بسمه تعالی

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملّی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی(ره)»

سیزدهمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون‌های پایان دوره

آزمون تئوری ۳

(۱۷ شهریور ۱۳۹۶ - ساعت ۸:۰۰ تا ۱۱:۳۰)

توضیحات مهم:

۱. این آزمون ٦ سؤال دارد و زمان آن ۲۱۰ دقیقه است.
۲. به همراه سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته است. نام و نام خانوادگی خود را بر روی این دفترچه وارد کنید.
۳. در دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، پاسخ هر سؤال را در برگه‌ی مربوط به همان سؤال بنویسید.
٤. استفاده از ماشین حساب CASIO $fx-82MS$ مجاز است.
٥. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

ثوابت فیزیکی و نجومی

کمیت		مقدار	
G	ثابت جهانی گرانش	$\mathrm{m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}}$	$۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}$
c	سرعت نور	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	$۳/۰۰ \times ۱۰^{۸}$
h	ثابت پلانک	$\mathrm{J\ s}$	$۶/۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}$
k	ثابت بولتزمن	$\mathrm{J\ K^{-1}}$	$۱/۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}$
σ	ثابت استفان-بولتزمن	$\mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$	$۵/۶۷ \times ۱۰^{-۸}$
eV	الکترون‌ولت	J	$۱/۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}$
m_H	جرم اتم هیدروژن	kg	$۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}$
pc	پارسک	m	$۳/۰۹ \times ۱۰^{۱۶}$
ly	سال نوری	m	$۹/۴۶ \times ۱۰^{۱۵}$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	W	$۳/۸۵ \times ۱۰^{۲۶}$
$M_\odot$	جرم خورشید	kg	$۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۰}$
$R_\odot$	شعاع خورشید	m	$۶/۹۶ \times ۱۰^{۸}$
$M_\oplus$	جرم زمین	kg	$۵/۹۷ \times ۱۰^{۲۴}$
$R_\oplus$	شعاع زمین	km	۶۳۷۸

سؤال ۱ (۴۰ نمره)

می‌خواهیم یک عکس آنالما بگیریم. برای این کار زاویه‌ی قرارگیری دوربین را تنظیم می‌کنیم و هر n روز یک بار در یک ساعت مشخّص، تصویری از قرص خورشید می‌گیریم. می‌خواهیم در هیچ جای تصویر، دو قرص پیاپی خورشید روی هم نیفتند. برای این منظور n حدّاقل چه قدر می‌تواند باشد؟

توجّه: تصویر نمودار تعدیل زمان در پیوست آزمون داده شده است.

سؤال ۲ (۲۰ نمره)

مشاهدات نشان می‌دهد که فلزیت کهکشان‌ها با کسر جرمی گاز موجود در آن‌ها مرتبط است. به محض تشکیل ستاره‌ها در کهکشان، ستاره‌های سنگین با تحوّل سریع خود، فلز را به کهکشان باز می‌گردانند.

فرض کنید در یک لحظه‌ی معیّن جرم گاز موجود در کهکشان M_g، جرم فلز موجود در آن M_h و جرم ستاره‌ها M_s باشد. فلزیت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Z \equiv \frac{M_h}{M_g}$$

در این لحظه ستاره‌های جدیدی با مجموع جرم ΔM_s تولید می‌شوند. در اثر تحوّل این ستاره‌ها مقداری فلز جدید تولید شده و به کهکشان اضافه می‌گردد. مقدار فلز اضافه شده به کهکشان برابر با $y\Delta M_s$ است که y **پارامتر بازدهی** نام دارد.

تابع فلزیت کهکشان بر حسب زمان، $Z(t)$، را بر حسب $M_g(t)$ و y به دست آورید. فرض کنید در لحظه‌ی $t = ۰$ مقدار Z صفر است.

سؤال ۳ (۳۰ نمره)

ستاره‌ای به جرم $M = ۳\ M_\odot$ در نظر بگیرید که در مرحله‌ی هیدروژن‌سوزی است و با درخشندگی $L = ۸۰\ L_\odot$ تابش می‌کند. ترکیب جرمی اوّلیّه‌ی ستاره عبارت است از $X = ۰/۷۰$ و $Z = ۰/۰۲$. واکنش‌های هسته‌ای فقط در هسته‌ی ستاره که شامل ٪۱۰ جرم ستاره است رخ می‌دهد. آهنگ تولید انرژی در واحد جرم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\varepsilon_{nuc} = \varepsilon_c \left(۱ - \frac{m}{۰/۱ M} \right)$$

الف) درخشندگی را به صورت تابعی از جرم، $L(m)$، به دست آورده و مقدار عددی ثابت ε_c را تعیین کنید.

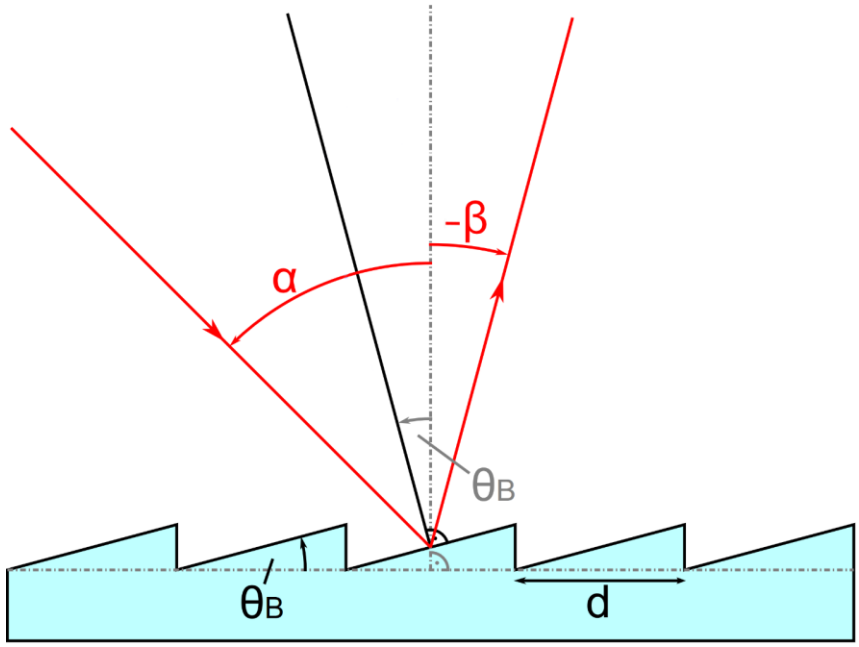
فرض کنید که فرایند انتقال انرژی، فقط از طریق تابش باشد و ترکیب شیمیایی نواحی مختلف با هم مخلوط نشود. انرژی تولید شده در واحد جرم برابر است با $Q = ۶/۳ \times ۱۰^{۱۴}\ \mathrm{J/kg}$.

ب) کسر جرمی هیدروژن (X) را به صورت تابعی از جرم (m) و زمان (t) به دست آورید. مقدار X در مرکز ستاره در زمان $t = ۱۰۰\ \mathrm{Myr}$ چه قدر است؟

ج) در چه زمانی مقدار X در مرکز صفر می‌شود؟ این زمان را می‌توان معیاری برای مدّت زمان هیدروژن‌سوزی در ستاره قلمداد کرد.

سؤال ۴: توری پراش بلیز[۱] (۳۵ نمره)

یک توری پراش اِشِل (بلیز) از دندانه‌های کاملاً بازتاب کننده‌ای که به تعداد زیاد روی سطح یک زیرلایه قرار گرفته‌اند تشکیل شده است. معمولاً چون تعداد این دندانه‌ها زیاد است (از مرتبه‌ی چند صد خط بر میلی‌متر)، سطح آن‌ها دیده نمی‌شود. بنابراین خطّ عمود بر سطح زیرلایه به عنوان معیار سنجش زوایای تابش و بازتاب در آزمایشگاه مورد استفاده قرار می‌گیرد.



شکل ۱

راهنمای شکل:	
α	زاویه‌ی تابش
β	زاویه‌ی بازتاب
θ_B	زاویه‌ی بلیز
λ	طول موج نور تابیده
d	اندازه‌ی هر دندانه

الف) نشان دهید

$$d(\sin\alpha + \sin\beta) = m\lambda$$

که m مرتبه‌ی پراش است.

[۱] Blaze Grating

ب) وقتی یک باریکه‌ی پرتوی سفید را به توری می‌تابانیم، طیف این نور را در بازتاب از توری مشاهده می‌کنیم. تابع پخش توری پراش، به صورت $D = d\beta/d\lambda$ تعریف می‌شود. D را بر حسب کمیت‌های معرّفی شده در شکل ۱ به دست آورید.

ج) شرط لیترو وقتی روی می‌دهد که $\alpha = \theta_B$ باشد. رابطه‌ی قسمت «الف» را برای شرط لیترو به دست آورید.

د) رابطه‌ی D را برای شرط لیترو به دست آورید.

ه) زاویه‌ی θ_B و D برای شرط لیترو را برای یک توری ۳۰۰ خط بر میلی‌متر در ناحیه‌ی مریی به مرکز $\lambda_\circ = ۵۵۰\, nm$ به دست آورید.

سؤال ۵ (۴۵ نمره)

در یک منظومه‌ی دور افتاده یک سیاره داریم که جرمش دو برابر زمین است. این سیاره یک قمر دارد که جرمش $۷ \times ۱۰^{۲۱}\ \mathrm{kg}$ و شعاع آن $۵۵۰\ \mathrm{km}$ است. طبق نظر اغلب پژوهشگران، این قمر چگالی یکنواخت دارد و جرمش به صورت یکنواخت پخش شده است. اما در این بین، پژوهشگر مطرح، Richard D. Dusties، در می‌یابد که بر روی این قمر سه کوه بزرگ وجود دارد که نمی‌توان از آن‌ها صرف نظر کرد، ولی می‌توان این تقریب را زد که کوه‌ها به صورت جرم نقطه‌ای روی سطح قمر قرار گرفته‌اند.

این پژوهشگر دستگاه مختصات متعامدی بر روی قمر به این صورت تعریف می کند که مبدأ آن در مرکز قمر و محور Z آن عمود بر صفحه‌ی مداری قمر به دور سیاره است (محورهای X و Y روی صفحه‌ی مداری قمر قرار دارند). به این دستگاه مختصات، **<u>دستگاه استاندارد قمر</u>** می‌گوییم. هم‌چنین مختصات جغرافیایی روی قمر این گونه تعریف شده که صفحه‌ی X-Y مبدأ عرض جغرافیایی و راستای X مبدأ طول جغرافیایی است. مختصات جغرافیایی سه کوه فوق عبارت اند از:

$$\{\phi = ۹۰^\circ\ \mathrm{N} \qquad \begin{cases} \phi = ۰ \\ l = ۴۵^\circ\ \mathrm{W} \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi = ۰ \\ l = ۱۵^\circ\ \mathrm{E} \end{cases}$$

الف) دستگاهی را بیابید که در آن ماتریس I قطری شود و I را در این دستگاه بازنویسی کنید. جرم هر کوه را $\frac{۱}{۵۰}$ جرم قمر در نظر بگیرید. (از هر روشی که می‌دانید اعم از قطری کردن یا استفاده از تقارن و یا هر روش خلاقانه‌ی دیگری می‌توانید استفاده کنید).

این پژوهشگر دریافته است که در دستگاه استاندارد قمر، بردار $\vec{\omega}$ قمر به صورت زیر است

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} ۱/۲ \\ ۱/۲ \\ \sqrt{۲}/۲ \end{bmatrix} \omega_۰$$

$\omega_۰$ مقداری ثابت است.

ب) زاویه‌ی بین بردار $\vec{L}$ و $\vec{\omega}$ را بیابید.

ج) اگر فاصله‌ی قمر تا سیاره ۲×۱۰^۸ m باشد، آن گاه بازه‌ی $\omega_۰$ را طوری بیابید که انرژی جنبشی انتقالی و چرخشی قمر هم‌مرتبه شوند ($۰/۱K_{\text{انتقالی}} < K_{\text{چرخشی}} < ۱۰K_{\text{انتقالی}}$).

سؤال ۶ (۳۰ نمره)

الف) برای یک سیّال با معادله‌ی حالت $P = w\rho$ نشان دهید $\rho = \rho_۰ a^{-۳(۱+w)}$.

راهنمایی: معادله‌ی سیّال $\dot{\rho} + ۳\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = ۰$ است که در آن فرض کرده‌ایم $\hbar = c = ۱$ است و ضریب مقیاس را با a نشان داده‌ایم.

ب) برای کیهان تخت حاوی ماده‌ی تاریک و انرژی تاریک، $\rho(a)$ را بر حسب $\Omega_{m,۰}$ و $\rho_{c,۰}$ به دست آورید.

گاز چاپلین سیّالی است که در کیهان اوّلیّه مشابه ماده‌ی تاریک و در کیهان اخیر مانند انرژی تاریک رفتار می‌کند. معادله‌ی حالت آن به صورت

$$P = -\frac{A}{\rho^\alpha}$$

است که $A > ۰$ و α ثابت هستند.

ج) برای کیهانی که فقط از گاز چاپلین تشکیل شده است، $\rho(a)$ را محاسبه کنید. فرض کنید چگالی این گاز در $a = ۱$ برابر با $\rho_۰$ باشد.

د) رفتار حدّی $\rho(a)$ برای گاز چاپلین را در حدود $a \gg ۱$ و $a \ll ۱$ به دست آورید و با رفتار **کیهان مادّه-غالب** و **کیهان انرژی تاریک-غالب** مقایسه کنید.

هـ) با تعریف دو پارامتر $\Omega_{m,*}$ و ρ_* بر حسب ثابت‌های موجود در مسئله، عبارت $\rho(a)$ قسمت «ج» را به شکل کلّی $\rho(a)$ در قسمت «ب» بازنویسی کنید؛ به طوری که به جای $\Omega_{m,۰}$ و $\rho_{c,۰}$ از کمیت‌های $\Omega_{m,*}$ و ρ_* استفاده شود.

شکل سؤال ۱: نمودار تعدیل زمان

توجّه: مبدأ زمان ($t = ۰$) روز ۱۱ دی است.