مسائل حل شده

ریاضیات مهندسی پیشرفته

دکتر شید فر

مباحث:

جواب عمومی معادلات

معادله دما

معادله موج

حل معادلات به روش تفکیک پذیری

حل معادلات به روش پواسن

تنظیم: ابراهیم شهنازی

۱۶.۲. مسائل حل شده

۱ ـ جواب مسئله زیر را به دست آورید

$$u_{tt} = u_{xx};\ u(x,۰) = \sin x+\sin ۳x\ ,\ u_t(x,۰)= ۰\ ,\ u(۰,t) = u(\pi,t) = ۰$$

$$A_n= \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}(\sin x+\sin ۳x)\sin nx\, dx = \frac{۱}{\pi}\begin{cases} ۰ & ; n\neq ۱,۳ \\ ۱ & ; n=۱ \text{ یا } n=۳ \end{cases}$$

بنابراین

$$u(x,t)= \sin x \cos t + \sin ۳x \cos ۳t$$

۲ ـ جواب عمومی دستگاه معادلات $u_{xx}=۰$ و $u_{yy}=۰$ را بیابید.

از $u_{xx}=۰$ می‌یابیم $u=x\phi(y)+\psi(y)$ و از آنجا

$$u_{yy}=x\phi''(y)+\psi''(y)=۰$$

بنابراین

$$\phi''(y)=۰ \qquad \text{و} \qquad \psi''(y)=۰$$

در نتیجه

$$\psi(y)=cy+d \qquad \text{و} \qquad \phi(y)=ay+b$$

بنابراین

$$u=x(ay+b)+cy+d = axy+bx+cy+d$$

۳ـ جواب عمومی معادله $u_{xy}+u_x+x+y+1=0$ را بیابید.

داریم $u_{xy}+u_x=-(x+y+1)$ نخست جواب عمومی معادله بدون طرف ثانی یعنی جواب معادله $u_{xy}+u_x=0$ را می‌یابیم. با فرض $u_x=p$ می‌یابیم $P_y+p=0$ و یا $\frac{P_y}{p}=-1$ و در نتیجه $\ln\frac{p}{h(x)}=-y$ و از آنجا $p=h(x)e^{-y}$ و یک جواب خصوص معادله $p_y+p=-(x+y+1)$ عبارت است از $p=-(x+y)$ و در نتیجه این معادله دارای جواب عمومی

$$p=h(x)e^{-y}-(x+y)$$

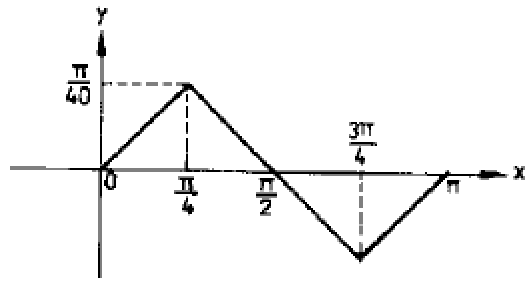
است. با توجه به آنکه $p=u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$ داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x}=h(x)e^{-y}-(x+y)$$

و از آنجا

$$u=e^{-y}\int h(x)dx-\frac{x^2}{2}-xy+\psi(y)=\phi(x)e^{-y}+\psi(y)-\frac{x^2}{2}-xy$$

۴ـمسئله موج را در حالتی حل کنید که $u_{tt}=c^2u_{xx}$, $u_t(x,0)=0$ و انحراف اولیه برابر باشد با



$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{10} ; & 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{4}\\[2mm] \dfrac{1}{10}\left(-x+\dfrac{\pi}{2}\right) ; & \dfrac{\pi}{4}\leq x\leq \dfrac{3\pi}{4}\\[2mm] \dfrac{1}{10}(x-\pi) ; & \dfrac{3\pi}{4}\leq x\leq \pi\end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\Big[\int_0^{\pi/4}\frac{x}{10}\sin nx\,dx+$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(-\frac{x}{10}+\frac{\pi}{20}\right)\sin nx\,dx+\int_{3\pi/4}^{\pi}\left(\frac{x}{10}-\frac{\pi}{10}\right)\sin nx\,dx\Big]$$

$$=\frac{4}{5\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

و از آنجا

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{4}\cos cnt\sin nx$$

۵ـ معادله $u_x=yu_y$ را به روش ضربی حل کنید.

با فرض $u(x,y)=F(x)G(y)$ می‌یابیم $F'G=yFG'$ و یا

$$\frac{F'}{F}=\frac{yG'}{G}=k$$

با توجه به آن داریم

$$\frac{G'}{G}=\frac{k}{y} \quad \text{و} \quad \frac{F'}{F}=k$$

که به ترتیب دارای جوابهای عمومی $F=ae^{kx}$ و $G=y^k$ است بنابراین

$$u(x,y)=ay^k e^{kx}$$

۶ـ معادله $u_x+u_y=۲(x+y)u$ را به روش ضربی حل کنید.

با فرض $u(x,y)=F(x)G(y)$ و جایگزین کردن آن در معادله می‌یابیم

$$F'G+FG'=۲(x+y)FG$$

و یا

$$\frac{F'}{F}-۲x=-\frac{G'}{G}+۲y=k$$

و از آنجا به دو معادله زیر می‌رسیم

$$\frac{G'}{G}=۲y-k \quad \text{و} \quad \frac{F'}{F}=۲x+k$$

جوابهای این معادلات عبارت‌اند از

$$G=e^{y^۲-ky} \quad \text{و} \quad F=ce^{x^۲+kx}$$

بنابراین

$$u=ce^{x^۲+y^۲+k(x-y)}$$

۷ـ معادله $u_{xx}+u_{yy}=0$ را به روش ضربی حل کنید.

با قراردادن $u(x,y)=F(x)G(y)$, در معادله می‌یابیم $F''G+FG''=0$ و یا $\frac{F''}{F}=-\frac{G''}{G}=K$

با فرض $k=\mu^2$ می‌یابیم $F''-\mu^2F=0$ و $G''+\mu^2G=0$ که دارای جوابهای

$$F=a\cosh\mu x+b\sinh\mu x \quad \text{و} \quad G=c\cos\mu y+d\sin\mu y$$

و

$$u(x,y)=(a\cosh\mu x+b\sinh\mu x)(c\cos\mu y+d\sin\mu y)$$

و همینطور به ازای $k=-p^2$ می‌یابیم

$$u(x,y)=(a\cos px+b\sin px)(c\cosh py+d\sinh py)$$

به ازای $k=0$ نتیجه می‌شود $F''=0$ و $G''=0$ و از آنجا

$$F=ax+b\,,\ G=cy+d \quad \text{و} \quad u(x,y)=(ax+b)(cy+d)$$

۸ـ با توجه به تغییر متغیر $v=x$ و $z=xy$ معادله $xu_{xy}=yu_{yy}+u_y$ را حل کنید. داریم

$$u_x=u_v v_x+u_z z_x=u_v+yu_z$$

$$u_y=u_v v_y+u_z z_y=xu_z$$

و

$$u_{xy}=(u_v+yu_z)_y=u_{vy}+u_z+yu_{zy}=u_{vv}v_y+u_{vz}z_y+u_z+y(u_{zv}v_y+u_{zz}z_y)=xu_{vz}+u_z+xyu_{zz}$$

و

$$u_{yy}=x^2u_{zz}$$

با جایگزین کردن این عبارات در معادله می‌یابیم

$$x^2u_{vz}+xu_z+x^2yu_{zz}=x^2yu_{zz}+xu_z$$

و از آنجا $u_{vz}=0$ که دارای جواب عمومی $u=\phi(v)+\psi(z)$ است و بنابراین معادله مورد نظر دارای جواب عمومی $u(x,y)=\phi(x)+\psi(xy)$ است.

۹ـ دما در یک میله به طول ده سانتیمتر را بیابید در صورتی که دما در دو سر میله در درجه حرارت صفر بوده و میله از جنس نقره با سطح مقطع $1cm^2$، چگالی $10/6gm/cm^3$، ضریب هدایت گرما $1/04\ \frac{cal}{cm\ degsec}$ و گرمای ویژه $0/056cal/gm\ de\ g$ باشد. سطح جانبی آن کاملاً عایق پوش است و درجه حرارت اولیه برابر است با

الف: $f(x)=\sin 0/1\pi x$ ب: $f(x)=x(10-x)$

داریم

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda^2_n t} \sin \frac{n\pi}{10} x$$

$$c^2=\frac{k}{\rho\sigma}=\frac{1/04}{10/6\times 0/056}=1/752$$

و

$$\lambda_n^2=\frac{c^2n^2\pi^2}{100}=0/173n^2$$

$$a_n=\frac{2}{10}\int_0^{10} f(x)\sin \frac{n\pi}{10} x\, dx$$

به ازای $f(x)=\sin 0/1x$ می‌یابیم

$$a_n=\frac{2}{10}\int_0^{10}\sin 0/1\pi x \sin \frac{n\pi}{10} x\, dx=\begin{cases}0\ ; n\neq 1\\ 1\ ; n=1\end{cases}$$

بنابراین

$$u(x,t)=e^{-0/173t}\sin \frac{\pi}{10} x$$

به ازای $f(x)=x(10-x)$

$$a_n=\frac{2}{10}\int_0^{10} x(10-x)\sin \frac{n\pi}{10} x\, dx=\frac{400}{\pi n^3}(1+(-1)^{n+1})$$

از اینرو

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{400}{\pi n^3}(1+(-1)^{n+1})e^{-0/173n^2t}\sin \frac{n\pi}{10} x$$

۱۰ ـ درجه حرارت در یک میله نامتناهی به ازای $c=1$ را بیابید در صورتی درجه حرارت اولیه برابر باشد با

$$f(x)=\begin{cases} x \;;\; 0<x<1 \\ 2-x \;;\; 1<x<2 \\ 0 \;;\; x>2 \end{cases} \quad ; \quad f(-x)=f(x)$$

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}(a(w)\cos wx+b(w)\sin wx)e^{-w^2t}\,dw$$

$$a(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^2 f(x)\cos wx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1 x\cos wx\,dx+\int_1^2(2-x)\cos wx\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi w^2}(2\cos w-\cos 2w-1)$$

و $b(w)=0$ و از آنجا

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{w^2}(2\cos w-\cos 2w-1)\cos wx\, e^{-w^2t}\,dw$$

۱۱ ـ مقدار انحراف $u(x,y,t)$ در یک غشای مربعی $a=b=1$ را بیابید در صورتی که ارتعاش روی لبه‌های آن صفر، سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه برابر باشد با

$$f(x,y)=0.01\,xy\,(1-x^2)(1-y^2)$$

داریم

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin m\pi x\sin n\pi y$$

که در آن $\lambda_{mn}=\pi\sqrt{m^2+n^2}$ و

$$a_{mn}=4\int_0^1\int_0^1 0/01xy(1-x^2)(1-y^2)\sin m\pi x\sin n\pi y\,dx\,dy$$

داریم

$$\int_0^1 x(1-x^2)\sin m\pi x\,dx=\frac{6(-1)^{m+1}}{m^3\pi^3}$$

و از آنجا

$$a_{mn}=1/44\,\frac{(-1)^{m+n}}{\pi^6m^3n^3}$$

و $b_{mn}=0$ بنابراین

$$u(x,y,t)=\frac{1/44}{\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m^3n^3}\cos\pi\sqrt{m^2+n^2}\,t\,\sin n\pi y\sin m\pi x$$

۱۲. مطلوبست حل مسئله زیر

$$u_t - u_{xx} = x; \quad 0<x<1 \quad , t>0$$

$$u(x,0) = 2x; \quad 0\le x \le 1$$

$$u_x(0,t) = t; \quad u(1,t) = t^2 \quad , t\ge 0$$

حل. می‌نویسیم

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

w را طوری می‌یابیم که $v_x(0,t)=0$ و $v(1,t)=0$ برای این منظور می‌نویسیم

$w(x,t)=a(t)x+b(t)$ و از آنجا

$u_x(0,t) = v_x(0,t) + w_x(0,t)$ و یا $t = 0 + a(t)$ یا $a(t) = t$

$u(1,t) = v(1,t) + w(1,t)$ و یا $t^2 = 0 + t + b(t)$ یا $b(t) = t^2 - t$

در نتیجه

$$w(x,t) = xt + t^2 - t = (x-1)t + t^2$$

و

$$u(x,t) = (x-1)t + t^2 + v(x,t)$$

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0)$$

$2x = v(x,0)$ و یا $v(x,0) = 2x$

$u_t = v_t + w_t = v_t + x - 1 + 2t$ و $u_{xx} = v_{xx}$, $u_x = v_x + t$

در نتیجه مسئله زیر را داریم

$$v_t - v_{xx} = 1 - 2t, \ v(x,0) = 2x, \ v_x(0,t) = 0, \ v(1,t) = 0$$

برای حل این مسئله به روش تفکیک متغیرها با فرض $v(x,t)=F(x)G(t)$ تابع F را طوری می‌یابیم که در مسئله زیر صدق کند

$$F'' - kF = 0, \ F'(0) = 0, \quad F(1) = 0$$

این مسئله دارای جواب $F_n(x) = \cos k_n x$ که در آن $k_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ و $k=-k_n^2=-(2n+1)^2\frac{\pi^2}{4}$ ، هم اکنون با جایگزین کردن

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} G_n(t)\cos k_n x$$

در معادله $v_t - v_{xx}=1-2t$ می‌یابیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\dot{G}_n+k_n^2\ G)\cos k_n x = 1-2t$$

حال G را طوری می‌یابیم که

$$\dot{G}_n+k_n^2\ G_n= 2\int_0^1 (1-2t)\cos k_n x\, dx = 2(1-2t)\ \frac{\sin k_n}{k_n} = c_1 t+c_2$$

و از آنجا

$$G_n(t)=A_n e^{-k_n^2 t} + \frac{c_1}{1+k_n^2}t+\frac{c_2}{k_n^2}$$

بنابراین

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{-k_n^2 t} + \frac{c_1}{1+k_n^2}t+\frac{c_2}{k_n^2})\cos k_n x\ ;\ k_n=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

با توجه به $v(x,0) = 2x$ می‌یابیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n+\frac{c_2}{k_n^2})\cos k_n x = 2x$$

بنابراین فرض می‌کنیم

$$A_n+\frac{c_2}{k_n^2}=2\int_0^1 2x\cos k_n x\, dx = \frac{4}{k_n^2}[k_n\sin k_n - 1]$$

و یا

$$A_n=\frac{1}{k_n^2}\ [4((-1)^n k_n-1)-c_2]$$

و در نتیجه

$$u(x,t)=(x-1)t+t^2+\sum_{n=0}^{\infty}\{\frac{1}{k_n^2}[4((-1)^n k_n-1)-c_2]e^{-k_n^2 t}+\frac{c_1}{1+k_n^2}+\frac{c_2}{k_n^2}\}\cos k_n x$$

مثال ۱۳. مطلوب است حل مسئله پواسن زیر

$$u_{xx}+u_{yy}=x+2y \; ; \; 0<x<\pi \quad ; \quad 0<y<\pi$$

$$u(x,0)=x \quad , \quad u(x,\pi)=2 \quad , \; 0\le x\le \pi$$

$$u(0,y)=y \quad , \quad u(\pi,y)=\cos y \quad , \; 0\le y\le \pi$$

حل. به جستجوی جوابی برای مسئله به صورت $u(x,y)=V(x,y)+w(x,y)$ می‌پردازیم و w را طوری می‌یابیم که $V(0,y)=0, V(\pi,y)=0$. برای این منظور می‌نویسیم

$$w(x,y)=a(y)x+b(y)$$

$b(y)=y \quad , \quad y=0+b(y)$ و یا $u(0,y)=V(0,y)+w(0,y)$

$a(y)=\frac{1}{\pi}(\cos y-y) \; , \; \cos y = a\pi+y$ و یا $u(\pi,y)=V(\pi,y)+w(\pi,y)$

در نتیجه

$$u(x,y)=\frac{x}{\pi}(\cos y-y)+y+V(x,y)$$

و

$$w(x,y)=\frac{x}{\pi}(\cos y-y)+y$$

از $u(x,0) = V(x,0) + w(x,0)$ نتیجه می‌شود

$V(x,0)=(1-\frac{1}{\pi})x$ و یا $x=V(x,0)+\frac{x}{\pi}$

همینطور

$V(x,\pi)=\frac{x}{\pi}(1+\pi)-\pi+2$ و یا $u(x,\pi)=V(x,\pi)+w(x,\pi)$

و

$u_{yy}=V_{yy}-\frac{x}{\pi}\cos y \qquad u_{xx}=V_{xx}$

در نتیجه مسئله زیر را برای V داریم

$$V_{xx}+V_{yy}=x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y \; ; \; V(x,0)=(1-\frac{1}{\pi})x \; , \; V(x,\pi)=\frac{1}{\pi}(1+\pi)x-\pi+2$$

$$V(0,y)=0 \quad , \quad V(\pi,y)=0$$

نخست به حل مسئله بدون طرف ثانی به روش ضربی با فرض $u(x,y)=F(x)G(y)$ می‌پردازیم و به مسئله زیر برای F می‌رسیم

$$F'' - kF=0 \quad ; F(0)=0 \,, F(\pi)=0$$

که از آن نتیجه می‌شود $k=-n^2$ و $F_n(x)=\sin nx$

حال به جستجوی جوابی به صورت

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(y) \sin nx$$

برای مسئله مربوط به V می‌پردازیم. با درج آن در $V_{xx}+V_{yy}=x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y$ می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{G}_n-n^2G_n) \sin nx = x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y$$

و از آنجا G را طوری می‌یابیم که

$$\ddot{G}_n-n^2G_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}(x+2y+\frac{x}{\pi}\cos y)\sin nx\, dx$$

در نتیجه

$$G_n(t)=a_n \cosh ny + b_n \sinh ny + G_n^*(y)$$

که در آن $G_n^*(y)$ یک جواب خصوص معادله فوق است ($G_n^*(y)$ را بیابید) و

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cosh ny + b_n \sin h\, ny + G_n^*(y)) \sin nx$$

با توجه به شرایط کرانه‌ای می‌یابیم

$$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+G_n^*(0))\sin nx=(1-\frac{1}{\pi})x$$

$$V(x,\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cosh n\pi+b_n\sinh n\pi+G_n^*(\pi))\sin nx=\frac{1}{\pi}(1+\pi)x-\pi+2$$

و از آنجا

$$a_n+G_n^*(0)=\frac{2}{\pi}(1-\frac{1}{\pi})\int_0^{\infty}x\sin nx\,dx=\frac{2}{n\pi}(1-\frac{1}{\pi})(-1)^{n+1}$$

$$a_n\cosh n\pi+b_n\sinh n\pi+G_n^*(\pi)=\frac{2}{n\pi}(1+\pi)(-1)^{n+1}+(2-\pi)\frac{2}{\pi}((-1)^{n+1}+1)$$

که با حل آنها a_n و b_n محاسبه می‌شوند.

مثال ۱۴. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+x+y+t\ ;\quad 0\le x\le\pi\quad 0\le y\le\pi\quad t\ge 0$$

$$u(x,y,0)=x+2y\quad,\quad u_t(x,y,0)=2x-y$$

$$u(0,y,t)=y+t\quad,\quad u(\pi,y,t)=y-t$$

$$u(x,\pi,t)=2x-t\quad,\quad u(x,0,t)=x-2t$$

حل. با فرض $u(x,y,t)=V(x,y,t)+w(x,y,t)$ و $w=ax+b$، V را طوری می‌یابیم که $V(0,y,t)=V(\pi,y,t)=0$ و از آنجا

$$w=-\frac{2t}{\pi}x+y+t$$

و مسئله برای V عبارت است از

$$V_{tt}=V_{xx}+V_{yy}+y+x+t$$

$$V(x,y,0)=y+x\ ;\quad V_t(x,y,0)=2x-y+\frac{2x}{\pi}-1$$

$$V(0,y,t)=0\ ;\quad V(\pi,y,t)=0$$

$$V(x,0,t)=x-3t+\frac{2t}{\pi}x\ ;\quad V(x,\pi,t)=2x-2t+\frac{2t}{\pi}x-\pi$$

هم اکنون از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم و با قرار دادن

$$H=F_s(V)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}V(x,y,t)\sin nx\,dx$$

و تبدیل فوریه گرفتن از معادله مربوط به V می‌یابیم

$$H_{tt}=-n^2H+H_{yy}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+y+t)\sin nx\,dx$$

با فرض

$$A=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$B=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\, dx\ \frac{2}{n\pi}(1+(-1)^{n+1})$$

می‌یابیم

$$H_{tt}+n^2H-H_{yy}=A+B(y+t)$$
$$H(n,y,0)=By+A\ ,\ H_t(n,y,0)=(2+\frac{2}{\pi})A-(y+1)B$$
$$H(n,0,t)=(1+\frac{2t}{\pi})A-3tB$$

$$H(n,\pi,t)=(2+\frac{2t}{\pi})A-(2t+\pi)B$$

حال چنین قرار می‌دهیم

$$H(n,y,t)=Q(n,y,t)+R(n,y,t)$$

و $R(n,y,t)=ay+b$ را طوری می‌یابیم که $Q(n,0,t)=Q(n,\pi,t)=0$. برای برقرار بودن این شرایط لازم است که

$$R(n,y,t)=\frac{y}{\pi}(A+Bt-B\pi)+A(1+\frac{2t}{\pi})-3Bt$$

با توجه به آن مسئله برای Q به صورت زیر در می‌آید

$$Q_{tt}-Q_{yy}+n^2Q=A+(y+t)B-n^2[(A+Bt-B\pi)\frac{y}{\pi}+A(1+\frac{2t}{\pi})-3Bt]$$
$$Q(n,y,0)=-A\frac{y}{\pi}+2By$$
$$Q_t(n,y,0)=2A-By+2B-\frac{B}{\pi}y$$
$$Q(n,0,t)=Q(n,\pi,t)=0$$

با قرار دادن $Q=\sum_{m=1}^{\infty} G_{mn}\sin my$ در این مسئله می‌توان به حل مسئله پرداخت و به جواب رسید.

$$Q(n,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\{E_{mn}\sin\lambda_{mn}t+F_{mn}\cos\lambda_{mn}t+\frac{c}{\pi\lambda^2_{mn}}[B\pi-n^2(A+Bt-B\pi)]+$$

$$\frac{D}{\pi\lambda^2_{mn}}[A\pi+B\pi t-n^2(A\pi+2At-3B\pi t)]\}\sin my$$

که در آن

$$c=\frac{2}{m}(-1)^{m+1},D=\frac{2}{m\pi}[(-1)^{m+1}+1]$$

$$E_{mn}=\frac{1}{\pi\lambda^3_{mn}}\{2AD(\pi\lambda^2_{mn}+n^2)+BD\pi\ (2m^2-n^2-1)\ -\pi Bc\lambda^2_{mn}-Bcm^2\}$$

$$F_{mn}=\frac{1}{\pi\lambda^3_{mn}}\{AD\pi(n^2-1)-c(m^2A-B\pi+n^2B\pi-2B\pi m^2)\}$$

بنابراین

$$u(x,y,t)=y+t-2\frac{t}{\pi}x+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{y}{\pi}(A+Bt-B\pi)+A(1+\frac{2t}{B})-3Bt\}\sin nx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\{E_{mn}\sin\lambda_{mn}t+F_{mn}\cos\lambda_{mn}t+\frac{c}{\pi\lambda^2_{mn}}[B\pi-n^2(A+Bt-B\pi)]$$

$$+\frac{D}{\pi\lambda^2_{mn}}[A\pi+B\pi t-n^2(A\pi+2At-3B\pi t)]\}\sin my\sin nx$$