- در هر مثلث میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند.

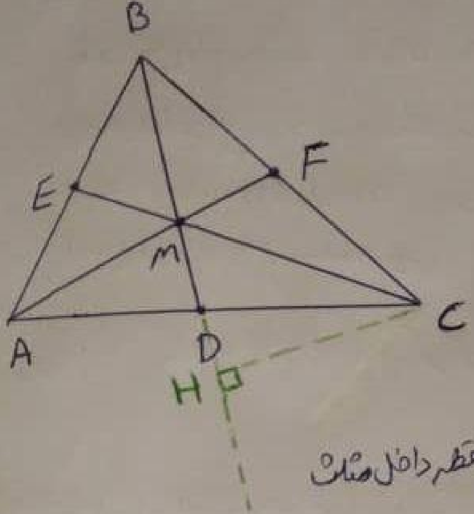
فرض: $\overset{\triangle}{ABC}$ یک مثلث دلخواه است

حکم:

$\overline{BM} = 2\,\overline{MD}$ و

$\overline{AM} = 2\,\overline{MF}$ و

$\overline{CM} = 2\,\overline{ME}$



استدلال:

گام ۱: در هر مثلث میانه‌ها هم‌رسند، یعنی در یک نقطه داخل مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند.

گام ۲: مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ به ۶ مثلث هم مساحت تقسیم می‌شود:

$$S_{M\overset{\triangle}{B}F} = S_{M\overset{\triangle}{C}F} = S_{M\overset{\triangle}{D}C} = \dots$$

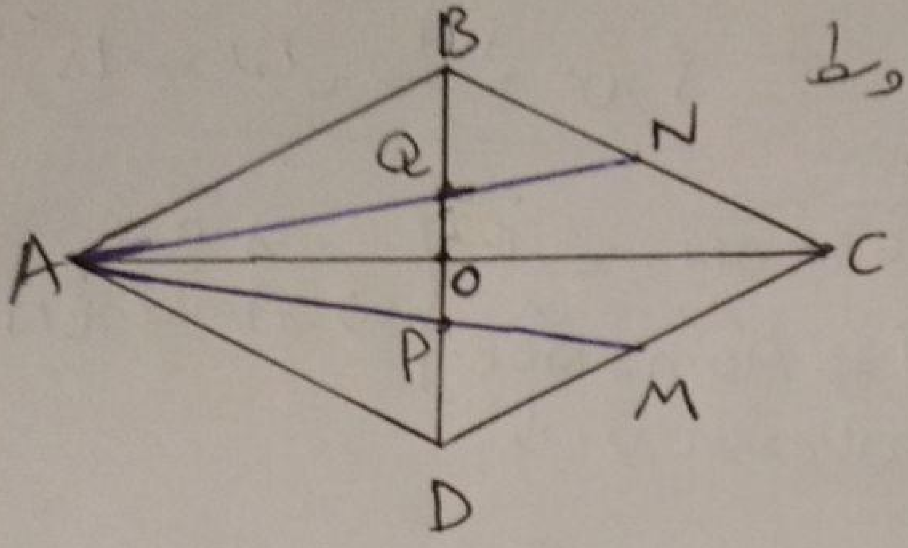
گام ۳: اثبات حکم اصلی (مثلاً $\overline{BM} = 2\,\overline{MD}$)

با توجه به گام ۲:

$$S_{B\overset{\triangle}{M}C} = 2\, S_{M\overset{\triangle}{D}C}$$

دو مثلث $B\overset{\triangle}{M}C$ و $C\overset{\triangle}{M}D$ دارای ارتفاع مشترک CH هستند و مساحت مثلث $B\overset{\triangle}{M}C$ ۲ برابر مساحت مثلث $C\overset{\triangle}{M}D$ است

$$\frac{\overline{BM}\times\cancel{\overline{CH}}}{\cancel{2}} = 2\,\frac{\overline{MD}\times\cancel{\overline{CH}}}{\cancel{2}} \Rightarrow \overline{BM} = 2\,\overline{MD}$$



چهارضلعی ABCD لوزی و نقاط M و N وسط اضلاع BC و DC هستند، $\frac{\overline{PQ}}{\overline{BD}}$ چقدر است؟

حل: در هر لوزی قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند و بر هم عمودند. بنابراین در مثلث متساوی‌الساقین ABC، پاره‌خط BO ارتفاع و میانه است و چون N وسط ضلع BC است، AN میانه می‌باشد و قبلاً دیده‌ایم که در هر مثلث میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند بنابراین

$BQ = 2QO$

به طور مشابه

$PD = 2PO$

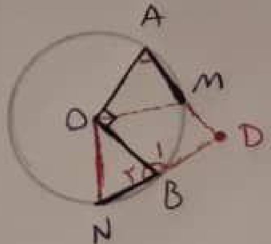
با فرض

$QO = PO = x$

داریم:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BD}} = \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$$

کتاب عملی ص ۱۳۹ س ۴



$\overline{OA}=\overline{OM}=\overline{OB}=\overline{ON}=$ شعاع دایره

$\widehat{AM}=\widehat{BN} \Rightarrow A\hat{O}M=N\hat{O}B$

(زاویه مرکزی روبرو به کمان‌های برابر)

$\Rightarrow \overset{\triangle}{OAM} \overset{\text{ضزض}}{\cong} \overset{\triangle}{OBN}$

در نتیجه اجزای دو مثلث همنهشت باهم برابرند، پس

$O\hat{A}M = O\hat{B}N$

اگر محل برخورد امتدادهای AM و BN را D بنامیم، مجموع زوایای داخلی چهارضلعی OADB برابر 360° است.

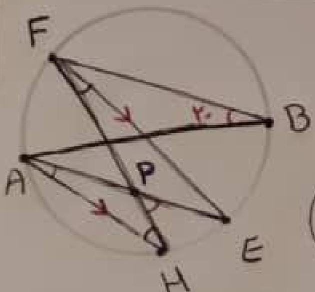
$\hat{O}+\hat{A}+\hat{B}_1+\hat{D}=360^\circ$

از طرفی: $\hat{B}_2+\hat{B}_1=180^\circ$

$\Downarrow$

$\hat{A}+\hat{B}_1=180^\circ$ و $\hat{O}=90^\circ \Rightarrow \hat{D}=90^\circ$

س ۵ (الف)



$FE \parallel AH$ ، FH مورب $\xRightarrow[\text{موازی-مورب}]{\text{ق خطوط}} \hat{F}=\hat{H} \xRightarrow[\text{محاطی}]{\text{زاویه}} \frac{\widehat{AF}}{2}=\frac{\widehat{HE}}{2}$

$\Downarrow$

$\widehat{AF}=\widehat{HE}$

(زاویه محاطی نصف کمان روبرو به آن است.)

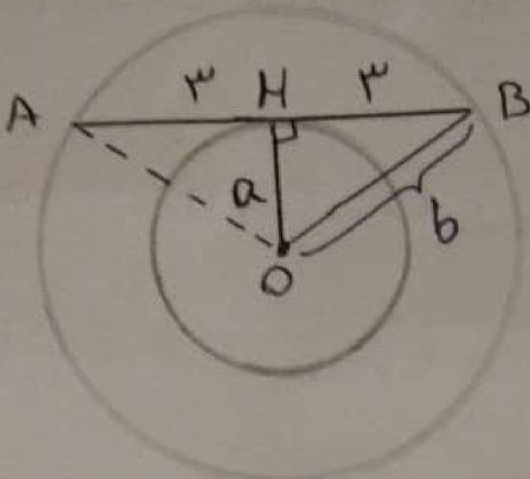
ب) دو زاویه محاطی روبه‌رو به یک کمان برابرند، پس

$\hat{H}_{\text{محاطی}}=\hat{B}_{\text{محاطی}}=20^\circ \Rightarrow \widehat{AF}=40^\circ \Rightarrow \widehat{HE}=40^\circ \Rightarrow \hat{A}_{\text{زاویه محاطی}}=20^\circ$

$\widehat{HPE}$ زاویه خارجی مثلث $\overset{\triangle}{PAH}$ است، بنابراین:

$\widehat{HPE}=\hat{A}+\hat{H}=40^\circ$

مبتکران ص ۲۴۵ س ۴۴



$\overline{AB} = ۶$

مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ متساوی الساقین است:

$OA = OB =$ شعاع دایره بزرگ $= b$

چون هر خط مماس بر دایره در نقطه تماس بر دایره عمود است، بنابراین $OH \perp AB$ و چون مثلث OAB متساوی الساقین است پس ارتفاع و میانه برهم منطبقند پس:

$\overline{HB} = ۳$

پس مثلث $\overset{\Delta}{OHB}$ قائم الزاویه است و با توجه به فیثاغورس داریم:

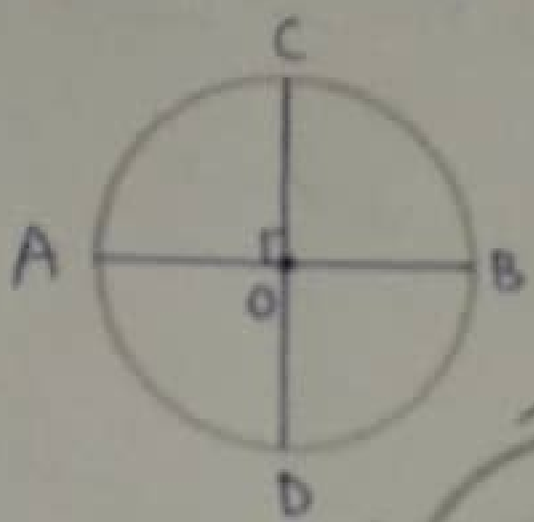
$b^۲ - a^۲ = ۳^۲$

بنابراین مساحت ناحیه بین دو دایره برابر است:

$S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایره کوچک}} = \pi b^۲ - \pi a^۲ = \pi(b^۲ - a^۲) = ۹\pi$

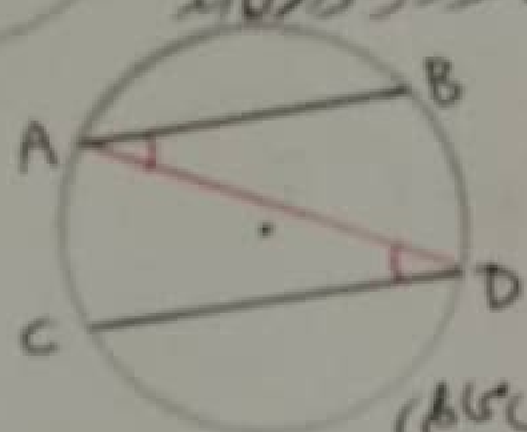
کتاب تکمیلی ص ۱۴۰ س ۶

الف) دو قطر عمود برهم از یک دایره، آن را به ۴ کمان برابر 90° تقسیم می‌کنند



$\widehat{AC}=\widehat{CB}=\widehat{BD}=\widehat{DA}=90^\circ$

اگر کمان‌های محصور بین دو وتر غیر متقاطع برابر باشند، آن دو وتر موازی‌اند



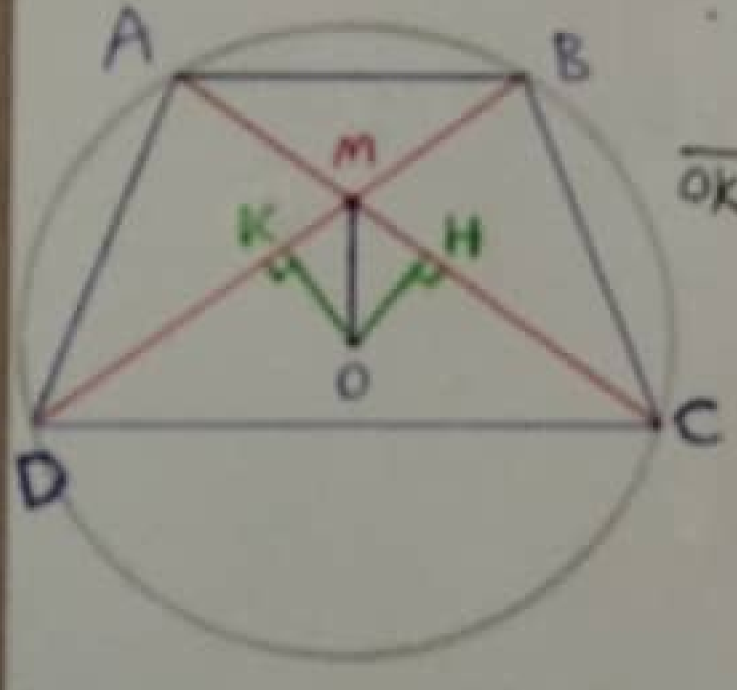
فرض: $\widehat{AC}=\widehat{BD}$

حکم: $AB \parallel CD$

استدلال: برابری کمان‌های $\widehat{AC}$ و $\widehat{BD}$ با توجه به ق. زوایای محاطی

برابری زوایای محاطی $B\hat{A}D$ و $A\hat{D}C$ را نتیجه می‌دهد و با توجه به عکس ق.

خطوط موازی - مورب نتیجه می‌شود: $AB \parallel CD$.



ب) طبق ق. نیم‌ساز چون OM نیم‌ساز زاویه $C\hat{M}D$ است پس $\overline{OK}=\overline{OH}$

حال چون فاصله دو وتر AC و BD از مرکز دایره یکسان است

بنابراین طول آن‌ها برابر باشد: $\overline{AC}=\overline{BD}$ و

در نتیجه: $\widehat{AC}=\widehat{BD}$ و بنابراین

$$\widehat{AC}-\widehat{AB}=\widehat{BD}-\widehat{AB} \Rightarrow \widehat{BC}=\widehat{AD} \Rightarrow \begin{cases}\overline{BC}=\overline{AD}\\ \& \\ AB \parallel CD\end{cases}$$

بنابراین چهارضلعی ABCD یک ذوزنقه متساوی‌الساقین است.