آنها به طول ۱ و n تا به طول ۲ و n تا به طول ۳ هستند. ثابت کنید در میان آن ها دو نقطه متقاطر وجود دارد.

حل. فرض کنید نتوان دونقطه مورد نظر را پیدا کرد.

با شروع از یک نقطه علامت زده ی دلخواه محیط دایره را به $۶n$ کمان به طول ۱ تقسیم می‌کنیم.نقاط انتهایی این کمانها را اگر علامت زده شده‌اند آبی و در غیر این صورت قرمز می‌کنیم. با توجه به فرض مقابل قطری هر نقطه آبی یک نقطه قرمز است. از آنجا که تعداد کل نقاط قرمز و آبی هر دو برابر $۳n$ است، تمام نقاط قرمز می بایست در این راه استفاده شوند و بنابراین مقابل قطری هر نقطه قرمز نیز یک نقطه آبی است.

به کمان بین دو نقطه آبی متوالی کمان "اولیه" می‌گوییم. کمان "اولیه" AC با طول ۲ را در نظر بگیرید. نقاط انتهایی آن آبی است و نقطه وسط آن، B'، قرمز است. پس بنابه آنچه گفته شد مقابل قطری آن B آبی است. حال فرض کنید کمان کوچکتر AB شامل $a_۱$ کمان اولیه به طول ۱، $a_۲$ کمان اولیه به طول ۲ و $a_۳$ کمان اولیه به طول ۳ باشد. هر کمان اولیه به طول ۱ در AB به طور قطری متضاد یک کمان اولیه به طول ۳ در BC می باشد و بالعکس. پس از آنجا که تعداد کل کمان های اولیه به طول ۳ برابر n است داریم $a_۱ = n - a_۳$.

چون طول AB برابر $۳n-۱$ است پس داریم $۳n-۱ = a_۱+۲a_۲+۳a_۳ = ۲a_۲+۲a_۳+n$. بنابراین $۲n-۱ = ۲a_۲+۲a_۳$ که تناقض است.

۱۸. ★★ در یک تورنمنت شطرنج هر بازیکن دقیقن یک بار با هر بازیکن دیگر بازی می کند. برای هر بازی یک امتیاز برای برنده و صفر امتیاز برای بازنده است و اگر بازی مساوی شود برای هر بازیکن ۰/۵ امتیاز در نظر گرفته می شود. عدد طبیعی m را در نظر بگیرید یک تورنمنت m-ویژه است اگر برای هر مجموعه m عضوی S یک نفر در آن وجود داشته باشد که از همه ی $m-۱$ عضو دیگر برده باشد و یک نفر باشد که از همه $m-۱$ عضو دیگر باخته باشد. برای مقدار داده شده ی $m \geq ۴$ کمترین مقدار n را (به عنوان تابعی از m) پیدا کنید که که برای هر تورنمنت m-ویژه با n نفر امتیاز افراد در انتها متمایز باشند.

حل. جواب $۲m - ۳$ است.

برای $n \leq ۲n - ۴$ یک تونمنت با بازیکنان $P_۱, P_۲, ..., P_n$ در نظر بگیرید. برای $i > j$، P_i P_j را می برد به استثناء اینکه $P_{m-۱}$ و$P_{m-۲}$ با هم مساوی میکنند.می توان دید این تورنمنت m-ویژه است و امتیاز $P_{m-۱}$ و $P_{m-۲}$ با هم برابر می باشد.

حال یک m-تورنمنت با $n \geq ۲m - ۳$ بازیکن در نظر بگیرید. ابتدا فرض کنید دو بازیکن $P_۱$ و $P_۲$ با هم مساوی کنند. از بین باقی بازیکنان فرض کنید A مجموعه‌ی بازیکنانی باشد که از $P_۱$ می‌برند یا با آن مساوی می‌کنندو B مجموعه بازیکنانی باشد که از $P_۱$ می بازند. اگر$|A| \geq m - ۲$، یک مجموعه شامل $m - ۲$ بازیکن از A و $P_۱$ و $P_۲$ را در نظر بگیرید. در این مجموعه هیچ بازیکنی وجود ندارد که از باقی بازیکنان باخته باشد. بنابراین $|A| \leq m - ۳$. به همین ترتیب $|B| \leq m - ۳$ و بنابراین $n \leq ۲ + ۲(m - ۳) = ۲m - ۴$ که تناقض است.

حال فرض کنید یک دور سه تایی داشته باشیم بدین معنا که سه بازیکن $P_۱$ و $P_۲$و $P_۳$ که $P_۱$،$P_۲$ را و $P_۲$، $P_۳$را و $P_۳$، $P_۱$ را ببرد. فرض کنید A مجموعه بازیکنانی باشد که از $P_۱$ برده یا با آن مساوی کرده اند و B مجموعه بازیکنانی باشد که از $P_۱$ باخته اند. باتوجه به مجموعه های m عضوی که $P_۱$ و $P_۲$ و $P_۳$ را دارا باشند، همانند بالا بدین نتیجه می رسیم $n \leq ۲m - ۵$.

به استقرا به راحتی می توان اثبات کرد که اگر در تورنمنتی تساوی و دور سه تایی نداشته باشیم می توان بازیکنان آن را به صورت $P_۱, P_۲, ..., P_n$ مرتب کرد که برای $i > j$، P_i از P_j برده باشد. پس امتیازات آنها متمایز است.

مسأله ویژهٔ این شماره، تپه‌های شنی

در هر شماره از فصل‌نامه، یک مسأله با عنوان مسألهٔ ویژه مطرح می‌شود و از شما خوانندگان دعوت می‌شود راه حل‌های خود را برای این مسأله، با ذکر نام خود به ایمیل pargar@mathysc.ir ارسال کنید. راه حل‌های صحیح در شماره بعد اعلام خواهند شد.

فرض کنید G گرافی هم‌بند باشد که یک رأسِ آن را چاه نامیده‌ایم. در ابتدا روی هر رأس غیر چاه یک عدد صحیح نامنفی نوشته‌ایم که در واقع تعداد شن‌های روی آن رأس است. یک رأسِ غیر چاه را ناپایدار می‌نامیم اگر تعداد شن‌های آن دست‌کم به اندازهٔ درجهٔ آن باشد. در هر مرحله می‌توانیم یکی از رأس‌های ناپایدار را به دل‌خواه انتخاب کرده و به اندازهٔ درجه‌اش از تعداد شن‌هایش کم کنیم و به هر هم‌سایهٔ آن یک شن اضافه کنیم. این فرایند تا زمانی که رأسِ ناپایدار موجود باشد ادامه می‌یابد. شن‌هایی که وارد چاه می‌شوند نابود می‌شوند.

الف) ثابت کنید این فرایند حتماً پایان می‌پذیرد.

ب) ثابت کنید آرایشِ نهایی مستقل از نحوهٔ انتخاب رأس‌های ناپایدار است.

ج) فرض کنید G گرافی هم‌بند با نامتناهی رأس باشد و درجهٔ هر رأسِ آن متناهی باشد و تعداد شن‌های اولیه نیز متناهی باشد و هیچ رأسی چاه نباشد. حکم قسمت‌های الف و ب را برای این حالت نیز ثابت کنید.

★ د) فرض کنید G شبکهٔ نامتناهیِ نقاطِ صحیح در صفحه باشد (هر رأس چهار هم‌سایه دارد). اگر در ابتدا k شن در مبدأ باشد و بقیه رئوس خالی باشند، در مورد آرایش نهایی هر چه می‌توانید بگویید. مثلاً دورترین شن چه‌قدر از مبدأ فاصله دارد؟

وبگاه المپیاد ریاضی ایران