سؤالات موضوعی نهایی

((هندسه ۳))

پایه دوازدهم رشته ی ریاضی و فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

آخرین نسخه: شهریور ۹۹

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

((فصل اوّل : ماتریس و کاربردها))

❋❋❋

درس۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

(❋) مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

هر ماتریس قطری که درایه های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، را ماتریس .... می نامند.

۲	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۲ : در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i-۲j & i<j \\ -i+j & i\geq j \end{cases}$ می باشد. مجموع درایه های ستون دوّم ماتریس A را به دست آورید.

۳	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۴\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\dfrac{۲i}{j-۱}$ باشد، درایه های واقع در سطر سوّم و ستون دوّم ماتریس A برابر است با : ....

۴	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۴ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.

۵	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس .... می نامیم.

۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۶ : در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آنگاه آن را یک ماتریس ..... می نامیم.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۷ : درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

ماتریس مربعی که تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس اسکالر نامیده می شود.

۸	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۸ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ m-۱ & ۳ \end{bmatrix}$ مقدار m برابر ...... است.

(❋) ماتریس های مساوی

۱	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۱ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲x \\ ۱ & z \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲x+y & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ و $A=B$ ، در این صورت حاصل $x+y+z$ را بیابید.

۲	شهریور ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۲ : اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۸ & x-۱ \\ z+۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x-۲ & y+۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ مساوی باشند. مقدار $x+y+z$ را بیابید.

(❋) اعمال روی ماتریس ها

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : جای خالی را با یک کلمه‌ی مناسب پرکنید.

حاصل ضرب ماتریس های خاصیت جابجایی ....

۲	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۲ : درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف: اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد. مجموع درایه های سطر دوّم $A^۳$ برابر۵ می باشد.

ب: اگر $A^{۲}=A$ باشد. در این صورت داریم : $(A+I)^{۲}=I+۳A$

۳	دی ۱۳۹۷	۱/۲۵ نمره

۳ : اگر ماتریس A به صورت زیر تعریف شده باشد. ماتریس $۲A-۳I$ را به دست آورید.

$$A=[a_{ij}]_{۳\times۳} \quad , \quad a_{ij}=\begin{cases} i.j & i>j \\ i^{۲} & i=j \\ ۲i-j & i<j \end{cases}$$

۴	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۴ : اگر ضرب ماتریس های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد.

حاصل $\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ را بیابید.

۵	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر برای ماتریس های متمایز A و B و C داشته باشیم، $AB=AC$ آنگاه لزوماً $B=C$ است.

۶	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۶ : در معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۳x & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$ مقدار x را بیابید.

۷	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۷ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۷}$ را به دست آورید.

۸	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : ماتریس های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. مقادیر a و b را

چنان بیابید که داشته باشیم : $A^{۲}-B=\overline{O}$ ($\overline{O}$ ماتریس صفر است.)

۹	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالت کلی حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی دارد.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۱۰ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & b \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ a & ۲ \end{bmatrix}$ ، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۱ : معادله‌ی ماتریسی $=۰$ $\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ را حل کنید.

❋❋❋

درس۲ : وارون ماتریس و دترمینان

(❋) دترمینان

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۷۵ نمره

۱ : اگر A ماتریس ۳×۳ باشد و $|A|=-۲$. حاصل $||A|.A|$ را بیابید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱نمره

۲ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^۳|$ را محاسبه کنید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل ضرب ....

۴	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۴ : اگر A ماتریس ۳×۳ باشد و $|A|=۲$. حاصل $|\frac{۱}{|A|}A|$ را بیابید.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۵ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ برابر است با ....

۶	شهریور ۱۳۹۸	۲ نمره

۶ : اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i^2-1 & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد.

الف) حاصل ماتریس $A\times B$ را به دست آورید.

ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید.

۷	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|-A|$ برابر است با ....

۸	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند.. دترمینان ماتریس BA را بدست آورید.

۹	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر A یک ماتریس 3×3 و $|A|=2$ باشد،آنگاه $|2A|=16$ است.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹	۱/۷۵ نمره

۱۰ : دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & m-2 \\ n+1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد،

حاصل $|A|+|B|$ را محاسبه کنید.

۱۱	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۷۵ نمره

۱۱ : اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $|A|\,|A||$ را بیابید.

۱۲	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر A یک ماتریس 3×3 و $|A|=5$ باشد، آنگاه $|\frac{1}{2}A|$ برابر …… است.

۱۳	شهریور ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۱۳ : اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|A|+|B^2|$ را بیابید.

۱۴	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۱۴ : اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه‌ی $A^2 = mA + 2I_2$ برقرار باشد.

(I_2 ماتریس همانی است.)

(❋) وارون ماتریس

۱	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد، آن است که دترمینان ماتریس A .... باشد.

۲	شهریور ۱۳۹۸	۰/۷۵ نمره

۲ : مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.

۳	خرداد۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر $A=\begin{bmatrix} a & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار a برابر .... است.

۴	خرداد۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۴ : الف : اگر $A=\begin{bmatrix} |A| & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

ب : ماتریس وارون A را حساب کنید.

(❋) حل دستگاه معادلات

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : دستگاه زیر به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می باشد.

$$\begin{cases}(m-۳)x+۳y=m\\ ۴x+(m+۱)y=۲\end{cases}$$

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۲ : مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases}mx+۳y=-۳\\ ۴x+(m+۴)y=۲\end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$، اگر داشته باشیم $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases}۳x+۲y=۴\\ x-y=۳\end{cases}$$

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$، اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $|A|\neq ۰$، در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۶	شهریور ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۱/۲۵ نمره	دی ۱۳۹۸	۷

۷ : جواب دستگاه زیر را در صورت وجود با استفاده از ماتریس وارون بیابید.

$$\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$$

۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۳۹۹	۸

۸ : در تساوی $\begin{bmatrix} ۱ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$ مقدار x را بیابید.

۲ نمره	خرداد ۱۳۹۹	۹

۹ : الف : حدود m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲mx+۳y=۱ \\ ۲x-y=۳ \end{cases}$ دارای جواب منحصر بفرد باشد.

ب : جواب دستگاه مذکور را به ازای $m=۲$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.

۱/۵ نمره	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱۰

۱۰ : دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

۰/۲۵ نمره	شهریور ۱۳۹۹	۱۱

۱۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف : در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ ، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

۲ نمره	شهریور ۱۳۹۹	۱۱

۱۲ : الف : به ازای چه مقداری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ mx+۶y=-۴ \end{cases}$ فاقد جواب است؟

ب : دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ ۲x+۶y=-۴ \end{cases}$ را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

❋❋❋

((فصل دوّم : آشنایی با مقاطع مخروطی))

درس۱ : آشنایی با مقاطع مخروطی

(❋) مقاطع مخروطی

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

صفحه‌ای با مولد سطح مخروطی دواری، موازی است و از رأس آن عبور نمی کند. فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولّد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه‌ی مخروط را قطع کند. فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.

۳	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی l عمود باشد و از رأس عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

۴	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۴ : در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی L عمود باشد و از رأس آن عبور کند، شکل حاصل یک ..... خواهد بود.

(❋) مکان هندسی

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d' و d به یک فاصله اند. نیمساز زاویه‌ی بین آن دو خط می باشد.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک .... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از دو نقطه‌ی ثابت، یک مقدار ثابت باشد، یک .... است.

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند، نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد. (پیرامون وجود جواب بحث کنید.)

۵	شهریور ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : نقاط A و B و C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از نقطه‌ی به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد. (در مورد تعداد نقاط در حالت های مختلف بحث کنید.)

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : نقاط A و B و C در صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از C به فاصله‌ی ۳ سانتی باشد. (پیرامون جواب مسئله بحث کنید.)

۷	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۷ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی $C(O,r)$ در صفحه‌ی این دایره مماس خارج اند، دایره ی $C'(O,2r)$ است.

۸	خرداد ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۸ : نقاط A و B و C و D در صفحه مفروض اند، نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد.(بحث کنید.)

۹	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند، دو خط به موازات d و به فاصله‌ی r از d است.

۱۰	شهریور ۱۳۹۹	۰/۵ نمره

۱۰ : درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف : مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

ب : هرگاه صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

***

درس۲ : دایره

(*) دایره

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۱ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقاط $A(۴,-۱)$ و $B(-۲,۱)$ دو سر قطری از آن باشند.

۲	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۲ : حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد.

۳	دی ۱۳۹۷	۱/۷۵ نمره

۳ : دایره های $x^۲+y^۲-۲x=۴$ و $x^۲+y^۲=۴$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۴	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=-۵$ بر آن مماس باشد.

۵	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۵ : از نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر دایره رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.

۶	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : دایره های $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ و $x^۲+y^۲=۱$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۷	شهریور ۱۳۹۸	۱ نمره

۷ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقطه‌ی $O(-2,3)$ مرکز آن و $M(1,-1)$ یک نقطه از آن باشد.

۸	شهریور۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : وضعیت خط $x+y=2$ و دایره‌ی $x^2+y^2=2$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۹	دی۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

معادله‌ی ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله‌ی یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2+b^2<4c$ باشد.

۱۰	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۱۰ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,-2)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^2+y^2+2x-4y=4$ مماس خارج باشد.

۱۱	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۱۱ : وضعیت خط $3x+y=0$ را نسبت به دایره‌ی $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ مشخص کنید.

۱۲	خرداد ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۲ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $2x+y=2$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.

۱۳	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۳ : وضعیت نقطه‌ی $A(1,-2)$ نسبت به دایره‌ی $x^2+y^2-2x+2y=0$ را تعیین کنید.

۱۴	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۱۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

۱۵	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱ نمره

۱۵ : وضعیت دو دایره‌ی $x^2+y^2-2x=4$ و $x^2+y^2=4$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۶	شهریور۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۶ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

رابطه‌ی $x^2+y^2-2x-4y+10=0$ معادله‌ی یک دایره است.

۱۷	شهریور۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۷ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(3,1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله‌ی $4x+3y+5=0$ مماس باشد.

۱۸	شهریور۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۸ : وضعیت خط $x-y-1=0$ و دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۹	شهریور۱۳۹۹	۲ نمره

۱۹ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره به معادله‌ی

$$x^2+y^2-8x+4y+16=0$$

مماس داخل باشد.

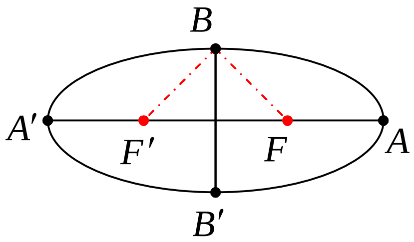
❋❋❋

درس ۳ : بیضی و سهمی

(❋) بیضی

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۱ : در بیضی شکل مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را تعیین کنید.



۲	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

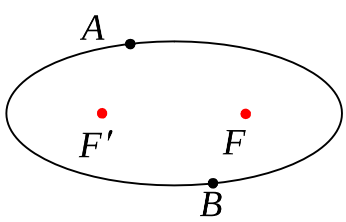
۲ : جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک .... می شود.

۳	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۳ : اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک بیضی۱۶ باشد. طول قطر بزرگ بیضی و فاصله‌ی کانونی آن را به دست آورید.

۴	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره



۴ : دو نقطه‌ی A و B مطابق شکل، روی بیضی و نقاط F و F' کانون های بیضی اند. اگر $AF'=BF$ باشد، ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی اند.

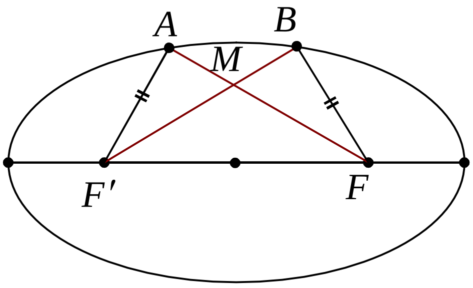
سئوالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل دوّم درس هندسه۳ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی فیزیک

۵	تیر ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۵ : اگر $A(۲,۱۲)$ و $B(۲,-۸)$ دو رأس بیضی(AA' قطر بزرگ بیضی) و خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد. فاصله‌ی کانونی بیضی را به دست آورید.

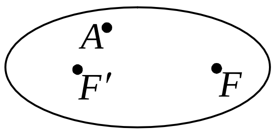
۶	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون های بیضی اند. با توجه به شکل، اگر $AF' = BF$ باشد. نشان دهید مثلث FMF' متساوی الساقین است.



۷	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۷ : در شکل مقابل نقطه‌ی A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون های بیضی اند. ثابت کنید که مجموع فواصل نقطه‌ی A از F و F' کوچکتر از قطر بزرگ بیضی است.



۸	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ مفروض است، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

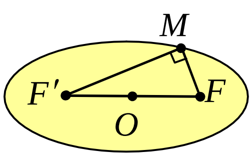
۹	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود.

۱۰	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۱۰ : نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' قائم الزاویه است. طول MF را بدست آورید. (F و F' کانون های بیضی هستند.)



۱۱	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر مجموع فواصل نقطه‌ی A از دو کانون بیضی بیشتر از طول بزرگ باشد، نقطه‌ی A در .... بیضی است.

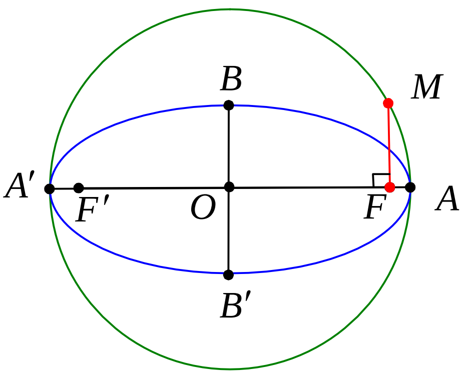
۱۲	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می شود.

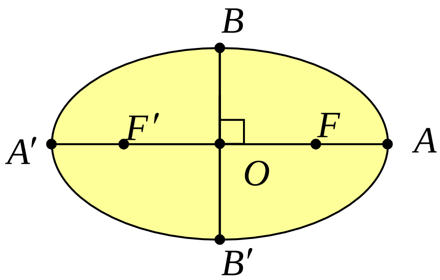
۱۳	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۳ : قطر دایره‌ی C مانند شکل مقابل، قطر بزرگ بیضی است. و از کانون F عمودی بر قطر AA' رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید که اندازه‌ی MF برابر نصف اندازه‌ی قطر کوچک بیضی است.



۱۴	خرداد ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۱۴ : در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $\sqrt{۲}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' چند درجه است؟



۱۵	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۵ : اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله‌ی کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۱۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۱۶ : در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

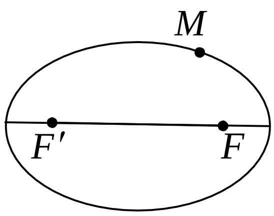
در صورتی که خروج از مرکز بیضی برابر ...... باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می شود.

۱۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۱۷ : در یک بیضی خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ و اندازه‌ی قطر بزرگ بیضی برابر ۲۰ است. طول قطر کوچک بیضی و اندازه‌ی کانونی آن را بیابید.

۱۸	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۱۸ : در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند.
خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند.
ثابت کنید $NF' = MF'$



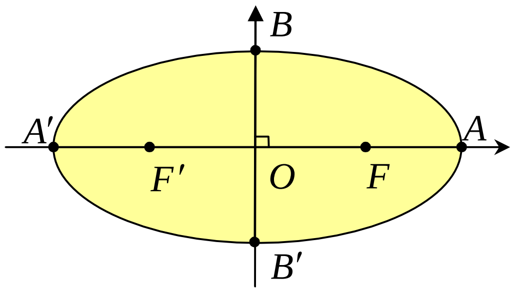
۱۹	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۹ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله‌ی کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر .... است.

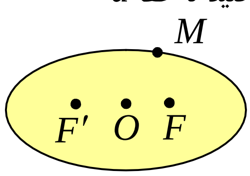
۲۰	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۲۰ : مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله‌ی F از هر دو نقطه‌ی O و A برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.



۲۱	شهریور ۱۳۹۹	۱ نمره

۲۱ : در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $MF' = NF'$



(*)سهمی

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۲۵ نمره

۱ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که $F(1,-2)$ کانون و $S(1,2)$ رأس آن باشد. سپس خط هادی آن را بنویسید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۲ نمره

۲ : سهمی $y^2-2y+8x+9=0$ مفروض است.

الف : مختصات رأس، مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی را به دست آورید.

ب : نمودار سهمی را رسم کنید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۲ نمره

۳ : سهمی به معادله‌ی $y^2=4x-4y$ مفروض است. مختصات رأس سهمی، مختصات کانون سهمی و معادله‌ی خط هادی را بنویسید و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۴ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه‌ی ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند را .... می نامیم.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۵ : اگر نقطه‌ی $A(2,3)$ رأس سهمی و $y=7$ معادله‌ی خط هادی سهمی باشد.

الف: معادله‌ی سهمی را بنویسید.

ب : مختصات کانون سهمی را به دست آورید.

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۷۵ نمره

۶ : سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره ای رسم می کنیم. معادله‌ی دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۷	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن از .... خواهد گذشت.

۸	خرداد ۱۳۹۹	۲/۵ نمره

۸ : الف : مختصات رأس ، کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی $x^۲ - ۴y + ۸x = ۰$ را به دست آورید.

ب : نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

۹	خرداد ۱۳۹۹	۲ نمره

۹ : سهمی $y^۲ = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره ای رسم می کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۲ نمره

۱۰ : سهمی $x^۲ = ۲y - ۴x$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و مختصات نقطه‌ی برخورد سهمی و محور های مختصات را بیابید.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک ..... ثابت غیر واقع برآن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

۱۲	شهریور ۱۳۹۹	۱/۷۵ نمره

۱۲ : مختصات کانون، مختصات رأس و معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله‌ی $y^۲ - ۶y + ۱۶x + ۲۵ = ۰$ را تعیین کنید.

۱۳	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۳ : ۱/۲۵ نمره

معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(۴,۶)$ رأس و $y = ۳$ معادله‌ی خط هادی آن باشد.

***

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

((فصل سوّم : بردارها))

***

درس۱ : معرفی فضای سه بعدی

(❋) فضای دو بعدی

(❋) فضای سه بعدی

۱	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

نقطه‌ی $A(۲,-۳,۰)$ روی صفحه‌ی xoy قرار دارد.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۲ : به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : معادله‌ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۲,۳,۴)$ بگذرد و با صفحه‌ی xoy موازی باشد.

ب : معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟

پ : در فضای $R^۳$ ، نقطه‌ی A به طول ۲ روی محور طول ها و نقطه‌ی $B(-۴,۶,-۳)$ مفروض اند. مختصات نقطه‌ی وسط AB را بیابید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۵ نمره

۳ : نقاط $A(۲,۱,۳)$ و $B(-۱,۱,۳)$ در فضای مفروض اند. معادلات مربوط به پاره خط AB را بنویسید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

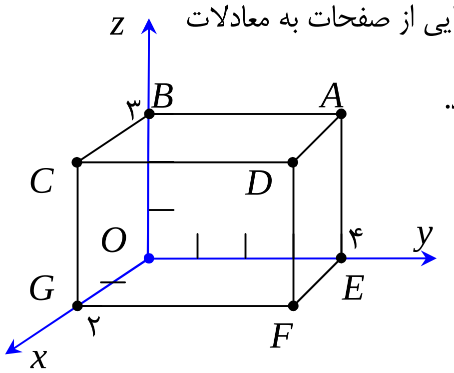
۴ : نقاط $A(۳,۱,۲)$ و $B(۳,-۲,۲)$ در $R^۳$ مفروض اند.

الف: طول پاره خط AB را به دست آورید.

ب : معادلات مربوط به پاره خط AB را بنویسید.

۵	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : وجه های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل مقابل، قسمت هایی از صفحات به معادلات $(x=\cdot\ ,\ x=۲)$ و $(y=\cdot\ ,\ y=۴)$ و $(z=\cdot\ ,\ z=۳)$ هستند.



الف : مختصات نقطه‌ی A را مشخص کنید.

ب : معادلات مربوط به یال AD و وجه $CDFG$ را بنویسید.

۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۶ : درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

نقطه‌ی $(۲-,۱-,\cdot)$ روی صفحه‌ی yoz قرار دارد.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱ نمره

۷ : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} y=\cdot \\ z=\cdot \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله‌ی $y=\cdot$ دارد؟ چرا؟

۸	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۸ :

الف : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=\cdot \\ z=\cdot \end{cases}$ در فضای $R^۲$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار $x=\cdot$ دارد؟

ب : اگر $\vec{a}=(۲,-۱,۳)$ و $\vec{b}=\vec{i}+۲\vec{j}$ باشد. اندازه‌ی بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ را به دست آورید.

❋❋❋

(❋) بردار ها

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : اگر $\vec{a}=۳\vec{i}-۲\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(۳,۱,-۱)$ و $r=۲$ باشد، بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۲ : اگر $\vec{a}=۲\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(۱,۲,۱)$ باشد. طول بردار $\vec{a}-۲\vec{b}$ را به دست آورید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۷۵ نمره

۳ : اگر $\vec{a}=۲\vec{j}-۳\vec{k}$ و $\vec{b}=(\cdot,۱,-۱)$ باشند. بردار $\vec{c}=۲\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید.

۴	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۴ : در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

اگر دو بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ..... باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است.

۵	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۵ : اگر $\vec{a}=(\sqrt{۸},۲,۴)$ و $\vec{b}=-۶\vec{j}+۸\vec{k}$ و $r=\frac{-۱}{۲}$

الف : طول بردار $r\vec{b}$ را مشخص کنید.　　　　ب : بردار $r\vec{a}+\vec{b}$ را بیابید.

❋❋❋

درس۲ : ضرب داخلی و ضرب خارجی دو بردار

(❋) ضرب داخلی و خواص آن

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ثابت کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

حاصل ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، برابر............. است.

۳	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۳ : برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید : $|\vec{a}.\vec{b}|\le\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : مقدار m را طوری تعیین کنید که زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(m,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ برابر ۴۵ درجه باشد.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.

اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم:

$$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$$

در این صورت زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.

۶	دی ۱۳۹۸	۱ نمره

۶ : اگر بردار $\vec{a}=(a_۱, a_۲, a_۳)$ باشد، ثابت کنید: $\vec{a}.\vec{a}=\|\vec{a}\|^۲$

۷	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۷ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ در این صورت $\theta=\frac{\pi}{۲}$ است. (θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.)

۸	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۸ : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(۰,-۱,-۱)$ و $\vec{b}=(۲,-۱,-۲)$ را به دست آورید.

❋❋❋

(❋) تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : اگر $\vec{c}(-۱,۱,۴)$ و $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{a}=(-۱,-۳,۰)$ باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۷۵ نمره

۲ : بردار های $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ را در نظر بگیرید و سپس تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۳ : تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۵,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ بیابید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۴ : ثابت کنید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$، برابر خود $\vec{a}$ می شود.

۵	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : بردارهای $\vec{a}=(۱,۲,۳)$ و $\vec{b}=(-۲,۰,۲)$ مفروض اند:

الف : تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : طول بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۶	خرداد ۱۳۹۹	۲ نمره

۶ : بردارهای $\vec{a}=(-۲,۰,۲)$ و $\vec{b}=۲\vec{j}+۲\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف: زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

***

(*) ضرب خارجی دو بردار

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۱ : براد های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند. اگر $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۲۶$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۷۲$ باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۷۵ نمره

۲ : براد های $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ را در نظر بگیرید و برداری عمود بر این دو بردار بنویسید.

۳	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۳ : ثابت کنید،

دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۴ : براد های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند. اگر $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۸$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۱۲$ باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

برای بردار غیر صفر $\vec{a}$ در $R^۳$ داریم ، $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$

۶	شهریور ۱۳۹۸	۱ نمره

۶ : اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $R^۳$باشند، حاصل $\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})$ را به دست آورید.

۷	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $R^۳$باشند، حاصل $\vec{k}.(\vec{i}\times\vec{j})$ برابر است با ....

۸	خرداد۱۳۹۹	۲ نمره

۸ : دو بردار $\vec{a}=(۳,-۲,۱)$ و $\vec{b}=-۲\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف : بردار $\vec{a}$ در کدام از فضای $R^۳$ واقع (شماره‌ی ناحیه ذکر شود.)

ب : طول بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ را حساب کنید.

پ : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید.

۹	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را معلوم کنید.

برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، نامساوی $|\vec{a}.\vec{b}| \geq \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\|$ برقرار است.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۱۰ : ثابت کنید دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۱۱ : بردارهای $\vec{a} = (۲,-۱,۲)$ و $\vec{b} = (۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید.

الف : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید

❋❋❋

(❋) مساحت متوازی الاضلاع و حجم متوازی السطوح

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a} = (۱,۰,۱)$ و $\vec{b} = (۰,۱,۱)$ تولید می شود را به دست آورید؟

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۲ : مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (۱,m,-۱۱)$ و $\vec{b} = (۲,۳,-۱)$ و $\vec{c} = (۱,-۱,۳)$ در یک صفحه باشند.

۳	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۳ : اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب۴ و ۶ و $\vec{a}.\vec{b} = ۱۲$ باشد. مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

۴	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۴ : حجم متوازی السطوحی را محاسبه کنید که توسط بردار های $\vec{c} = (۳,۲,۱)$ و $\vec{b} = (۱,۰,۲)$ و $\vec{a} = (۲,۱,۰)$ تولید می شود.

۵	تیر ۱۳۹۸	۲ نمره

۵ : سه بردار $\vec{a} = (۲,۳,۱)$ و $\vec{b} = (-۱,۱,۰)$ و $\vec{c} = (۲,۱,-۲)$ مفروض اند.

الف : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ به دست آورید.

ب : حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می شود را به دست آورید.

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : اگر $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۱,۰,-۱)$ و $C(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت این مثلث را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۲/۲۵ نمره

۷ : بردار‌ی های $\vec{a}=(-۴,۳,-۵)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ را در نظر بگیرید.

الف : تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.

ج : مساحت مثلث پدید آمده توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

❋❋❋

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل اوّل هندسه۳ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

(❋) مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

۱ : اسکالر

۲ :

$a_{۱۲}=۱-۲(۲)=-۳$ و $a_{۲۲}=-۲+۲=۰$ و $a_{۳۲}=-۳+۲=-۱$

$a_{۱۲}+a_{۲۲}+a_{۳۲}=-۳+۰+(-۱)=-۴$

۳ : ۶

۴ : درست

۵ : اسکالر

۶ : سطری

۷ : نادرست

۸ : $m=۱$

(❋) ماتریس های مساوی

۱ :

$$A=B\rightarrow\begin{cases}۲x=۳\rightarrow x=\frac{۳}{۲}\\ ۲x+y=۵\xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}}y=۲\Rightarrow x+y+z=\frac{۳}{۲}+۲+(-۲)=\frac{۳}{۲}\\ z=-۲\end{cases}$$

۲:

$$\begin{cases} x-۱=y+۱ \\ x-۲=۸ \\ z+۱=۴ \end{cases} \longrightarrow x=۱۰ \;,\; y=۸ \;,\; z=۳ \rightarrow x+y+z=۲۱$$

(❋) اعمال روی ماتریس ها

۱ : ندارد.

۲ : الف : نادرست   ب : درست

۳ :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$۲A-۳I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۸ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۸ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ \\ ۴ & ۵ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

۴ :

$$A\times B=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴x+۳y & ۳x+۴y \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴x+۶ & ۴y-۳ \\ ۳x+۸ & ۳y-۴ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=B\times A\rightarrow\begin{cases} ۳x+۸=۵\rightarrow x=-۱ \\ ۳y-۴=۲\rightarrow y=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=-۳+۴-۲=-۱$$

۵ : نادرست

۶ :

$$\begin{bmatrix} ۳x-۶ & -۶x+۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow -۳x+۶-۶x+۱۲=۰ \rightarrow -۹x+۱۸=۰ \rightarrow x=۲$$

۷ :

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} = -۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = -۲I$$

$$A^{۷} = (A^{۲})^{۳}.A = (-۲I)^{۳}.A = -۸I^{۳}A = -۸IA = -۸A = -۸\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۸ :

$$A^{۲} = B \rightarrow \begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a+b=۵ \\ ۴a+b=۵ \end{cases} \rightarrow a=۰ \quad , \quad b=۵$$

۹ : نادرست

۱۰ :

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ b & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۲ & -۴+۲a \\ ۲b-۲ & -b-a \end{bmatrix}$$

و چون در ماتریس قطری باید درایه های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشد، پس :

$$-۴+۲a=۰ \rightarrow ۲a=۴ \rightarrow a=۲$$

$$۲b-۲=۰ \rightarrow ۲b=۲ \rightarrow b=۱$$

۱۱ :

$$\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow \begin{bmatrix} x-۳ & ۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow ۳x-۲۱=۰ \rightarrow x=۷$$

درس۲ : وارون ماتریس و دترمینان

(*) دترمینان

۱ :

$$||A|.A|=|-۲A|=(-۲)^{۳}\,|A|=-۸\times(-۲)=۱۶$$

۲ :

$$|A|=۲(۴-۳)=۲\rightarrow|A^{۳}|=|A|^{۳}=۸$$

۳ : درایه های روی قطر اصلی

۴ :

$$|\frac{۱}{|A|}.A|=|\frac{۱}{۲}A|=(\frac{۱}{۲})^{۳}\,|A|=\frac{۱}{۸}\times۲=\frac{۱}{۴}$$

۵ : ۳۰-

۶ :

$$A=\begin{bmatrix}۰&۱&۲\\۱&۳&۱\\۲&۱&۸\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۰&۱&۲\\۱&۳&۱\\۲&۱&۸\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲&۱&۰\\-۱&۳&۲\\۲&۰&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۳&۱۲\\۱&۱۰&۱۱\\۱۹&۵&۴۲\end{bmatrix}$$

$$|B|=۲(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}۳&۲\\۰&۵\end{vmatrix}+۱(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix}-۱&۲\\۲&۵\end{vmatrix}+\circ(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}-۱&۳\\۲&۰\end{vmatrix}$$

$$=۲(۱۵)-۱(-۹)+\circ(-۶)=۳۹$$

۷ : ۸-

۸ :

$$BA=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$|BA|=۳(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱۷ & ۸ \end{vmatrix}+۱(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۸ \end{vmatrix}+-۱(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & ۱۷ \end{vmatrix}$$

$$|BA|=۳(-۱۰)-۱(-۱۰)-۱(-۲۰)=-۳۰+۱۰+۲۰=۰$$

۹ : درست

۱۰ :

$$\begin{cases} m-۲=۰ \\ n+۱=۰ \end{cases}\rightarrow m=۲\ ,\ n=-۱$$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ \\ n+۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\rightarrow |A|=۲$$

$$\rightarrow B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}\rightarrow |B|=۲(-۱)-۱(۷)+۱(-۲)=-۱۱$$

$$|A|+|B|=۲+(-۱۱)=-۹$$

۱۱ : ابتدا دترمینان ماتریس A را محاسبه می کنیم. در اینجا این محاسبه را به روش ساروس انجام می دهم.

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ -۴ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ -۴ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$-\quad -\quad -\qquad +\quad +\quad +$$

$$|A|=(-۱)(۲)(۵)+(۰)(۲)(-۴)+(۰)(۰)(۴)-(۰)(۲)(-۴)-(۰)(۰)(۵)-(-۱)(۲)(۴)$$

$$\rightarrow |A|=-۱۰+۸=-۲$$

$$||A|A|=|-۲A|=(-۲)^۳|A|=(-۸)\times(-۲)=۱۶$$

۱۲ : $\frac{۵}{۸}$

۱۳ :

$$|A| = ۲\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۲ \times ۱۰ = ۲۰$$

$$|B| = ۳\begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = ۳ \times (-۲) = -۶ \to |B^۲| = |B|^۲ = ۳۶$$

$$|A| + |B^۲| = ۲۰ + ۳۶ = ۵۶$$

۱۴ :

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \to A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۴ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$mA + ۲I_۲ = m\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} + ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۴m \\ ۲m & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & ۰ \\ ۰ & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & ۴m \\ ۲m & m+n \end{bmatrix} \to \begin{cases} n = ۸ \\ m = ۱ \end{cases}$$

(❋) وارون ماتریس

۱ : غیر صفر

۲ : $|A| = ۰ \to ۲m - ۴ = ۰ \to m = ۲$

۳ : -۶

۴ : الف : گیریم که $|A| = d$ باشد. در این صورت :

$$d = ۵d - ۲۴ \to d = ۶$$

ب :

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}A^* = \frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۵ & -۸ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

(❋) حل دستگاه معادلات

۱ :

$$\begin{vmatrix} m-۳ & ۳ \\ ۴ & m+۱ \end{vmatrix} \neq ۰ \to (m-۳)(m+۱)-۱۲ \neq ۰ \to m \neq ۵ \,,\, m \neq -۳$$

$$m \in R - \{۵,-۳\}$$

۲ :

$$\frac{m}{۴} = \frac{۳}{m+۴} \neq \frac{-۳}{۲} \to m(m+۴)-۱۲ = ۰ \to \begin{cases} m=-۶ \\ m=۲ \end{cases}$$

که $m=-۶$ قابل قبول نیست.

۳ : نادرست

۴ :

$$\begin{cases} ۳x+۲y=۴ \\ x-y=۳ \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = (۳)(-۱)-(۱)(۲) = -۳-۲ = -۵$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}A^* = \frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-۱}D \to X = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۵}+\frac{۶}{۵} \\ \frac{۴}{۵}+\frac{-۹}{۵} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow x=۲ \quad , \quad y=-۱$$

۵ : نادرست

۶ :

$$\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = (۳)(۲)-(-۱)(-۴) = ۶-۴ = ۲$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^*=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۲} & \frac{۴}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}D\rightarrow X=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+۲\\ \frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow x=۳\quad,\quad y=۲$$

۷:

$$A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\longrightarrow |A|=۱۳\neq ۰$$ لذا دستگاه دارای جواب است.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^*=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A^{-۱}D=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\rightarrow x=۳\quad,\quad y=۲$$

۸:

$$\begin{bmatrix}۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲+x & ۴+۲x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=۴+۲x+۴+۲x=۰\rightarrow x=-۲$$

۹:

$$\frac{۲m}{۲}\neq\frac{۳}{-۱}\rightarrow m\neq -۳$$

$$A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\rightarrow |A|=-۱۰\neq ۰$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^*=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=-۱\end{cases}$$

۱۱ : دستگاه مورد انتظار مسئله به صورت زیر است.

$$\begin{cases} ۳x-۵y=۱ \\ ۴x+۲y=۱۰ \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow |A|=(۳)(۲)-(-۵)(۴)=۶+۲۰=۲۶$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times A^{*}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}\rightarrow x=۲ \quad , \quad y=۱$$

۱۲ : نادرست

۱۳ :

الف :

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ m & ۶ \end{vmatrix}=۰ \rightarrow ۶+۲m=۰ \rightarrow m=-۳$$

ب :

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases} x=۱ \\ y=-۱ \end{cases}$$

❋❋❋

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل دوّم هندسه۳ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس۱ : آشنایی با مقاطع مخروطی

(❋) مقاطع مخروطی

۱ : درست

۲ : درست

۳ : درست

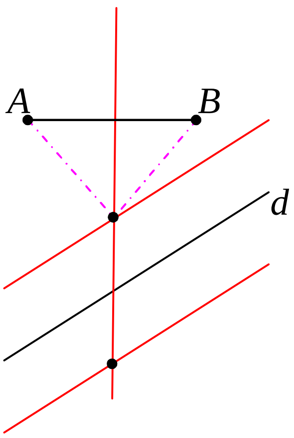
۴ : نقطه

(❋) مکان هندسی

۱ : نادرست

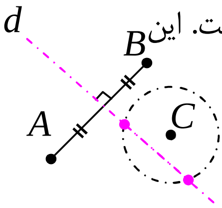
۲ : ویژگی مشترک

۳ : بیضی



۴ : مکان هندسی نقاط که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف AB و مکان هندسی نقاطی که از d به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر در دو طرف آن هستند. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط l (عمود منصف AB) و دو خط موازی d' و d'' خطوط موازی d جواب مسئله است.

بحث : اگر l یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم قطع می کند و مسئله د جواب دارد. اگر l با دو خط d' و d'' موازی باشد، مسئله جواب ندارد. اگر l بر یکی از دو خط d' و d'' منطبق باشد. مسئله بیشمار جواب دارد.



۵ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را رسم می کنیم و آن را خط d می نامیم. مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی C به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشند، یک دایره به مرکز C و شعاع۳ سانتی متر است. این دایره را رسم می کنیم. محل برخورد دایره و خط d جواب مسأله است.

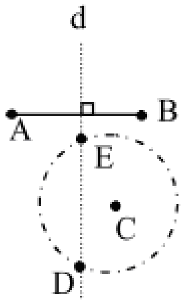
بحث :

اگر خط d دایره را قطع کند، مسأله دو جواب دارد.

اگر خط d بر دایره مماس باشد، مسأله یک جواب دارد.

اگر خط d دایره را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

۶ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB و مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی C به فاصله‌ی۳ واحد است، دایره ای به مرکز C و شعاع ۳ است. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط عمود منصف d و دایره جواب مسئله است که در شکل مقابل نقاط D و E می باشند. حال اگر خط عمود منصف d و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، مسئله دو جواب دارد و اگر مماس شوند، مسئله یک جواب و در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند، مسئله جواب ندارد.



۷ : درست

۸ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را d می نامیم و مکان هندسی نقاطی که اط دو نقطه‌ی C و D به یک فاصله باشد. عمود منصف پاره خط CD در

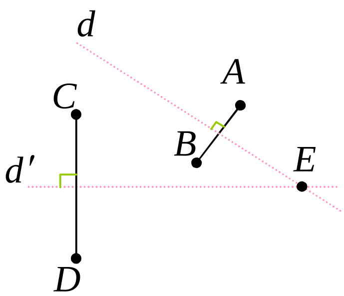
است. این خط را d' می نامیم. بنابراین نقطه‌ی برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطه‌ی E)

بحث :

اگر خطوط d و d' متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد.

اگر خطوط d و d' منطبق باشند مسئله بیشمار جواب دارد.

اگر خطوط d و d' موازی باشند مسئله جواب ندارد.



۹ : درست

۱۰ : الف : درست   ب : درست

❋❋❋

درس۲ : دایره

(❋) دایره

$$O\left|\begin{array}{l}\frac{۴+(-۲)}{۲}=۱\\ \frac{-۱+۱}{۲}=۰\end{array}\right.\rightarrow O(۱,۰)\;:۱$$ مرکز دایره

$$r=\frac{AB}{۲}=\frac{\sqrt{۶^۲+۲^۲}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۲}=\sqrt{۱۰}$$ طول شعاع دایره

$$(x-۱)^۲+(y-۰)^۲=(\sqrt{۱۰})^۲\rightarrow(x-۱)^۲+y^۲=۱۰$$ معادله‌ی دایره

۲:

$$a^۲+b^۲-۴c>۰\rightarrow ۹+۲۵-۴a>۰\rightarrow ۴a<۳۴\rightarrow a<\frac{۱۷}{۲}$$

۳:

$O(۰,۰)$ و $O'(۱,۰)$ و $r=۲$ و $r'=\sqrt{۵}$

$$OO'=\sqrt{(۱)^۲+(۰)^۲}=۱$$ طول خط المرکزین

$$\left.\begin{array}{l}r+r'=\sqrt{۵}+۲\\ |r-r'|=\sqrt{۵}-۲\end{array}\right\}\rightarrow|r-r'|<OO'<r+r'\rightarrow$$ دو دایره متقاطع می باشند.

۴:

$$\begin{cases}x+y=۱\\ x-y=۳\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=۲\\ y=-۱\end{cases}\rightarrow O(۲,-۱)$$

$$R=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$ شعاع دایره

$$\rightarrow(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$$ معادله‌ی دایره

۵:

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳\rightarrow O\left|\begin{array}{l}\alpha=۱\\ \beta=۱\end{array}\right.$$

$$m_{OA}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲\rightarrow m'=-\frac{۱}{۲}$$

$\rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲)$ معادله‌ی خط مماس

۶:

$$x^{۲}+y^{۲}=۱\rightarrow\begin{cases}O_{۱}(۰,۰)\\R_{۱}=۱\end{cases}$$

$$x^{۲}+y^{۲}-۶x-۲y+۹=۰\rightarrow\begin{cases}O_{۲}(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})\rightarrow O_{۲}(۳,۱)\\R_{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴-۳۶}=۱\end{cases}$$

$$d=O_{۱}O_{۲}=\sqrt{(۳-۰)^{۲}+(۱-۰)^{۲}}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

و چون $d>R_{۱}+R_{۲}$ لذا دو دایره متخارج هستند.

۷:

$r=OM=\sqrt{(۱+۲)^{۲}+(-۱-۳)^{۲}}=۵$ اندازه‌ی شعاع دایره

$(x+۲)^{۲}+(y-۳)=۲۵$ معادله‌ی دایره

۸: چون $x^{۲}+y^{۲}=۲$ معادله ی دایره است. پس $O(۰,۰)$ مرکز دایره و $r=\sqrt{۲}$ اندازه‌ی شعاع آن است.

$$\xrightarrow{x+y-۲=۰}d=\frac{|۱(۰)+۱(۰)-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}\rightarrow r=d$$

خط بر دایره مماس است.

۹: نادرست

۱۰:

$$(x+۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۹\rightarrow O'(-۱,۲)\quad,\ r'=۳$$

$$d=OO'=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵\xrightarrow{d=r+r'}r+r'=۵\xrightarrow{r'=۳}r=۲$$

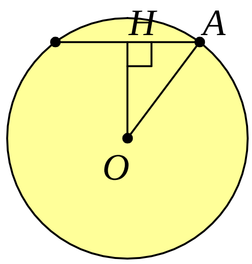
$(x-۲)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۴$ معادله‌ی دایره‌ی مطلوب

۱۱:

$$(x-۲)^۲+(y+۲)^۲=۱\rightarrow O(۲,۲) \quad , \quad r=۱$$

$$d=\frac{|۳(۲)+۲|}{\sqrt{(۳)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۱۰}}\rightarrow d>r$$ خط و دایره نقطه‌ی برخورد ندارند.

۱۲ :



$$OH=\frac{|۲(-۱)+۱(-۱)-۲|}{\sqrt{(۲)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

$$\Delta(AOH):\xrightarrow{\angle H=۹۰^\circ}OH^۲+AH^۲=OA^۲\rightarrow(\sqrt{۵})^۲+(۲)^۲=R^۲\rightarrow R=۳$$

$$\rightarrow(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۹$$

۱۳ : ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می آوریم.

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰\rightarrow\begin{cases}O(۱,-۱)\\R=\sqrt{۲}\end{cases}$$

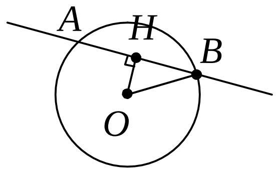
$$OA=۱\rightarrow OA<R$$

لذا نقطه‌ی داده شده ، داخل دایره است.

۱۴ : برای نوشتم معادله ی دایره ، به مختصات مرکز دایره و اندازه ی شعاع دایره نیاز است.

در اینجا مختصات مرکز دایره را داریم. اما برای تعیین اندازه‌ی شعاع دایره کافی است از مثلث قائم الزاویه‌ی OBH کمک بگیریم. طبق قضایای هندسه می دانیم که اگر از مرکز دایره بر وتر عمودی رسم کنیم، آن وتر نصف می شود.

پس :



$$BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

برای محاسبه‌ی اندازه‌ی OH کافی است، فاصله‌ی مرکز دایره را تا خط $x+y=۲$ به دست آوریم.

$$OH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱(۱)+۱(۱)-۲|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{|۱(۰)+۱(۱)-۲|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

لذا :

$$\Delta(OBH): OB^{۲} = OH^{۲} + BH^{۲} \xrightarrow{OB=R} R^{۲} = (\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{۲} + (\sqrt{۲})^{۲} = \frac{۵}{۲}$$

در نهایت معادله‌ی دایره را به شکل زیر می نویسیم.

$$(x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = R^{۲} \to (x-۰)^{۲} + (y-۱)^{۲} = \frac{۵}{۲}$$

۱۵ :

$$x^{۲} + y^{۲} - ۲x - ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{a=-۲, b=۰, c=-۴} \begin{cases} O_{۱}(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) \to O_{۱}(-۱,۰) \\ R_{۱} = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲} + b^{۲} - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۰ + ۱۶} = \sqrt{۵} \end{cases}$$

$$x^{۲} + y^{۲} = ۴ \to \begin{cases} O_{۲}(۰,۰) \\ R_{۲} = ۲ \end{cases}$$

$d = O_{۱}O_{۲} = \sqrt{(-۱-۰)^{۲} + (۰-۰)^{۲}} = ۱$ طول خط المرکزین

$$R_{۱} + R_{۲} = \sqrt{۵} + ۲$$

$$R_{۱} - R_{۲} = \sqrt{۵} - ۲$$

$$\sqrt{۵} - ۲ < ۱ < \sqrt{۵} + ۲ \to R_{۱} - R_{۲} < d < R_{۱} + R_{۲}$$

پس یعنی دو دایره متقاطع هستند.

۱۶ : نادرست

۱۷ :

شعاع دایره $R = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^{۲} + b^{۲}}} = \frac{|۴(۳) + ۳(۱) + ۵|}{\sqrt{(۴)^{۲} + (۳)^{۲}}} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$

معادله‌ی دایره $(x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = R^{۲} \to (x-۳)^{۲} + (y-۱)^{۲} = ۱۶$

۱۸ :

$$x^{۲} + y^{۲} - ۲x + ۴y + ۳ = ۰ \to x^{۲} - ۲x + y^{۲} + ۴y = -۳$$

$$\rightarrow (x^{۲}-۲x+۱)+(y^{۲}+۴y+۴)=-۳+۱+۴ \rightarrow (x-۱)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۲$$

$O(۱,-۲)$ مختصات مرکز دایره $R=\sqrt{۲}$ اندازه‌ی شعاع دایره

اکنون فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده را تعیین نموده و اندازه‌ی شعاع دایره مقایسه می کنیم.

$$D=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\frac{|(۱)(۱)+(-۱)(-۲)+(-۱)|}{\sqrt{(۱)^{۲}+(-۱)^{۲}}}=\frac{۱+۲-۱}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

و چون $D=R$ پس خط داده شده بر دایره مماس است.

۱۹ :

$$x^{۲}-۸x+y^{۲}+۴y=-۱۶ \rightarrow (x^{۲}-۸x+۱۶)+(y^{۲}+۴y+۴)=-۱۶+۱۶+۴$$

$\rightarrow (x-۴)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۴$ معادله‌ی دایره

$O'(۴,۲)$ مختصات مرکز دایره $R'=\sqrt{۴}=۲$ اندازه‌ی شعاع دایره

$OO'=\sqrt{(۴)^{۲}+(۳)^{۲}}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$ طول خط المرکزین

$$|R-R'|=OO' \rightarrow |R-۲|=۵ \rightarrow \begin{cases} R=۷ \\ R=-۳ \end{cases}$$

$R=-۳$ غیر قابل قبول است. لذا معادله‌ی دایره‌ی مماس می شود.

$(x-۰)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۴۹$ معادله‌ی دایره‌ی مطلوب

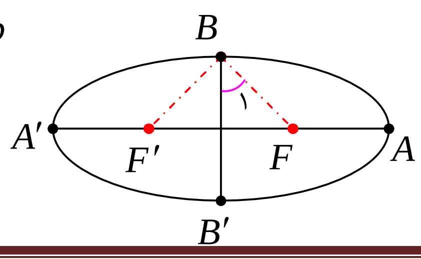
***

درس ۳ : بیضی و سهمی

(*) بیضی

۱ :

$$a=۲b \rightarrow c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=۴b^{۲}-b^{۲}=۳b^{۲} \rightarrow c=\sqrt{۳}b$$



$$\tan B_۱ = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \to B_۱ = ۶۰^\circ \to FBF' = ۲ \times ۶۰ = ۱۲۰^\circ$$

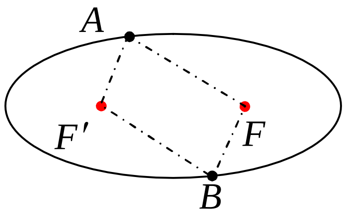
۲ : دایره

۳ :

$$\frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} \to c = \frac{۳}{۵}a \quad , \quad b = ۸ \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} a^۲ = ۶۴ + \frac{۹}{۲۵}a^۲ \to a = ۱۰ \,,\ c = ۶$$

لذا طول قطر بزرگ ۲۰ و فاصله‌ی کانونی ۱۲ می باشند.

۴ : دو نقطه‌ی A و B را به کانون های بیضی وصل می کنیم.



نقطه‌ی A روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی

$$AF + AF' = ۲a \quad (۱)$$

نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی

$$BF + BF' = ۲a \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) و فرض $(AF' = BF)$ نتیجه می شود: $AF = BF'$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ متوازی الاضلاع است و چون در هر متوازی الاضلاع، ضلع های روبرو موازی اند،

پس : $AF \parallel BF'$

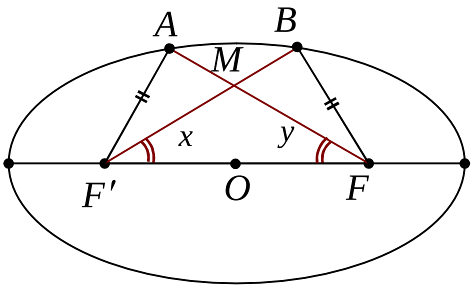
۵ :

$$AA' = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۱۲+۸)^۲} = ۲۰ \xrightarrow{AA' = ۲a} ۲a = ۲۰ \to a = ۱۰$$

$$e = \frac{c}{a} \xrightarrow{e = \frac{۳}{۵}} \frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} \xrightarrow{a = ۱۰} \frac{c}{۱۰} = \frac{۳}{۵} \to c = ۶$$

$$FF' = ۲c \xrightarrow{c = ۶} FF' = ۱۲ \quad \text{فاصله‌ی کانونی}$$

۶ :



$$\left.\begin{array}{r} AF + AF' = ۲a \\ BF + BF' = ۲a \\ BF = AF' \end{array}\right\} \to AF = BF'$$

$$\left.\begin{array}{l} AF=BF' \\ AF'=BF \\ FF'=FF' \end{array}\right\} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \Delta(AFF')\cong\Delta(BFF') \to \angle x=\angle y$$

(ض ض ض)

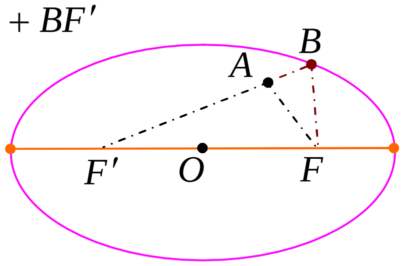
پس مثلث FMF' دو زاویه‌ی مساوی دارد، لذا متساوی الساقین است.

۷ : چون نقطه‌ی A درون بیضی باشد. در این صورت امتداد AF (یا AF') بیضی را در نقطه ای مانند B قطع می کند. اکنون با توجه با نامساوی مثلث در مثلث ABF می توان نوشت:

$$AF < AB + BF \xrightarrow{+AF'} AF + AF' < AF' + AB + BF$$

$$\to AF + AF' < \underbrace{AF' + AB}_{BF'} + BF \to AF + AF' < BF + BF'$$

$$\xrightarrow{BF+BF'=۲a} AF + AF' < ۲a$$



۸ :

$$\left\{\begin{array}{l} ۲a=۱۰ \to a=۵ \\ ۲b=۶ \to b=۳ \end{array}\right. \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} c=۴$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$$

۹ : درست

۱۰ :

$$c^۲=a^۲-b^۲=۲۵-۹=۱۶ \to c=۴$$

$$FF'=۲c=۲(۴)=۸$$

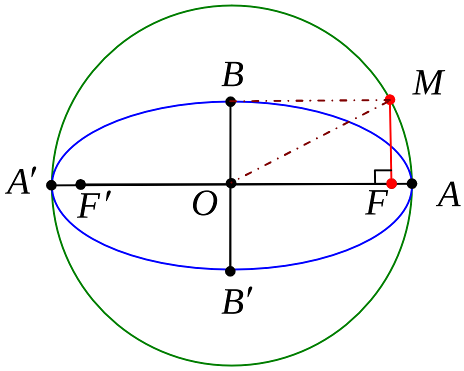
$$MF+MF'=۲a=۱۰ \to MF'=۱۰-MF$$

$$(MF)^۲+(MF')^۲=(FF')^۲ \to (MF)^۲+(۱۰-MF)^۲=(۸)^۲ \to MF=۵\pm\sqrt{۷}$$

۱۱ : بیرون

۱۲ : نادرست

۱۳ : طبق مسئله $OM = OA = a$ می باشد. لذا در مثلث قائم الزاویه‌ی OMA می توان نوشت:



$$OM = OA = a$$

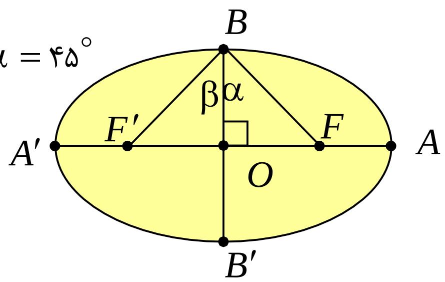
$$OF = c$$

$$OM^{۲} = OF^{۲} + MF^{۲}$$

$$\rightarrow a^{۲} = c^{۲} + MF^{۲} \rightarrow MF^{۲} = a^{۲} - c^{۲} \xrightarrow{a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}} MF^{۲} = b^{۲} \rightarrow MF = b$$

۱۴ :

$$۲a = \sqrt{۲} \rightarrow a = b\sqrt{۲} \rightarrow \cos\alpha = \frac{OB}{BF} = \frac{b}{b\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \rightarrow \alpha = ۴۵^{\circ}$$



$$\angle FBF' = ۲ \times ۴۵ = ۹۰^{\circ}$$

۱۵ :

$$BB' = ۲b = ۲۴ \rightarrow b = ۱۲$$

$$OF = c = ۵$$

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \rightarrow a^{۲} = ۱۴۴ + ۲۵ \rightarrow a^{۲} = ۱۶۹ \rightarrow a = ۱۳$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۵}{۱۳}$$

۱۶ : صفر

۱۷ :

قطر بزرگ $AA' = ۲a = ۲۰ \rightarrow a = ۱۰$

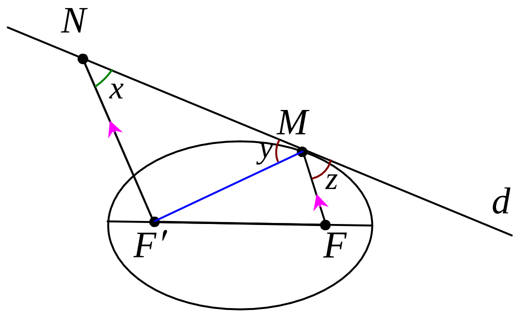
خروج از مرکز بیضی $e = \frac{c}{a} \to \frac{۴}{۵} = \frac{c}{۱۰} \to c = ۸$

فاصله‌ی کانونی $FF' = ۲c = ۲ \times ۸ = ۱۶$

رابطه ی طلایی بیضی $a^۲ = b^۲ + c^۲ \to ۱۰۰ = b^۲ + ۶۴ \to b^۲ = ۳۶ \to b = ۶$

طول قطر بزرگ بیضی $BB' = ۲b = ۲ \times ۶ = ۱۲$

۱۸ : طبق ویژگی خط مماس بر بیضی



داریم، $\angle y = \angle z$ و چون $NF' \parallel MF$

پس $\angle x = \angle z$. لذا $\angle x = \angle y$

یعنی مثلث $NF'M$ دو زاویه‌ی مساوی دارد،

در نتیجه متساوی الساقین بوده و $NF' = MF'$

۱۹ : $\frac{۱}{۲}$

۲۰ :

$$\left.\begin{array}{l} OF = c = ۴ \\ OA = a = ۸ \end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} ۶۴ = b^۲ + ۱۶ \to b^۲ = ۴۸ \to b = ۴\sqrt{۳}$$

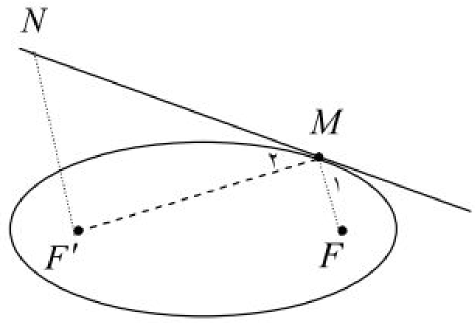
$BB' = ۲b = ۸\sqrt{۳}$ طول قطر کوچک

۲۱ : مجموع $MF + MF'$ کمترین مقدار است. بنابه خاصیت کوتاه ترین مسیر، زاویه های $\angle M_۱ = \angle M_۲$.

از طرفی چون $NF' \parallel MF$ و d مورب است، پس $\angle N = \angle M_۱$

اکنون از این دو نتیجه می توان نوشت : $\angle N = \angle M_۲$

یعنی مثلث MNF' متساوی الساقین است و لذا : $MF' = NF'$



(✻) سهمی

۱ : با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات معلوم می شود که سهمی قائم رو به پایین می باشد و لذا :

پارامتر سهمی $p=۴$

معادله‌ی سهمی $(x-۱)^۲=-۱۶(y-۲)$

معادله‌ی خط هادی $y=۶$

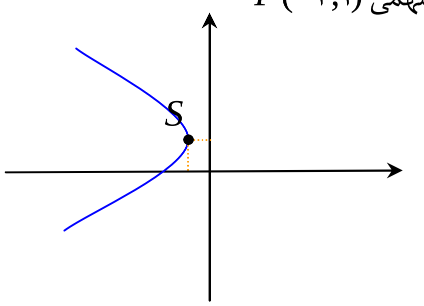
۲ : الف :

$$y^۲-۲y+۸x+۹=۰\rightarrow y^۲-۲y+۱=-۸x-۸\rightarrow (y-۱)^۲=-۸(x+۱)$$

$\rightarrow S(-۱,۱)$ رأس سهمی

دهانه‌ی سهمی به سمت چپ و $p=۲$ ، معادله‌ی خط هادی $x=۱$ ، کانون سهمی $F(-۳,۱)$

ب : نقاط کمکی $B'(-۳,-۳)$ و $B(-۳,۵)$

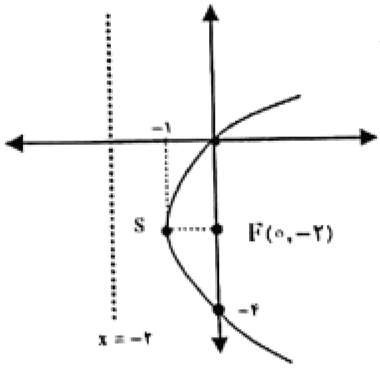


۳ :

$y^۲=۴x-۴y\rightarrow y^۲+۴y=۴x+۴\rightarrow (y+۲)^۲=۴(x+۱)$ سهمی افقی مثبت

خط هادی $x=-۲$ کانون سهمی $F(۰,-۲)$ رأس سهمی $S(-۱,-۲)$

نقاط کمکی برای ترسیم $(۰,۰)$ و $(۰,۴)$



۴ : سهمی

۵ : الف : با توجه به جایگاه رأس و خط هادی ، دهانه‌ی سهمی رو به پایین است و $a = ۴$

پس معادله‌ی سهمی به صورت $(x-۲)^۲ = -۱۶(y-۳)$

$-۴p = -۱۶ \rightarrow p = ۴$

ب : مختصات کانون سهمی برابر $F(\alpha, \beta - p) \rightarrow F(۲, ۳-۴) \rightarrow F(۲, -۱)$

۶ :

$y^۲ = ۴(x-۱)$ سهمی افقی مثبت

پارامتر سهمی $۴p = ۴ \rightarrow p = ۱$, و رأس سهمی $\rightarrow S(۱,۰)$

کانون سهمی $\rightarrow F(۲,۰)$

معادله‌ی دایره‌ی مورد اشاره $(x-۲)^۲ + y^۲ = ۹$

$$\begin{cases} y^۲ = ۴x - ۴ \\ y^۲ = -x^۲ + ۴x + ۵ \end{cases} \rightarrow -x^۲ + ۴x + ۵ = ۴x - ۴ \rightarrow x = \pm ۳$$

که پاسخ $x = -۳$ غیر ممکن است.

نقاط برخورد سهمی و دایره $\rightarrow \begin{cases} M(۳, ۲\sqrt{۲}) \\ M'(۳, -۲\sqrt{۲}) \end{cases}$

۷ : کانون سهمی

۸ :

$$x^{۲}-۴y+۸x=۰ \rightarrow x^{۲}+۸x+۱۶=۴y+۱۶ \rightarrow (x+۴)^{۲}=۴(x+۴)$$

سهمی قائم و رو بالا است.

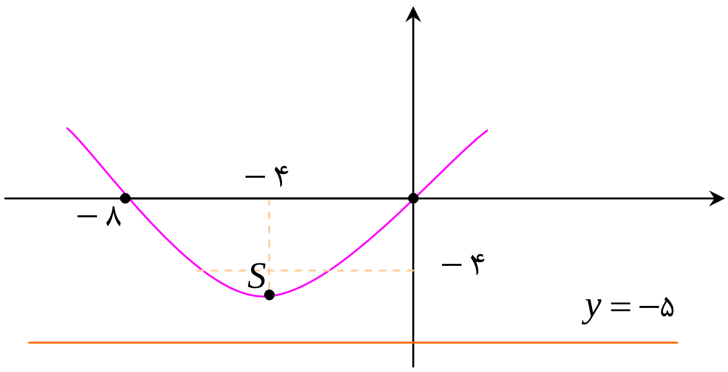
رأس سهمی $S(-۴,-۴)$

پارامتر سهمی $۴p=۴ \rightarrow p=۱$

کانون سهمی $F(\alpha,\beta+p) \rightarrow F(-۴,-۴+۱) \rightarrow F(-۴,-۳)$

معادله‌ی خط هادی سهمی $y=\beta-p \rightarrow y=-۴-۱=-۵$

نقاط کمکی $y=-۳ \rightarrow \begin{cases} B(-۲,-۳) \\ B'(-۶,-۳) \end{cases}$



:۹

$$y^{۲}=۴(x-۱) \rightarrow S(۱,۰) \ , \ F(۲,۰)$$

معادله‌ی دایره $(x-۲)^{۲}+y^{۲}=۹$

$$\begin{cases} y^{۲}=۴x-۴ \\ (x-۲)^{۲}+y^{۲}=۹ \end{cases} \rightarrow (x-۲)^{۲}+۴x-۴=۹=x^{۲}-۴x+۴+۴x-۴=۹$$

$$\rightarrow x^{۲}=۹ \rightarrow x=\pm ۳$$

$$\rightarrow \begin{cases} M(۳,۲\sqrt{۲}) \\ M'(۳,-۲\sqrt{۲}) \end{cases}$$

:۱۰

$$x^{۲}+۴x=۲y \xrightarrow{+۴} x^{۲}+۴x+۴=۲y+۴ \rightarrow (x+۲)^{۲}=۲(y+۲)$$

با مشاهده‌ی این معادله ، معلوم می شود که سهمی، قائم رو به بالا است و پارامتر سهمی $p=\frac{۱}{۲}$ می باشد.

$$۴p=۲\rightarrow p=\frac{۱}{۲}$$

مختصات رأس سهمی هم به صورت $(-۲,-۲)$ است.

مختصات کانون سهمی را هم می توان به صورت زیر تعیین نمود.

کانون سهمی $F(\alpha,\beta+p)\rightarrow F(-۲,-۲+\frac{۱}{۲})\rightarrow F(-۲,-\frac{۳}{۲})$

برای تعیین مختصات نقاط برخورد سهمی با محور های مختصات یک بار x و یک بار y را برابر صفر قرار می دهیم. لذا

محل برخورد با محور x ها $y=۰\xrightarrow{x^۲=۲y-۴x}x^۲=۲(۰)-۴x\rightarrow x=۰\,,\ x=-۴$

$\rightarrow A(۰,۰)\qquad,\qquad B(۰,-۴)$

محل برخورد با محور y ها $x=۰\xrightarrow{x^۲=۲y-۴x}(۰)^۲=۲y-۴(۰)\rightarrow y=۰\rightarrow C(۰,۰)$

۱۱ : نقطه

۱۲ :

$$y^۲-۶y+۱۶x+۲۵=۰\rightarrow y^۲-۶y+۹=-۱۶x-۱۶\rightarrow (y-۳)^۲=-۱۶(x+۱)$$

لذا فرم استاندارد سهمی به صورت $(y-۳)^۲=-۱۶(x+۱)$ است. سهمی افقی و دهانه‌ی سهمی به سمت چپ باز می شود. رأس سهمی نقطه‌ی $S(-۱,۳)$ است و $p=۴$ مختصات کانون آن نقطه‌ی $F(\alpha-p,\beta)=(-۵,۳)$ است. معادله‌ی خط هادی سهمی به صورت $x=p+\alpha=۳$ است.

۱۳ : با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، سهمی قائم و دهانه‌ی سهمی رو به بالا است و $p=۳$ فرم استاندارد سهمی به صورت:

$$(x-h)^۲=۴p(y-k)\rightarrow (x-۴)^۲=۱۲(y-۶)$$

***

تهیه کننده : جابر عامری

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل سوّم هندسه۳ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس۱ : معرفی فضای سه بعدی

(❋) فضای دو بعدی

(❋) فضای سه بعدی

۱ : درست

۲ : الف : $z=۴$ ب : محور y ها

پ : نقطه‌ی $A(۲,۰,۰)$ و مختصات وسط AB برابر است با $(-۱,۳,-\frac{۳}{۲})$

۳ :

$$\begin{cases} -۱\le x\le ۲ \\ y=۱ \\ z=۳ \end{cases}$$ معادلات مربوط به پاره خط AB

۴ :

$$\|AB\|=\sqrt{(۳-۳)^۲+(-۲-۱)^۲+(۲-۲)^۲}=۳$$ طول پاره خط AB

$$\begin{cases} x=۳ \\ -۲\le y\le ۱ \\ z=۲ \end{cases}$$ معادلات مربوط به پاره خط AB

۵ :

الف) $A(۰,۴,۳)$

ب) $AD:\begin{cases} ۰\le x\le ۲ \\ y=۴ \\ z=۳ \end{cases}$ و $CDFG:\begin{cases} x=۲ \\ ۰\le y\le ۴ \\ ۰\le z\le ۳ \end{cases}$

۶ : درست

۷ : هر نقطه روی محور x ها، عرض و ارتفاع آن صفر است. پس این معادله نشان دهنده محور x ها است.

معادله‌ی $y=0$ یعنی صفحه‌ی xoz می باشد و محور x ها منطبق بر آن است.

۸ :

الف : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ در فضای R^2 همان معادله‌ی محور y ها است.

معادله‌ی $x=0$ معادله‌ی صفحه‌ی yz که شامل محور y ها است.

ب :

$$\vec{a}+2\vec{b}=(2,-1,3)+2(1,2,0)=(4,3,3)$$

$$\|\vec{a}+2\vec{b}\|=\sqrt{(4)^2+(3)^2+(3)^2}=\sqrt{16+9+9}=\sqrt{34}$$

❋❋❋

(❋) بردار ها

۱ :

$$\vec{a}=(3,2,-1)$$

$$r\vec{b}-\vec{a}=2\vec{b}-\vec{a}=2(3,1,-1)-(3,2,-1)=(6,2,-2)+(-3,-2,1)=(3,0,-1)$$

۲ :

$$\vec{a}-2\vec{b}=(2,0,-1)-(2,4,2)=(0,-4,-3)\rightarrow\|\vec{a}-2\vec{b}\|=\sqrt{16+9}=5$$

۳ :

$$\vec{a}=(0,2,-3)$$

$$\vec{c}=2\vec{b}-\vec{a}=2(0,1,-1)-(0,2,-3)=(0,2,-2)+(0,-2,3)=(0,0,1)$$

۴ : موازی

۵ :

$$\vec{b}=-6\vec{j}+8\vec{k}=(0,-6,8)$$

$$r\vec{b}=-\frac{1}{2}(0,-6,8)=(0,3,-4)\to\|r\vec{b}\|=\sqrt{(0)^2+(3)^2+(-4)^2}=\sqrt{0+9+16}=5$$

$$r\vec{a}=-\frac{1}{2}(\sqrt{8},2,4)=(-\sqrt{2},-1,-2)$$

$$r\vec{a}+\vec{b}=(-\sqrt{2},-1,-2)+(0,-6,8)=(-\sqrt{2},-7,6)$$

❋❋❋

درس۲ : ضرب داخلی و ضرب خارجی دو بردار

(❋) ضرب داخلی و خواص آن

۱ :

$$\vec{a}.\vec{b}=0\leftrightarrow\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta=0\xleftrightarrow{\|\vec{a}\|,\|\vec{b}\|\neq 0}\cos\theta=0\leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

۲ : صفر ($\vec{a}.\vec{b}=0$)

۳ : برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می توان نوشت، $\|\vec{a}\|\geq 0$ و $\|\vec{b}\|\geq 0$ و لذا $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\geq 0$

از طرفی برای زاویه‌ی θ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامساوی $-1\leq\cos\theta\leq 1$ برقرار است. این نامساوی را می توان بـه صورت $|\cos\theta|\leq 1$ نیز نوشت. اکنون دو طرف این نامساوی را در عدد نـامنفی $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ ضـرب مـی کـنیم. خواهیم داشت:

$$\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times|\cos\theta|\leq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times 1$$
$$\to|\vec{a}.\vec{b}|\leq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$$

۴ :

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=(m)(1)+(-1)(-1)+(2)(0)=m+1$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(m)^{۲}+(-۱)^{۲}+(۲)^{۲}}=\sqrt{m^{۲}+۱+۴}=\sqrt{m^{۲}+۵}$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۱)^{۲}+(-۱)^{۲}+(۰)^{۲}}=\sqrt{۱+۱+۰}=\sqrt{۲}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}\to\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{m+۱}{\sqrt{m^{۲}+۵}\times\sqrt{۲}}\to\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{m+۱}{\sqrt{m^{۲}+۵}\times\sqrt{۲}}$$

$$\to ۱=\frac{m+۱}{\sqrt{m^{۲}+۵}}\to m+۱=\sqrt{m^{۲}+۵}\to m^{۲}+۲m+۱=m^{۲}+۵$$

$$\to ۲m=۴\to m=۲$$

۵ : صفر

۶ : گیریم که $\vec{a}=(a_{۱},a_{۲},a_{۳})$ پس :

$$\vec{a}.\vec{a}=a_{۱}a_{۱}+a_{۲}a_{۲}+a_{۳}a_{۳}=a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲}=\|\vec{a}\|^{۲}$$

۷ : نادرست

۸ :

$$\vec{a}.\vec{b}=(۰)(۲)+(۱)(-۱)+(۱)(-۲)=۰+۱+۲=۳$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(۰)^{۲}+(-۱)^{۲}+(-۱)^{۲}}=\sqrt{۰+۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۲)^{۲}+(-۱)^{۲}+(-۲)^{۲}}=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\to\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to\theta=۴۵^{\circ}$$

❋❋❋

(❋) تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر

۱ :

$$\vec{u}=\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶)\to\|\vec{u}\|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=\sqrt{۴۹}=۷$$

$$\vec{a}.\vec{u} = (-۱)(۲) + (-۳)(-۳) + (۰)(۶) = -۲ + ۹ + ۰ = ۷$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^۲}\vec{u} = \frac{۷}{۴۹}(۲,-۳,۶) = \frac{۱}{۷}(۲,-۳,۶) = (\frac{۲}{۷},-\frac{۳}{۷},\frac{۶}{۷})$$

۲ :

$$\vec{a}.\vec{b} = (۱)(-۲) + (-۳)(۱) + (۲)(-۵) = -۲ - ۳ - ۱۰ = -۱۵$$

$$\|\vec{b}\|^۲ = (-۲)^۲ + (۱)^۲ + (-۵)^۲ = ۴ + ۱ + ۲۵ = ۳۰$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b} = \frac{-۱۵}{۳۰}(-۲,۱,-۵) = \frac{-۱}{۲}(-۲,۱,-۵) = (۱,-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$$

۳ :

$$\vec{a}.\vec{b} = (۵)(۱) + (-۱)(-۱) + (۲)(۰) = ۵ + ۱ + ۰ = ۶$$

$$\|\vec{b}\|^۲ = (۱)^۲ + (-۱)^۲ + (۰)^۲ = ۱ + ۱ + ۰ = ۲$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b} = \frac{۶}{۲}(۱,-۱,۰) = ۳(۱,-۱,۰) = (۳,-۳,۰)$$

۴ :

$$\vec{a} = r\vec{b}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = r.\vec{b}.\vec{b} = r\|\vec{b}\|^۲$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b} = \frac{r\|\vec{b}\|^۲}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b} = r\vec{b} = \vec{a}$$

۵ : الف :

$$\vec{a}.\vec{b} = (۱)(-۲) + (۲)(۰) + (۳)(۲) = -۲ + ۰ + ۶ = ۴$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-۲)^۲ + (۰)^۲ + (۲)^۲} = \sqrt{۴ + ۰ + ۴} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b} = \frac{۴}{۸}(-۲,۰,۲) = (-۱,۰,۱)$$

ب :

$$2\vec{a}-\vec{b}=2\vec{a}+(-\vec{b})=2(1,2,3)+(2,0,-2)=(2,4,6)+(2,0,-2)=(4,4,4)$$

$$\|2\vec{a}-\vec{b}\|=\sqrt{(4)^2+(4)^2+(4)^2}=\sqrt{16+16+16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

۶:

$$\vec{a}.\vec{b}=(-2)(0)+(0)(2)+(2)(2)=4$$

$$\vec{a}=(-2,0,2)\rightarrow\|\vec{a}\|=\sqrt{4+0+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\vec{b}=(0,2,2)\rightarrow\|\vec{b}\|=\sqrt{0+4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{4}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\rightarrow\theta=60^\circ$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(-2,0,2)+(0,2,2)=(-2,2,4)$$

$$(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}=(-2)(0)+(2)(2)+(4)(2)=4+8=12$$

$$(a+b)'=\frac{(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}=\frac{12}{8}(0,2,2)=(0,3,3)$$

❋❋❋

(❋) ضرب خارجی دو بردار

۱:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta\rightarrow72=3\times26\times\sin\theta\rightarrow\sin\theta=\frac{12}{13}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=\pm\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\pm\sqrt{\frac{25}{169}}=\pm\frac{5}{13}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta=3\times26\times(\pm\frac{5}{13})=\pm30$$

۲ : کافی است یکی از دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{b}\times\vec{a}$ را تعیین کنیم.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}-۳ & ۲\\ ۱ & -۵\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ -۵ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & -۳\\ -۲ & ۱\end{vmatrix})=(۱۳,۱,-۵)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}۱ & -۵\\ -۳ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۵ & -۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۲ & ۱\\ ۱ & -۳\end{vmatrix})=(-۱۳,-۱,۵)$$

۳ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\leftrightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{o}\|\leftrightarrow\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta=\circ$$

$$\xleftrightarrow{\|\vec{a}\|,\|\vec{b}\|\neq\circ}\sin\theta=\circ\leftrightarrow\theta=\cdot\vee\theta=\pi\leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

۴ :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta\rightarrow ۱۲=۸\times۳\times\sin\theta\rightarrow\sin\theta=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}=\pm\sqrt{۱-(\frac{۱}{۲})^{۲}}=\pm\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}=\pm\sqrt{\frac{۳}{۴}}=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta=۸\times۳\times(\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\pm۱۲\sqrt{۳}$$

۵ : درست

۶ :

$$\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})=\vec{i}.\vec{i}=\|\vec{i}\|^{۲}=۱$$

۷ :

$$\vec{k}.(\vec{i}\times\vec{j})=\vec{k}.\vec{k}=\|\vec{k}\|^{۲}=۱$$

۸ : الف : بردار $\vec{a}$ در ناحیه‌ی چهارم است.

ب :

$$\vec{b}=-۲\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-۲,۱,-۱)$$

$$\vec{a}+2\vec{b}=(3,-2,1)+2(-2,1,-1)=(-1,0,-1)\rightarrow\|\vec{a}+2\vec{b}\|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$$

ج :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}\right)=(1,1,-1)$$

۹ : نادرست

۱۰ :

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\xrightarrow{\exists r\in R}\vec{b}=r\vec{a}\rightarrow(b_1,b_2,b_3)=(ra_1,ra_2,ra_3)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}ra_2 & ra_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}ra_3 & ra_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}ra_1 & ra_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

$$=(0,0,0)=\vec{o}$$

اثبات برعکس این مطلب هم می توان به شکل زیر نوشت :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{o}\|\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=0$$

$$\xrightarrow{\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta}\sin\theta=0\rightarrow\theta=0\quad or\quad\pi$$

لذا $\vec{a}\parallel\vec{b}$

۱۱ :

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(2,2,-1)$$

***

(*) مساحت متوازی الاضلاع و حجم متوازی السطوح

۱ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-1,-1,1)$$

$$S = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{۱+۱+۱} = \sqrt{۳}$$

۲ :

$$\vec{b} \times \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix} \right) = (۸,-۷,-۵)$$

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = (۱)(۸) + (m)(-۷) + (-۱۱)(-۵) = ۸ - ۷m + ۵۵ = ۰ \rightarrow m = ۹$$

۳ :

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\|} = \frac{۱۲}{۴ \times ۶} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳}$$

$$S = \frac{۱}{۲}\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \frac{۱}{۲}\|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \sin\theta = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳}$$

روش دوّم :

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^۲ + (\vec{a}.\vec{b})^۲ = \|\vec{a}\|^۲ \|\vec{b}\|^۲ \rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\|^۲ + (۱۲)^۲ = (۴)^۲(۶)^۲$$

$$\rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\|^۲ + ۱۴۴ = ۱۶ \times ۳۶ \rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\|^۲ + ۱۴۴ = ۵۷۶ \rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\|^۲ = ۴۳۲$$

$$\rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\|^۲ = ۱۴۴ \times ۳ \rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| = ۱۲\sqrt{۳}$$

$$S = \frac{۱}{۲}\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \frac{۱}{۲} \times ۱۲\sqrt{۳} = ۶\sqrt{۳}$$

۴ :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} \right) = (۲,-۴,-۱)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = (۲)(۳) + (-۴)(۲) + (-۱)(۱) = ۶ - ۸ - ۱ = -۳$$

حجم متوازی السطوح $V = |(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}| = |-۳| = ۳$

۵ : الف)

$$(\vec{a} + \vec{b}) = (۱,۴,۱)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (۱,۴,۱) \times (۲,۱,-۲) = (-۹,۴,-۷)$$

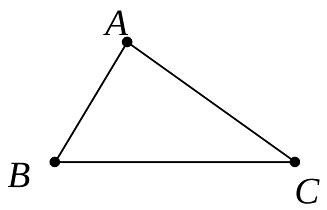
ب)

$$(\vec{b}\times\vec{c})=(-۲,-۲,-۳)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۲,۳,۱)\times(-۲,-۲,-۳)=-۱۳$$

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=|-۱۳|=۱۳$$

۶:



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(۲,-۲,-۱)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(۱,-۳,۱)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-۵,-۳,-۴)$$

$S=\frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵۰}$ مساحت مثلث داده شده

۷: الف :

$$\vec{a}.\vec{b}=(-۴)(۱)+(۳)(-۱)+(-۵)(۱)=-۴-۳-۵=-۱۲$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}=\frac{-۱۲}{۳}(۱,-۱,۱)=-۴(۱,-۱,۱)=(-۴,۴,-۴)$$

ب : بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و هر مضرب غیر صفر آن ، بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. در اینجا فقط کافی است ضرب خارجی را تعیین کنیم.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}۳ & -۵\\ -۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۵ & -۴\\ ۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۴ & ۳\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}\right)=(-۲,-۱,۱)$$

ج : مساحت مثلثی که با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل می شود، برابر نصف اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی این دو بردار است. یعنی :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{(-۲)^۲+(-۱)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۴+۱+۱}=\sqrt{۶}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۶})=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

❋❋❋

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان