

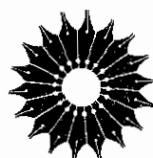
اروین کرویت سیگ



ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلد دوم

ترجمہ عبداللہ شیدفر، حسین فرمان



ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلد دوم

اروین کرویت سیگ

ترجمه عبدالله شیدفر، حسین فرمان

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



Advanced Engineering Mathematics

Erwin Kreyszig

Fourth Edition

John Wiley & Sons, 1979

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلد دوم

تألیف اروین کروییت سیگ

ترجمه دکتر عبدالله شیدفر، دکتر حسین فرمان

ویراسته علی راکعی

مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۶

چاپ ششم ۱۳۸۱

تعداد ۲۰۰۰

حروفچینی: بینش نو

چاپ و صحافی: مازیار

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی بیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Kreyszig, Erwin

کروییت سیگ، اروین-

ریاضیات مهندسی پیشرفته / اروین کروییت سیگ؛ ترجمه عبدالله شیدفر، حسین فرمان. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۶-۱۳۶۳.

ج ۲: مصور، جدول، نمودار. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۲۰، ۳۱۷. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۹، ۳۴)

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا (فهرست نویسی بیش از انتشار).

Advanced engineering mathematics.

عنوان اصلی:

واژنامه.

کتابنامه.

ج ۲ (چاپ ششم: ۱۳۸۱).

ISBN 964-01-0120-6 (V.1)

ISBN 964-01-0317-9 (V.2)

ISBN 964-01-8052-1 (set)

۱. فیزیک ریاضی. ۲. ریاضیات مهندسی. الف. شیدفر، عبدالله، ۱۳۱۹. مترجم.

ب. فرمان، حسین، ۱۳۱۷. مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.

۵۱۰/۲۴۶۲

QA۴۰۱/ک۴۹

۱۳۶۳

۷۷۶ - ۶۷

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۶۲۹	فصل ۱۰ سری و انتگرال فوریه
۶۳۰	۱.۱۰ توابع دوره‌ای. سریهای مثلثاتی
۶۳۳	۲.۱۰ سریهای فوریه. فرمولهای اویلر
۶۴۳	۳.۱۰ توابع با دوره دلخواه
۶۴۷	۴.۱۰ توابع زوج و فرد
۶۵۳	۵.۱۰ بسط نیم دامنه‌ای
۶۵۹	۶.۱۰ تعیین ضرایب فوریه بدون انتگرال گیری
۶۶۶	۷.۱۰ نوسانهای واداشته
۶۷۱	۸.۱۰ تقریب توسط چند جمله‌ایهای مثلثاتی. خطای مربعی
۶۷۴	۹.۱۰ انتگرال فوریه
۶۸۵	فصل ۱۱ معادلات با مشتق جزئی
۶۸۶	۱.۱۱ مفاهیم اساسی
۶۸۹	۲.۱۱ مدل سازی: نخ مرتعش. معادله موج يك بعدی
۶۹۱	۳.۱۱ جدا سازی متغیرها (روش ضربی)
۷۰۰	۴.۱۱ جواب دالامبر معادله موج
۷۰۵	۵.۱۱ جریان گرمای يك بعدی
۷۱۱	۶.۱۱ جریان گرما در میله‌ای نامتناهی
۷۱۷	۷.۱۱ مدل سازی: غشای مرتعش. معادله موج دوبعدی

۷۱۹	۸.۱۱ غشای مستطیلی
۷۲۸	۹.۱۱ لاپلاسی در مختصات قطبی
۷۳۱	۱۰.۱۱ غشای مستدیر. معادلهٔ بسل
۷۳۷	۱۱.۱۱ معادلهٔ لاپلاس. پتانسیل
۷۴۲	۱۲.۱۱ معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی. معادلهٔ لزاندر
۷۴۷	۱۳.۱۱ کاربرد تبدیل لاپلاس در معادلات با مشتق جزئی

فصل ۱۲ اعداد مختلط. توابع تحلیلی مختلط

۷۵۵	۱.۱۲ اعداد مختلط
۷۵۶	۲.۱۲ شکل قطبی اعداد مختلط. نامساوی مثلث
۷۶۲	۳.۱۲ منحنیها و نواحی در صفحهٔ مختلط
۷۶۶	۴.۱۲ تابع مختلط. حد. مشتق. تابع تحلیلی
۷۷۰	۵.۱۲ معادلات کوشی - ریمان. معادلهٔ لاپلاس
۷۷۶	۶.۱۲ تابع گویا. ریشه
۷۸۳	۷.۱۲ تابع نمایی
۷۸۸	۸.۱۲ توابع مثلثاتی و هذلولی گون
۷۹۱	۹.۱۲ لگاریتم. توان عمومی
۷۹۵	

فصل ۱۳ نگاشت همدمیسی

۸۰۱	۱.۱۳ نگاشت
۸۰۲	۲.۱۳ نگاشت همدمیسی
۸۱۰	۳.۱۳ تبدیلهای کسری خطی
۸۱۶	۴.۱۳ تبدیلهای کسری خطی خاص
۸۱۹	۵.۱۳ نگاشت با سایر توابع مقدماتی
۸۲۵	۶.۱۳ رویه‌های ریمان
۸۳۴	

فصل ۱۴ انتگرال مختلط

۸۴۱	۱.۱۴ انتگرال روی خط در صفحهٔ مختلط
۸۴۲	۲.۱۴ خواص اساسی انتگرال روی خط مختلط
۸۴۹	۳.۱۴ قضیهٔ انتگرال کشی
۸۵۲	

۸۶۱	۴.۱۴ محاسبه انتگرال روی خط با انتگرالگیری نامعین
۸۶۴	۵.۱۴ فرمول انتگرال کشی
۸۶۸	۶.۱۴ مشتقات يك تابع تحلیلی
۸۷۳	فصل ۱۵ دنباله‌ها و سریها
۸۷۴	۱۰.۱۵ دنباله‌ها
۸۷۹	۲۰.۱۵ سری
۸۸۲	۳.۱۵ اصل همگرایی کوشی در مورد سریها و دنباله‌ها
۸۸۷	۴.۱۵ دنباله حقیقی یکنوا. آزمون لایبنیتس در مورد سریهای حقیقی
۸۹۱	۵.۱۵ آزمونهای همگرایی و واگرایی در مورد سریها
۹۰۰	۶.۱۵ اعمالی که روی سریها انجام می‌شود
۹۰۷	فصل ۱۶ سری توانی، سری تیلور،
۹۰۷	۱۰.۱۶ سری توانی
۹۱۷	۲.۱۶ توابعی که با سری توانی نمایش داده می‌شوند
۹۲۱	۳.۱۶ سری تیلور
۹۲۸	۴.۱۶ سری تیلور توابع مقدماتی
۹۳۱	۵.۱۶ روشهای عملی برای به دست آوردن سری توانی
۹۳۶	۶.۱۶ همگرایی یکنوا
۹۴۶	۷.۱۶ سری لوران
۹۵۳	۸.۱۶ تحلیلی بودن در بینهایت. صفرها و تکینیها
۹۶۳	فصل ۱۷ انتگرالگیری به روش مانده‌ها
۹۶۳	۱۰.۱۷ مانده‌ها
۹۶۸	۲۰.۱۷ قضیه مانده
۹۷۱	۳.۱۷ محاسبه انتگرالهای حقیقی
۹۷۶	۴.۱۷ چند نوع دیگر از انتگرالهای حقیقی
۹۸۳	فصل ۱۸ توابع تحلیلی مختلط و نظریه پتانسیل
۹۸۴	۱۰.۱۸ میدانهای الکترواستاتیکی

۹۸۸	۲۰۱۸ جریان سیال دوبعدی
۹۹۷	۳۰۱۸ خواص عمومی توابع همساز
۱۰۰۱	۴۰۱۸ فرمول انتگرال پواسن

فصل ۱۹ آنالیز عددی

۱۰۰۹	
۱۰۱۰	۱۰۱۹ خطاها و اشتباهات کامپیوترهای خودکار
۱۰۱۶	۲۰۱۹ حل معادلات با تکرار
۱۰۲۶	۳۰۱۹ تفاضلهای متناهی
۱۰۳۳	۴۰۱۹ درون‌یابی
۱۰۴۱	۵۰۱۹ اسپلین
۱۰۴۷	۶۰۱۹ انتگرالگیری و مشتق‌گیری عددی
۱۰۵۸	۷۰۱۹ روشهای عددی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
۱۰۶۹	۸۰۱۹ روشهای عددی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم
۱۰۷۶	۹۰۱۹ دستگاههای معادلات خطی. حذف گاوسی
۱۰۸۲	۱۰۰۱۹ دستگاههای معادلات خطی. حل از راه تکرار
۱۰۸۸	۱۱۰۱۹ دستگاههای معادلات خطی. بدطرحی
۱۰۹۲	۱۲۰۱۹ روش حداقل مربعات
۱۰۹۷	۱۳۰۱۹ اشتغال مقادیر ویژه ماتریس
۱۱۰۳	۱۴۰۱۹ تعیین مقادیر ویژه با تکرار
۱۱۰۷	۱۵۰۱۹ بسطهای مجانبی

فصل ۲۰ احتمال و آمار

۱۱۱۹	
۱۱۱۹	۱۰۲۰ طبیعت و هدف آمار ریاضی
۱۱۲۱	۲۰۲۰ نمایش جدولی و نموداری نمونه‌ها
۱۱۲۹	۳۰۲۰ میانگین نمونه و واریانس نمونه
۱۱۳۴	۴۰۲۰ آزمایش تصادفی، برآمد، پیشامد
۱۱۴۰	۵۰۲۰ احتمال
۱۱۴۶	۶۰۲۰ جایگشت و ترکیب
۱۱۵۲	۷۰۲۰ متغیرهای تصادفی. توزیعهای گسسته و پیوسته
۱۱۵۹	۸۰۲۰ میانگین و واریانس يك توزيع

۱۱۶۶	۹۰۲۰ توزیعهای دو جمله‌ای، بواسن، و فوق هندسی
۱۱۷۳	۱۰۰۲۰ توزیع نرمال
۱۱۸۲	۱۱۰۲۰ توزیعهای چند متغیر تصادفی
۱۱۹۲	۱۲۰۲۰ نمونه‌گیری تصادفی، اعداد تصادفی
۱۱۹۴	۱۳۰۲۰ برآورد پارامترها
۱۲۰۰	۱۴۰۲۰ فاصله اطمینان
۱۲۱۲	۱۵۰۲۰ آزمون فرض، تصمیم
۱۲۲۶	۱۶۰۲۰ کنترل کیفیت
۱۲۳۲	۱۷۰۲۰ نمونه‌گیری برای پذیرش
۱۲۳۹	۱۸۰۲۰ نیکویی برازش. آزمون χ^2
۱۲۴۴	۱۹۰۲۰ آزمونهای ناپارامتری
۱۲۴۸	۲۰۰۲۰ زوجهای اندازه‌گیری. برازاندن خطوط مستقیم
۱۲۵۵	ضمیمه ۱: مراجع
۱۲۶۰	ضمیمه ۲: جواب مسائل با شماره فرد
۱۳۳۲	ضمیمه ۳: فرمولهایی در مورد توابع خاص
۱۳۴۱	ضمیمه ۴: جدولها
۱۳۵۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۳۷۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۳۹۳	فهرست راهنما

سری و انتگرال فوریه

توابع دوره‌ای به کرات در مسائل مهندسی مطرح می‌شوند. نمایش این توابع برحسب توابع دوره‌ای ساده، مانند سینوس و کسینوس، که منجر به سری فوریه می‌گردد از نظر عملی اهمیت زیادی دارد. این سریها که به یاد ژوزف فوریه* (۱۷۶۸ — ۱۸۳۰)، فیزیکدان فرانسوی، سریهای فوریه نام گرفته‌اند ابزار قدرتی برای حل مسائل مختلف، از جمله معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتق جزئی، هستند.

در این فصل مفاهیم اساسی، مطالب و تکنیکهایی را که در ارتباط با سری فوریه هستند مورد بحث قرار می‌دهیم. مثالهای توضیحی و برخی کاربردهای مهم این سریها در مهندسی را نیز در همین فصل خواهیم آورد. کاربردهای بیشتر در فصل بعد که اختصاص به معادلات با مشتق جزئی و مسائل با مقدار کرانه‌ای دارد ارائه خواهد شد.

نظریه سریهای فوریه نسبتاً پیچیده است، ولی کادرد این سریها ساده است. مطمئناً سریهای فوریه جامع‌تر از سریهای تیلور هستند، زیرا بسیاری از توابع دوره‌ای ناپیوسته را که از نظر عملی واجد اهمیتند و قابل نمایش با سری تیلور نیستند می‌توان به سری فوریه بسط داد.

بخش آخرین فصل اختصاص به انتگرال فوریه دارد. کاربردهای انتگرال فوریه در معادلات با مشتق جزئی در فصل بعد (در بخش ۶.۱۱) مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

پیشنیاز این فصل: حساب انتگرال مقدماتی.

بخشهایی که در دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: ۶.۱۰ الی ۸.۱۰.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت D.

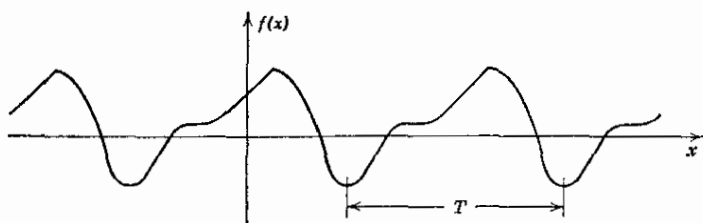
جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱.۱۰ توابع دوره‌ای. سریهای مثلثاتی

تابع $f(x)$ را دوره‌ای نامند هرگاه این تابع به ازای هر عدد حقیقی x تعریف شده باشد و عدد مثبتی مانند T موجود باشد، به طوری که

$$(۱) \quad f(x+T) = f(x) \quad \text{به ازای هر } x$$

عدد T را دوره $f(x)$ می‌نامند. نمودار چنین تابعی از تکرار دوره‌ای نمودار آن در هر فاصله‌ای که طولش T باشد به‌دست می‌آید (شکل ۲۰۳).



شکل ۲۰۳. تابع دوره‌ای

از (۱) نتیجه می‌شود که اگر n عدد صحیح دلخواهی باشد آنگاه

$$f(x+nT) = f(x) \quad \text{به ازای هر } x$$

از این رو T ، $2T$ ، $3T$ ، $4T$ ، ... نیز دوره $f(x)$ هستند. به علاوه چنانچه $f(x)$ و $g(x)$ دارای دوره 2π باشند، آنگاه دوره تابع

$$h(x) = af(x) + bg(x) \quad (a \text{ و } b \text{ ثابتند})$$

T است.

مثالهای معروف توابع دوره‌ای توابع سینوس و کسینوس هستند، توجه داریم که بنابه تعریف، تابع $f(x) = c$ (ثابت) نیز دوره‌ای است، زیرا این تابع به ازای هر T مثبت در رابطه (۱) صدق می‌کند.

هدف ما در چند بخش نخست این فصل پیدا کردن نمایش توابع گوناگون با دوره 2π برحسب توابع ساده زیر است:

۱. هرگاه تابع دوره‌ای $f(x)$ دارای کوچکترین دوره $T(>0)$ باشد، اغلب اوقات این دوره را دوره اولیه $f(x)$ می‌نامند. مثلاً، دوره اولیه $\sin x$ و $\sin 2x$ به ترتیب 2π و π است.

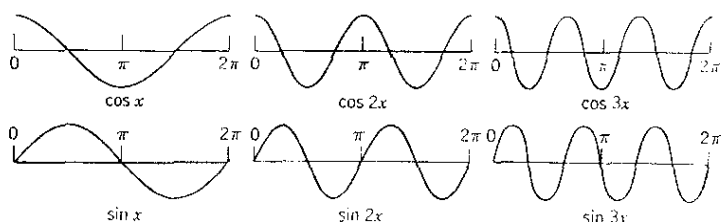
مثالهای توابع دوره‌ای بدون دوره اولیه عبارتند از ثابت $f(x) = c$ و

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 1 & \text{اگر } x \text{ گویا نباشد} \end{cases}$$

۱. $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$;
خود این توابع نیز دارای دوره 2π هستند (شکل ۲۰۴). سربهایی که در ارتباط با این موضوع مطرح می شوند به صورت

$$(2) \quad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

هستند، که $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ ثابتهای حقیقی هستند. چنین سربیی يك سری مثلثاتی نامیده می شود، a_n و b_n را ضرایب سری می نامند.



شکل ۲۰۴. توابع کسینوس و سینوس با دوره 2π

مشاهده می کنیم که هر جمله سری دارای دوره 2π است. از این رو هرگاه سری همگرا باشد، مجموع آن تابعی با دوره 2π خواهد بود.

توابع دوره ایی که در مسائل مهندسی مطرح می شوند اغلب اوقات نسبتاً پیچیده هستند، و بدین جهت نمایش این توابع بر حسب توابع دوره ای ساده مفید است. چنانچه خواهیم دید تقریباً هر تابع دوره ای $f(x)$ با دوره 2π را که در کاربردها، مثلاً در ارتعاشات، ظاهر می شود می توان به صورت يك سری مثلثاتی نمایش داد و با توجه به آن به فرمولهایی برای ضرایب رابطه (۲) بر حسب $f(x)$ رسید، به طوری که (۲) همگرا و دارای مجموع $f(x)$ باشد. در مرحله بعد نتایج حاصله را برای توابع با دوره دلخواه تعمیم خواهیم داد. این تعمیم بسیار ساده خواهد بود.

مسائل بخش ۱.۱۰

T ، کوچکترین دوره مثبت توابع زیر را بیابید.

$$1. \sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \sin \pi x, \cos \pi x, \sin 2x, \cos 2x, \sin x, \cos x$$

$$2. \sin \frac{2\pi nx}{k}, \cos \frac{2\pi nx}{k}, \sin \frac{2\pi x}{k}, \cos \frac{2\pi x}{k}, \sin nx, \cos nx$$

نمودار دقیق توابع زیر را رسم کنید.

$$3. \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x, \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x, \sin x$$

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & -\pi < x < 0 \\ \pi/4 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$4. \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x + \frac{1}{5} \sin 10\pi x, \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x, \sin 2\pi x$$

$$5. \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x, \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x, \sin x$$

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{و} \quad \text{به ازای } -\pi < x < \pi, \quad f(x) = x/2$$

$$6. -\cos x + \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{5} \cos 5x, -\cos x + \frac{1}{3} \cos 3x, -\cos x$$

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{و} \quad \text{به ازای } -\pi < x < \pi, \quad f(x) = x^2/4 - \pi^2/12$$

$$7. f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{و} \quad \text{به ازای } -\pi < x < \pi, \quad f(x) = x^2$$

$$8. f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{و} \quad \text{به ازای } -\pi < x < \pi, \quad f(x) = e^x$$

$$9. f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{و} \quad \text{به ازای } -\pi < x < \pi, \quad f(x) = \cosh 2x$$

$$10. f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$11. f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$12. f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ \cos^2 2x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

۱۳. اگر T دوره‌ای از $f(x)$ باشد، نشان دهید که nT ، $n = 2, 3, \dots$ ، نیز دوره‌ای از $f(x)$ است.

۱۴. هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ دارای دوره T باشند، نشان دهید که $h = af + bg$ و b ثابت) دارای دوره T است. یعنی مجموعه توابع با دوره T فضای برداری تشکیل

می‌دهند.

۱۵. نشان دهید که تابع ثابت $f(x) = T$ ، به ازای هر عدد مثبت T ، تابعی دوره‌ای با دوره T است.

۱۶. هرگاه $f(x)$ تابعی دوره‌ای از x با دوره T باشد، نشان دهید که $f(ax)$ ، $a > 0$ ، تابعی دوره‌ای از x با دوره T/a است، و $f(x/b)$ ، $b > 0$ ، تابعی دوره‌ای از x با دوره bT است. درستی این احکام را در مورد $f(x) = \sin x$ ، $a = b = 2$ ، تحقیق کنید.

انتگرالهای زیر را که در آنها $n = 0, 1, 2, \dots$ محاسبه کنید. (اینها مثالهای نوعی از انتگرالهایی هستند که در بحثهای آینده به آنها نیاز خواهیم داشت.)

$$\int_0^{\pi} \sin nx \, dx \quad .18 \quad \int_{\pi}^{\pi/2} \cos nx \, dx \quad .17$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin nx \, dx \quad .20 \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos nx \, dx \quad .19$$

$$\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \quad .22 \quad \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \quad .21$$

$$\int_0^{\pi} e^x \cos nx \, dx \quad .24 \quad \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \quad .23$$

$$\int_{-\pi}^0 e^x \sin nx \, dx \quad .25$$

۲۰۱۰ سریهای فوریه . فرمولهای اوایلر

فرض می‌کنیم $f(x)$ تابعی دوره‌ای با دوره 2π باشد که بتوان آن را به صورت سری مثلثاتی

$$(1) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

نمایش داد. می‌خواهیم ضرایب a_n و b_n برای چنین تابع $f(x)$ را، در سری (۱) مربوط به آن معین کنیم.

نخست a_0 را معین می‌کنیم. با انتگرال گیری از طرفین (۱)، از $-\pi$ تا π ، داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx.$$

هر گاه انتگرال گیری جمله به جمله مجاز باشد^۱ خواهیم داشت

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right)$$

جمله اول طرف راست برابر $2\pi a_0$ است و با انتگرال گیری مشاهده می کنیم که دیگر انتگرالهای طرف راست صفرند. از این رو نتیجه اول عبارت است از

$$(۲) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

حال $a_1, a_2, \dots$ را به روشی مشابه معین می کنیم. با ضرب (۱) در $\cos mx$ ، m عدد صحیح مثبت مشخص، و سپس با انتگرال گیری از آن از $-\pi$ تا π داریم

$$(۳) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx dx$$

با انتگرال گیری جمله به جمله طرف راست چنین می شود:

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right],$$

انتگرال اول صفر است. با به کار بردن (۱۱) ضمیمه ۳ به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x dx \end{aligned}$$

با انتگرال گیری می توان نشان داد که چهار جمله واقع در طرف راست صفرند، به استثنای جمله آخر سطر اول که به ازای $n=m$ برابر π است. چون در (۳) این جمله

۱. به عنوان مثال، این کار در مورد همگرایی یکنواخت مجاز است (ر.ک. قضیه ۳ از بخش ۶.۱۶).

در $a_m \pi$ ضرب شده است ، طرف راست (۳) برابر $a_m \pi$ است ، دومین نتیجه‌ای که می‌گیریم عبارت است از

$$(۴) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \quad m = 1, 2, \dots$$

در پایان ضرایب $b_1, b_2, \dots$ رابطه (۱) را معین می‌کنیم. هرگاه (۱) را در $\sin mx$ ضرب کنیم ، m عدد صحیح مثبت مشخص ، و سپس از $-\pi$ تا π آن انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$(۵) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \sin mx \, dx$$

با انتگرال گیری جمله به جمله ، طرف راست چنین می‌شود :

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \right].$$

انتگرال اول صفر است. انتگرال بعدی از نوعی است که پیش از این بررسی شده است. و چنانچه می‌دانیم به‌ازای همه مقادیر $n = 1, 2, \dots$ صفر است. برای انتگرال آخر داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx.$$

جمله آخر صفر است. جمله اول طرف راست به‌ازای $n \neq m$ صفر ، و به‌ازای $n = m$ π است. چون در (۵) این جمله در b_m ضرب شده است ، بنابراین طرف راست (۵) برابر $b_m \pi$ می‌باشد و نتیجه سوم عبارت است از

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

بنابراین n به‌جای m ، فرمولهای زیر ، که فرمولهای اویلر نام دارند ، به دست می‌آیند:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \quad (\text{الف})$$

$$(۶) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{ب})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (\text{ج})$$

توجه کنید که به دلیل دوره‌ای بودن انتگرال، فاصله انتگرال گیری (۶) را می‌توان با هر فاصله دیگری به طول 2π ، مثلاً فاصله $0 \leq x \leq 2\pi$ ، تعویض کرد. برای تابع دوره‌ای $f(x)$ با دوره 2π با توجه به (۶)، می‌توان a_n و b_n را محاسبه کرد و سری مثلثاتی

$$(۷) \quad a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

را تشکیل داد. این سری موسوم به سری فوریه متناظر با $f(x)$ است، و ضرایب آن که از (۶) به دست می‌آیند ضرایب فوریه $f(x)$ نامیده می‌شوند.

از تعریف انتگرال معین نتیجه می‌شود که اگر $f(x)$ پیوسته باشد یا حتی اگر فقط پیوسته تکه‌ای باشد (یعنی اگر گذشته از تعدادی متناهی پرش متناهی، در فاصله انتگرال گیری پیوسته باشد)، انتگرالهای (۶) وجود دارند و می‌توان به کمک (۶) ضرایب فوریه $f(x)$ را محاسبه کرد. سؤالی که باقی می‌ماند این است که، آیا سری فوریه حاصل همگراست و دارای مجموع $f(x)$ است یا نه. این سؤال را در انتهای این بخش مورد بررسی قرار خواهیم داد.

با آوردن مثالی ساده به تشریح نحوه استفاده عملی از (۶) می‌پردازیم. در بخشهای بعدی مثالهای متعدد دیگری مطرح خواهد شد.

مثال ۱. موج مربعی

ضرایب فوریه تابع دوره‌ای $f(x)$ را که در شکل ۲۰۵ الف داده است محاسبه کنید. نمایش تحلیلی $f(x)$ چنین است:

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

چنین توابعی می‌توانند به عنوان نیروهای خارجی وارد بردستگاههای مکانیکی، نیروهای محرکه الکتریکی در مدارهای الکتریکی و غیره مطرح شوند.

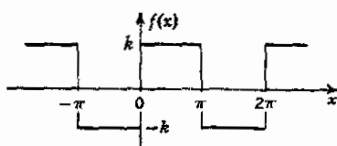
بنا به (۶ الف)، به دست می‌آوریم $a_0 = 0$. این را بدون انتگرال گیری نیز می‌توان به دست آورد چرا که مساحت زیر منحنی $f(x)$ بین $-\pi$ و π برابر صفر است. بنا به (۶ ب)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} k \cos nx \, dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[-k \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + k \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0,$$

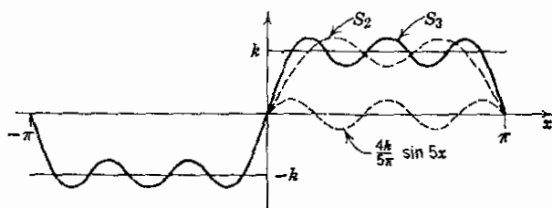
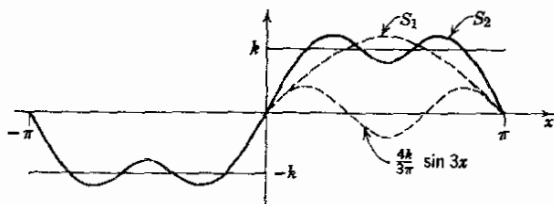
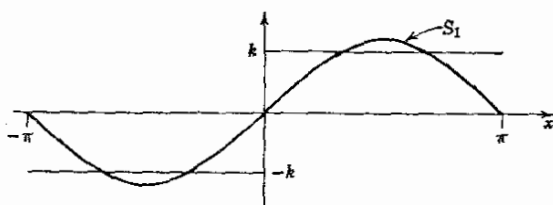
چرا که در $-\pi$ ، 0 و π به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ داریم $\sin nx = 0$. همین‌طور از (۶ ج) به دست می‌آوریم

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} k \sin nx \, dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[k \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - k \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right],$$

با استفاده از $\cos 0 = 1$ و $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ نتیجه می گیریم



(الف) تابع مفروض $f(x)$ (موج مربعی دوره‌ای)



(ب) سه مجموع جزئی اول سری فوریه متناظر با $f(x)$

$$b_n = \frac{k}{n\pi} [\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

حال $\cos \pi = -1$ ، $\cos 2\pi = 1$ ، $\cos 3\pi = -1$ ، ... و در حالت کلی

$$1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & \text{به ازای } n \text{ فرد،} \\ 0 & \text{به ازای } n \text{ زوج،} \end{cases} \quad \cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{به ازای } n \text{ فرد،} \\ 1 & \text{به ازای } n \text{ زوج،} \end{cases}$$

از این دو ضرایب فوریه b_n تابع مورد نظر عبارتند از

$$b_1 = \frac{2k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{2k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{2k}{5\pi}, \dots$$

و چون a_n ها صفرند، سری فوریه متناظر عبارت است از

$$\frac{2k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

مجموعه‌های جزئی عبارتند از

$$S_1 = \frac{2k}{\pi} \sin x, \quad S_3 = \frac{2k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right), \dots,$$

از نمودارهای شکل ۲۵۵ چنین برمی آید که سری همگراست و مجموع آن تابع مفروض $f(x)$ است. متذکر می‌شویم که در $x=0$ و $x=\pi$ ، نقاط ناپیوستگی $f(x)$ ، تمام مجموعه‌های جزئی برابر صفر، یعنی، برابر میانگین حسابی مقادیر k و $-k$ تابع $f(x)$ است.

به علاوه، با فرض آنکه $f(x)$ مجموع سری است، با قراردادن $x=\pi/2$ داریم

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{2k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right)$$

یا

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

این فرمولی است مشهور از لایبنیتس (که حدود سال ۱۶۷۳ از ملاحظات هندسی به دست آمده است). این مثال نشان می‌دهد که مقدار سریهای مختلف با جملات ثابت را می‌توان با محاسبه سری فوریه در نقاط معین محاسبه کرد. ▲

دسته توابعی که آنها را می‌توان به صورت سری فوریه نمایش داد به طرز شگفت.

انگیزی بزرگ و جامع است. شرایط کافی مربوطه، که تقریباً همه مسائل کاربردی قابل تصور در مهندسی واجد آنها هستند، به شرح زیرند.

قضیه ۱ (نمایش با سری فوریه)

هرگاه تابع دوره‌ای $f(x)$ با دوره 2π در فاصله $\pi \leq x \leq \pi$ پیوسته‌تکه‌ای^۱ بوده و در هر نقطه از فاصله مزبور مشتق چپ و راست داشته باشد، آنگاه سری فوریه متناظر با (۷) [با ضرایب (۶)] همگراست، و مجموع آن در هر نقطه، به جز نقطه x_0 که در آن $f(x)$ ناپیوسته است برابر $f(x)$ است، و در نقطه x_0 مجموع سری برابر میانگین حدهای چپ و راست^۲ $f(x)$ در نقطه x_0 است.

۱. تعریف در بخش ۱.۵.

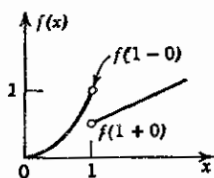
۲. **حد چپ** $f(x)$ در x_0 به صورت حد تابع $f(x)$ وقتی که x از سمت چپ به x_0 میل می‌کند تعریف می‌شود، این حد معمولاً با $f(x_0 - 0)$ نمایش داده می‌شود. بنابراین اگر h با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند $f(x_0 - 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h)$ **حد راست** با $f(x_0 + 0)$ نشان داده می‌شود و وقتی که h با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می‌کند

$$f(x_0 + 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$$

مشتقات چپ و راست $f(x)$ در نقطه x_0 وقتی که h با مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند، به ترتیب به صورت حدهای زیر تعریف می‌شوند،

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h} \quad \text{و} \quad \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h}$$

بدیهی است که اگر $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد آنگاه جمله آخر صورت هردو کسر همان $f(x_0)$ می‌شود.



شکل ۲۰۶. حدهای چپ و راست تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ x/2 & x > 1 \end{cases}$$

در نقطه $x_0 = 1$ که برابرند با

$$f(1-0) = 1$$

$$f(1+0) = \frac{1}{2}$$

تبصره. هرگاه سری فوریه متناظر با تابع $f(x)$ همگرا و مجموع آن همان طور که در قضیه ۱ مطرح شد برابر $f(x)$ باشد این سری، سری فوریه $f(x)$ نامیده می شود، و می نویسیم

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$
 و می گوئیم $f(x)$ با این سری فوریه نمایش داده شده است. چون با گذاشتن پرانتز در يك سری همگرا سری جدیدی با همان مجموع حاصل می شود (اثبات در بخش ۶۰۱۵)، اجمالا می توان نوشت

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

اثبات همگرایی در قضیه ۱ در مورد تابع پیوسته $f(x)$ که دارای مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته است. با انتگرال گیری جزء به جزء از (۶) به دست می آوریم

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx.$$

جمله اول طرف راست صفر است. انتگرال گیری مجدد به روش جزء به جزء نتیجه می دهد

$$a_n = \frac{f'(x) \cos nx}{n^2 \pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx.$$

به دلیل دوره ای بودن و پیوستگی $f'(x)$ ، جمله اول طرف راست صفر است. چون f'' در فاصله انتگرال گیری پیوسته است، به ازای عدد ثابت مناسبی مانند M داریم

$$|f''(x)| < M.$$

به علاوه، $|\cos nx| \leq 1$ ، یعنی

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 \pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx \right| < \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, dx = \frac{2M}{n^2}.$$

همین طور، به ازای هر n ، $|b_n| < 2M/n^2$. از این رو قدر مطلق هر جمله سری فوریه متناظر با $f(x)$ حداکثر برابر جمله متناظر سری همگرای زیر است:

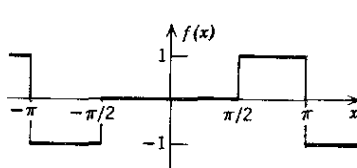
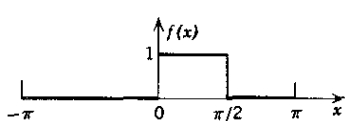
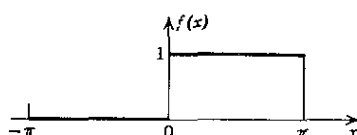
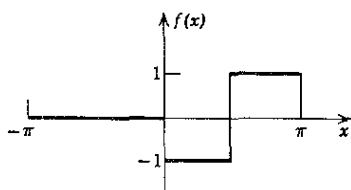
$$|a_0| + 2M \left(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right).$$

در نتیجه سری فوریه مورد نظر همگراست و اثبات به پایان می رسد. (خوانندگان می توانند گمانی که قبلا

با همگرایی یکنواخت آشنا شده‌اند، مشاهده خواهند کرد که بنا بر آزمون وایرستراس از بخش ۶.۱۶ با مفروضات فوق، سری فوریه به‌طور یکنواخت همگراست، و بنا به قضیه ۳ از همان بخش برای رسیدن به فرمول (۶) مجاز هستیم که جمله به جمله انتگرال بگیریم. اثبات همگرایی درحالتی که $f(x)$ پیوسته تکه‌ای باشد و اثبات حکم آخر قضیه ۱ را می‌توان در کتابهای درسی پیشرفته‌تر، مثلاً در مرجع [D۴] یافت. ▲

مسائل بخش ۲.۱۰

سری فوریه تابع $f(x)$ را که دوره آن 2π فرض می‌شود یافته، نمودارهای دقیق اولین سه مجموع جزئی^۱ آن را رسم کنید، $f(x)$ در این مسئله برابر یکی از مقادیر زیر است:



۵. $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$ ۶. $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$

۷. $f(x) = x^3 \quad (-\pi < x < \pi)$ ۸. $f(x) = x^4 \quad (-\pi < x < \pi)$

۹.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \pi + x & -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{\pi} \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

۱. یعنی $a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ به‌ازای $N=1, 2, 3, \dots$

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases} \quad ۱۰$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases} \quad ۱۱$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases} \quad ۱۲$$

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases} \quad ۱۳$$

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases} \quad ۱۴$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad ۱۵$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi^2/4 & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases} \quad ۱۶$$

۱۷. هرگاه $f(x)$ دارای ضرایب فوریه a_n و b_n باشد، نشان دهید $k f(x)$ ، که در آن k عددی ثابت است، دارای ضرایب فوریه ka_n و kb_n است.

۱۸. نشان دهید که اگر $f(x)$ دارای ضرایب فوریه a_n و b_n و $g(x)$ دارای ضرایب فوریه a_n^* و b_n^* باشد، آنگاه $f(x) + g(x)$ دارای ضرایب فوریه $a_n + a_n^*$ ، $b_n + b_n^*$ است.

۱۹. با استفاده از مسائل ۱۷ و ۱۸ و نتایج مسائل ۱ و ۲، سری فوریه مربوط به مسئله ۴ را بیابید.

۲۰. درستی حکم آخر قضیه ۱ را که راجع به ناپیوستگی است در مورد تابع مسئله ۱۱ تحقیق کنید.

۳.۱۰ توابع با دوره دلخواه

تبدیل توابع با دوره 2π به توابع با دوره دلخواه T بسیار ساده است، چرا که باید تغییر متغیر می‌توان به این مقصود رسید.

در واقع، فرض می‌کنیم $f(t)$ دارای دوره T باشد. آنگاه متغیر جدید x را می‌توان طوری در نظر گرفت که $f(t)$ به عنوان تابعی از x ، دارای دوره 2π باشد. اگر بنویسیم

$$(الف) \quad t = \frac{T}{2\pi} x \quad \text{یعنی} \quad (ب) \quad x = \frac{2\pi}{T} t \quad (۱)$$

آنگاه $x = \pm \pi$ متناظر با $t = \pm T/2$ است. یعنی f ، به عنوان تابعی از x ، دارای دوره 2π است. در نتیجه هر گاه f دارای نمایش سری فوریه باشد، این سری باید به صورت زیر باشد:

$$(۲) \quad f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

که ضرایب آن از فرمولهای اوایلر (۶) بخش قبل به دست می‌آید.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) \sin nx \, dx$$

این فرمولها را می‌توانستیم مستقیماً مورد استفاده قرار دهیم، ولی تغییر متغیر x به t محاسبه را ساده‌تر می‌کند. از آنجا که

$$dx = \frac{2\pi}{T} dt \quad \text{داریم} \quad , \quad x = \frac{2\pi}{T} t$$

و فاصله انتگرال گیری بر محور x ها منطبق بر فاصله

$$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

است. در نتیجه، مشاهده می‌کنیم که ضرایب فوریه تابع دوره‌ای $f(t)$ که دوره آن T است با فرمولهای اوایلر

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \, dt \quad (الف)$$

$$(۳) \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt \quad (ب)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{n\pi t}{T} dt \quad (ج)$$

داده می‌شود، سری فوریه (۲) با بیان x بر حسب t چنین می‌شود:

$$(۴) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n\pi}{T} t \right).$$

فاصله انتگرال‌گیری در (۳) را می‌توان با هر فاصله دلخواه به طول T ، مثلاً با فاصله $0 \leq t \leq T$ عوض کرد.

مثال ۱. موج مربعی دوره‌ای

مطلوب است محاسبه سری فوریه تابع (ر.ک. شکل ۲۰۷)

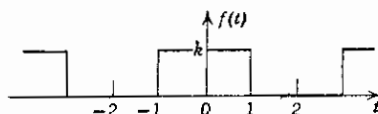
$$f(t) = \begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ k & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases} \quad T=4$$

از (۳ الف) و (۳ ب) به دست می‌آوریم

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 k dt = \frac{k}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) \cos \frac{n\pi}{4} t dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 k \cos \frac{n\pi}{4} t dt = \frac{k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

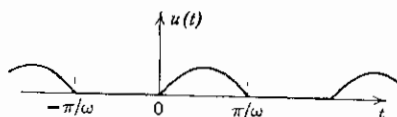
بنابراین وقتی که n زوج باشد، $a_n = 0$ ، وقتی که $n = 1, 5, 9, \dots$ ، $a_n = k/n\pi$ ، و هنگامی که $n = 3, 7, 11, \dots$ ، $a_n = -k/n\pi$. بنا بر (ج) به ازای $n = 1, 2, \dots$ داریم $b_n = 0$.



شکل ۲۰۷. مثال ۱

بدین ترتیب نتیجه عبارت است از

$$f(t) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} t - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} t + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} t - + \dots \right)$$



شکل ۲۰۸. یکسوکندۀ نیم موج

مثال ۲. یکسوکندۀ نیم موج

یک ولتاژ سینوسی $E \sin \omega t$ از یکسوکندۀ نیم موجی که قسمت منفی موج را حذف می کند می گذرد (شکل ۲۰۸). سری فوریه تابع متناوب حاصل

$$u(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 < t < 0 \\ E \sin \omega t & 0 < t < T/2 \end{cases} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

را بیابید. با توجه به این که وقتی $-T/2 < t < 0$ ، $u = 0$ ، از (۳ الف) به دست می آوریم

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t \, dt = \frac{E}{\pi}$$

و بنابر (۳ ب)، با استفاده از (۱۱) ضمیمه ۳، به ازای $x = \omega t$ و $y = n\omega t$ داریم

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t \cos n \omega t \, dt = \frac{\omega E}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [\sin (1+n) \omega t + \sin (1-n) \omega t] \, dt$$

به ازای $n=1$ انتگرال طرف راست صفر است، و به ازای $n=2, 3, \dots$ به سادگی به دست می آوریم

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega E}{2\pi} \left[-\frac{\cos (1+n) \omega t}{(1+n) \omega} - \frac{\cos (1-n) \omega t}{(1-n) \omega} \right]_0^{\pi/\omega} \\ &= \frac{E}{2\pi} \left(\frac{-\cos (1+n) \pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos (1-n) \pi + 1}{1-n} \right) \end{aligned}$$

وقتی n فرد باشد این عبارت صفر می شود، و به ازای n زوج داریم

$$a_n = \frac{E}{2\pi} \left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} \right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi} \quad (n=2, 4, \dots).$$

به همین ترتیب از (۳ ج) می‌یابیم که $b_1 = E/2$ و به ازای $n=2, 3, \dots$ $b_n = 0$ در نتیجه

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t - \frac{2E}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \times 5} \cos 4\omega t + \dots \right).$$

مسائل بخش ۳.۱۰

۱. نشان دهید که دوره هر جمله از (4) ، T است.
۲. نشان دهید که فاصله انتگرال گیری در (۳) را می‌توان با هر فاصله به طول T عوض کرد.
۳. مطلوب است سری فوریه تابع دوره‌ای که از عبور ولتاژ $v(t) = 2 \cos 100 \pi t$ و لذا $f(t)$ را یافته، نمودار $f(t)$ و اولین سه مجموع از يك يكسو کننده نیم موج حاصل می‌شود.
۴. $f(t) = 0 \quad (-2 < t < 0), \quad f(t) = 1 \quad (0 < t < 2), \quad T = 2$
۵. $f(t) = 1 \quad (-1 < t < 1), \quad f(t) = 0 \quad (1 < t < 3), \quad T = 2$
۶. $f(t) = 1 \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = -1 \quad (0 < t < 1), \quad T = 2$
۷. $f(t) = t \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$
۸. $f(t) = |t|, \quad (-2 < t < 2), \quad T = 2$
۹. $f(t) = t \quad (0 < t < 1), \quad f(t) = 1-t \quad (1 < t < 2), \quad T = 2$
۱۰. $f(t) = 1/2 \quad (-1 < t < 0), \quad f(t) = -t \quad (0 < t < 1), \quad T = 2$
۱۱. $f(t) = t \quad (-\pi/8 < t < \pi/8),$
 $f(t) = (\pi/4) - t \quad (\pi/8 < t < 3\pi/8), \quad T = \pi/2$
۱۲. $f(t) = (1/2) + t \quad (-1/2 < t < 0),$
 $f(t) = (1/2) - t \quad (0 < t < 1/2), \quad T = 1$
۱۳. $f(t) = t^2 \quad (-1 < t < 1), \quad T = 2$

$$f(t) = \sin \pi t \quad (0 < t < 1), \quad T = 1 \quad ۱۴.$$

$$f(t) = 1 \quad (-2 < t < 0), \quad f(t) = e^{-t} \quad (0 < t < 2), \quad T = 2 \quad ۱۵.$$

۱۶. سری فوریه مسئله ۴ را با توجه به سری فوریه مثال ۲ مستقیماً به دست آورید.

۱۷. سری فوریه مسئله ۶ را با توجه به سری فوریه مثال ۱، بخش ۲.۱۰، مستقیماً به دست آورید.

۱۸. سری فوریه مسئله ۷ را با توجه به سری فوریه مسئله ۵، بخش ۲.۱۰، مستقیماً به دست آورید.

۱۹. سری فوریه مسئله ۸ را با توجه به سری فوریه مسئله ۱۰، بخش ۲.۱۰، مستقیماً به دست آورید.

۲۰. سری فوریه مسئله ۱۳ را با توجه به سری فوریه مسئله ۶، بخش ۲.۱۰، مستقیماً به دست آورید.

۴.۱۰ توابع زوج و فرد

در تعیین ضرایب فوریه يك تابع، هرگاه تابع فرد یا زوج باشد، می توان از محاسبات غیر ضروری (و خطاهای مربوط به آنها) اجتناب کرد.

نخست یادآوری می کنیم که تابع $y = g(x)$ زوج نامیده می شود، هرگاه به ازای هر x

$$g(-x) = g(x).$$

نمودار چنین تابعی نسبت به محور y ها متقارن است (شکل ۲۰۹). تابع $h(x)$ را فرد می نامند، هرگاه به ازای هر x

$$h(-x) = -h(x).$$

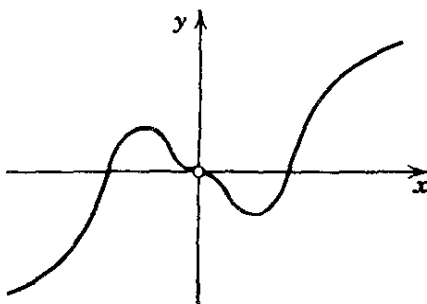
(شکل ۲۱۰ را ببینید). تابع $\cos nx$ زوج و تابع $\sin nx$ فرد است.

اگر $g(x)$ تابعی زوج باشد، آنگاه

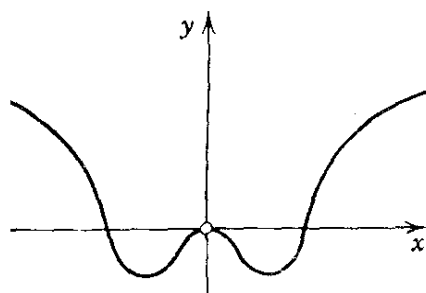
$$(۱) \quad \int_{-T/2}^{T/2} g(x) dx = 2 \int_0^{T/2} g(x) dx \quad (g \text{ زوج}).$$

اگر $h(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه

$$(۲) \quad \int_{-T/2}^{T/2} h(x) dx = 0 \quad (h \text{ فرد}).$$



شکل ۲۱۰. تابع فرد



شکل ۲۰۹. تابع زوج

با توجه به نمودارهای g و h فرمولهای (۱) و (۲) واضح هستند، و اثبات صوری آنها به دانشجو واگذار می‌شود.

حاصل ضرب $q = gh$ تابع زوج g در تابع فرد h تابعی است فرد، چرا که

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -q(x)$$

در نتیجه هر گاه $f(t)$ زوج باشد، آنگاه انتگرال $f \sin(2n\pi t/T)$ در (۳ ج) از بخش قبل فرد است، و $b_n = 0$. همین طور هر گاه $f(t)$ فرد باشد، آنگاه $f \cos(2n\pi t/T)$ در (۳ ب)، بخش ۳.۱۰، فرد است، و $a_n = 0$. از آنچه گفته شد و از (۱) به دست می‌آوریم

قضیه ۱. سری فوریه توابع زوج و فرد

سری فوریه تابع زوج $f(t)$ با دوره T «سری فوریه کسینوسی» است

$$(۳) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t \quad (f \text{ زوج})$$

با ضرایب

$$(۴) \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

سری فوریه تابع فرد $f(t)$ با دوره T «سری فوریه سینوسی» است

$$(۵) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{T} t \quad (f \text{ زوج})$$

با ضرایب

$$(۶) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \frac{n\pi}{T} t dt.$$

بخصوص، سری فوریه تابع زوج $f(x)$ با دوره 2π يك سری فوریه کسینوسی است

$$(۳^*) \quad f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots$$

با ضرایب

$$(۴^*) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n=1, 2, \dots$$

همین طور، سری فوریه تابع فرد $f(x)$ با دوره 2π يك سری فوریه سینوسی است:

$$(۵^*) \quad f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

با ضرایب

$$(۶^*) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n=1, 2, \dots$$

مثلا، $f(x)$ در مثال ۱، بخش ۲.۱۰، فرد است و در نتیجه با يك سری سینوسی فوریه نمایش داده می شود.

با قضیه زیر موضوع را ساده تر می کنیم:

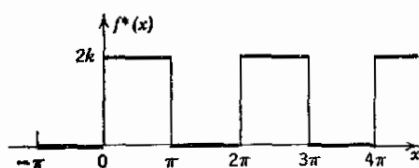
قضیه ۲ (مجموع توابع)

ضرایب فوریه مجموع $f_1 + f_2$ برابرند با مجموع ضرایب فوریه متناظر f_1 و f_2 .

مثال ۱. تبه مستطیلی

تابع $f^*(x)$ در شکل ۲۱۱ مجموع تابع $f(x)$ مثال ۱ بخش ۲.۱۰ و ثابت k است. از این رو، با توجه به مثال نامبرده و قضیه ۲ نتیجه می شود که

$$f^*(x) = k + \frac{2k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$



شکل ۲۱۱. مثال ۱

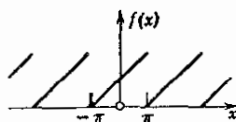
مثال ۲. موج دندانه‌اره‌ای

مطلوب است سری فوریه تابع (شکل ۲۱۲)

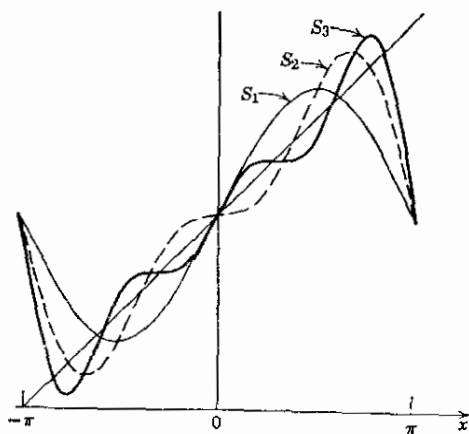
$$f(x) = x + \pi \quad \text{به‌ازای} \quad -\pi < x < \pi \quad \text{و} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

می‌توان نوشت

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{به‌طوری‌که} \quad f_1 = x \quad \text{و} \quad f_2 = \pi$$



(الف) تابع $f(x)$



(ب) مجموعه‌های جزئی $S_n(x)$

شکل ۲۱۲. مثال ۲

ضرایب فوریه f صفرند، به غیر از ضریب جمله اول (جمله ثابت) که π است. از این رو، بنا بر قضیه ۲، ضرایب فوریه a_n ، b_n ، به جز a_0 که برابر π است، همان ضرایب فوریه f_1 است. نظریه اینکه f_1 فرد است، به ازای $n=1, 2, \dots$ داریم $a_n=0$ ، و

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx.$$

با انتگرال گیری به روش جزء به جزء به دست می آوریم

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = -\frac{2}{n} \cos n\pi.$$

پس $b_1 = 2$ ، $b_2 = -2/2$ ، $b_3 = 2/3$ ، $b_4 = -2/4$ ، $b_5 = 2/5$ ، ...، و نمایش سری فوریه $f(x)$ عبارت است از

$$f(x) = \pi + 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - + \dots \right).$$

مسائل بخش ۴.۱۰

۱. قضیه ۲ را ثابت کنید.

کدامیک از توابع زیر زوج، فرد، یا نه زوج و نه فرد هستند؟

۲. $x \cos x$ ، $\ln x$ ، $x \sin x$ ، $\sin^2 x$ ، e^{x^2} ، e^x ، $|x|$ ، $x + x^2$

۳. $x|x|$ ، $\sin x + \cos x$ ، $\sinh x$ ، $\cosh x$ ، $x^2 \cos nx$ ، $x \cos nx$ ، $|x^2|$

کدامیک از توابع $f(x)$ زیر که دوره ای، با دوره 2π ، فرض می شوند، زوج، فرد، یا نه زوج و نه فرد هستند؟

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases} \quad ۴$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad ۵$$

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases} \quad ۰۶$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\pi/2 \\ x & -\pi/2 < x < \pi \end{cases} \quad ۰۷$$

$$f(x) = |\sin x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad ۰۸$$

$$f(x) = e^{|x|} \quad (-\pi < x < \pi) \quad ۰۹$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad (-\pi < x < \pi) \quad ۰۱۰$$

$$f(x) = x|x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad ۰۱۱$$

$$f(x) = x \quad (0 < x < 2\pi) \quad ۰۱۲$$

$$f(x) = x^2 \quad (0 < x < 2\pi) \quad ۰۱۳$$

۰۱۴. همه توابعی را که هم زوج و هم فرد هستند بیابید.

ثابت کنید :

۰۱۵. هرگاه $f(x)$ فرد باشد، آنگاه $|f(x)|$ و $f^2(x)$ زوج هستند.

۰۱۶. هرگاه $f(x)$ زوج باشد، آنگاه $|f(x)|$ ، $f^2(x)$ و $f^2(x)$ زوج هستند.

۰۱۷. مجموع توابع فرد، فرد است.

۰۱۸. حاصل ضرب دو تابع فرد، زوج است.

۰۱۹. مجموع و حاصل ضرب توابع زوج، زوج هستند.

۰۲۰. هرگاه $g(x)$ تابعی دلخواه باشد که به ازای هر x تعریف شده باشد، آنگاه $p(x) = [g(x) + g(-x)]/2$ زوج و $q(x) = [g(x) - g(-x)]/2$ فرد است، و $g(x) = p(x) + q(x)$.

هریک از توابع زیر را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

$$e^x \quad ۰۲۲ \quad 1/(1-x) \quad ۰۲۳ \quad x/(1-x) \quad ۰۲۴ \quad (1+x)/(1-x)$$

سری فوریه توابع زیر را که هر یک از آنها دارای دوره 2π فرض می شوند بیابید.

$$f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad ۰۲۶ \quad f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi) \quad ۰۲۵$$

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi) \quad .۲۷$$

$$f(x) = |\sin x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad .۲۸$$

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases} \quad .۲۹$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ \pi - x & \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad .۳۰$$

$$f(x) = \begin{cases} x - \pi & 0 < x < \pi \\ -x & \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad .۳۱$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad .۳۲$$

۳۳. نشان دهید که تابع $f(x) = x^2$ ($-\pi < x \leq \pi$)، $f(x+2\pi) = f(x)$ دارای سری فوریه زیر است :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 3x - + \dots \right).$$

۳۴. با قرار دادن $x = \pi$ در مسئله ۳۳، فرمول مشهور زیر را که به فرمول اویلر معروف است به دست آورید :

$$(۷) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

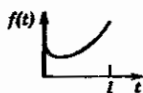
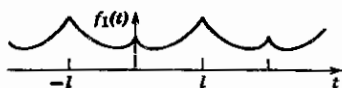
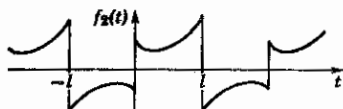
۳۵. با استفاده از مسئله ۳۳، نشان دهید که

$$(۸) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$

۵.۱۰ بسط نیم دامنه‌ای

در مسائل فیزیکی و مهندسی گوناگون نیاز عملی ایجاب می‌کند سری فوریه را در مورد توابع $f(t)$ که فقط بر فاصله‌ای متناهی تعریف شده‌اند بکار ببریم. مثالهای نوعی در فصل بعدی (بخشهای ۳.۱۱ و ۵.۱۱) که در رابطه با معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی

مطرح خواهند شد. در این مثالها $f(t)$ روی فاصله‌ای مانند $0 \leq t \leq l$ تعریف می‌شود، و روی این فاصله است که می‌خواهیم $f(t)$ را با یک سری فوریه نمایش دهیم. بدین منظوری توان قضیه ۱ را مورد استفاده قرار داد. می‌توان با فرض $T/2 = l$ یا $T = 2l$ فاصله $0 \leq t \leq l$ را با فاصله $0 \leq t \leq T/2$ متناظر قرار داد. با استفاده از (۴) بخش ۴.۱۰ یک سری کسینوسی فوریه به دست می‌آید که نمایش تابع زوج دوره‌ای $f_1(t)$ با دوره $T = 2l$ است. فرض می‌کنیم روی فاصله $0 \leq t \leq l$ $f_1(t) = f(t)$. بدین جهت $f_1(t)$ را گسترش زوج داده‌ای $f(t)$ با دوره $T = 2l$ می‌نامند. نمونه‌ای از

(الف) تابع مفروض $f(t)$ (ب) $f_1(t)$ گسترش یافته به صورت تابع دوره‌ای زوج با دوره $2l$ (ج) $f_2(t)$ گسترش یافته به صورت تابع دوره‌ای فرد با دوره $2l$

شکل ۲.۱۳. گسترش دوره‌ای

تابع گسترش زوج یافته در شکل ۲.۱۳ ب داده شده است. بنابر (۳) و (۴) از بخش ۴.۱۰ و به ازای $T = 2l$ داریم

$$(۱) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t \quad (0 \leq t \leq l)$$

با ضرایب

$$(۲) \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

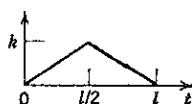
به جای (۴) بخش ۴۰۱۰ می‌توان (۶) بخش ۴۰۱۰ را به کار برد (مانند قبل، با $T=2l$). در این صورت سری سینوسی فوریه به دست می‌آید، که نمایانگر يك تابع فرد دوره‌ای مثل $f_p(t)$ با دوره $T=2l$ است. فرض می‌کنیم روی فاصله $0 \leq t \leq l$ ، $f_p(t) = f(t)$ ، $f_p(t)$ را گسترش فرد دوره‌ای $f(t)$ با دوره $T=2l$ می‌نامند. نمونه‌ای از تابع گسترش فرد یافته در شکل ۲۱۳ ج داده شده است. بنابر (۵) و (۶) از بخش ۴۰۱۰ داریم

$$(۳) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} t \quad (0 \leq t \leq l)$$

با ضرایب

$$(۴) \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt, \quad n=1, 2, \dots$$

سریهای (۱) و (۳) با ضرایب (۲) و (۴) را بسط نیم دامنه‌ای تابع مفروض $f(t)$ می‌نامند.



شکل ۲۱۴. تابع مربوط به مثال ۱

مثال ۱. تپه مثلثی

مطلوب است بسط نیم دامنه تابع (شکل ۲۱۴)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{l} t & 0 < t < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l} (l-t) & \frac{l}{2} < t < l \end{cases}$$

از (۲) به دست می‌آوریم

$$a_0 = \frac{1}{l} \left[\frac{2k}{l} \int_0^{l/2} t dt + \frac{2k}{l} \int_{l/2}^l (l-t) dt \right] = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \left[\frac{2k}{l} \int_0^{l/2} t \cos \frac{n\pi}{l} t dt + \frac{2k}{l} \int_{l/2}^l (l-t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt \right].$$

با انتگرال گیری به روش جزء به جزء نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} \int_0^{l/2} t \cos \frac{n\pi}{l} t dt &= \frac{lt}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} t \Big|_0^{l/2} - \frac{l}{n\pi} \int_0^{l/2} \sin \frac{n\pi}{l} t dt \\ &= \frac{l^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

به همین نحو

$$\int_{l/2}^l (l-t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt = -\frac{l^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right)$$

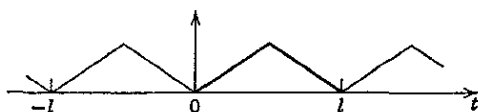
با درج این دو نتیجه در رابطه مربوط به a_n به دست می آوریم

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1 \right).$$

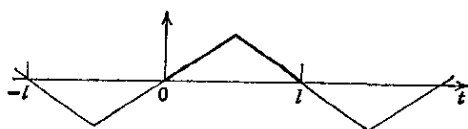
بنابراین ،

$$a_2 = -16k/2^2\pi^2, \quad a_4 = -16k/4^2\pi^2, \quad a_{10} = -16k/10^2\pi^2, \dots$$

و به ازای $a_n = 0, n \neq 2, 4, 10, 14, \dots$ از این رو اولین بسط نیم دامنه ای $f(t)$ عبارت است از



(الف) گسترش زوج



(ب) گسترش فرد

شکل ۲۱۵. گسترشهای دوره ای $f(t)$ مثال ۱

$$f(t) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \left(\frac{1}{2^2} \cos \frac{\pi}{l} t + \frac{1}{6^2} \cos \frac{6\pi}{l} t + \dots \right).$$

این سری گسترش زوج دوره‌ای $f(t)$ نشان داده شده در شکل ۲۱۵ الف، را نشان می‌دهد.

همین طور، بنابه (۴)،

$$(۵) \quad b_n = \frac{16k}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

و بسط دیگر نیم دامنه‌ای $f(t)$ عبارت است از

$$f(t) = \frac{16k}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{l} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{l} t + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{l} t - \dots \right)$$

این سری گسترش فرد دوره‌ای $f(t)$ ، نشان داده شده در شکل ۲۱۵ ب، را نشان می‌دهد.

مسائل بخش ۵.۱۰

توابع $f(t)$ زیر را با سری کسینوسی فوریه نمایش دهید و نمودار گسترش دوره‌ای متناظر با $f(t)$ را رسم کنید.

$$۱. \quad f(t) = 1 \quad (0 < t < l) \quad ۲. \quad f(t) = t \quad (0 < t < l)$$

$$۳. \quad f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < l/2 \\ 0 & l/2 < t < l \end{cases} \quad ۴. \quad f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < l/2 \\ 1 & l/2 < t < l \end{cases}$$

$$۵. \quad f(t) = 1 - \frac{t}{l} \quad (0 < t < l) \quad ۶. \quad f(t) = t^2 \quad (0 < t < l)$$

$$۷. \quad f(t) = t^3 \quad (0 < t < l) \quad ۸. \quad f(t) = e^t \quad (0 < t < l)$$

$$۹. \quad f(t) = \sin \frac{\pi}{l} t \quad (0 < t < l) \quad ۱۰. \quad f(t) = \sin \frac{\pi t}{2l} \quad (0 < t < l)$$

توابع $f(t)$ زیر را به صورت سری فوریه سینوسی نمایش دهید و نمودار گسترش دوره‌ای متناظر با $f(t)$ را رسم کنید.

$$f(t)=t \quad (0 < t < 1) \quad .۱۲ \qquad f(t)=1 \quad (0 < t < 1) \quad .۱۱$$

$$f(t)=\begin{cases} 1/2 & 0 < t < 1/2 \\ 3/2 & 1/2 < t < 1 \end{cases} \quad .۱۴ \qquad f(t)=\begin{cases} 1 & 0 < t < 1/2 \\ 0 & 1/2 < t < 1 \end{cases} \quad .۱۳$$

$$f(t)=t^2 \quad (0 < t < 1) \quad .۱۶ \qquad f(t)=t^2 \quad (0 < t < 1) \quad .۱۵$$

۱۷. صورت (مختلط سری فوریه، ضرایب فوریه مختلط) با استفاده از فرمول $\cos \theta + i \sin \theta$ (ر.ک. بخش ۲.۴)، نشان دهید که

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$$

و سری فوریه

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

را می‌توان به صورت

$$(۶) \qquad f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx})$$

نوشت که در آن $c_n = (a_n - i b_n)/2$ ، $k_n = (a_n + i b_n)/2$ ، $c_0 = a_0$ ، $n=1, 2, \dots$ با استفاده از (۶) بخش ۲.۱۰ نشان دهید که

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad k_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \quad n=1, 2, \dots$$

با معرفی $k_n = c_{-n}$ ، نشان دهید که (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۷) \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

این سری را *حدود مختلط سری فوریه*، و c_n ها را *ضرایب مختلط فوریه* $f(x)$ می‌نامند.

۱۸. با استفاده از (۷)، نشان دهید که صورت مختلط سری فوریه تابع

$$f(x) = e^x \quad \text{به‌ازای} \quad -\pi < x < \pi \quad \text{و} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

عبارت است از

$$f(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}$$

۱۹. از مسئله ۱۸، سری فوریه حقیقی

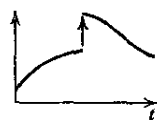
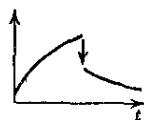
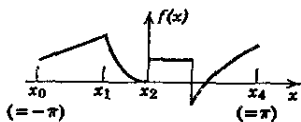
$$f(x) = k \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2} (\cos x - \sin x) + \frac{1}{1+2^2} (\cos 2x - 2 \sin 2x) - + \dots \right]$$

را که در آن $k = (\pi \sinh \pi) / 2$ ، نتیجه بگیرید.

۳۵. نشان دهید که ضرایب مختلط فوریه يك تابع فرد، موهومی محض و ضرایب فوریه يك تابع زوج، حقیقی هستند.

۶.۱۰ تعیین ضرایب فوریه بدون انتگرال گیری

در بعضی از مثالهای پیشین، انتگرال گیریهای نسبتاً پیچیده و طولانی به عبارات نسبتاً ساده‌ای از ضرایب فوریه a_n و b_n منجر شدند. با توجه به این مطلب این سؤال مطرح می‌شود که آیا راهی ساده‌تر برای محاسبه ضرایب فوریه موجود است. بله، و ما می‌خواهیم نشان دهیم ضرایب فوریه يك تابع دوره‌ای که به صورت چندجمله‌ای نمایش داده شده است را می‌توان برحسب پرشهای تابع و مشتقات آن به دست آورد. البته، این کار مزیت زیادی دارد، و فرمولهای مربوط به آن دارای اهمیت عملی بسیاری هستند، چرا که با استفاده از آنها از انتگرال گیری اجتناب می‌شود (جز در مورد a_0 که باید مانند قبل معین شود).



شکل ۲۱۷. يك مثال از يك نمایش

از صورت (۲) (به ازای $m=4$)

(الف) پرش مثبت (ب) پرش منفی

شکل ۲۱۶. پرش تابع

منظور از پرش f تابع $g(x)$ در نقطه x اختلاف بین حدهای راست و چپ (بخش ۲.۱۰) $g(x)$ در x_0 است؛ یعنی

$$(۱) \quad j = g(x_0 + 0) - g(x_0 - 0).$$

نتیجه می شود که پرش به طرف بالا مثبت و پرش به طرف پایین منفی است.
فرض می کنیم $f(x)$ تابعی با دوره 2π باشد که در فاصله $-\pi < x < \pi$ بر حسب
چند جمله ایهای $p_1, \dots, p_m$ نمایش داده شده است، مثلاً (شکل ۲۱۷)

$$(۲) \quad \begin{cases} p_1(x) & x_0 < x < x_1, \quad (x_0 = -\pi) \\ p_2(x) & x_1 < x < x_2, \\ \vdots & \\ p_m(x) & x_{m-1} < x < x_m (= \pi). \end{cases}$$

در این صورت ممکن است f در $x_0, \dots, x_1, \dots, x_m$ پرشهایی داشته باشد، و همین مطلب
ممکن است برای مشتقات $f', f'', \dots$ هم صادق باشد. نمادهای زیر را معرفی
می کنیم

$$(۳) \quad \begin{aligned} j_s &= x_s \text{ پرش } f \text{ در} \\ j_s' &= x_s \text{ پرش } f' \text{ در} \quad (s = 1, 2, \dots, m) \\ j_s'' &= x_s \text{ پرش } f'' \text{ در} \end{aligned}$$

البته، هرگاه f در x_0 پیوسته باشد، آنگاه $j_s = 0$ ، و همچنین است در مورد مشتقات،
به طوری که ممکن است برخی از مقادیر $j_s, j_s', j_s'', \dots$ در (۳) صفر باشند.

مثال ۱. پرشهای يك تابع و مشتقات آن

با فرض

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

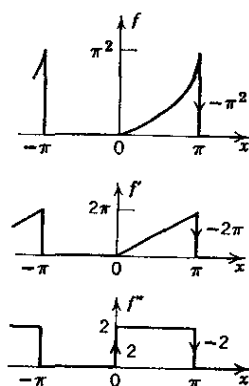
نمودارهای f و مشتقاتش را رسم می کنیم (شکل ۲۱۸)،

$$f' = \begin{cases} 0 \\ 2x \end{cases} \quad f'' = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \quad f''' = 0.$$

مشاهده می کنیم که پرشها عبارتند از

	پرش در $x_1 = 0$	پرش در $x_2 = \pi$
f	$j_1 = 0$	$j_2 = -\pi^2$
f'	$j_1' = 0$	$j_2' = -2\pi$
f''	$j_1'' = 2$	$j_2'' = -2$

توجه کنید که پرشها در $x = -\pi$ در جدول ثبت نشده‌اند، زیرا مقدار آنها برابر مقدارشان در $x = \pi$ ، انتهای دیگر فاصله دوره‌ای، می‌باشد.



شکل ۲۱۸. $f(x)$ و مشتقاتش در مثال ۱

برای رسیدن به فرمول مطلوب جهت محاسبه ضرایب فوریه $a_1, a_2, \dots$ تابع f که با فرمول (۲) داده شده است، از فرمول اوایلر (۶ ب) بخش ۲۰۱ آغاز می‌کنیم:

$$(۴) \quad \pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nx \, dx$$

چون f با (۲) نمایش داده شده است، انتگرال فوق را به صورت مجموع m انتگرال می‌نویسیم:

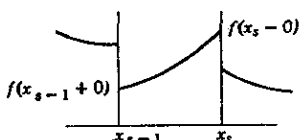
$$(۵) \quad \pi a_n = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \dots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} = \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \, dx,$$

که در آن $x_0 = -\pi$ و $x_m = \pi$. انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء نتیجه می‌دهد

$$(۶) \quad \int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \, dx = \frac{f}{n} \sin nx \int_{x_{s-1}}^{x_s} -\frac{1}{n} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx$$

هم اکنون نکته مهم، محاسبه عبارت اول طرف راست است. $f(x)$ ممکن است در x_s ناپیوسته باشد (شکل ۲۱۹)، در چنین حالتی باید $f(x_s - 0)$ ، حد چپ f در x_s ، را در نظر بگیریم. به همین نحو، در x_{s-1} باید حد راست f ، $f(x_{s-1} + 0)$ را در نظر گرفت. از این دو عبارت اول طرف راست (۶) برابر است با

$$\frac{1}{n} [f(x_s - 0) \sin nx_s - f(x_{s-1} + 0) \sin nx_{s-1}].$$



شکل ۲۱۹. فرمول (۶)

در نتیجه، با درج (۶) در (۵) و استفاده از نمادهای کوتاه $S_1 = \sin nx_1$ ، $S_0 = \sin nx_0$ و غیره، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \pi a_n = & \frac{1}{n} [f(x_1 - 0) S_1 - f(x_0 + 0) S_0 + f(x_1 - 0) S_1 - f(x_1 + 0) S_1 \\ & + \dots + f(x_m - 0) S_m - f(x_{m-1} + 0) S_{m-1}] \\ & - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx. \end{aligned} \quad (۷)$$

هر گاه جملاتی را که دارای S های یکسان هستند کنار هم بنویسیم، عبارت داخل کروشه چنین می شود:

$$\begin{aligned} & -f(x_0 + 0) S_0 + [f(x_1 - 0) - f(x_1 + 0)] S_1 \\ & + [f(x_1 - 0) - f(x_1 + 0)] S_1 + \dots + f(x_m - 0) S_m. \end{aligned} \quad (۸)$$

عبارت های داخل کروشه ها در (۸) پرش های f هستند که در ۱- ضرب شده اند. به علاوه به علت دوره ای بودن، $S_0 = S_m$ و $f(x_0) = f(x_m)$ ، بنابراین جمله اول و جمله آخر (۸) را می توان با هم در نظر گرفت. در نتیجه (۸) برابر است با

$$-j_1 S_1 - j_2 S_2 - \dots - j_m S_m$$

و از (۷) فرمول واسطه زیر عاید می شود:

$$(۹) \quad \pi a_n = -\frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j_s \sin nx_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx$$

با اعمال همین روش در مورد انتگرالهای طرف راست (۹)، می‌یابیم

$$(۱۰) \quad \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j_s' \cos nx_s + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m \int_{x_{s-1}}^{x_s} f'' \cos nx \, dx$$

با ادامه این روش، به انتگرال‌هایی که شامل مشتقات مراتب بالاتر و بالاتر f هستند می‌رسیم. چون f با چند جمله‌ایها نمایش داده شده است و مشتق مرتبه $(r+1)$ يك چند جمله‌ای از درجه r صفر است، بنابراین بعد از چند مرحله (متناهی) به جایی می‌رسیم که دیگر انتگرالی باقی نمی‌ماند. با جایگزین کردن (۱۰) و فرمولهای مشابهی که از مراحل بعدی نتیجه می‌شوند در (۹)، فرمول مطلوب را به دست می‌آوریم:

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left[- \sum_{s=1}^m j_s \sin nx_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j_s' \cos nx_s \right.$$

(۱۱ الف)

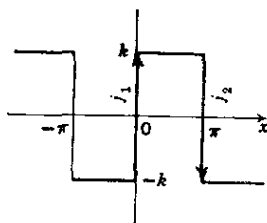
$$\left. + \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^m j_s'' \sin nx_s + \frac{1}{n^3} \sum_{s=1}^m j_s''' \cos nx_s - - + + \dots \right]$$

که در آن $n = 1, 2, \dots$ (و a_0 مانند قبل باید با انتگرال گیری به دست آید). درست به همین روش از (۶ ب) بخش ۲۰۱۰ به دست می‌آوریم

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left[\sum_{s=1}^m j_s \cos nx_s - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^m j_s' \sin nx_s \right.$$

(۱۱ ب)

$$\left. - \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^m j_s'' \cos nx_s + \frac{1}{n^3} \sum_{s=1}^m j_s''' \sin nx_s + - - + + \dots \right]$$



شکل ۲۲۰. مثال ۲

به منظور اجتناب از خطاهای احتمالی بهتر است مانند مثال ۱ نمودارهای $f(x)$ و مشتقاتش را رسم کنیم و پرشها را در جدولی ثبت نماییم.

مثال ۲. موج مربعی دوره‌ای

مطلوب است ضرایب فوریه تابع (شکل ۲۲۰)

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

مشاهده می‌کنیم که $f' \equiv 0$ و پرشهای f عبارتند از

	پرش در $x_1 = 0$	پرش در $x_2 = \pi$
f	$j_1 = 2k$	$j_2 = -2k$

f فرد است. در نتیجه $a_n = 0$ ، و بنابه (۱۱ ب)،

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} [j_1 \cos nx_1 + j_2 \cos nx_2] = \frac{1}{n\pi} [2k \cos 0 - 2k \cos n\pi] \\ &= \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 2k/n\pi & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases} \quad (\text{ر.ک. مثال ۱ بخش ۲۰.۱}). \end{aligned}$$

مثال ۳

مطلوب است سری فوریه تابع داده شده در مثال ۱ همین بخش، با انتگرال گیری،

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

بنابه (۱۱ الف)،

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left[\pi^2 \sin n\pi + \frac{2\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} (2 \sin 0 - 2 \sin n\pi) \right] = \frac{2}{n^3} \cos n\pi$$

از این رو $a_1 = -\frac{2}{1^3}$ ، $a_2 = \frac{2}{2^3}$ ، $a_3 = -\frac{2}{3^3}$ ، ... از (۱۱ ب) نتیجه می‌شود که

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left[-\pi^2 \cos n\pi + \frac{2\pi}{n} \sin n\pi - \frac{1}{n^2} (2 \cos 0 - 2 \cos n\pi) \right]$$

$$= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{2}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1).$$

در نتیجه

$$b_1 = \pi - \frac{2}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad b_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3^2 \pi}, \quad b_4 = -\frac{\pi}{4}, \dots,$$

و سری فوریه عبارت است از

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \cos x + \left(\pi - \frac{2}{\pi} \right) \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\pi}{4} \sin 2x + \dots$$

مسائل بخش ۶.۱۰

۱. (۱۱ ب) را از (۶ ب) بخش ۲.۱۰ به دست آورید.

با استفاده از (۱۱)، سری فوریه تابع $f(x)$ در

۲. مسائل ۱-۴، بخش ۲.۱۰ ۳. مسائل ۹-۱۲، بخش ۲.۱۰

۴. مسائل ۵-۸، بخش ۲.۱۰ ۵. مسائل ۱۳-۱۶، بخش ۲.۱۰

را بیابید.

۶. نشان دهید فرمولهای متناظر با (۱۱) در مورد تابع $f(t)$ با دوره T عبارتند از

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left[- \sum_{s=1}^m j_s \sin \frac{2n\pi}{T} t_s - \frac{T}{2n\pi} \sum_{s=1}^m j_s' \cos \frac{2n\pi}{T} t_s \right.$$

(۱۲ الف)

$$\left. + \left(\frac{T}{2n\pi} \right)^2 \sum_{s=1}^m j_s'' \sin \frac{2n\pi}{T} t_s + \left(\frac{T}{2n\pi} \right)^2 \sum_{s=1}^m j_s''' \cos \frac{2n\pi}{T} t_s - \dots + \dots \right],$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left[\sum_{s=1}^m j_s \cos \frac{2n\pi}{T} t_s - \frac{T}{2n\pi} \sum_{s=1}^m j_s' \sin \frac{2n\pi}{T} t_s \right.$$

(۱۲ ب)

$$\left. - \left(\frac{T}{2n\pi} \right)^2 \sum_{s=1}^m j_s'' \cos \frac{2n\pi}{T} t_s + \left(\frac{T}{2n\pi} \right)^2 \sum_{s=1}^m j_s''' \sin \frac{2n\pi}{T} t_s + \dots + \dots \right]$$

با استفاده از (۱۲)، سری فوریه تابع $f(t)$ در

۷. مسائل ۴-۶، بخش ۳.۱۰ ۸. مسائل ۷-۸، بخش ۳.۱۰

۹. مسائل ۹-۱۱، بخش ۳.۱۰ ۱۰. مسائل ۱۲-۱۳، بخش ۳.۱۰

را بیابید.

با استفاده از (۱۲)، سری کسینوسی فوریه تابع $f(t)$ در مسائل

۱۱. مسائل ۱-۴، بخش ۵.۱۰ ۱۲. مسائل ۵-۷، بخش ۵.۱۰

را بیابید.

با استفاده از (۱۲)، سری سینوسی فوریه تابع $f(t)$ در مسائل

۱۳. مسائل ۹-۱۳، بخش ۵.۱۰ ۱۴. مسائل ۱۴-۱۶، بخش ۵.۱۰

را بیابید.

۱۵. آیا می‌توان برای یافتن ضرایب فوریه تابع $f(x) = e^x$ ($0 < x < 2\pi$)، $f(x+2\pi) = f(x)$ از (۱۱) استفاده کرد؟

۷.۱۰ نوسانهای واداشته

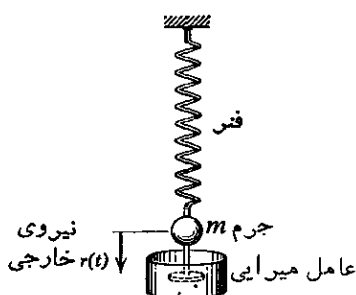
سری فوریه در ارتباط با معادلات دیفرانسیل دارای کاربردهای مهمی است. برای روشن شدن این موضوع، یک مسئله عملی مهم را که شامل یک معادله دیفرانسیل معمولی است مورد بررسی قرار می‌دهیم. (معادلات دیفرانسیل جزئی در فصل بعد بررسی می‌شوند.) در بخش ۱۳.۲ آموختیم که نوسانهای واداشته جسمی به جرم m که متصل به یک فنر است (شکل ۲۲۱) از معادله

$$(۱) \quad m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = r(t)$$

پیروی می‌کند، که در آن k مدول فنر و c ثابت میرایی است. هرگاه نیروی خارجی $r(t)$ تابعی سینوسی یا کسینوسی بوده، ثابت میرایی صفر نباشد، جواب حالت مانا نمایش نوسان همسازی است. که فرکانس آن برابر با فرکانس نیروی خارجی است.

حال می‌خواهیم ببینیم که هرگاه $r(t)$ تابع سینوسی یا کسینوسی صرف نبوده بلکه تابع دوره‌ای دلخواهی باشد، آنگاه جواب حالت مانا ترکیبی از نوسانهای همساز است که فرکانسشان $r(t)$ و مضارب $r(t)$ است. هرگاه فرکانس یکی از این نوسانها نزدیک به فرکانس حالت تشدید دستگاه ارتعاشی باشد (د. ک. بخش ۱۳.۲)، آنگاه چنین نوسانی

بخش عمده پاسخ دستگاه به نیروی خارجی است. البته این نتیجه برای ناظری که با نظریه ریاضی مربوطه که در مطالعه دستگاههای ارتعاش و حالت تشدید بسیار مهم است آشناییست شگفت انگیز است. مطلب فوق را با آوردن مثالی روشن می کنیم.



شکل ۲۲۱. دستگاه ارتعاشی مورد بررسی

مثال ۱. نوسانهای واداشته حاصل از نیروی راننده دوره ای غیر سینوسی

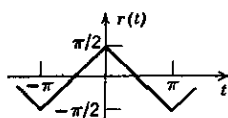
فرض می کنیم در (۱)، $m = ۱ (gm)$ ، $c = ۰.۰۲ (gm/sec)$ ، و $k = ۲۵ (gm/sec^2)$ ، به طوری که (۱) چنین شود:

$$(۲) \quad \ddot{y} + ۰.۰۲\dot{y} + ۲۵y = r(t)$$

در این رابطه $r(t)$ با $gm \cdot cm/sec^2$ اندازه گیری شده است. فرض کنید (شکل ۲۲۲)

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{4} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{4} & 0 < t < \pi \end{cases} \quad r(t + 2\pi) = r(t).$$

مطلوب است جواب حالت مانای $y(t)$.



شکل ۲۲۲. نیروی مثال ۱

$r(t)$ را با سری فوریه نمایش می دهیم:

$$(۳) \quad r(t) = \frac{۴}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{۳^۲} \cos ۳t + \frac{1}{۵^۲} \cos ۵t + \dots \right).$$

آنگاه معادلهٔ دیفرانسیل

$$(۴) \quad \ddot{y} + ۰.۰۰۲\dot{y} + ۲۵y = \frac{۴}{n^۲\pi} \cos nt \quad (n=۱, ۳, \dots)$$

را که طرف راست آنها تنها شامل يك جمله از سری (۳) است در نظر می گیریم، در بخش ۱۳.۲ دیدیم که $y_n(t)$ ، جواب حالت مانای (۴)، به صورت زیر است:

$$(۵) \quad y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt,$$

با درج این y_n در (۴) می یابیم

$$(۶) \quad D = (۲۵ - n^۲)^۲ + (۰.۰۰۲n)^۲ \quad \text{که} \quad B_n = \frac{۰.۰۰۸}{n\pi D}, \quad A_n = \frac{۴(۲۵ - n^۲)}{n^۲\pi D}$$

چون معادلهٔ دیفرانسیل (۲) خطی است، انتظار می رود جواب حالت مانا به صورت

$$(۷) \quad y = y_۱ + y_۳ + y_۵ + \dots$$

باشد، که y_n از (۵) و (۶) به دست می آید. در واقع این به سادگی از جانشانی (۷) در (۲) و استفاده از سری فوریهٔ $r(t)$ نتیجه می شود، مشروط بر اینکه مشتق گیری جمله به جمله از (۷) مجاز باشد. (خوانندگانی که قبلاً با مفهوم همگرایی یکنواخت [بخش ۶.۱۶] آشنا شده اند می توانند ثابت کنند که از (۷) می توان جمله به جمله مشتق گرفت.) از (۶) دامنهٔ (۵) محاسبه می شود:

$$C_n = \sqrt{A_n^۲ + B_n^۲} = \frac{۴}{n^۲\pi\sqrt{D}}$$

که مقادیر عددی عبارتند از

$$C_۱ = ۰.۰۰۵۳۰$$

$$C_۳ = ۰.۰۰۰۸۸$$

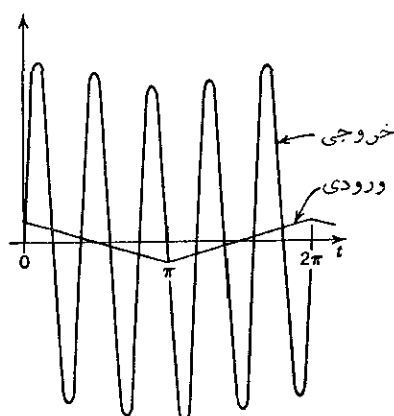
$$C_۵ = ۰.۰۰۵۱۰۰$$

$$C_۷ = ۰.۰۰۰۱۱$$

$$C_۹ = ۰.۰۰۰۰۳$$

به ازای $n=۵$ مقدار D بسیار کوچک است، مخرج $C_۵$ کوچک است، و $C_۵$ خیلی

بزرگ است، به طوری که y تنها جمله قابل ملاحظه (۷) است. این نشان می‌دهد که حرکت حالت ماننا تقریباً نوسانی همساز با فرکانسی پنج برابر نیروی محرک است (شکل ۲۲۳).



شکل ۲۲۳. ورودی، و خروجی حالت ماننا در مثال ۱

مسائل بخش ۷.۱۰

مطلوب است جواب عمومی معادله دیفرانسیل با

۱. $r(t) = \sin t$, $\omega = ۰.۵$, ۰.۷ , ۰.۹ , ۱.۱ , ۱.۵ , ۲.۰ , ۱۰.۰

۲. $r(t) = \cos \alpha t + \cos \beta t$ ($\omega \neq \alpha, \beta$)

۳. $r(t) = \sin t + \frac{1}{9} \sin 3t + \frac{1}{25} \sin 5t$, $\omega = ۰.۵$, ۰.۹ , ۱.۱ , ۲ , ۲.۹

۳.۱, ۴, ۴.۹, ۵.۱, ۶, ۸

$$r(t) = \begin{cases} t & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad r(t + 2\pi) = r(t), \quad ۴.$$

$|\omega| \neq ۱, ۳, ۵, \dots$

$$r(t) = \frac{t^\gamma}{\gamma} \quad -\pi < t < \pi \text{ و } r(t+2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 0, 1, 2, \dots \quad ۵.$$

$$r(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos nt, \quad |\omega| \neq 1, 2, \dots, N \quad ۶.$$

$$r(t) = \frac{\pi}{\gamma} |\sin t| \quad -\pi < t < \pi \text{ و } r(t+2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 0, 2, 4, \dots \quad ۷.$$

$$r(t) = \begin{cases} t+\pi & -\pi < t < 0 \\ -t+\pi & 0 < t < \pi \end{cases} \quad r(t+2\pi) = r(t), |\omega| \neq 0, 1, 3, \dots \quad ۸.$$

مطلوب است نوسان حالت مانای متناظرا $\ddot{y} + cy + \dot{y} = r(t)$ که در آن $c > 0$ و

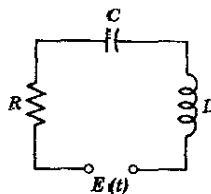
$$r(t) = \sin 3t \quad ۱۰. \quad r(t) = K \sin t \quad ۹.$$

$$r(t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin nt \quad ۱۲. \quad r(t) = a_n \cos nt \quad ۱۱.$$

$$r(t) = \frac{t}{12} (\pi^2 - t^2) \quad -\pi < t < \pi \text{ و } r(t+2\pi) = r(t) \quad ۱۳.$$

۱۴. مطلوب است $I(t)$ ، جریان حالت مانا در یک مدار RLC با اهم $R = 100$ ،
هنری $L = 10$ ، فاراد $C = 10^{-2}$ ، وقتی که به ازای $-\pi < t < \pi$ ،
 $E(t) = 100t(\pi^2 - t^2)$ ولت و $E(t+2\pi) = E(t)$ برای حل مسئله به شرح
زیر عمل کنید:

سری فوریه $E(t)$ را بیابید. در نتیجه $I(t)$ به صورت سری مثلثاتی درخواهد آمد.
فرمولهای عمومی ضرایب این سری را تعیین کنید. مقادیر عددی چند ضریب اول را
محاسبه کنید. نمودار مجموع چند جمله اول سری مزبور را رسم کنید.



مسئله ۱۴. مدار RLC

۱۵. همان اعمال مسئله ۱۴ را انجام دهید، وقتی که

$$E(t) = \begin{cases} 100(\pi t + t^2) & -\pi < t < 0 \\ 100(\pi t - t^2) & 0 < t < \pi \end{cases} \quad E(t + 2\pi) = E(t)$$

سایر داده‌ها همان داده‌های مسئله قبل است.

۸.۱۰ تقریب توسط چندجمله‌ایهای مثلثاتی. خطای مربعی

فرض می‌کنیم $f(x)$ تابع مفروضی با دوره 2π باشد که بتوان آن را به صورت یک سری فوریه نمایش داد. آنگاه مجموع جزئی N ام سری فوریه تقریبی از $f(x)$ است:

$$(۱) \quad f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

طبیعی است سؤال کنیم که آیا (۱) «بهترین» تقریب برای f توسط چندجمله‌ای مثلثاتی

$$(۲) \quad F(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

با یک N مشخص است، یعنی آیا این تقریبی است که به ازای آن «خطا» می‌نیم است. البته، نخست باید منظورمان از خطای E یک تقریب را تعریف کنیم. ما تعریفی برمی‌گزینیم که میزان تطابق f و F روی سراسر فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ را مشخص کند. واضح است که ما کریمم $(f - F)$ برای این منظور مناسب نیست: در شکل ۲۲۴، تابع F تقریب خوبی برای f است، ولی $|f - F|$ در نقاط نزدیک به x_0 بزرگ است. از این رو مقدار

$$(۳) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 dx$$

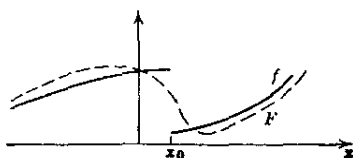
را برای بررسی انتخاب می‌کنیم. این مقدار را خطای مربعی کل F نسبت به تابع f روی فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ می‌نامند. واضح است که $E \geq 0$. به ازای N مشخص، می‌خواهیم ضرایب (۲) را طوری تعیین کنیم که E می‌نیم باشد. (۳) را می‌توان به صورت

$$(۴) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f F dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx$$

نوشت.

با قرار دادن (۲) در انتگرال آخر و محاسبه انتگرالهای پدید آمده مانند بخش

۲۰۱۰ به سادگی به دست می آوریم



شکل ۲.۲۴. خطای تقریب

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2 dx = \pi (2\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \dots + \beta_N^2).$$

با درج (۲) در انتگرال دوم (۴)، مشاهده می کنیم که انتگرالهای پدید آمده همان انتگرالهای فرمولهای اوایلر (۶)، بخش ۲۰۱۰ هستند، و

$$\int_{-\pi}^{\pi} f F dx = \pi (2\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_N b_N).$$

با توجه به این عبارات، (۴) چنین می شود:

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\pi \left[2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \right] \quad (5)$$

$$+ \pi \left[2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right].$$

هر گاه در (۲) $\alpha_n = a_n$ و $\beta_n = b_n$ بگیریم، آنگاه بنابر (۵) مشاهده می کنیم که خطای مربعی متناظر با این انتخاب خاص ضرایب F چنین می شود:

$$(6) \quad E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right].$$

با کردن (۶) از (۵) به دست می آوریم

$$E - E^* = \pi \left\{ 2(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^N [(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2] \right\}.$$

هر جمله طرف راست مربع يك عدد حقیقی و بنابر این غیر منفی است. در نتیجه

$$E \geq E^* \quad \text{یا} \quad E - E^* \geq 0$$

و $E = E^*$ اگر و فقط اگر $\alpha_0 = a_0, \dots, \beta_N = b_N$. این ثابت می‌کند که

قضیه ۱ (خطاهای مربعی می‌نیمم)

خطای مربعی کل F [(۲) را ببینید، N مشخص است] نسبت به f روی فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ می‌نیمم است، اگر و فقط اگر ضرایب F در (۲) ضرایب فوریه متناظر f باشند. این مقدار می‌نیمم از (۶) به دست می‌آید.

بنابر (۶) مشاهده می‌کنیم که E^* با افزایش N نمی‌تواند افزایش یابد، بلکه ممکن است نزول کند. از این‌رو، با افزایش N ، مجموعه‌های جزئی سری فوریه f ، از نقطه نظر خطای مربعی تقریبهای بهتر و بهتری از $f(x)$ می‌دهند.

چون $E^* \geq 0$ و (۶) به ازای هر N برقرار است، از (۶)، يك نامساوی مهم،

نامساوی بسل^۱

$$(۷) \quad 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

در صورت موجود بودن انتگرال طرف راست برای ضرایب فوریه f به دست می‌آید.

مسائل بخش ۸.۱۰

۱. فرض می‌کنیم $f(x) = -1$ وقتی که $-\pi < x < 0$ ، و $f(x) = 1$ وقتی که $0 < x < \pi$ ، و $f(x + 2\pi) = f(x)$. تابع $F(x)$ ، به صورت (۲)، را طوری بیابید که خطای مربعی کل (۳) می‌نیمم باشد.

۲. مطلوب است محاسبه خطای مربعی می‌نیمم در مسئله ۱ به‌ازای $N = 1, 3, 5, 7$. کوچکترین مقدار N ، به طوری که $E^* \leq 0.05$ ، چقدر است؟

۳. نشان دهید که خطای مربعی می‌نیمم (۶) تابعی نزولی یکنوا از N است. در هر يك از مسائل زیر، تابع $F(x)$ به صورت (۲)، را طوری بیابید که مربع خطای کل E می‌نیمم باشد و این مقدار می‌نیمم را به‌ازای $N = 1, 2, \dots, 5$ محاسبه کنید.

$$۴. \quad f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi) \quad ۵. \quad f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$$

۱. می‌توان نشان داد که برای چنین تابعی حتی تساوی در (۷) نیز برقرار است. اثبات در مرجع [D۴].

۹.۱۰ انتگرال فوریه

سریهای فوریه برای حل مسائل گوناگونی که شامل توابع دوره‌ایند ابزار پر قدرتی هستند. اولین کاربردهای سری فوریه در بخش ۷.۱۰ آمده است، و مسائل مهم زیادی، در ارتباط با معادلات با مشتقات جزئی، در فصل ۱۱ مورد بررسی قرار خواهد گرفت. نظریه اینکه بسیاری از مسائل عملی شامل توابع دوره‌ای نیستند، بجاست که روش سری فوریه را طوری تعمیم دهیم که توابع غیر دوره‌ای را نیز در برگیرد. به عبارت ساده، اگر با تابع دوره‌ای $f_T(x)$ ، با دوره T ، شروع کرده و T را به سمت بینهایت میل دهیم، آنگاه تابع $f(x)$ حاصل دوره‌ای نخواهد بود. این مطلب را با ارائه دو مثال روشن می‌کنیم.

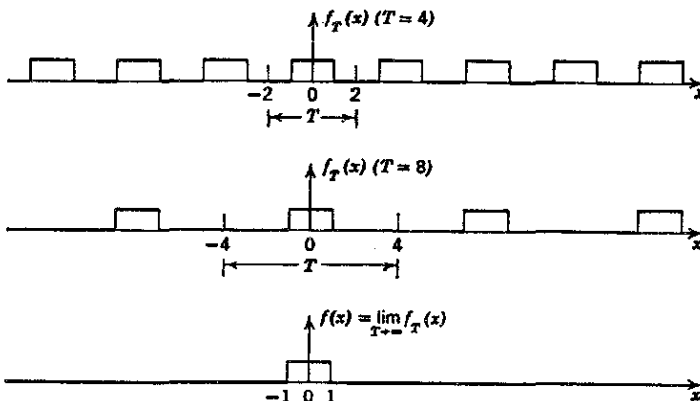
مثال ۱

تابع (شکل ۲۲۵)

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & -T/2 < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < T/2 \end{cases}$$

با دوره $T > 2$ را در نظر می‌گیریم. وقتی $T \rightarrow \infty$ ، به دست می‌آوریم

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$



شکل ۲۲۵. مثال ۱

مثال ۲

فرض می‌کنیم $f_T(x) = e^{-|x|}$ وقتی که $-T/2 < x < T/2$ و

$$f_T(x+T) = f_T(x) \quad (\text{شکل ۲۲۶ را ببینید})$$

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = e^{-|x|}$$

حال با تابع دوره‌ای $f_T(x)$ ، که دارای دوره T است و می‌توان آن را به صورت سری فوریه

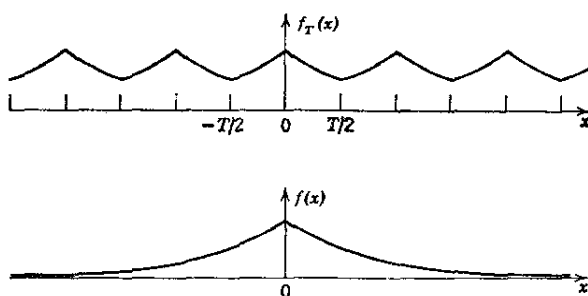
$$f_T(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \right)$$

نمایش داده شروع می‌کنیم.

این نمایش را به شرح زیر تغییر شکل می‌دهیم. از نماد کوتاه

$$w_n = \frac{2n\pi}{T}$$

استفاده می‌کنیم، a_n و b_n را از فرمولهای اوایلر (۳) بخش ۳۰۱۰ در $f_T(x)$ جایگزین کرده و متغیر انتگرال گیری را با v نشان می‌دهیم. آنگاه به دست می‌آوریم



شکل ۲۲۶. مثال ۲

$$f_T(x) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) dv + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \cos w_n v dv + \sin w_n x \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \sin w_n v dv \right]$$

حال

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)\pi}{T} - \frac{2n\pi}{T} = \frac{2\pi}{T},$$

یعنی

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{2\pi}{T}$$

آنگاه $2/T = \Delta w / \pi$ و می توان سری فوریه را به صورت زیر نوشت :

$$(۱) \quad f_T(x) =$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) dv + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(w_n x) \Delta w \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \cos w_n v dv \right. \\ \left. + \sin(w_n x) \Delta w \int_{-T/2}^{T/2} f_T(v) \sin w_n v dv \right].$$

این نمایش برای هر T ثابت، هر اندازه بزرگ ولی متناهی، برقرار است. حال T را به سمت بینهایت میل می دهیم و فرض می کنیم که تابع غیر دوره ای حاصل

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x)$$

روی محور x ها مطلقاً انتگرال پذیر باشد، یعنی، انتگرال

$$(۲) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

موجود باشد. آنگاه $1/T \rightarrow 0$ و مقدار جمله اول طرف راست (۱) به صفر میل می کند. به علاوه $\Delta w = 2\pi/T \rightarrow 0$ و سری نامتناهی (۱) به انتگرالی از $-\infty$ تا ∞ بدل می شود، که نمایش $f(x)$ است، یعنی،

$$(۳) \quad f(x) =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv \right] dw.$$

هر گاه نمادهای کوتاه زیر را به کار ببریم :

$$(۴) \quad A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv, \quad B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dv,$$

(۳) را می توان به صورت

$$(۵) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw.$$

نوشت. این نمایشی از تابع $f(x)$ است که انتگرال فوریه نامیده می‌شود. واضح است که رهیافت طبیعی ما نمایش (۵) را صرفاً مطرح می‌کند، و به هیچ عنوان آن را ثابت نمی‌کند؛ در حقیقت، حد (۱) وقتی که Δw به صفر میل کند تعریف انتگرال (۳) نیست. شرایط کافی برای برقرار بودن (۵) به شرح زیرند:

قضیه ۱ (انتگرال فوریه)

هرگاه $f(x)$ در هر فاصله متناهی پیوسته تکه‌ای (د.ك. بخش ۱.۵) و در هر نقطه دارای مشتق راست و مشتق چپ باشد (د.ك. بخش ۲.۱۰) و انتگرال (۲) موجود باشد، آنگاه $f(x)$ را می‌توان با انتگرال فوریه نمایش داد. در نقطه‌ای که $f(x)$ ناپیوسته باشد. مقدار انتگرال فوریه برابر میانگین حدود چپ و راست $f(x)$ در آن نقطه است (د.ك. بخش ۲.۱۰). (اثبات در مرجع [D۲]؛ د.ك. ضمیمه ۰.۱)

مثال ۳. تپه منفرد، انتگرال سینوسی

مطلوب است نمایش انتگرال فوریه‌ای تابع (شکل ۲۲۷)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

از (۴) به دست می‌آوریم

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dv = \int_{-1}^1 \cos wv dv = \left. \frac{\sin wv}{w} \right|_{-1}^1 = \frac{2 \sin w}{w},$$

$$B(w) = \int_{-1}^1 \sin wv dv = 0,$$

و (۵) چنین می‌شود:

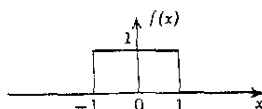
$$(۶) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw.$$

میانگین حدود چپ و راست $f(x)$ در $x=1$ برابر $(1+0)/2$ ، یعنی برابر $1/2$ است. بنابراین، از (۶) و قضیه ۱ جواب مورد نظر حاصل می‌شود:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \begin{cases} \pi/2 & 0 \leq x < 1 \\ \pi/4 & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که این انتگرال به عامل ناپیوسته دیریکله^۱ موسوم است. حالت $x=0$ را که مورد علاقه ویژه ما است بررسی می‌کنیم. وقتی $x=0$ آنگاه

$$(۷) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2}$$



شکل ۲۲۷. مثال ۳

مشاهده می‌کنیم که این انتگرال حد انتگرال سینوسی

$$(۸) \quad \text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin w}{w} dw$$

است وقتی که $z \rightarrow \infty$ (z حقیقی است). نمودار $\text{Si}(z)$ در شکل ۲۲۸ داده شده است. درمورد يك سری فوريه، نمودارهای مجموعه‌های جزئی، منحنیهای تقریبی منحنی تابع دوره‌ای نمایش داده شده با سری فوريه هستند. همین‌طور، در مورد انتگرال فوريه^۵، تقریبات از تعویض ∞ با عدد a به دست می‌آیند در نتیجه انتگرال

$$(۹) \quad \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$$

تقریبی برای انتگرال (۶) و بنابراین تقریبی برای $f(x)$ است. شکل ۲۲۹ نوسانهای حول نقاط ناپیوستگی $f(x)$ را نشان می‌دهد.

ممکن است انتظار داشته باشیم وقتی که a به سمت بینهایت میل کند این نوسانها از بین بروند، ولی چنین نیست، با افزایش a ، اینها هرچه بیشتر به نقاط $x = \pm 1$ نزدیک می‌شوند. این رفتار غیرمنتظره، که در ارتباط با سری فوريه نیز اتفاق می‌افتد، به پدیده

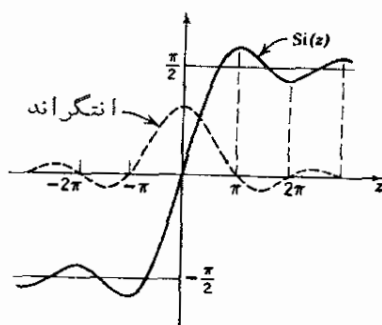
۱. پتر گوستاولوزن دیریکله (Peter Gustav Lejeune Dirichlet)، ۱۸۵۹-۱۸۰۵، ریاضیدان آلمانی است که به خاطر آثار تحقیقاتی مهمش در سریهای فوريه و نظریه اعداد معروف است.

گنیز معروف است. این موضوع را می‌توان با نمایش (۹) بر حسب انتگرال سینوسی به صورت زیر بیان نمود. با استفاده از (۱۱) از ضمیمه ۳، نخست به دست می‌آوریم

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w+wx)}{w} dw + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin(w-wx)}{w} dw.$$

در انتگرال اول طرف راست قرار می‌دهیم $w+wx=t$. آنگاه $dw/w=dt/t$ و $0 \leq w \leq a$ با $0 \leq t \leq (x+1)a$ متناظر است. در انتگرال آخر قرار می‌دهیم $w-wx=-t$. آنگاه $dw/w=dt/t$ و فاصله $0 \leq w \leq a$ با $0 \leq t \leq (x-1)a$ متناظر است. چون $\sin(-t)=-\sin t$ ، بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{(x+1)a} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{(x-1)a} \frac{\sin t}{t} dt.$$



شکل ۲۲۸. انتگرال سینوسی

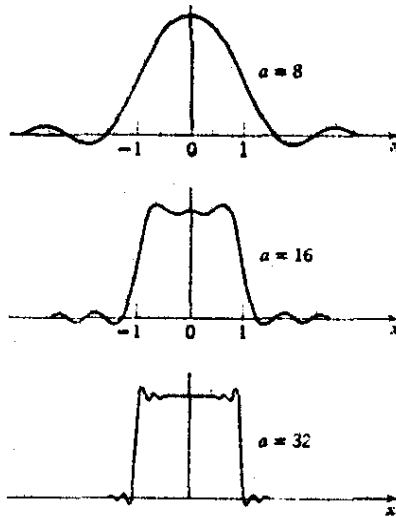
از اینجا و با توجه به (۸) انتگرال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{\pi} \text{si}(a[x+1]) - \frac{1}{\pi} \text{si}(a[x-1])$$

و نوسانهای شکل ۲۲۹ از نوسانهای شکل ۲۲۸ نتیجه می‌شوند. افزایش a می‌تواند

۱. جوسایا ویلارد گنیز (Josiah Willard Gibbs)، ۱۸۳۹-۱۹۰۳، ریاضیدان آمریکایی است که آثارش در توسعه آنالیز برداری و ریاضی فیزیک بسیار با اهمیت بود.

باعث تبدیل مقیاسی بر محور شده و سبب انتقال نوسانات گردد. برای جزئیات بیشتر مرجع [D۱] ضمیمه ۱ را ببینید.



شکل ۲۲۹. انشکال (۹) به ازای $a=8, 16, 32$

هرگاه $f(x)$ تابعی زوج باشد، آنگاه، در (۴)، $B(w)=0$ ،

$$(10) \quad A(w) = 2 \int_0^{\infty} f(v) \cos wv \, dv,$$

و (۵) به صورت ساده‌تر

$$(11) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(w) \cos wx \, dw \quad (f \text{ زوج})$$

تبدیل می‌شود.

هرگاه $f(x)$ فرد باشد، آنگاه $A(w)=0$ ،

$$(12) \quad B(w) = 2 \int_0^{\infty} f(v) \sin wv \, dv,$$

و (۵) چنین می‌شود:

$$(13) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(w) \sin wx \, dw \quad (f \text{ فرد})$$

این ساده نویسیها کاملاً شبیه آن چیزی است که در مورد سری فوریه در بخش ۲.۱۰ بررسی شد.

مثال ۴. انتگرالهای لاپلاس

مطلوب است انتگرال فوریه

$f(x) = e^{-kx}$ ($k > 0$) وقتی که $x > 0$ و $f(-x) = f(x)$ (ر.ک. شکل ۲۲۶ همین بخش، که در آن $k=1$). از آنجا که f زوج است، از (۱۰) داریم

$$A(w) = 2 \int_0^{\infty} e^{-kv} \cos wv \, dv.$$

حال با انتگرال گیری به روش جزء به جزء

$$\int e^{-kv} \cos wv \, dv = \frac{-k}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(-\frac{w}{k} \sin wv + \cos wv \right)$$

وقتی $v=0$ عبارت طرف راست مساوی $-k/(k^2 + w^2)$ است، و هنگامی v به سمت بینهایت میل کند، عبارت فوق به علت وجود عامل نمایی به سمت صفر میل می کند. بنابراین

$$A(w) = \frac{2k}{k^2 + w^2},$$

و با جانشانی این در (۱۱) نمایش

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} \, dw \quad (x > 0, k > 0)$$

را به دست می آوریم. با توجه به این نمایش مشاهده می کنیم که

$$(14) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} \, dw = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0)$$

به همین نحو، بنابه انتگرال فوریه (۱۳) تابع فرد

$$f(x) = e^{-kx} \quad (k > 0) \quad \text{وقتی که} \quad x > 0 \quad \text{و} \quad f(-x) = -f(x)$$

نتیجه زیر عاید می شود:

$$(15) \quad \int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{k^2 + w^2} \, dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0)$$

انتگرالهای (۱۴) و (۱۵) موسوم به انتگرالهای لاپلاس هستند.

این مثال نشان می دهد که از نمایش انتگرال فوریه ای می توان برای محاسبه انتگرالها استفاده کرد.

مسائل بخش ۹.۱۰

با استفاده از نمایش انتگرال فوریهای، نشان دهید که

$$۱. \int_0^{\infty} \frac{\cos xw + w \sin xw}{1 + w^2} dw = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \pi/2 & x = 0 \text{ [استفاده کنید.]} \\ \pi e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

$$۲. \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi w}{w} \sin xw dw = \begin{cases} \pi/2 & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases} \text{ [استفاده کنید.]} \quad (۱۳)$$

$$۳. \int_0^{\infty} \frac{\cos xw}{1 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad (x > 0) \quad \text{[استفاده کنید.]} \quad (۱۱)$$

$$۴. \int_0^{\infty} \frac{\sin w \cos xw}{w} dw = \begin{cases} \pi/2 & 0 \leq x < 1 \\ \pi/4 & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \text{ [استفاده کنید.]} \quad (۱۱)$$

$$۵. \text{ [استفاده کنید.]} \quad (۱۱)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\pi w/2) \cos xw}{1 - w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$۶. \int_0^{\infty} \frac{w^x \sin xw}{w^2 + 1} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x \quad x > 0 \quad \text{[استفاده کنید.]} \quad (۱۳)$$

$$۷. \text{ [استفاده کنید.]} \quad (۱۳)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi w \sin xw}{1 - w^2} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

توابع $f(x)$ زیر را به صورت (۱۱) نمایش دهید.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad ۹. \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad ۸.$$

$$f(x) = e^{-x} + e^{-2x} \quad (x > 0) \quad ۱۱. \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad [(۱۴) \text{ ر.ك.}] \quad ۱۰.$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad ۱۳. \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases} \quad ۱۲.$$

۱۴. نشان دهید که $f(x) = 1$ ($0 < x < \infty$) را نمی توان به صورت انتگرال فوریه نمایش داد.

هرگاه $f(x)$ دارای نمایشی به صورت (۱۱) باشد، نشان دهید که

$$f(ax) = \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty A\left(\frac{w}{a}\right) \cos xw dw \quad (a > 0) \quad ۱۵.$$

$$x^2 f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A^*(w) \cos xw dw, \quad A^* = -\frac{d^2 A}{dw^2} \quad ۱۶.$$

۱۷. با به کار بردن فرمول مسئله ۱۶ در نتیجه مسئله ۸، مسئله ۱۳ را حل کنید.

$$A \text{ و } B^* = -\frac{dA}{dw} \quad \text{آن در } x f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B^*(w) \sin xw dw \quad \text{که} \quad ۱۸.$$

از فرمول (۱۵) به دست می آید.

۱۹. درستی فرمول مسئله ۱۸ را در مورد تابع $f(x) = 1$ وقتی که $0 < x < a$ و $f(x) = 0$ وقتی که $x > a$ تحقیق کنید.

۲۰. (صورت مختلط انتگرال فوریه، تبدیل فوریه) با استعمال (۶) از ضمیمه ۳، نشان دهید که (۵) را می توان چنین نوشت:

$$(۱۶) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos(wx - wv) dv \right] dw.$$

ثابت کنید که انتگرال از $-\infty$ تا ∞ در (۱۶) تابع زوجی از w است و (۱۶) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wx - wv) dv \right] dw.$$

نشان دهید که

$$(17) \quad \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wx - wv) dv \right] dw = 0,$$

به طوری که با جمع کردن (۱۷) و نتیجه قبل از آن می‌بایم

$$(18) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{i w (x - v)} dv \right] dw.$$

این موسوم به شکل مختلط انتگرال فوریه است. نشان دهید که (۱۸) را می‌توان چنین نوشت:

$$(19) \quad C(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i w v} dv \quad \text{که در آن}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(w) e^{i w x} dw$$

$f(x)$ را تبدیل فوریه $C(w)$ و $C(w)$ را تبدیل فوریه معکوس $f(x)$ می‌نامند. (جدولهای بیشتری از تبدیلات فوریه در ضمیمه [B7] یافت می‌شوند؛ ر.ک. ضمیمه ۱).

معادلات با مشتق جزئی

معادلات با مشتق جزئی در ارتباط با مسائل گوناگون هندسی و فیزیکی که شامل توابعی هستند که این توابع به دو یا چند متغیر مستقل بستگی دارند مطرح می‌شوند. این متغیرها می‌توانند زمان و یک یا چند مختصه فضایی باشند. فصل یازده به برخی از مهمترین معادلات با مشتق جزئی که در کاربردهای مهندسی پیش می‌آیند اختصاص داده شده است. این معادلات را از اصول فیزیکی به دست می‌آوریم و سپس روشهای حل مسائل با مقدار اولیه و کرانه‌ای، یعنی روشهای به دست آوردن جواب این معادلات متناظر با مسئله فیزیکی داده شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در بخش ۱۰.۱۱ مفهوم جواب معادله با مشتق جزئی را بیان می‌کنیم. بخشهای ۲۰.۱۱ تا ۴۰.۱۱ به معادله موج یک بعدی، که حرکت یک نخ مرتعش را بیان می‌کند، اختصاص دارد. معادله گرما در بخشهای ۵۰.۱۱، ۶۰.۱۱، معادله موج دوبعدی (غشاهای مرتعش) در بخشهای ۷۰.۱۱ تا ۱۰۰.۱۱ و معادله لاپلاس در بخشهای ۱۱۰.۱۱ و ۱۲۰.۱۱ بررسی می‌شوند.

در بخش ۱۳۰.۱۱ خواهیم دید که معادلات با مشتق جزئی را به کمک تبدیل لاپلاس، که در فصل ۴ معرفی شده است، می‌توان حل کرد.

پیشنیاز این فصل: معادلات دیفرانسیل خطی معمولی (فصل ۲) و سری فوریه (فصل

۱۰).

بخشهایی که در دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: ۶۰.۱۱، ۹۰.۱۱، ۱۰۰.۱۱

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت E.

جواب مسائل: ضمیمه ۲

۱.۱.۱ مفاهیم اساسی

معادله‌ای را که شامل یک یا چند مشتق جزئی یک تابع (مجهول) از دو یا چند متغیر مستقل است **معادله با مشتق جزئی** می‌نامند. مرتبه بالاترین مشتق مرتبه معادله نامیده می‌شود.

درست مانند معادله دیفرانسیل معمولی، یک معادله با مشتق جزئی را **خطی** گوئیم هر گاه نسبت به متغیر وابسته و مشتقات جزئی آن از درجه اول باشد. اگر هر جمله چنین معادله‌ای شامل متغیر وابسته یا یکی از مشتقات آن باشد، معادله را **همگن** می‌نامیم؛ در غیر این صورت معادله **غیر همگن** نامیده می‌شود.

مثال ۱. معادلات با مشتق جزئی خطی مهم مرتبه دوم

$$(۱) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{معادله موج یک بعدی}$$

$$(۲) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{معادله گرمای یک بعدی}$$

$$(۳) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{معادله لاپلاس دو بعدی}$$

$$(۴) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{معادله پواسن دو بعدی}$$

$$(۵) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{معادله لاپلاس سه بعدی}$$

در این معادلات c ثابت، t زمان، x ، y ، z مختصات دکارتی هستند. معادله (۴) (به ازای $f \equiv 0$) غیر همگن است، و حال آنکه سایر معادلات همگن هستند.

جوابی از معادله‌ای با مشتق جزئی در ناحیه‌ای مانند R از فضای متغیرهای مستقل تابعی است که در ناحیه‌ای شامل R همه مشتقات جزئی موجود در معادله را دارد، و در همه جای R در معادله صدق می‌کند. (اغلب اوقات نیاز داریم که تابع مورد نظر بر مرز R پیوسته باشد و در داخل R دارای همان مشتقات جزئی در داخل R بوده و در داخل R در معادله صدق کند.)

به طور کلی، تعداد جوابهای یک معادله با مشتق جزئی بسیار زیاد است. مثلاً،

توابع

$$(۶) \quad u = x^2 - y^2, \quad u = e^x \cos y, \quad u = \ln(x^2 + y^2)$$

که به کلی با هم فرق دارند، همه جوابهای (۳) هستند، درستی این مطلب را دانشجو می‌تواند تحقیق کند. بعداً خواهیم دید که جواب یکنای معادله با مشتق جزئی متناظر با

يك مسئله فیزیکی مفروض با استفاده از اطلاعات اضافی حاصل از مطالب فیزیکی به دست می آید. مثلا، در برخی موارد مقادیر جواب مورد نظر برای مسئله در کرانه ناحیه ای داده می شود («شرایط کرانه ای»); در سایر موارد وقتی که زمان t یکی از متغیرها است، مقادیر جواب در $t = 0$ داده شده اند («شرایط اولیه»).

می دانیم که هر گاه يك معادله دیفرانسیل معمولی خطی و همگن باشد، آنگاه از ترکیب جوابهای معلوم معادله می توان جوابهای بیشتری برای آن به دست آورد. در مورد معادله با مشتق جزئی خطی همگن نیز چنین است. در واقع قضیه زیر برقرار است.

قضیه بنیادی ۱

(معادلات با مشتق جزئی همگن خطی)

هرگاه u_1 و u_2 جوابهایی از يك معادله با مشتق جزئی همگن خطی در ناحیه معینی باشند، آنگاه

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی هستند، نیز جوابی از معادله در آن ناحیه است.

اثبات این قضیه مهم کاملا شبیه قضیه ۱، بخش ۱.۲، است و به خواننده واگذار می شود.

مسائل بخش ۱.۱.۱

تحقیق کنید توابع زیر به ازای مقدار مناسبی از c جواب معادله موج (۱) هستند. شکلهای این توابع را به صورت رویه در فضا رسم کنید.

$$u = x^2 + t^2 \quad ۱. \quad u = x^2 + 9t^2 \quad ۲.$$

$$u = \cos t \sin x \quad ۳. \quad u = \sin t \sin x \quad ۴.$$

$$u = \cos ct \sin x \quad ۵. \quad u = \sin \omega ct \sin \omega x \quad ۶.$$

تحقیق کنید که توابع زیر (به ازای w و v دوباره مشتق پذیر دلخواه) جوابهای (۱) هستند، در مسئله ۷، $c = ۱$.

$$u(x, t) = v(x + t) + w(x - t) \quad ۷.$$

$$u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct) \quad ۸.$$

تحقیق کنید که توابع زیر جوابهای معادله گرمای (۲) هستند.

$$u = e^{-t} \sin x \quad ۱۰ \qquad u = e^{-t} \cos x \quad ۹$$

$$u = e^{-\omega^2 c^2 t} \sin \omega x \quad ۱۱$$

تحقیق کنید که توابع زیر جوابهای معادلهٔ لاپلاس (۳) هستند. شکل این جوابها را به صورت رویه در فضا رسم کنید.

$$u = 3xy - y^3 \quad ۱۴ \qquad u = x^2 - 3xy^2 \quad ۱۳ \qquad u = x^2 - y^2 \quad ۱۲$$

$$u = \ln(x^2 + y^2) \quad ۱۷ \qquad u = e^x \sin y \quad ۱۶ \qquad u = e^x \cos y \quad ۱۵$$

$$u = \sin x \sinh y \quad ۱۹ \qquad u = \arctan(y/x) \quad ۱۸$$

$$u = \sin x \cosh y \quad ۲۰$$

۲۱. تحقیق کنید که $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$ در معادلهٔ لاپلاس (۳) صدق می‌کند و a و b را طوری تعیین کنید که u در شرایط کرانه‌ای $u = 0$ بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و $u = 3$ بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ صدق کند. رویهٔ نمایش داده شده با این تابع را رسم کنید.

۲۲. نشان دهید که $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ جوابی از (۵) است.

رابطه با معادلات دیفرانسیل معمولی

هر گاه يك معادله با مشتق جزئی تنها شامل مشتق نسبت به یکی از متغیرهای مستقل باشد، می‌توان آن را مانند معادلهٔ دیفرانسیل معمولی حل کرد، و سایر متغیرهای مستقل را به منزلهٔ پارامتر در نظر گرفت. معادلات زیر را حل کنید اگر $u = u(x, y)$.

$$u_{xx} + u = 0 \quad ۲۶ \qquad u_{xx} = 0 \quad ۲۵ \qquad u_y = 0 \quad ۲۴ \qquad u_x = 0 \quad ۲۳$$

دستگاههای معادلات با مشتق جزئی زیر را حل کنید

$$u_y = 0, u_x = 0 \quad ۲۸ \qquad u_{yy} = 0 \text{ (ب)}, u_{xx} = 0 \text{ (الف)} \quad ۲۷$$

$$u_{xy} = 0, u_{xx} = 0 \quad ۳۰ \qquad u_{yy} = 0, u_{xy} = 0, u_{xx} = 0 \quad ۲۹$$

با قرار دادن $u_x = p$ معادلات زیر را حل کنید.

$$u_{xy} + u_x = 0 \quad ۳۲ \qquad u_{xy} = u_x \quad ۳۱$$

$$u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0 \quad ۳۳$$

۳۴. نشان دهید که هر گاه منحنیهای تراز ثابت $z = z(x, y)$ خطوط راست

موازی با محور x ها باشد، آنگاه z جوابی از معادله دیفرانسیل $z_x = 0$ است. مثال بیاورید.

۳۵. نشان دهید که جوابهای $z = z(x, y)$ معادله $yz_x - xz_y = 0$ رویه‌های دوار را نمایش می‌دهند. مثالهایی ارائه دهید. راهنمایی: قرار دهید $x = \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ و نشان دهید که معادله چنین می‌شود: $z_\theta = 0$.

۲.۱۱ مدل سازی: نخ مرتعش. معادله موج يك بعدی

به عنوان اولین معادله جزئی مهم، معادله ارتعاشات عرضی کوچک نخي کشان را که تا طول l کشیده شده و دو انتهای آن ثابت شده است به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم نخ از وضع تعادل خارج شده و سپس در لحظه معینی مثلاً $t = 0$ رها شده و به ارتعاش درآید. مسئله مشخص کردن ارتعاشات نخ، یعنی، تعیین انحراف $u(x, t)$ آن در نقطه دلخواه x و در زمان دلخواه $t > 0$ است؛ شکل ۲۳۰ را ببینید.

وقتی معادله دیفرانسیل متناظر با يك مسئله فیزیکی مفروض را به دست آوریم، معمولاً باید فرضهای ساده کننده‌ای وارد مسئله کنیم تا معادله حاصل پیچیده نباشد. با این موضوع مهم در معادلات دیفرانسیل معمولی آشنا شدیم، و در مورد معادلات با مشتق جزئی نیز وضع به همین منوال است.

فعلاً مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم.

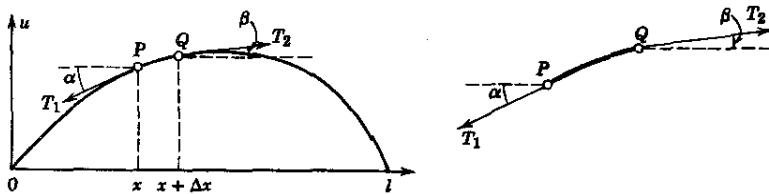
۱. جرم نخ برای واحد طول ثابت است («نخ همگن»). نخ کاملاً کشان است و هیچ‌گونه مقاومتی در مقابل خمش نشان نمی‌دهد.

۲. نیروی کششی که بر اثر کشیدن نخ قبل از ثابت کردن دوسر آن ایجاد می‌شود بسیار بزرگ بوده و نیروی جاذبه وارد بر نخ در مقابل آن قابل چشم‌پوشی است.

۳. حرکت نخ يك ارتعاش کوچک عرضی در صفحه‌ای قائم است، یعنی هر ذره نخ صرفاً به طور قائم حرکت می‌کند، و قدر مطلق انحراف و شیب نخ در هر نقطه کوچک است.

با توجه به این مفروضات انتظار می‌رود که جواب $u(x, t)$ معادله دیفرانسیل به دست آمده ارتعاشات کوچک نخ «غیر ایده‌آل» فیزیکی با جرم همگن کوچک و تحت کشش بزرگ را به طور مستدلی توصیف کند.

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل، نیروهای را که بر بخش کوچکی از نخ وارد می‌شوند مورد بررسی قرار می‌دهیم (شکل ۲۳۰). چون نخ مقاومتی در مقابل خمش از خود نشان نمی‌دهد، در هر نقطه کشش بر منحنی نخ مماس خواهد بود. فرض می‌کنیم T_1 و T_2 کشش نخ در نقاط انتهایی P و Q بخش مورد مطالعه نخ باشند. چون در جهت افقی حرکتی صورت نمی‌گیرد، مؤلفه‌های افقی کشش باید صفر باشند. با استفاده از نماد به کار رفته در شکل ۲۳۰ به دست می‌آوریم



شکل ۲۳۰ نخ مرتعش

$$(۱) \quad T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = \text{ثابت}$$

درجهت قائم دو نیروی $T_1 \sin \alpha$ و $T_2 \sin \beta$ را داریم که به ترتیب مؤلفه‌های قائم T_1 و T_2 هستند؛ علامت منها در اینجا بدان علت است که مؤلفه مربوط در P رو به پایین فرض شده است. بنابر قانون دوم نیوتن برآیند این دو نیرو برابر جرم $\rho \Delta x$ بخش مورد مطالعه نخ در شتاب $\partial^2 u / \partial t^2$ ، که مقدار آن در نقطه‌ای بین x ، $x + \Delta x$ محاسبه می‌شود، است؛ در اینجا ρ جرم واحد طول نخ قبل از انحراف است، و Δx طول تکه نخ قبل از انحراف آن است. از این رو

$$(۱) \quad T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با استفاده از (۱) به دست می‌آوریم

$$(۲) \quad \frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$\tan \beta$ و $\tan \alpha$ ضریب زاویه‌های منحنی نخ در x و $x + \Delta x$ هستند، یعنی

$$\tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \quad \text{و} \quad \tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x$$

در اینجا به علت آنکه u به t نیز بستگی دارد مجبوریم مشتق‌ها را به صورت مشتق جزئی بنویسیم. از تقسیم (۲) به Δx داریم

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

چنانچه Δx به سمت صفر میل کند، معادله با مشتق جزئی همگن

$$(۳) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

حاصل می‌شود. این معادله، که اصطلاحاً معادله موج یک بعدی نام دارد معادله حاکم

بر مسئله ما است. نماد c^2 (به جای c) برای ثابت فیزیکی T/ρ انتخاب شده است تا نشان دهد که این مقدار ثابت مثبت است. جوابهای این معادله را در بخش زیر به دست خواهیم آورد.

۳.۱۱ جداسازی متغیرها (روش ضربی)

دیدیم که نوسانهای یک نخ کشسان در معادله موج یک بعدی

$$(۱) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

که $u(x, t)$ انحراف نخ است، صدق می کند. نظر به اینکه نخ در نقاط انتهایی $x=0$ و $x=l$ ثابت شده است، به ازای هر t دو شرط کرانه‌ای

$$(۲) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

را داریم. شکل حرکت نخ به انحراف اولیه (انحراف در لحظه $t=0$) و سرعت اولیه (سرعت در لحظه $t=0$) بستگی دارد. اگر انحراف اولیه را با $f(x)$ و سرعت اولیه را با $g(x)$ نشان دهیم، دو شرط اولیه زیر را به دست می آوریم:

$$(۳) \quad u(x, 0) = f(x)$$

$$(۴) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$$

حال مسئله ما یافتن جوابی از معادله (۱) است که در شرایط (۲) الی (۴) صدق کند. برای یافتن چنین جوابی مرحله به مرحله به شرح زیر عمل می کنیم.

مرحله اول. با بکاربردن روش ضربی، یا روش جداکردن متغیرها، دو معادله دیفرانسیل معمولی به دست می آوریم.

مرحله دوم. جوابهایی از این معادلات را که در شرایط کرانه‌ای صدق می کنند معین می کنیم.

مرحله سوم. این جوابها را طوری با هم ترکیب می کنیم که عبارت حاصل جواب معادله موج (۱) بوده، در شرایط اولیه مفروض نیز صدق کند. تفصیل این مراحل چنین است:

مرحله اول. روش ضربی جوابهایی از (۱) به صورت

$$(۵) \quad u(x, t) = F(x) G(t)$$

حاصل ضرب دو تابع که هریک تنها به یکی از متغیرهای x و t بستگی دارد را به دست

می‌دهد. چنانچه بعداً مشاهده خواهیم کرد این روش دارای کاربردهای گوناگونی در ریاضیات مهندسی است. با مشتق‌گیری از (۵) به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG$$

که در آن نقطه‌ها مشتق نسبت به t و بریمها مشتق نسبت به x را نشان می‌دهند. با جانشانی اینها در (۱) داریم

$$FG = c^2 F''G$$

این رابطه را به $c^2 FG$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{G}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$$

عبارت طرف چپ شامل توابعی است که تنها به t بستگی دارند، حال آنکه طرف راست شامل توابعی است که تنها به x وابسته‌اند. در نتیجه هر دو عبارت باید برابر مقدار ثابتی، مثلاً k ، باشند، زیرا هرگاه عبارت طرف چپ ثابت نباشد، آنگاه با تغییر t احتمالاً مقدار این عبارت تغییر خواهد کرد در حالی که عبارت طرف راست مسلماً عوض نخواهد شد. همین طور، هرگاه عبارت طرف راست ثابت نباشد، با تغییر x احتمالاً مقدار این عبارت عوض خواهد شد بدون آنکه عبارت طرف چپ تغییر کند. بنا براین

$$\frac{G}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

از این رابطه بلافاصله دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی معمولی

$$(۶) \quad F'' - kF = 0$$

و

$$(۷) \quad G - c^2 kG = 0$$

حاصل می‌شود. تا اینجا در این معادلات k عددی دلخواه است.

مرحلهٔ اول. حال جوابهای F و G معادلات (۶) و (۷) را طوری معین می‌کنیم که

$u = FG$ در (۲) صدق کند، یعنی

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \quad \text{و} \quad u(l, t) = F(l)G(t) = 0$$

واضح است هرگاه $G \equiv 0$ ، آنگاه $u \equiv 0$ ، که جواب جالبی نیست. بنابراین $G \not\equiv 0$ و

$$(۸) \quad F(l) = 0 \quad (\text{ب}) \quad F(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

به ازای $k = 0$ جواب عمومی (۶) عبارت است از $F = ax + b$ ، و از (۸) به دست

می‌آوریم $a=b=0$. از این رو $F \equiv 0$ ، که مورد نظر ما نیست زیرا در آن صورت $u \equiv 0$. به‌ازای مقدار مثبت $k = \mu^2$ جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

و از (۸)، مانند قبل، به دست می‌آوریم $F \equiv 0$. بنابراین تنها امکانی که باقی می‌ماند انتخاب k منفی است، مثلاً، $k = -p^2$. آنگاه (۶) به صورت

$$F'' + p^2 F = 0$$

در می‌آید که دارای جواب عمومی

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

است. از این جواب و (۸) داریم

$$F(0) = A = 0 \quad \text{و آنگاه} \quad F(l) = B \sin pl = 0$$

باید فرض کنیم $B \neq 0$ زیرا در غیر این صورت $F \equiv 0$. بنابراین $\sin pl = 0$ ، یعنی

$$pl = n\pi \quad \text{یا} \quad p = \frac{n\pi}{l} \quad (n \text{ عددی صحیح است}) \quad (9)$$

با قرار دادن $B = 1$ ، تعداد نامتناهی جواب $F_n(x)$ ،

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

که در (۸) صدق می‌کنند به دست می‌آوریم. [به‌ازای اعداد صحیح منفی n ضرورتاً، همان جواب را با اختلاف يك علامت منها به دست می‌آوریم، چرا که $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$]. حالا k به مقادیر $k = -p^2 = -(n\pi/l)^2$ که از (۹) نتیجه می‌شوند، محدود شده است. به‌ازای این k ها معادله (۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \quad \text{که در آن} \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جواب عمومی عبارت است از

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t = B_n^* \sin \lambda_n t.$$

در نتیجه توابع $u_n(x, t) = F_n(x) G_n(t)$ که به صورت

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (11)$$

نوشته می‌شوند، جواب‌های (۱) هستند، و در شرایط کرانه‌ای (۲) هم صدق می‌کنند. این توابع را توابع ویژه، یا توابع مشخصه می‌نامند، و مقادیر $\lambda_n = cn\pi/l$ مقادیر ویژه

یا مقادیر مشخصه n مرتعش نامیده می‌شوند. مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ را طیف می‌نامند.

چنانچه مشاهده می‌کنیم هر u_n حرکت همسازی با فرکانس $\lambda_n/2\pi = cn/2l$ سیکل برواحد زمان را نمایش می‌دهد. این حرکت مد نرمال n ام نخ نامیده می‌شود. مد نرمال اول ($n=1$) به مد بنیادی معروف است، و سایر مدهای نرمال مافوق‌تن نامیده می‌شوند؛ از نقطه نظر موسیقی حاصل آنها گام، گام به علاوه یک پنجم و مانند آن است. چون در (۱۱) داریم

$$\sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \quad \text{در} \quad x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}l$$

مد نرمال n ام دارای $n-1$ گروه است، اینها نقاطی از نخ هستند که حرکت نمی‌کنند (شکل ۲۳۱).

شکل ۲۳۲ مد نرمال دوم را به ازای مقادیر مختلف t نشان می‌دهد. نخ در هر لحظه به شکل یک موج سینوسی است. وقتی قسمت چپ نخ به طرف پایین حرکت می‌کند قسمت راست آن به طرف بالا می‌رود و بالعکس. همچنین است برای سایر مدها.

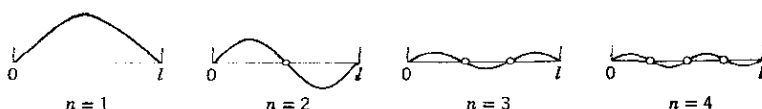
مرحله سوم. واضح است که در حالت کلی، یک جواب بخصوص $u_n(x, t)$ در شرایط اولیه (۳) و (۴) صدق نخواهد کرد. اما، از آنجا که معادله (۱) خطی و همگن است، از قضیه بنیادی ۱ بخش ۱۰.۱۱ نتیجه می‌شود که مجموع هر تعداد متناهی از جوابهای B_n ، جوابی برای معادله (۱) است. برای به دست آوردن جوابی که در (۳) و (۴) صدق کند به بررسی سری نامتناهی زیر می‌پردازیم:

$$(12) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

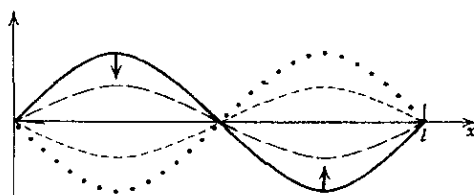
از اینجا و از (۳) نتیجه می‌شود که

$$(13) \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

بنابراین، برای آنکه (۱۲) در (۳) صدق کند، ضرایب B_n باید طوری انتخاب شوند که



شکل ۲۳۱. منهای نرمال نخ مرتعش



شکل ۲۳۲. مد نرمال دوم به ازای مقادیر مختلف t

$u(x, 0)$ يك بسط نیم دامنه‌ای $f(x)$ ، یعنی سری سینوسی فوریۀ $f(x)$ باشد؛ یعنی
[ر.ک (۴) بخش ۵.۱۰]

$$(۱۴) \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n=1, 2, \dots$$

به‌همین نحو، با مشتق‌گیری از (۱۴) نسبت به t و با استفاده از (۴) می‌یابیم

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \lambda_n \sin \lambda_n t + B_n^* \lambda_n \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} \right]_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x). \end{aligned}$$

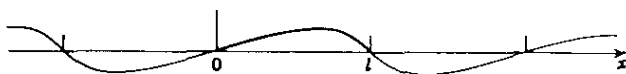
پس، برای اینکه (۱۴) در (۴) صدق کند، ضرایب B_n^* باید طوری انتخاب شوند که به‌ازای $t=0$ ، $\partial u / \partial t$ برابر سری سینوسی فوریۀ $g(x)$ شود. بنابراین، با توجه به
(۴) بخش ۵.۱۰

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

یا، چون $\lambda_n = cn\pi/l$ ،

$$(۱۵) \quad B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n=1, 2, \dots$$

نتیجه می‌گیریم که $u(x, t)$ ارائه شده توسط (۱۲)، با ضرایب (۱۴) و (۱۵) جوابی از (۱) است که در شرایط (۲) الی (۴) صدق می‌کند، مشروط بر اینکه سری (۱۲) همگرا باشد، و همچنین سری‌هایی که با دوبار مشتق‌گیری (جمله به جمله) از (۱۲) حاصل می‌شوند همگرا بوده، مجموعشان به ترتیب برابر $\partial^2 u / \partial x^2$ و $\partial^2 u / \partial t^2$ که پیوسته هستند، باشد.



شکل ۲۳۳. بسط دوره‌ای فرد $f(x)$

بنابراین جواب (۱۲) در وهلهٔ اول صرفاً يك عبارت صوری است، و ما هم‌اکنون می‌خواهیم به آن معنی بدهیم. برای سادگی فقط به بررسی حالتی می‌پردازیم که در آن سرعت اولیهٔ $g(x)$ متحد با صفر باشد. آنگاه B_n^* ها صفرند، و (۱۲) به صورت

$$(۱۶) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

در می‌آید. امسکان دارد این سری را جمع کنیم، یعنی، نتیجه را به يك صورت بسته یا متناهی بنویسیم. داریم (ر.ك. (۱۱) ضمیمهٔ ۳)

$$\cos \frac{cn\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x = \frac{1}{2} \left[\sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x - ct) \right\} + \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x + ct) \right\} \right].$$

در نتیجه (۱۶) را می‌توان به صورت

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x - ct) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x + ct) \right\}$$

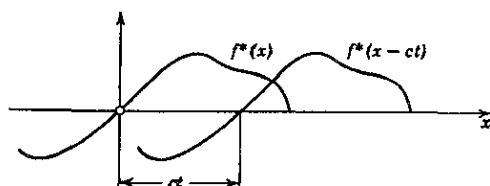
نوشت. این سریها به ترتیب از جانشانی $x - ct$ و $x + ct$ به جای متغیر x در سری سینوسی فوریه (۱۳) به ازای $f(x)$ حاصل شده‌اند. بنابراین،

$$(۱۷) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x - ct) + f^*(x + ct)]$$

که در آن f^* بسط دوره‌ای فرد f با دورهٔ $2l$ است (شکل ۲۳۳). چون انحراف اولیهٔ $f(x)$ روی فاصلهٔ $0 \leq x \leq l$ پیوسته و در نقاط انتهایی صفر است، از (۱۷) نتیجه می‌شود که $u(x, t)$ به‌ازای هر مقداری از متغیرها تابعی پیوسته از هر دو متغیر x و t است. با مشتق‌گیری از (۱۷) مشاهده می‌کنیم که $u(x, t)$ جوابی از (۱) است، مشروط بر اینکه $f(x)$ روی فاصلهٔ $0 < x < l$ دوبار مشتق‌پذیر باشد، در $x = 0$ و $x = l$ مشتق دوم يك طرفهٔ صفر داشته باشد. تحت این شرایط $u(x, t)$ به عنوان جوابی از معادلهٔ (۱) که در شرایط (۲) الی (۴) صدق می‌کند تلقی می‌شود.

هر گاه $f'(x)$ و $f''(x)$ صرفاً تکه‌ای پیوسته باشند (ر.ك. بخش ۱۰.۵)، یا هر گاه مشتقات يك طرفهٔ آنها صفر نباشند، آنگاه به‌ازای هر t مقادیر متعدد و متناهی از x

موجود است به طوری که مشتقات دوم u در (۱) در آنها موجود نیست. جز در این نقاط



شکل ۲۳۴. انتقال گیری از (۱۷)

معادله موج هنوز برقرار است، و بنابراین $u(x, t)$ را می توان از يك دیدگاه عامتر جوابی از مسئله مورد نظر تصور نمود. مثلاً، حالت انحراف اولیه مثلثی (مثال ۱، در ذیل) به جوابی از این نوع منجر می شود.

تعبیر فیزیکی جالبی از (۱۷) را مذکور می شویم. نمودار $f^*(x-ct)$ از انتقال نمودار $f^*(x)$ به اندازه ct واحد به طرف راست حاصل می شود (شکل ۲۳۴). یعنی $f^*(x-ct)$ ($c > 0$) نمایش موجی است که با افزایش t به طرف راست حرکت می کند به همین نحو، $f^*(x+ct)$ نمایش موجی است که به طرف چپ حرکت می کند، و $u(x, t)$ ترکیب این دو موج است

مثال ۱

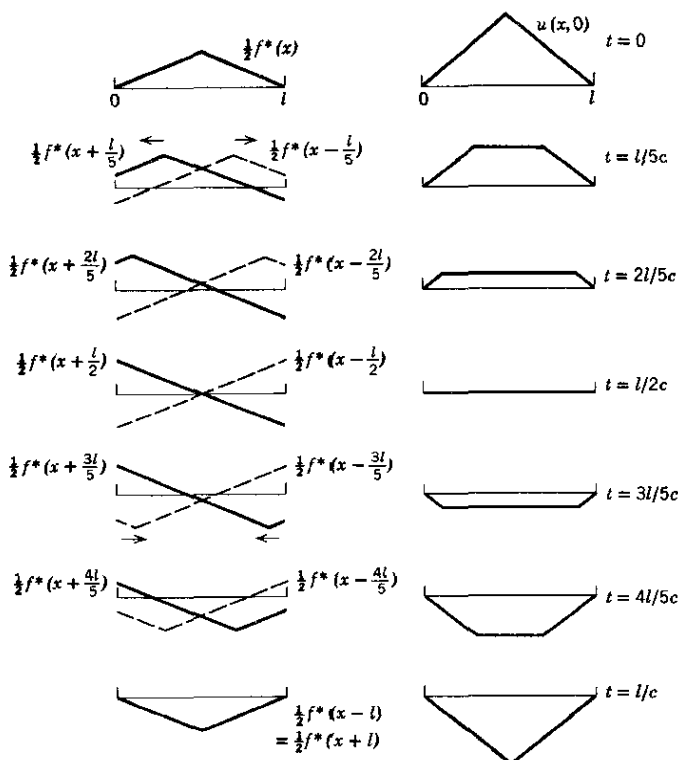
مطلوب است جواب متناظر با انحراف اولیه مثلثی معادله موج (۱)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

و سرعت اولیه صفر. نظر به اینکه $g(x) \equiv 0$ ، در (۱۲) داریم $B_n^* = 0$ ، و بنا به مثال ۱ بخش ۵.۱۰ مشاهده می کنیم که B_n در (۵)، بخش ۵.۱۰ داده شده است. بنابراین (۱۲) به صورت

$$u(x, t) = \frac{\lambda k}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{l} x \cos \frac{\pi c}{l} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{l} x \cos \frac{3\pi c}{l} t + \dots \right]$$

در می آید. برای رسم نمودار جواب می توان از $u(x, 0) = f(x)$ و تعبیر دو تابع فوق در نمایش (۱۷) استفاده کرد. این به نمودار ترسیم شده در شکل ۲۳۵ منجر می شود.



شکل ۲۳۵. جواب $u(x, t)$ در مثال ۱ به ازای مقادیر مختلف t (قسمت راست تصویر) همان طور که از ترکیب موجی که به سمت راست (خط چین) و موجی که به چپ (قسمت چپ تصویر) حرکت می کند حاصل می شود.

مسائل بخش ۳.۱۱

۱. فرکانس مد بنیادی نخ مرتعش به چه نحوی به طول نخ، کشش، و جرم بر واحد طول بستگی دارد؟

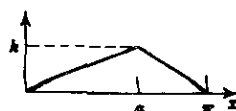
مطلوب است انحراف $u(x, t)$ ی نخ مرتعش (به طول $l = \pi$ ، با انتهای ثابت، و $c^2 = T/\rho = 1$) متناظر با سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه

۴. $k(\sin x + \sin 3x)$

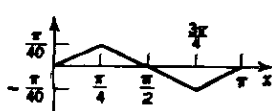
۳. $k \sin 2x$

۲. $0.5 \sin x$

۵.



۶.



۷.



۸. $0.1x(\pi - x)$

۹. $0.1x(\pi^2 - x^2)$

۱۰. $k \left[\left(\frac{1}{\gamma} \pi \right)^2 - \left(x - \frac{1}{\gamma} \pi \right)^2 \right]$

۱۱. نسبت دامنه‌های نوسان مد بنیادی و مسافوق‌تن دوم در مسئله ۸ چیست؟ نسبت $a_1^2 / (a_1^2 + a_2^2 + \dots)$ ؟ راهنمایی. از (۷) بخش ۸.۱۰ یا علامت تساوی استفاده کنید.

با جدا کردن متغیرها، جوابهای $u(x, y)$ معادلات زیر را بیابید.

۱۲. $u_x = yu_y$

۱۳. $u_x = u_y$

۱۴. $u_x + u_y = 0$

۱۵. $ayu_x = bxu_y$

۱۶. $xu_x = yu_y$

۱۷. $u_{xy} = u$

۱۸. $u_x + u_y = 2(x + y)u$

۱۹. $x^2 u_{xy} + 2y^2 u = 0$

۲۰. $u_{xx} + u_{yy} = 0$

۲۱. نشان دهید که جانشانی

$$(18) \quad u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

در معادله موج (۱) معادله

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G = 0, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

را نتیجه می‌دهد.

۲۲. (ارتعاشات واداشته نخی کشان) نشان دهید که ارتعاشات واداشته نخی کشان تحت تأثیر نیروی خارجی $P(x, t)$ برواحد طول که به‌طور قائم برنخ وارد می‌شود در معادله

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho}$$

صدق می‌کند.

معادله مسئله ۲۲ را برای نیروی سینوسی $P = A \rho \sin \omega t$ به شرح زیر بررسی و حل کنید.
۲۳. نشان دهید

$$\frac{P}{\rho} = A \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

که در آن $k_n(t) = (2A/n\pi)(1 - \cos n\pi) \sin \omega t$ ؛ و در نتیجه (n زوج)
 $k_n = 0$ ، و (n فرد) $k_n = (2A/n\pi) \sin \omega t$.

۲۴. نشان دهید که با جانشانی عبارات نظیر u از مسئله ۲۱ و P/ρ از مسئله ۲۳ در معادله مورد نظر، به دست می آوریم

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin \omega t, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}.$$

نشان دهید که هرگاه $\lambda_n^2 \neq \omega^2$ ، جواب عبارت است از

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t = \frac{2A(1 - \cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

۲۵. B_n^* و B_n در مسئله ۲۴ را طوری تعیین کنید که u در شرایط اولیه

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

صالح کند.

۳.۱۱ جواب دالامبر معادله موج

جالب است توجه کنیم که جواب (۱۷)، بخش ۳.۱۱، معادله موج

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

را می توان با تبدیل (۱) به روشی مناسب بلافاصله به دست آورد، یعنی با معرفی متغیرهای مستقل جدید^۱

$$(2) \quad v = x + ct, \quad z = x - ct$$

u تابعی از z و v خواهد شد، و با استفاده از قاعده زنجیری بخش ۷.۸ مشتقهای موجود

۱. متذکر می شویم که نظریه کلی معادلات با مشتقات جزئی روشی اصولی برای یافتن این تبدیل که معادله را ساده تر می کند ارائه می دهد. ر.ک. مرجع [E۱۴] در ضمیمه ۱.

در (۱) را می‌توان برحسب مشتقهای نسبت به v و z بیان نمود. بسا نشان دادن مشتقهای جزئی بسا شاخص زیر، از (۲) نتیجه می‌گیریم که $v_x = 1$ و $z_x = 1$. برای سادگی $u(x, t)$ ، به‌عنوان تابعی از v و z را بسا همان حرف u نشان می‌دهیم. دراین صورت

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z.$$

بسا به‌کار بردن قاعدهٔ زنجیری برای طرف راست و بسا استفاده از $v_x = 1$ و $z_x = 1$ می‌یابیم

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v u_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

مشتق دیگر موجود در (۱) نیز به‌همین طریق تبدیل می‌شود، و نتیجه عبارت است از

$$u_{tt} = c^2 (u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz}).$$

با جانشانی این دو نتیجه در (۱) به‌دست می‌آوریم

$$(3) \quad u_{zz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial u \partial z} = 0$$

واضح است که، روش اخیر دارای این حسن است که معادلهٔ حاصل، یعنی معادلهٔ (۳) را با دو بار انتگرال‌گیری متوالی به‌سادگی می‌توان حل کرد. درواقع با انتگرال‌گیری نسبت به z ، می‌یابیم

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

که در آن $h(v)$ تابع دلخواهی از v است. با انتگرال‌گیری از این عبارت نسبت به v داریم

$$u = \int h(v) dv + \psi(z)$$

که $\psi(z)$ تابع دلخواهی از z است. چون انتگرال تسایعی از v ، مثلا $\phi(v)$ است، جواب u به‌صورت $u = \phi(v) + \psi(z)$ خواهد بود. بنابر (۲) می‌توان نوشت

$$(4) \quad u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

این جواب به جواب دالامبر۱ معادلهٔ موج (۱) معروف است.

توابع ϕ و ψ را می‌توان با توجه به شرایط اولیه معین کرد. این موضوع را در حالتی که سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه مقدار مفروض $u(x, 0) = f(x)$ باشد تشریح می‌کنیم.

۱. ژان لورن دالامبر (Jean le Rond d'Alembert)، ۱۷۱۷ - ۱۷۸۳، ریاضیدان فرانسوی، که به‌خاطر آثار مهمش در مکانیک شهرت دارد.

بامشتق گیری از (۴) داریم

$$(۵) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c\phi'(x+ct) - c\psi'(x-ct)$$

که در آن پریمها به ترتیب نشان دهنده مشتق نسبت به کل عبارت $x+ct$ و $x-ct$ است. از (۴)، (۵)، و شرایط اولیه داریم

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = 0$$

بنا به معادله آخر، $\psi' = \phi'$. در نتیجه $\psi = \phi + k$ ، و بنا به این تساوی و معادله اول $k = f - \phi$ یا $\phi = (f - k)/2$. با این مقادیر ϕ و ψ جواب (۴) چنین می شود:

$$(۶) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)],$$

که با (۱۷) بخش ۳.۱۱ مطابقت دارد. دانشجو می تواند نشان دهد که با توجه به شرایط کرانه ای (۲) آن بخش تابع f ؛ باید تابعی فرد با دوره $2l$ باشد. این نشان می دهد که دو شرط اولیه و شرایط کرانه ای جواب را به طور یکتا مشخص می کنند.

مسائل بخش ۴.۱۱

۱. x و t را برحسب v و z بیان کنید، $د.ک$ (۲)، و از نتیجه حاصل برای تبدیل (۳) به (۱) استفاده کنید.

با استفاده از (۶) نمودار (از نوع شکل ۲۳۵ بخش ۳.۱۱) انحراف $u(x, t)$ نخ مرتعشی (به طول $l=1$ ، با نقاط انتهایی ثابت) با سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه $f(x)$ ، که در زیر داده می شود، را رسم کنید، k کوچک است، مثلاً $k=0.01$.

$$f(x) = kx(1-x) \quad ۳. \quad f(x) = k \sin^2 \pi x \quad ۲.$$

$$f(x) = k(x^2 - x^4) \quad ۵. \quad f(x) = k(x - x^3) \quad ۴.$$

$$f(x) = k \sin^2 \pi x \quad ۷. \quad f(x) = k(x^2 - x^5) \quad ۶.$$

با استفاده از تبدیلات داده شده، معادلات زیر را حل کنید.

$$xu_{xy} = yu_{yy} + u_y \quad (v=x, z=x+y) \quad ۸.$$

$$u_{xy} - u_{yy} = 0 \quad (v=x, z=x+y) \quad ۹.$$

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x - y) \quad ۱۰$$

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x, z = x + y) \quad ۱۱$$

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0 \quad (v = x + y, z = 2x - y) \quad ۱۲$$

۱۳. (انواع معادلات با مشتق جزئی خطی) معادله ای به صورت

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

را بیضی گون نامند هر گاه $AC - B^2 > 0$ ، سهمی گون نامند هر گاه $AC - B^2 = 0$ و هذلولی گون نامند اگر $AC - B^2 < 0$. (در اینجا ممکن است A, B, C توابعی از x و y باشند، و ممکن است معادله (۷) در قسمتهای مختلف صفحه xy از انواع مختلف باشد.) نشان دهید که

$$\text{معادله لاپلاس } u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ بیضی گون است،}$$

$$\text{معادله گرما } u_t = c^2 u_{xx} \text{ سهمی گون است،}$$

$$\text{معادله موج } u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ هذلولی گون است،}$$

معادله تریکومی $y u_{xx} + u_{yy} = 0$ از نوع آمیخته است (در نیم صفحه فوقانی بیضی گون، روی محور x ها سهمی گون، و در نیم صفحه تحتانی هذلولی گون است.)

۱۴. هر گاه (۷) هذلولی گون باشد، می توان آن را با قرارداد $v = \Phi(x, y)$ ، $z = \Psi(x, y)$ که در آن $\Phi = \text{ثابت}$ و $\Psi = \text{ثابت}$ جوابهای $y = y(x)$ معادله $0 = Ay'^2 - 2By' + C$ هستند (ر.ک. مرجع [۱۴ E])، به صورت نرمال $u_{zz} = F^*(v, z, u, u_v, u_z)$ تبدیل کرد. نشان دهید که در مورد معادله موج (۱)

$$\Phi = x + ct, \quad \Psi = x - ct.$$

۱۵. هر گاه (۷) سهمی گون باشد، جایگزین کردن $v = x$ ، $z = \Psi(x, y)$ با Ψ تعریف شده در مسئله ۱۴، آن را به صورت نرمال $u_{zz} = F^*(v, z, u, u_v, u_z)$ درمی آورد. درستی مطلب فوق را برای معادله مسئله ۱۰ تحقیق کنید.

۱۶. (ارتعاشات میله) می توان نشان داد که ارتعاشات قائم آزاد کوچك يك میله یکنواخت در معادله مرتبه چهار

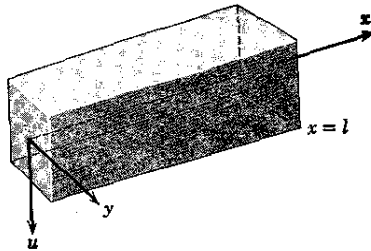
$$(۸) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (\text{مرجع [۱۵ E]})$$

صدق می کند، که در آن $c^2 = EI/\rho A$ E = مدول کشسانی یا ننگ، I = گشتاور لختی مقطع نسبت به محور y ها، با توجه به شکل، ρ = چگالی، A = مساحت مقطع. با قرارداد $u = F(x)G(t)$ در (۸) و جداسازی متغیرها، نشان دهید که

$$F^{(4)}/F = -\ddot{G}/c^2 G = \beta^4 = \text{ثابت}$$

$$F(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x.$$

$$G(t) = a \cos c\beta^2 t + b \sin c\beta^2 t.$$



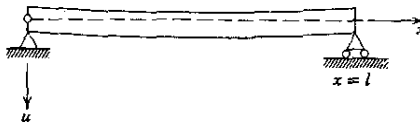
مسئله ۱۶. میله تغییر شکل نیافته

۱۷. جوابهای $u_n = F_n(x) G_n(t)$ معادله (۸) متناظر با سرعت اولیه صفر را طوری بیابید که در شرایط کرانه‌ای زیر صدق کند:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (\text{دو انتهای میله در هر زمان } t \text{ بدون حرکت هستند})$$

$$u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = 0$$

(گشتاورها صفرند، در نتیجه انحنا در دو انتهای میله صفر است)



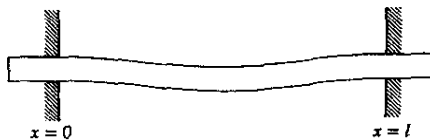
مسئله ۱۷

۱۸. جوابی از (۸) بیابید که در شرایط مسئله ۱۷ و شرایط اولیه

$$u(x, 0) = f(x) = x(l-x)$$

صدق کند.

۱۹. هرگاه دو انتهای میله مقید شده باشند، شرایط مرزی چیست؟



مسئله ۱۹

۳۰. نشان دهید که $F(x)$ در مسئله ۱۶ در صورتی در شرایط مسئله ۱۹ صدق می کند که ریشه معادله

$$(۹) \quad \cosh \beta l \cos \beta l = 1$$

باشد. جوابهای تقریبی (۹) را بیابید.

۵.۱۱ جریان گرمای يك بعدی

جریان گرما در جسمی که از ماده همگن تشکیل شده است از معادله گرمای (ر.ک. بخش ۹.۹)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \quad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

پیروی می کند. در این معادله $u(x, y, z, t)$ دمای درون جسم، K رسانایی گرمایی، σ گرمای ویژه، و ρ چگالی ماده جسم است. $\nabla^2 u$ لاپلاسی u است، و در مختصات x, y, z عبارت است از

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

به عنوان کاربردی مهم، دمای يك مفتول نازك دراز یا سیمی را که با مقطع عرضی ثابت و ماده همگن در طول محور x ها قرار دارد (شکل ۲۳۶) و سطح جانبی آن به طور کامل عایق پوش شده است، طوری که گرما فقط در جهت محور x ها جریان می یابد، مورد بررسی قرار می دهیم. در این صورت u فقط به x و t بستگی دارد، و معادله گرما به شکل معادله گرمای يك بعدی در می آید:

$$(۱) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

معادله (۱) را برای برخی شرایط کرانه ای و اولیه مهم حل می کنیم. روش حل (۱) شبیه روش حل معادله موج است. رفتار جوابها در اینجا کاملاً با رفتار جوابهای معادله موج متفاوت خواهد بود، زیرا معادله (۱) شامل u_t است و حال آنکه معادله موج به جای آن u_{tt} را دربر دارد. (از این رو دسته بندی که در مسئله ۱۳ بخش قبل صورت گرفت صرفاً يك موضوع صوری نیست بلکه دارای نتایج بسیاری در مورد رفتار کلی جوابها است). حالتی را در نظر می گیریم که دمای نقاط انتهایی $x=0$ و $x=l$ مفتول صفر باشد در این صورت شرایط کرانه ای عبارتند از

$$(۲) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad \text{به ازای هر } t$$

توجه کنید که این عبارت به همان شکل (۲) از بخش ۳.۱۱ است. فرض می کنیم دمای

اولیهٔ مفتول $f(x)$ باشد. آنگاه شرط اولیه عبارت است از

$$(۳) \quad u(x, 0) = f(x)$$

که در آن $f(x)$ تابع مفروضی است. جواب $u(x, t)$ معادلهٔ (۱) را طوری معین می‌کنیم که در (۲) و (۳) صدق کند.



شکل ۲۳۶. مفتول مورد بررسی

مرحلهٔ اول. با به‌کاربردن روش تفکیک متغیرها نخست جوابهایی از (۱) را که در شرایط کرانه‌ای (۲) صدق می‌کنند تعیین می‌کنیم. جواب را به‌صورت

$$(۴) \quad u(x, t) = F(x)G(t)$$

در نظر می‌گیریم. این عبارت و مشتقات آن را در (۱) قرار داده، به دست می‌آوریم

$$F\dot{G} = c^2 F''G$$

که در آن نقطه مشتق نسبت به t و پریم مشتق نسبت به x را نشان می‌دهد. با تقسیم این معادله بر $c^2 FG$ ، می‌یابیم

$$(۵) \quad \frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$$

عبارت طرف چپ فقط بستگی به t دارد، حال آنکه عبارت سمت راست فقط تابعی از x است. همانند بخش ۳.۱۱، نتیجه می‌شود که طرفین تساوی (۵) باید برابر مقدار ثابتی، مثل k ، باشند. خواننده می‌تواند نشان دهد که به‌ازای $k \geq 0$ تنها جواب $u = FG$ که در (۲) صدق می‌کند عبارت است از $u \equiv 0$. بنا بر (۵) به‌ازای مقدار منفی $k = -p^2$ داریم

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2.$$

چنانچه مشاهده می‌کنیم از تساویهای فوق دو معادله دیفرانسیل معمولی خطی

$$(۶) \quad F'' + p^2 F = 0$$

و

$$(۷) \quad \dot{G} + c^2 p^2 G = 0$$

حاصل می‌شوند.

مرحلهٔ دوم. معادله (۶) را در نظر می‌گیریم. جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$(۸) \quad F(x) = A \cos px + B \sin px.$$

از (۲) نتیجه می‌شود

$$u(l, t) = F(l) G(t) = 0 \quad \text{و} \quad u(0, t) = F(0) G(t) = 0$$

چون از $G \equiv 0$ نتیجه می‌شود $u \equiv 0$ ، بنابراین لازم است $F(l) = 0$ ، $F(0) = 0$. بنا بر (۸)، $F(0) = A$ ، و بنابراین

$$F(l) = B \sin pl$$

پس لازم است داشته باشیم $B \neq 0$ ، چون در غیر این صورت $F \equiv 0$. از این رو شرط $F(l) = 0$ منجر به

$$n = 1, 2, \dots, \quad p = \frac{n\pi}{l} \quad \text{یا} \quad \sin pl = 0$$

می‌شود. با جانشانی $B = 1$ ، جوابهای زیر را که در (۲) نیز صدق می‌کنند برای (۶) به دست می‌آوریم:

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(مانند بخش ۳.۱۱ نیازی به بررسی مقادیر صحیح منفی n نداریم.)

حال معادله دیفرانسیل (۷) را در نظر می‌گیریم. به ازای $p = n\pi/l$ این معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{l} \quad \text{که در آن} \quad \dot{G} + \lambda_n^2 G_n = 0$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

که B_n عددی ثابت است. پس توابع

$$(۹) \quad u_n(x, t) = F_n(x) G_n(t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \quad n = 1, 2, \dots$$

جوابهای معادله گرمای (۱) هستند که در (۲) نیز صدق می‌کنند.

مرحله سوم. برای به دست آوردن جوابی که در (۳) نیز صادق باشد، به بررسی سری

$$(۱۰) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{l} \right)$$

می‌پردازیم. از اینجا و (۳)

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x).$$

بنابراین، برای آنکه (۱۰) در (۳) صدق کند، ضرایب B_n باید طوری انتخاب شوند که $u(x, 0)$ يك بسط نیم‌دامنه‌ای از $f(x)$ ، یعنی سری سینوسی فوریه $f(x)$ باشد؛ یعنی ر. ک. (۴) بخش ۵۰۱۰،

$$(۱۱) \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n=1, 2, \dots$$

جواب فوق در صورتی که $f(x)$ روی فاصله $0 \leq x \leq l$ تکه‌ای پیوسته (ر. ک. بخش ۱۰۵)، و دارای مشتق يك طرفه در هر نقطه داخلی این فاصله باشد، برقرار است؛ یعنی، تحت این مفروضات سری (۱۰) با ضرایب (۱۱) جواب مسئله فیزیکی مورد نظر است. اثبات این مطلب که مستلزم دانستن همگرایی یکنواخت سریها است، بعداً در فرصت مناسب بیان خواهد شد (مسائل ۱۹، ۲۰، انتهای بخش ۱۶.۶).

به علت وجود عامل نمایی، وقتی که t به سمت بینهایت میل کند تمام جملات (۱۱) به سمت صفر میل می‌کنند. میزان تلاشی با n تغییر می‌کند.

مثال ۱

هرگاه دمای اولیه برابر

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < l/2 \\ l-x & l/2 < x < l \end{cases}$$

باشد (ر. ک. شکل ۲۳۷ که در آن $l = \pi$ و $c = 1$)، آنگاه از (۱۱) به دست می‌آوریم

$$(۱۲) \quad B_n = \frac{2}{l} \left(\int_0^{l/2} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right)$$

با انتگرال گیری نتیجه می‌شود که به ازای مقادیر زوج n ، $B_n = 0$ و

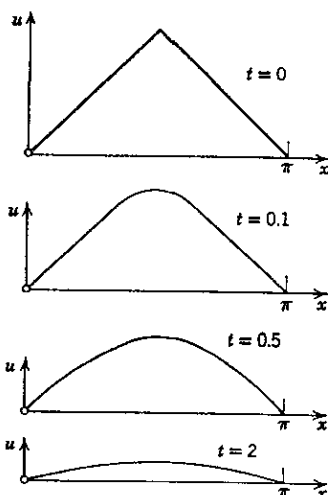
$$B_n = \frac{4l}{n^2\pi^2} \quad (n=1, 3, 5, \dots),$$

$$B_n = -\frac{4l}{n^2\pi^2} \quad (n=3, 7, 11, \dots).$$

در نتیجه جواب عبارت است از

$$u(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi x}{l} e^{-(c\pi/l)^2 t} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} e^{-(3c\pi/l)^2 t} + \dots \right].$$

خواننده می‌تواند شکل ۲۳۷ را با شکل ۲۳۵ از بخش ۳.۱۱ مقایسه کند.



شکل ۲۳۷. جواب مثال ۱ به‌ازای مقادیر مختلف t

مسائل بخش ۵.۱۱

۱. شکل‌های ۲۳۵ و ۲۳۷ را مقایسه کنید و تفاوت رفتار جواب‌های دو معادله را توصیف کنید.
۲. چگرنگی بستگی میزان تلاشی (۹) به گرمای ویژه، چگالی، و رسانایی گرمایی را، به‌ازای n ثابت، مشخص کنید.
۳. نمودار u_1 ، u_2 ، u_3 [ر.ک. (۹)]، با $B_n = 1$ ، $c = 1$ ، $l = \pi$ را به‌عنوان توابعی از x به‌ازای مقادیر $t = 0, 1, 2, 3$ رسم کنید. رفتار این توابع را مقایسه کنید.
۴. نمودار جواب‌های مسئله ۳ را به‌صورت رویه‌هایی بر صفحه xy نمایش دهید.
۵. دوانتهای میله‌ای، که در مفروضات متن کتاب صدق می‌کند، در دماهای ثابت و متفاوت $u(0, t) = U_1$ و $u(l, t) = U_2$ قرار گرفته است. دمای $u_T(x)$ میله را بعد از طی یک مدت طولانی پیدا کنید (به‌طور نظری: $t \rightarrow \infty$).

مطلوب است دمای $u(x, t)$ میله‌ای نقره‌ای (به طول 10 cm ، مقطع ثابت 1 cm^2 ، چگالی 1076 gm/cm^3 ، رسانایی گرمایی $104 \text{ cal/cm deg sec}$ ، گرمسای ویژه 0.56 cal/gm deg) که سطح جانبیش به‌طور کامل عایق‌پوش شده است، نقاط انتهایی آن در دمای ثابت 0° سانتیگراد قرار گرفته و دمای اولیه (برحسب درجه سانتیگراد) $f(x)$ است، که

$$f(x) = \sin 0.1\pi x \quad .7 \qquad f(x) = \sin 0.2\pi x \quad .6$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 5 \\ 0 & 5 < x < 10 \end{cases} \quad .8$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 5 \\ 10 - x & 5 < x < 10 \end{cases} \quad .9$$

$$f(x) = x(100 - x^2) \quad .10$$

$$f(x) = x(10 - x) \quad .11$$

۱۲. مطلوب است دمای $u(x, t)$ میله‌ای به طول l که به‌طور کامل عایق‌پوش شده است، حتی در نقاط انتهایی $x=0$ و $x=l$ ، با این فرض که $u(x, 0) = f(x)$. اطلاع فیزیکی شار گرمایی که از مقاطع انتهایی می‌گذرد با مقادیر $\partial u / \partial x$ در همانجا متناسب است. نشان دهید که این متناظر است با

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

ثابت کنید که روش تفکیک متغیرها جواب

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-(cn\pi t)^2}$$

حاصل می‌شود، که در آن، بنا به (۲) بخش ۵.۱۰

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$n = 1, 2, \dots$$

۱۳. در مسئله ۱۲ وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، $u \rightarrow A_0$. آیا این با مشهودات فیزیکی شما مطابقت دارد؟

مطلوب است دمای میله توصیف شده در مسئله ۱۲، در صورتی که $l = \pi$ ، $c = 1$ و

$$f(x) = x^2 \quad .15$$

$$f(x) = 1 \quad .16$$

$$f(x) = \sin x \quad .16$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < \pi \end{cases} \quad .17$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < \pi \end{cases} \quad .18$$

۱۹. در مسئله ۵، فرض می‌کنیم که دمای اولیه برابر $f(x) = u(x, 0)$ باشد. نشان دهید که دما در هر لحظه دلخواه $t > 0$ عبارت است از

$$u(x, t) = u_I(x) + u_{II}(x, t)$$

که u_I مانند قبل تعریف می‌شود و

$$u_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-(cn\pi/l)^2 t}$$

در این رابطه

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{l} \int_0^l [f(x) - u_I(x)] \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{2}{n\pi} [(-1)^n U_2 - U_1]. \end{aligned}$$

۲۰. مسئله توصیف شده در مسائل ۶ تا ۱۱ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که دمای نقاط انتهایی آن برای زمانی طولانی برابر 100°C باشد. آنگاه در لحظه، مثلاً در $t=0$ ، دما در $x=l$ به طور ناگهانی به 0°C تغییر یابد، و همین مقدار بماند، ضمن آنکه دما در $x=0$ کماکان 100°C باشد. دما در وسط میل به در لحظات $t=1, 2, 3, 10, 50$ ثانیه چقدر است؟

۶.۱۱ جریان گرما در میله‌ای نامتناهی

در این بخش می‌خواهیم جوابهای معادله گرما

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

را در مورد میله‌ای که از هر دو سو تا بینهایت ادامه دارد (و مانند قبل، سطح جانبی آن کاملاً عایق پوش شده است) بررسی کنیم. در این حالت شرایط کرانه‌ای نخواهیم داشت بلکه تنها شرط اولیه

$$(۲) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

را داریم، که در آن $f(x)$ دمای اولیه میله است.

برای حل این مسئله کار را مانند بخش قبل شروع می‌کنیم، یعنی در (۱) قرار می‌دهیم $u(x, t) = F(x) G(t)$. در نتیجه دو معادله دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می‌شود

$$(۳) \quad F'' + p^2 F = 0 \quad [\text{د.ك. (۶) بخش ۵.۱۱}]$$

و

$$(۴) \quad \dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \quad [\text{د.ك. (۷) بخش ۵.۱۱}]$$

جواب معادلات فوق به ترتیب عبارتند از

$$G(t) = e^{-c^2 p^2 t} \quad \text{و} \quad F(x) = A \cos px + B \sin px$$

در اینجا A و B هر عدد ثابت دلخواهی می‌توانند باشند. پس يك جواب معادله (۱) عبارت است از

$$(۵) \quad u(x, t; p) = FG = (A \cos px + B \sin px) e^{-c^2 p^2 t}.$$

[همانند بخش قبل، لازم است که ثابت k را منفی بگیریم، $k = -p^2$ ، زیرا مقادیر مثبت k منجر به حضور يك تابع نمایی صعودی در (۵) می‌گردد، که دارای معنی فیزیکی نیست.]

هرسری از توابع (۵)، که به روش معمول با فرض اینکه p ها مضارب عدد مشخص ثابتی باشند به دست آید، منتهی به تابعی می‌گردد که به ازای $t = 0$ تابعی دوره‌ای از x است. در هر صورت، از آنجا که در (۲) تابع $f(x)$ دوره‌ای فرض نشده است، طبیعی است که در این حالت انتگرال فوری را به جای سری فوری به کار ببریم.

نظر به اینکه در (۵)، A و B دلخواه هستند، می‌توان این مقادیر را به صورت تابعی از p در نظر گرفت و نوشت $A = A(p)$ و $B = B(p)$. چون معادله گرما خطی و همگن است، آنگاه تابع

$$(۶) \quad u(x, t) = \int_0^{\infty} u(x, t; p) dp = \int_0^{\infty} [A(p) \cos px + B(p) \sin px] e^{-c^2 p^2 t} dp$$

جواب معادله (۱) است، مشروط بر اینکه این انتگرال وجود داشته باشد و بتوان از آن

دو بار نسبت به x و یک بار نسبت به t مشتق گرفت.
از نمایش (۶) و شرط اولیه (۲) نتیجه می‌شود

$$(۷) \quad u(x, 0) = \int_0^{\infty} [A(p) \cos px + B(p) \sin px] dp = f(x).$$

بنابراین با استفاده از (۴) و (۵) بخش ۹.۱۰ به دست می‌آوریم

$$(۸) \quad A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos pv \, dv,$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin pv \, dv.$$

بنابر (۱۶) مسئله ۲۰، بخش ۹.۱۰، این انتگرال فوریه را می‌توان نوشت

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(px - pv) \, dv \right] dp,$$

و بنابراین، (۶) همین بخش چنین می‌شود:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(px - qv) e^{-c^2 p^2 t} \, dv \right] dp,$$

با فرض اینکه می‌توان ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کرد، به دست می‌آوریم

$$(۹) \quad u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_0^{\infty} e^{-c^2 p^2 t} \cos(px - pv) p \, dp \right] dv.$$

انتگرال داخل کروشه را می‌توان با استفاده از فرمول

$$(۱۰) \quad \int_0^{\infty} e^{-s^2} \cos 2bs \, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

که در بخش ۴.۱۷ (مسئله ۹) به دست خواهد آمد، محاسبه کرد. با وارد کردن متغیر جدید
انتگرال‌گیری p با قرار دادن $s = cp\sqrt{t}$ و انتخاب

$$b = \frac{x - v}{2c\sqrt{t}}$$

(۱۰) چنین می‌شود:

$$\int_0^{\infty} e^{-c^2 p^2 t} \cos(px - pv) \, dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} e^{-(x-v)^2/4c^2 t}$$

با نشان دادن این عبارت در (۹) نمایش

$$(۱۱) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{c\sqrt{\pi t}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}\right\} dv$$

حاصل می شود. بالاخره متغیر انتگرالگیری $z = (v-x)/\sqrt{c\sqrt{t}}$ را معرفی می کنیم. بنا براین

$$(۱۲) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \sqrt{c\sqrt{t}} z) e^{-z^2} dz$$

هرگاه $f(x)$ به ازای همه مقادیر x کراندار و در هر فاصله متناهی انتگرالپذیر باشد، می توان نشان داد (ر.ک. مرجع [D۱]) که تسایع (۱۱) یا (۱۲) در (۱) و (۲) صدق می کنند. پس در این مورد تابع فوق جواب مطلوب است.

مثال ۱. دما در میله ای نامتناهی

مطلوب است دما در میله ای نامتناهی هرگاه دمای اولیه برابر

$$f(x) = \begin{cases} U_0 = \text{ثابت} & |x| < 1, \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

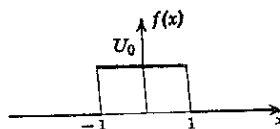
باشد (شکل ۲۳۸). بنا به (۱۱) داریم

$$u(x, t) = \frac{U_0}{\sqrt{c\sqrt{\pi t}}} \int_{-1}^1 \exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}\right\} dv.$$

هرگاه متغیر انتگرالگیری z را که در بالا معرفی شد به کار ببریم، آنگاه انتگرالگیری نسبت به v از -1 تا 1 متناظر می شود با انتگرالگیری نسبت به z از $(-1-x)/\sqrt{c\sqrt{t}}$ تا $(1-x)/\sqrt{c\sqrt{t}}$ و

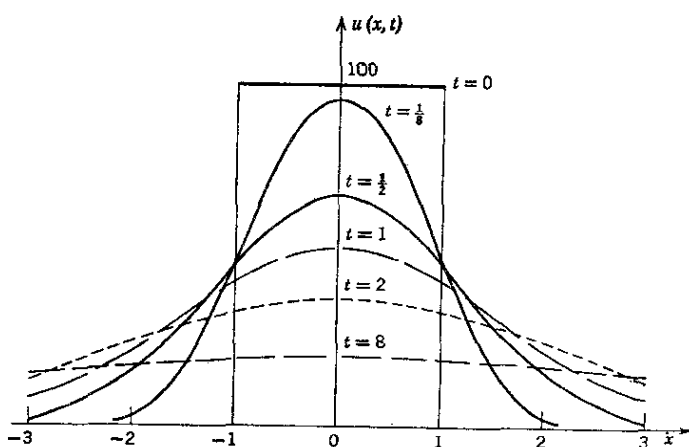
$$(۱۳) \quad u(x, t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-(1+x)/\sqrt{c\sqrt{t}}}^{(1-x)/\sqrt{c\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \quad (t > 0).$$

متذکر می شویم که این انتگرال، یک تابع مقدماتی نیست، اما می توان آن را به سادگی برحسب تابع خطا، که مقادیر آن در جدول آمده است بیان کرد. (جدول A۵ ضمیمه ۴ بعضی از این مقادیر را دربر دارد، جدولهای بزرگتر در مرجع [۱۱] ضمیمه ۱ لیست



شکل ۲۳۸. دمای اولیه در مثال ۱

شده‌اند. مسائل ۲ تا ۷ زیر را هم ببینید. شکل ۲۳۹، $u(x, t)$ را به ازای $U_0 = 100^\circ\text{C}$ ، و بعضی مقادیر t نشان می‌دهد.



شکل ۲۳۹. جواب $u(x, t)$ مثال ۱ به ازای $U_0 = 100^\circ\text{C}$ ، $c^2 = 1 \text{ cm}^2/\text{sec}$ و بعضی مقادیر t

مسائل بخش ۶.۱۱

۱. مطلوب است رسم نمودار دما در مثال ۱ (با $U_0 = 100^\circ\text{C}$ و $c^2 = 1 \text{ cm}^2/\text{sec}$) در نقاط $x = 0.5$ ، $x = 1$ ، و $x = 1.5$ به صورت توابعی از t . آیا نتایج حاصل با شهود فیزیکی شما مطابقت دارد؟

تابع خطا. تابع خطا با انتگرال

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} dw.$$

تعریف می‌شود. این تابع در ریاضیات مهندسی مهم است. برای آشنا شدن با این تابع دانشجو می‌تواند به حل مسائل زیر بپردازد. (چند فرمول در ضمیمه ۳ گنج‌انیده شده‌اند، (۳۵) الی (۳۷) را ببینید. همچنین به مثال ۱ بخش ۱۵.۱۹ مراجعه کنید.)

۲. نشان دهید که $\operatorname{erf} x$ فرد است.

۳. نشان دهید که

$$\int_{-b}^b e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi} \operatorname{erf} b, \quad \int_a^b e^{-w^2} dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf} b - \operatorname{erf} a)$$

۴. با استفاده از جدول تابع نمائی، نمودار انتگران $\operatorname{erf} x$ را رسم کنید (این نمودار اصطلاحاً منحنی ذنگی شکلی نامیده می‌شود).

۵. با شمردن مربعات زیر منحنی مربوط به مسئله ۴ یا به یک روش ساده انتگرالگیری تقریبی دیگر جدول کوچکی برای $\operatorname{erf} x$ به ازای

$$x = 0, 0.2, 0.4, \dots, 1.0, 1.5, 2.0$$

به‌دست آورید، و نتیجه را با مقادیر واقعی که تا دو رقم اعشار عبارت از

$$0.00, 0.22, 0.43, 0.60, 0.74, 0.84, 0.97, 1.00$$

هستند مقایسه کنید.

۶. سری مکلورن $\operatorname{erf} x$ را با انتگرالگیری جمله به جمله از سری مکلورن انتگرال آن به‌دست آورید.

۷. نشان دهید که (۱۳) را می‌توان چنین نوشت:

$$u(x, t) = \frac{U_0}{2} \left[\operatorname{erf} \frac{1-x}{2c\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{1+x}{2c\sqrt{t}} \right] \quad (t > 0).$$

۸. هرگاه وقتی که $x > 0$ ، $f(x) = 1$ و وقتی که $x < 0$ ، $f(x) = 0$ ، نشان دهید که (۱۲) چنین می‌شود:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2c\sqrt{t}}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (t > 0).$$

۹. می‌توان ثابت کرد که $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ با استفاده از این، نشان دهید که در مسئله ۸،

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(x/2c\sqrt{t}).$$

۱۰. هرگاه میله از یک طرف نامتناهی باشد، از 0 تا ∞ ادامه داشته باشد، و دمای انتها $x = 0$ ، 0 و دمای اولیه $f(x)$ باشد، نشان دهید که دمای میله برابر است با

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-x/2\tau}^{\infty} f(x+\tau w) e^{-w^2} dw - \int_{x/2\tau}^{\infty} f(-x+\tau w) e^{-w^2} dw \right],$$

که در آن $\tau = 2c\sqrt{t}$.

۱۱. با فرض آنکه $f(v)$ مذکور در (۱۱) فرد است، (۱۴) را از (۱۱) به‌دست آورید.

۱۲. هر گاه در مسئله ۱۰، $f(x) = 1$ ، نشان دهید که

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-w^2} dw = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad (t > 0).$$

۱۳. هر گاه وقتی که $a < x < b$ ، $f(x) = 1$ ، $(a > 0)$ و در غیر این صورت $f(x) = 0$ ، (14) به چه صورتی در می آید؟

۱۴. نشان دهید که نتیجه مسئله ۱۲ را می توان با استفاده از $f(x) = 1$ ($x > 0$) و $f(x) = -1$ ($x < 0$) از ۱۱ یا ۱۲ به دست آورد. به چه دلیلی؟

۱۵. نشان دهید که در مسئله ۱۲ زمان لازم برای آنکه هر دو نقطه دلخواه به يك دما برسند متناسب با مربع فواصل آنها از کرانه $x = 0$ است.

۷.۱۱ مدل سازی: غشای مرتعش. معادله موج دوبعدی

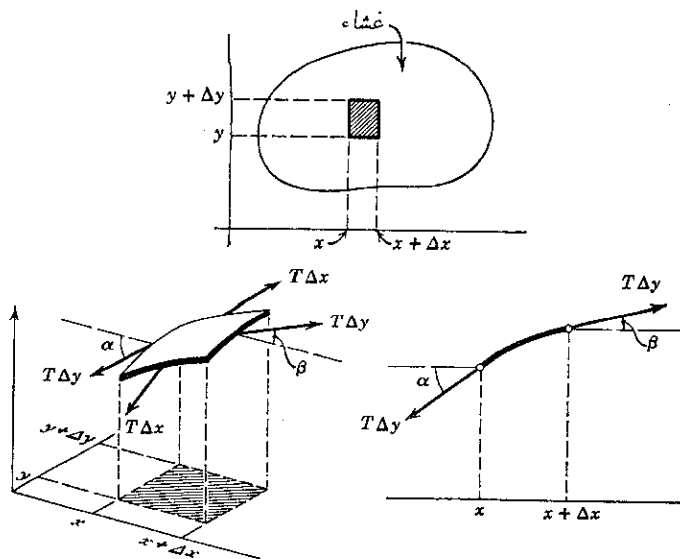
به عنوان مسئله مهم دیگری از مبحث ارتعاشات، به بررسی حرکت يك غشای کشیده شده مانند پوسته طبل، می پردازیم. خواننده توجه دارد که بررسیهای فعلی ماشیه است به آنچه در مورد نخ مرتعش در بخش ۲.۱۱ بررسی شد. مفروضات زیر را در نظر می گیریم:

۱. جرم غشا برای واحد سطح ثابت است («غشای همگن»). غشا کاملاً انعطاف پذیر بوده و به قدری نازک است که هیچگونه مقاومتی در مقابل خمش از خود نشان نمی دهد.
۲. غشای کشیده شده و سپس در سراسر کرانه خود در صفحه xy ثابت شده است. کشش بر واحد طول T که بر اثر کشیدن غشای ایجاد شده در همه نقاط و در تمام امتدادها یکی است و ضمن حرکت تغییر نمی کند.
۳. انحراف $u(x, y, t)$ غشا در اثنای حرکت نسبت به اندازه غشا کوچک است، و تمام ذوایای میل کوچکند.

گرچه در عمل این مفروضات نمی توانند تحقق یابند، ولی ارتعاشات کوچک عرضی يك غشای فیزیکی نازک به طور نسبتاً دقیقی در این مفروضات صدق می کنند.

برای رسیدن به معادله دیفرانسیلی که حرکت غشا از آن پیروی می کند، مطابق شکل ۲۴۰ به بررسی نیروهای وارد بر تکه کوچکی از غشا می پردازیم. چون انحرافهای غشا و زوایای میل کوچکند، کناره های تکه مزبور به تقریب برابر Δx و Δy گرفته می شود. کشش T نیرو بر واحد طول است. از این رو نیروهای وارد بر لبه های این تکه به ترتیب $T \Delta x$ و $T \Delta y$ هستند. نظر به اینکه غشا کاملاً انعطاف پذیر است، این نیروها بر غشا مماس هستند.

نخست به بررسی مؤلفه های افقی نیروها می پردازیم. این مؤلفه ها از ضرب نیروها



شکل ۲۴۰. غشای مرتعش

در کسینوسهای زوایای میل به دست می‌آیند. چون این زوایا کوچک هستند، کسینوسها ایشان نزدیک ۱ است. در نتیجه مؤلفه‌های افقی نیروها در لبه‌های مقابل تقریباً برابرند. بنا بر این، حرکت ذرات غشا در امتداد افقی بسیار کوچک است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که حرکت غشا را می‌توان عرضی در نظر گرفت، به این معنی فرض کرد هر ذره به طور قائم حرکت می‌کند.

مؤلفه‌های قائم نیروها در طول لبه‌های موازی با صفحه xy عبارتند از (شکل ۲۴۰)

$$T \Delta y \sin \beta, \quad -T \Delta y \sin \alpha;$$

در اینجا حضور علامت منها بدان علت است که جهت نیروی وارد بر لبه چپ به طرف پایین فرض شده است. چون زوایا کوچک هستند، می‌توان به جای سینوس آنها تانژانتشان را قرار داد. سپس برآیند دمو مؤلفه قائم آنها عبارت است از

$$T \Delta y (\sin \beta - \sin \alpha) \approx T \Delta y (\tan \beta - \tan \alpha)$$

(۱)

$$= T \Delta y [u_z(x + \Delta x, y_1) - u_z(x, y_1)]$$

۱. توجه کنید که زاویه میل در طول لبه‌ها تغییر می‌کند، و β و α مقادیر آن زاویه در نقطه‌ای مناسب از یالهای مورد نظر هستند.

که در آن شاخص زیر x ، مشتق جزئی را نشان می‌دهد و y_1 و y_2 مقادیری بین y و $y + \Delta y$ هستند. به همین نحو، بر آیند مؤلفه‌های قسائم نیروی وارد بر دوله دیگر این تکه عبارت است از

$$(2) \quad T \Delta x [u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

که در آن x_1 و x_2 مقادیری بین x و $x + \Delta x$ هستند. بنا به قانون دوم نیوتن (ر.ک. بخش ۶.۲)، مجموع نیروهای داده شده بسا (۱) و (۲) برابر $\rho \Delta A$ ، جرم تکه مزبور، درشتاب $\partial^2 u / \partial t^2$ است؛ در اینجا ρ جرم غشای منحرف نشده بر واحد مساحت و $\Delta A = \Delta x \Delta y$ مساحت تکه است وقتی که تکه منحرف نشده باشد. بنابراین

$$\rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \Delta y [u_y(x + \Delta x, y_1) - u_y(x, y_2)] \\ + T \Delta x [u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

که مشتق طرف چپ در نقطه مناسبی مانند $(\tilde{x}, \tilde{y})$ متعلق به تکه مزبور محاسبه می‌شود. از تقسیم طرفین تساوی فوق بر $\rho \Delta x \Delta y$ نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[\frac{u_y(x + \Delta x, y_1) - u_y(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y} \right].$$

هر گاه Δx و Δy به سمت صفر میل کنند، آنگاه معادله با مشتق جزئی

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

حاصل می‌شود. این معادله را معادله موج دو بعدی می‌نامند. عبارت داخل پرانتز لاپلاسی $\nabla^2 u$ تابع u است (ر.ک. بخش ۸.۸) و (۳) را می‌توان چنین نوشت:

$$(3') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

۸.۱۱ غشای مستطیلی

برای حل مسئله غشای مرتعش، باید جوابی مانند $u(x, y, t)$ از معادله موج دوبعدی

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

را که در شرط کرانه‌ای

$$(۲) \quad u=0 \text{ روی کرانه غشا به ازای هر } t \geq 0$$

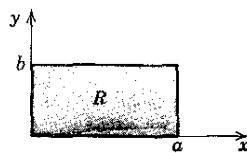
و دو شرط اولیه

$$(۳) \quad u(x, y, 0) = f(x, y) \quad [f(x, y) \text{ داده شده}]$$

و

$$(۴) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y) \quad [g(x, y) \text{ داده شده}]$$

صدق می کند به دست آوریم. این شرایط کاملاً شبیه شرایطی هستند که در مورد نخ مرتعش داشتیم.



شکل ۲۴۱. غشای مستطیلی

غشای مستطیلی R را که در شکل ۲۴۱ نشان داده شده است به عنوان اولین مورد مهم بررسی می کنیم.

مرحله اول. با به کار بردن روش جداسازی نخست جوابهایی از (۱) را که در شرط (۲) صدق می کنند تعیین می کنیم. بدین منظور فرض می کنیم

$$(۵) \quad u(x, y, t) = F(x, y)G(t).$$

با قرار دادن طرف دوم این تساوی در معادله موج (۱) داریم

$$F \ddot{G} = c^2 (F_{xx}G + F_{yy}G)$$

که در آن شاخصهای زیر مشتقات جزئی و نقطه‌ها مشتق نسبت به t را نشان می دهند. با تقسیم طرفین بر $c^2 FG$ ، می یابیم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{F} (F_{xx} + F_{yy}).$$

چون توابع طرف چپ به t بستگی دارند درحالی که توابع طرف راست بستگی به t ندارند، باید طرفین تساوی فوق برابر با یک ثابت باشند. با کمی بررسی می توان نشان داد که تنها مقادیر منفی این ثابت منجر به جوابهایی می گردند که بدون آنکه همواره صفر باشند در (۲) صدق می کنند؛ این کار همانند روشی است که در بخش ۳.۱۱ به کار گرفته

شد. اگر این مقدار ثابت را با v^2 — نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{F} (F_{xx} + F_{yy}) = -v^2$$

از اینجا دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی زیر حاصل می‌شود

$$(۶) \quad \ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \quad \text{که در آن} \quad \lambda = cv$$

و

$$(۷) \quad F_{xx} + F_{yy} + v^2 F = 0.$$

حال (۷) را در نظر می‌گیریم و روش تفکیک متغیرها را یک بار دیگر به کار می‌بریم، یعنی، جوابهایی به صورت

$$(۸) \quad F(x, y) = H(x) Q(y)$$

برای (۷) تعیین می‌کنیم که مقادیرشان بر کرانهٔ غشا صفر باشند. با جانشینی (۸) در (۷) نتیجه می‌شود

$$\frac{d^2 H}{dx^2} Q = - \left(H \frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 H Q \right).$$

از تقسیم طرفین این تساوی بر HQ می‌یابیم

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = - \frac{1}{Q} \left(\frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 Q \right).$$

توابع موجود در طرف چپ فقط به x بستگی دارند و حال آنکه توابع طرف راست فقط به y بستگی دارند. پس طرفین تساوی فوق باید مساوی عددی ثابت باشد. این ثابت باید منفی، مثلاً $-k^2$ —، باشد زیرا تنها مقادیر منفی منجر به جوابهایی می‌شوند که در (۲) صدق می‌کنند. بدون آنکه همواره صفر باشند. بنابراین

$$\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dx^2} = - \frac{1}{Q} \left(\frac{d^2 Q}{dy^2} + v^2 Q \right) = -k^2$$

از این تساویها معادلات دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می‌شوند:

$$(۹) \quad \frac{d^2 H}{dx^2} + k^2 H = 0$$

و

$$(۱۰) \quad p^2 = v^2 - k^2 \quad \text{که در آن} \quad \frac{d^2 Q}{dy^2} + p^2 Q = 0$$

مرحله دوم. جوابهای عمومی (۹) و (۱۰) عبارتند از

$$Q(y) = C \cos py + D \sin py \quad \text{و} \quad H(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

که A, B, C, D ثابت هستند. از (۵) و (۲) نتیجه می‌شود که $F = HQ$ باید روی کرانه صفر باشد، که متناظر است با $x=0, x=a, y=0, y=b$ و شکل ۲۴۱ را ببینید. یعنی شرایط زیر نتیجه می‌شود:

$$H(0) = 0, \quad H(a) = 0, \quad Q(0) = 0, \quad Q(b) = 0.$$

بنابراین $H(0) = A = 0$ و در نتیجه

$$H(a) = B \sin ka = 0.$$

باید فرض کنیم $B \neq 0$ چون در غیر این صورت $H \equiv 0$ و $F \equiv 0$. از این رو $\sin ka = 0$ یا $ka = m\pi$ ، یعنی

$$k = \frac{m\pi}{a} \quad (m \text{ عددی است صحیح})$$

درست به همین روش نتیجه می‌شود که $C = 0$ و p باید محدود به مقادیر $p = n\pi/b$ باشد که n عددی صحیح است. بنابراین جوابهای زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} m &= 1, 2, \dots \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad Q_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{و} \quad H_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{a}$$

(مانند حالت نخ مرتعش، لازم نیست $m, n = -1, -2, \dots$ را بررسی کنیم، چون جوابهای متناظر با این اعداد صرف نظر از یک ضریب ۱- الزاماً همان جوابهای مربوط به m و n مثبت هستند.) نتیجه می‌شود که توابع

$$(11) \quad F_{mn}(x, y) = H_m(x) Q_n(y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \begin{matrix} m = 1, 2, \dots, \\ n = 1, 2, \dots, \end{matrix}$$

جوابهایی از معادله (۷) هستند که روی کرانه غشای مستطیلی صفرند. نظر به اینکه در (۱۰)، $p^2 = v^2 - k^2$ و در (۶)، $\lambda = cv$ داریم

$$\lambda = c \sqrt{k^2 + p^2}$$

در نتیجه به ازای $k = m\pi/a$ و $p = n\pi/b$ مقدار

$$(12) \quad \lambda = \lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad \begin{matrix} m = 1, 2, \dots, \\ n = 1, 2, \dots, \end{matrix}$$

و جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$G_{mn}(t) = B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn} t$$

نتیجه می گیریم توابع $u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y) G_{mn}(t)$ که به صورت

$$(۱۳) \quad u_{mn}(x, y, t) = (B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

نوشته می شوند با λ_{mn} که در (۱۲) تعریف شده است جوابهای معادله موج (۱) هستند که در شکل ۲۴۱ روی کرانه غشای مستطیلی صفرند. این توابع را توابع ویژه یا توابع مشخصه می نامند، و اعداد λ_{mn} مقادیر ویژه یا مقادیر مشخصه غشای مرتعش نامیده می شوند. فرکانس u_{mn} برابر است با $\lambda_{mn}/2\pi$.

جالب است توجه کنیم که بسته به a و b ممکن است چندین تابع F_{mn} دارای يك مقدار ویژه مشترك باشند. از نقطه نظر فیزیکی این بدان معنی است که امکان دارد ارتعاشاتی با فرکانس یکسان موجود باشند که خطوط گرهی (منحنیهای نقاطی از غشا که حرکت نمی کنند) آنها کاملاً متفاوت هستند. این موضوع را با ارائه مثال زیر روشن می کنیم.

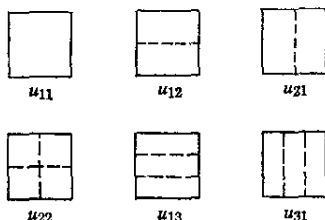
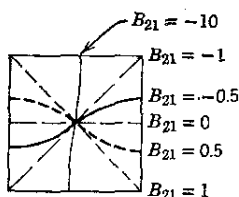
مثال ۱. غشای مربعی

غشای مربعی را که برای آن $a=b=1$ ، در نظر می گیریم. با توجه به (۱۲) مشاهده می کنیم که مقادیر ویژه عبارتند از

$$(۱۴) \quad \lambda_{mn} = c\pi \sqrt{m^2 + n^2}$$

در نتیجه

$$\lambda_{mn} = \lambda_{nm}$$



شکل ۲۴۳. خطوط گرهی جواب (۱۵) به ازای بعضی مقادیر B_{21}

شکل ۲۴۲. خطوط گرهی جوابهای u_{11} ، u_{12} ، u_{13} ، u_{21} ، u_{22} ، u_{31} در مورد غشای مربعی

ولی به ازای $m \neq n$ مطمئناً توابع متناظر

$$F_{nm} = \sin n\pi x \sin m\pi y \quad \text{و} \quad F_{mn} = \sin m\pi x \sin n\pi y$$

با هم متفاوت هستند. مثلاً با $\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$ دو تابع

$$F_{21} = \sin 2\pi x \sin \pi y \quad \text{و} \quad F_{12} = \sin \pi x \sin 2\pi y$$

متناظر می‌شوند. در نتیجه جوابهای مربوطه

$$u_{12} = (B_{12} \cos c\pi\sqrt{\Delta t} + B_{12}^* \sin c\pi\sqrt{\Delta t}) F_{12}$$

و

$$u_{21} = (B_{21} \cos c\pi\sqrt{\Delta t} + B_{21}^* \sin c\pi\sqrt{\Delta t}) F_{21}$$

به ترتیب دارای خطوط گرهی $x = 1/2$ و $y = 1/2$ هستند (شکل ۲۴۲). با فرض $B_{12} = 1$ و $B_{12}^* = B_{21}^* = 0$ ، به دست می‌آوریم

$$(15) \quad u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{\Delta t} (F_{12} + B_{21} F_{21}),$$

که ارتعاش دیگری متناظر با مقدار ویژه $c\pi\sqrt{5}$ را نمایش می‌دهد. خط گرهی این تابع جواب معادله

$$F_{12} + B_{21} F_{21} = \sin \pi x \sin 2\pi y + B_{21} \sin 2\pi x \sin \pi y = 0$$

است، یا، نظر به اینکه $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$(16) \quad \sin \pi x \sin \pi y (\cos \pi y + B_{21} \cos \pi x) = 0$$

این جواب به مقدار B_{21} بستگی دارد (شکل ۲۴۳).

با توجه به (۱۴) مشاهده می‌کنیم که حتی بیشتر از دو تابع می‌توانند با یک مقدار عددی λ_{mn} متناظر شوند. مثلاً، چهار تابع F_{24} ، F_{42} ، F_{41} ، F_{14} متناظرند با مقدار $\lambda_{14} = \lambda_{41} = \lambda_{24} = \lambda_{42} = c\pi\sqrt{65}$ زیرا

$$1^2 + 4^2 = 4^2 + 1^2 = 65$$

این موضوع از آنجا ناشی می‌شود که ۶۵ را به روشهای گوناگون می‌توان به صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشت. طبق قضیه‌ای از گاوس، برای هر مجموعی از دو مربع که حداقل دو عامل اول آن به صورت $4n+1$ باشد چنین است، n عددی صحیح و مثبت است. در حالت اخیر

$$65 = 5 \times 13 = (4+1)(12+1)$$

مرحله سوم. برای به دست آوردن جوابی که در شرایط اولیه (۳) و (۴) نیز صادق کند، به روشی مشابه بخش ۳.۱۱ عمل می‌کنیم. سری دوگانه^۱

۱. مسائل همگرایی و یکتایی را بررسی نمی‌کنیم.

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t)$$

(۱۷)

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

را در نظر می گیریم. از این سری و (۳) به دست می آوریم

$$(18) \quad u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(x, y).$$

این سری، سری دوگانه فوریه نامیده می شود. فرض کنیم که $f(x, y)$ را بتوان به چنین سری بسط داد. آنگاه ضرایب فوریه B_{mn} تابع $f(x, y)$ در (۱۸) را می توان به شرح زیر تعیین کرد. با قرار دادن

$$(19) \quad K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

(۱۸) را می توان به صورت

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

نوشت. این سری به ازای یک مقدار معین از y ، به عنوان تابعی از x ، سری سینوسی فوریه $f(x, y)$ است، و از (۴) بخش ۵.۱۰ نتیجه می شود که ضرایب این بسط عبارتند از

$$(20) \quad K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

بعلاوه، (۱۹) برابر است با سری سینوسی فوریه $K_m(y)$ ، و از (۴) بخش ۵.۱۰ ضرایب نتیجه می شوند

$$B_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy.$$

از این رو (۲۰) فرمول اولر تعمیم یافته

۱. شرایط کافی، f ، $\partial f / \partial x$ ، $\partial f / \partial y$ ، $\partial^2 f / \partial x \partial y$ باید در مستطیل R که مورد بررسی است پیوسته باشند.

$$(۲۱) \quad B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$m = 1, 2, \dots,$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

برای ضرایب فوریه $f(x, y)$ که در سری فوریه دوگانه (۱۸) تعریف شده‌اند حاصل می‌شود.

هم اکنون B_{mn} هایی که در (۱۷) ظاهر می‌شوند بر حسب $f(x, y)$ معین شده‌اند. برای تعیین B_{mn}^* ، از (۱۷) نسبت به x جمله به جمله مشتق می‌گیریم؛ با استفاده از (۴) به دست می‌آوریم

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^* \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x, y),$$

فرض می‌کنیم که $g(x, y)$ را بتوان به صورت سری فوریه دوگانه فوق بسط داد. آنگاه با انجام عملیاتی نظیر آنچه گذشت، می‌یابیم

$$(۲۲) \quad B_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad \begin{matrix} m = 1, 2, \dots, \\ n = 1, 2, \dots, \end{matrix}$$

این مطلب نشان می‌دهد برای آنکه (۱۷) در شرایط اولیه صدق کند، لازم است که ضرایب B_{mn} و B_{mn}^* طبق (۲۱) و (۲۲) انتخاب شوند.

مسائل بخش ۸.۱۱

- هرگاه کشش غشا افزایش یابد، فرکانس جواب (۱۳) چطور تغییر می‌کند؟
- خطوط گرهی جوابهای (۱۳) را به ازای $m = 1, 2, 3, 4$ و $n = 1, 2, 3, 4$ در حالت $a = b = 1$ یافته، نمودار آنها را رسم کنید.
- مسئله ۲ را به ازای $a = 2$ و $b = 1$ حل کنید.
- تعدادی مقادیر ویژه غشای مربعی به ضلع ۱ را طوری بیابید که با هر یک از آنها چهار تابع ویژه مختلف متناظر قرار گیرد.
- مقادیر ویژه غشای مستطیلی به اضلاع $a = 2$ و $b = 1$ را طوری بیابید که با هر یک از آنها دو یا تعدادی بیشتر توابع ویژه مختلف متناظر باشد.
- نشان دهید که، مسابین تمام غشاهاى مستطیلی با مساحت $A = ab$ و c ی یکسان، غشای مربعی غشایی است که برای آن u_{11} [ر.ک. (۱۳)] دارای پایین‌ترین فرکانس است.
- نتیجه‌ای شبیه نتیجه حاصل از مسئله ۶ برای فرکانس یکی از جوابهای (۱۳) با m و n مشخص دلخواه به دست آورید.

توابع $f(x, y)$ زیر $0 < x < a$ و $0 < y < b$ را بسایک سری دوگانه فوریه به صورت (۱۸) نمایش دهید.

$$f = 1 \quad .۸ \quad f = x + y \quad .۹ \quad f = xy \quad .۱۰$$

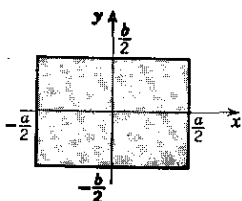
$$f = xy(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \quad .۱۲ \quad f = xy(a - x)(b - y) \quad .۱۱$$

۱۳. نشان دهید که ارتعاشات واداشته غشا در

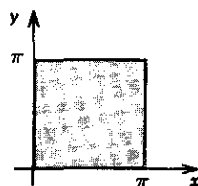
$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u + \frac{P}{\rho}$$

صدق می‌کند، که در آن $P(x, y, t)$ نیروی خارجی بر واحد مساحت است که عمود بر صفحه xy وارد می‌شود.

۱۴. مطلوب است توابع ویژه غشای مستطیلی شکل زیر که در طول کرانه‌اش ثابت شده است.



مسئله ۱۹. ورقه مربعی



مسئله ۱۴. غشای مستطیلی

مطلوب است انحراف $u(x, y, t)$ غشای مربعی با $a = b = 1$ ، $c = 1$ ، در صورتی که سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه $f(x, y)$ باشد، و

$$f = kx(1 - x^2)y(1 - y^2) \quad .۱۶ \quad f = 0.01xy(1 - x)(1 - y) \quad .۱۵$$

$$f = k \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y \quad .۱۸ \quad f = k \sin \pi x \sin^2 \pi y \quad .۱۷$$

۱۹. دمای ضلعهای ورقه مربعی نازکی صفر و دو روی ورقه کاملاً عایق پوش است. دمای اولیه $u(x, y, 0) = f(x, y)$ فرض می‌شود. با استفاده از روش تفکیک متغیرها در مورد معادله گرمای دو بعدی $u_t = c^2 \nabla^2 u$ نشان دهید که دما ورقه عبارت است از

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin mx \sin ny e^{-c^2(m^2 + n^2)t}$$

که در آن

$$B_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f(x, y) \sin mx \sin ny \, dx \, dy .$$

۳۵. مطلوب است دمای ورقه مسئله ۱۹ در صورتی که

$$f(x, y) = x(\pi - x)y(\pi - y)$$

۹.۱۱ لاپلاسی در مختصات قطبی

در ارتباط با مسائل مقدار مرزی در مورد معادلات با مشتق جزئی، استفاده از دستگاههای مختصاتی که نسبت به آنها کرانه ناحیه مورد نظر دارای نمایش ساده‌ای باشد اصلی کلی است. در بخش بعدی غشاهای مستدیر را مورد بررسی قرار خواهیم داد. بنابراین مختصات قطبی r و θ که با

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

تعریف می‌شوند، برای این مسئله مناسب خواهد بود، چرا که در این مختصات می‌توان کرانه غشا را توسط معادله ساده ثابت $r =$ نمایش داد.

وقتی از r و θ استفاده می‌کنیم، باید لاپلاسی

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

معادله موج را بر حسب مختصات جدید بنویسیم.

نیاز به تبدیل عبارات دیفرانسیلی از یک دستگاه به دستگاه دیگر کراراً در کاربردها پیش می‌آید. بنابراین لازم است دانشجو این مطالب را با دقت بیشتری تعقیب کند.

مانند بخش ۴.۱۱ قاعده زنجیری را به کار می‌بریم. برای سادگی، مشتقات جزئی را با شاخص زیر مشخص می‌کنیم و $u(x, y, t)$ را وقتی که تابعی از r و θ و t در نظر گرفته می‌شود، با همان حرف u نشان می‌دهیم.

با به کار بردن قاعده زنجیری (۴)، بخش ۷.۸، به دست می‌آوریم

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$$

با مشتقگیری مجدد از این تساوی نسبت به x ، نخست داریم

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x \\ &= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} . \end{aligned}$$

حال، با به کار بردن مجدد قاعده زنجیری، می‌یابیم

$$(u_\theta)_x = u_{\theta r} r_x + u_{\theta \theta} \theta_x, \quad (u_r)_x = u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x.$$

برای تعیین مشتقات جزئی θ_x و r_x باید از

$$\theta = \text{Arc tan } \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مشتق بگیریم:

$$\theta_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2}, \quad r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$$

با مشتقگیری مجدد از این دو فرمول، به دست می آوریم

$$r_{xx} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \theta_{xx} = -y \left(-\frac{2}{r^3}\right) r_x = \frac{2xy}{r^4}.$$

همه این عبارات را در (۱) قرار می دهیم. با فرض پیوستگی مشتقات جزئی اول و دوم، داریم $u_{\theta r} = u_{r\theta}$ و پس از ساده کردن به دست می آوریم

$$(2) \quad u_{xx} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - 2 \frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + 2 \frac{xy}{r^4} u_\theta.$$

به طریقی مشابه نتیجه می شود که

$$(3) \quad u_{yy} = \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + 2 \frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - 2 \frac{xy}{r^4} u_\theta.$$

با جمع کردن (۲) و (۳) مشاهده می کنیم که لاپلاسی در مختصات قطبی عبارت است از

$$(4) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

مسائل بخش ۹.۱۱

۱. نشان دهید که (۴) را می توان چنین نوشت:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

۲. هرگاه u مستقل از θ باشد، آنگاه (۴) به صورت $\nabla^2 u = u_{rr} + u_r/r$ در می آید.

این نتیجه را مستقیماً از لاپلاسی در مختصات دکارتی با فرض آنکه u مستقل از θ است استنتاج کنید.

۳. (۴) را به مختصات دکارتی تبدیل کنید.

۴. هرگاه x و y مختصات دکارتی باشند، نشان دهید که $x^* = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ ، $y^* = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ مختصات دکارتی هستند، و با محاسبه تحقیق کنید که $\Delta^2 u = u_{x^* x^*} + u_{y^* y^*}$.

۵. $\nabla^2 u$ را بر حسب مختصات $x^* = ax + b$ ، $y^* = cy + d$ ، که در آن x ، y مختصات دکارتی هستند، بیان کنید.

۶. (لاپلاسی در مختصات استوانه‌ای) نشان دهید که لاپلاسی در مختصات استوانه‌ای z ، θ ، r که با $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ ، $z = z$ تعریف می‌شود عبارت است از

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz}$$

۷. فرض می‌کنیم r ، θ ، ϕ مختصات کروی باشند که به صورت

$$x = r \cos \theta \sin \phi , \quad y = r \sin \theta \sin \phi , \quad z = r \cos \phi$$

تعریف شده‌اند. هرگاه $u(x, y, z)$ تنها تابعی از $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ باشد، نشان دهید که

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r$$

۸. (لاپلاسی در مختصات کروی) نشان دهید لاپلاسی در مختصات استوانه‌ای r ، θ ، ϕ که در مسئله ۷ تعریف شده است به صورت

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} + \frac{\cot \phi}{r^2} u_{\phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} u_{\theta\theta}$$

در می‌آید.

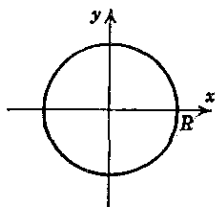
۹. هرگاه دمای سطح کره صلب همگن $R^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$ در صفر نگهداشته شود و دمای اولیه در داخل کره $f(r)$ باشد که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، نشان دهید که دمای $u(r, t)$ در کره جوابی از معادله $u_t = c^2(u_{rr} + 2u_r/r)$ است که در شرایط $u(r, 0) = f(r)$ ، $u(R, t) = 0$ صدق می‌کند.

۱۰. با قراردادن $v = ru$ نشان دهید که فرمولهای مسئله ۹ به صورت $v_t = c^2 v_{rr}$ ، $v(r, 0) = rf(r)$ ، $v(R, t) = 0$ درمی آیند. شرطه $v(0, t) = 0$ را اضافه کنید (زیرا که u باید در $r = 0$ کراندار باشد)، و مسئله حاصل را به روش تفکیک متغیرها حل کنید.

۱۰.۱۱ غشای مستدیر. معادله بسل

هم اکنون می خواهیم ارتعاشات غشای مستدیری به شعاع R (شکل ۲۴۴) را بررسی کنیم با استفاده از مختصات قطبی که با $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ تعریف شده است معادله موج (۳') بخش ۷.۱۱ به صورت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$



شکل ۲۴۴. غشای مستدیر

در می آید، ر.ک. (۴) بخش ۹.۱۱. در بخش حاضر جوابهای $u(r, \theta)$ این معادله را که تقارن شعاعی دارند، یعنی، بستگی به θ ندارند، در نظر می گیریم در نتیجه معادله موج شکل ساده تری به خود می گیرد:

$$(۱) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

چون غشا در طول کرانه $r = R$ ثابت شده است، شرط کرانه ای

$$(۲) \quad u(R, t) = 0 \quad \text{به ازای هر } t \geq 0$$

برقرار است. جوابهایی که به θ بستگی ندارند وقتی پدید می آیند که شرایط اولیه به θ بستگی نداشته باشد، یعنی، زمانی که این شرایط به صورت

$$(۳) \quad u(r, 0) = f(r) \quad [f(r) \text{ اولیه } f(r)]$$

و

$$(۴) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(r) \quad [g(r) \text{ سرعت اولیه } g(r)]$$

باشند.

مرحله اول. با استفاده از روش جداسازی متغیرها، نخست جوابهای (۱) را که در شرایط کرانه‌ای (۲) صدق می‌کنند تعیین می‌کنیم. برای شروع، فرض می‌کنیم

$$(5) \quad u(r, t) = W(r) G(t).$$

با مشتقگیری و جانشانی (۵) در (۱) و تقسیم معادله حاصل بر $c^2 W G$ به دست می‌آوریم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{W} \left(W'' + \frac{1}{r} W' \right)$$

که در آن نقطه‌ها مشتق نسبت به t و پریمها مشتق نسبت به r را نشان می‌دهند. طرفین تساوی فوق باید برابر مقدار ثابتی باشند، و این ثابت باید منفی باشد، مثلاً $-k^2$ ، تا آنکه بتوانیم جوابهایی که در شرط کرانه‌ای صدق می‌کنند و متحد با صفر نیستند به دست آوریم. بنابراین

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{W} \left(W'' + \frac{1}{r} W' \right) = -k^2.$$

از این تساویها دو معادله دیفرانسیل معمولی خطی

$$(6) \quad \ddot{G} + \lambda^2 G = 0$$

که در آن $\lambda = ck$ و

$$(7) \quad W'' + \frac{1}{r} W' + k^2 W = 0$$

نتیجه می‌شوند.

مرحله دوم. نخست (۷) را بررسی می‌کنیم. با معرفی متغیر مستقل $s = kr$ داریم

$$1/r = k/s$$

$$W'' = \frac{d^2 W}{ds^2} k^2, \quad W' = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{dW}{ds} k$$

با قرار دادن این عبارات در (۷) و حذف عامل مشترك k^2 به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dW}{ds} + W = 0$$

این معادله بسل (۱)، بخش ۵.۴، به‌ازای $\nu = 0$ است. جواب عمومی این معادله عبارت است از (ر.ک. بخش ۶.۴)

$$W = C_1 J_0(s) + C_2 Y_0(s)$$

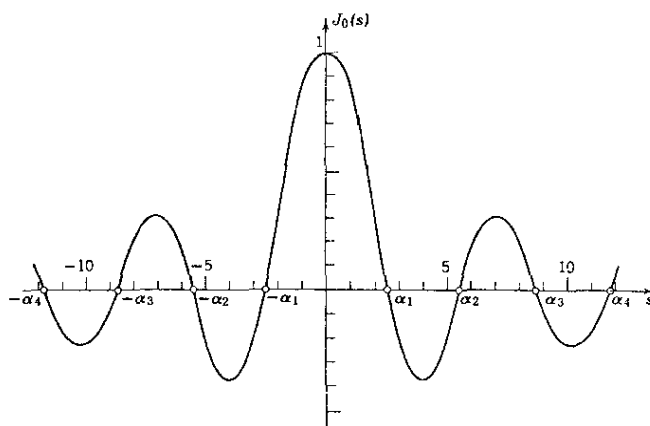
که در آن J_0 و Y_0 توابع بسل نوع اول و دوم از مرتبه صفر هستند. چون همواره انحراف غشا منتهی است و از طرفی Y_0 وقتی که s به سمت صفر میل کند به سمت بینهایت میل می کند، بنابراین از Y_0 نمی توان استفاده کرد و باید $C_2 = 0$ انتخاب کنیم. واضح است که $C_1 \neq 0$ زیرا در غیر این صورت $W \equiv 0$ می توان قرارداد $C_1 = 1$ ، بنابراین

$$(۸) \quad W(r) = J_0(s) = J_0(kr).$$

بر کرانه $r = R$ باید داشته باشیم $0 = G(t) = W(R)u(R, t)$. چون از $0 \equiv u$ تساوی نتیجه می شود، لازم است که

$$W(R) = J_0(kR) = 0$$

تابع بسل J_0 دارای (تعدادی نامتناهی) صفرهای حقیقی است. صفرهای مثبت $J_0(s)$ را با $s = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ نمایش می دهیم (شکل ۲۴۵). متذکر می شویم که مقادیر عددی (با



شکل ۲۴۵. تابع بسل $J_0(s)$

چهار رقم اعشار) عبارتند از

$$\alpha_1 = 2.4048, \quad \alpha_2 = 5.5201, \quad \alpha_3 = 8.6537, \quad \alpha_4 = 11.7915$$

$$\alpha_5 = 14.9309$$

مشاهده می کنیم که این صفرها به طور نامنظم از هم فاصله دارند، و همین طورند صفرهای دیگر $\alpha_6, \alpha_7, \dots$ (جدول جامع تر در مرجع [۸] ضمیمه ۱ آمده است). حالا از معادله (۸) نتیجه می شود

$$(۹) \quad m=۱, ۲, \dots, \quad k=k_m=\frac{\alpha_m}{R} \quad \text{یا} \quad kR=\alpha_m$$

در نتیجه توابع

$$(۱۰) \quad W_m(r)=J_0(k_m r)=J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) \quad m=۱, ۲, \dots$$

جوابهایی از (۷) هستند که در $r=R$ صفر می‌شوند.

جوابهای عمومی (۶) که با $\lambda=\lambda_m=ck_m$ متناظر هستند، عبارتند از

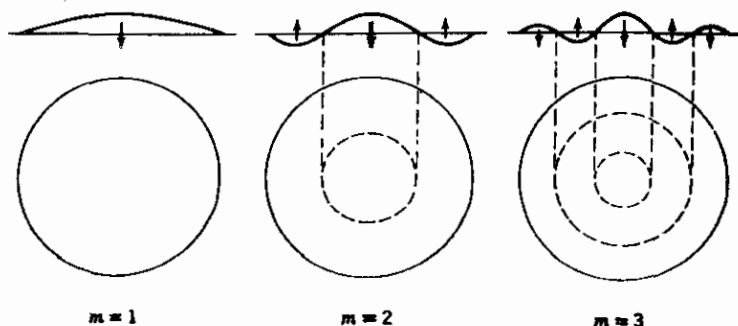
$$G_m(t)=a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t.$$

از این رو توابع

$$(۱۱) \quad v_m(r, t)=W_m(r)G_m(t)=(a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t)J_0(k_m r)$$

که در آنها $m=۱, ۲, \dots$ ، جوابهایی از معادله موج (۱) هستند که در شرط کرانه‌ای (۲) صدق می‌کنند: اینها توابع ویژه مسئله ما هستند و مقادیر ویژه متناظر با این توابع λ_m ها می‌باشند.

ارتعاش غشای متناظر با u_m را مد نرمال m ام می‌نامند؛ فرکانس این ارتعاش $\lambda_m/2\pi$ دور بر واحد زمان است. چون صفرهای J_0 به طور منظم بر روی محور جایگزین نشده‌اند (برخلاف صفرهای توابع سینوسی که در مورد نخ مرتعش ظاهر می‌شدند)، صدای طبل به کلی با صدای ویولن تفاوت دارد. صورت‌های مختلف مسدهای نرمال که در شکل ۲۴۶ نشان داده شده‌اند به سادگی از شکل ۲۴۵ به دست می‌آیند. به ازای $m=۱$ و همه نقاط غشا همزمان به طرف بالا (یا به طرف پایین) حرکت می‌کنند. به ازای $m=۲$ ، وضع به شرح زیر است. تابع



شکل ۲۴۶. مدهای نرمال غشای مستطیل در حالتی که ارتعاشات مستقل از زاویه‌اند.

$$W_2(r) = J_0\left(\frac{\alpha_2}{R}r\right)$$

به ازای $\alpha_2 r / R = \alpha_1$ یا $r = \alpha_1 R / \alpha_2$ برابر صفر است. بنا براین، دایره $r = \alpha_1 R / \alpha_2$ یک خط گرهی است، و وقتی که در یک لحظه معین بخش مرکزی غشا به طرف بالا حرکت می کند، بخش خارجی ($r > \alpha_1 R / \alpha_2$) به طرف پایین حرکت می کند، و بالعکس. جواب $u_m(r, t)$ دارای $m-1$ خط گرهی است که دوائر متحدالمرکز هستند (شکل (۲۴۶).

مرحله سوم. برای به دست آوردن جوابی که در شرایط آغازی (۳) و (۴) صدق کند، همان طور که در مورد نخ مرتعش عمل کردیم عمل می کنیم، یعنی، سری

$$(۱۲) \quad u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(r) G_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right).$$

را با قرار دادن $t = 0$ و استفاده از (۳)، به دست می آوریم

$$(۱۳) \quad u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) = f(r).$$

در نتیجه، برای اینکه (۱۲) در (۳) صدق کند، a_m باید ضریب سری بسل - قویه ای باشد که $f(r)$ را بر حسب $J_0(\alpha_m r / R)$ نمایش می دهد، یعنی [ر. ک. (۹) بخش ۹.۴]،

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) dr \quad m=1, 2, \dots$$

مشتق پذیری $f(r)$ در فاصله $0 \leq r \leq R$ برای وجود بسط (۱۳) کفایت می کند، ر. ک. مرجع [B ۱۸]. ضرایب b_m در (۱۲) را می توان به طریقی مشابه به کمک (۴) تعیین کرد. برای به دست آوردن مقادیر عددی a_m و b_m ، می توان یکی از روشهای معمولی انتگرال گیری تقریبی را با استفاده از جداول J_0 و J_1 به کار برد.

مسائل بخش ۱۰.۱۱

۱. مقدار عددی شعاعهای خطوط گرهی u_2 و u_3 [ر. ک. (۱۱)] را، به ازای $R=1$ ، تعیین کنید.

۲. به سؤالی که در مسئله ۱ شده است در مورد u_2 ، u_3 ، u_4 پاسخ دهید.

۱. مسئله همگرایی و یکنایی را مورد بررسی قرار نمی دهیم.

۳. شکلی مانند شکل ۲۴۶ برای u_ϕ ، u_δ ، u_ψ رسم کنید.

۴. هرگاه کشش غشا زیاد شود، فرکانس هریک از مدلهای نرمال (۱۱) چطور تغییر می کند؟

۵. نشان دهید برای اینکه (۱۲) در (۴) صدق کند،

$$b_m = \frac{2}{c\alpha_m R J_1'(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0(\alpha_m r/R) dr, \quad m=1, 2, \dots$$

۶. آیا امکان دارد به ازای c و R معین یا تعداد بیشتری از توابع u_m [ر.ک. (۱۱)] که خطوط گرهی متفاوتی دارند با یک مقدار ویژه مشخص متناظر قرار گیرند؟

۷. ارتعاشات وابسته به r و θ با قراردادن $u = F(r, \theta)G(t)$ در معادله موج

$$(14) \quad u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right)$$

نشان دهید که این معادله به معادلات

$$(15) \quad \lambda = ck \quad , \quad G + \lambda^2 G = 0$$

$$(16) \quad F_{rr} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} + k^2 F = 0$$

منجر می شود.

۸. با قراردادن $F = W(r)Q(\theta)$ در (۱۶) نتیجه بگیرید

$$(17) \quad Q'' + n^2 Q = 0$$

$$(18) \quad r^2 W'' + r W' + (k^2 r^2 - n^2) W = 0$$

۹. نشان دهید که $Q(\theta)$ باید دوره‌ای با دوره 2π باشد، و بنابراین در (۱۷) و (۱۸)،

$$Q_n^* = \sin n\theta, \quad Q_n = \cos n\theta \quad \text{از این جوابهای } n=0, 1, \dots$$

$$n=0, 1, \dots, \quad W_n = J_n(kr) \quad \text{حاصل می شوند.}$$

۱۰. نشان دهید که شرط کراندای

$$(19) \quad u(R, \theta, t) = 0$$

منجر به مقادیر $k = k_{mn} = \alpha_{mn}/R$ می شود که $s = \alpha_{mn}$ صفر مثبت m ام $J_n(s)$ است.

۱۱. نشان دهید جوابهای (۱۴) که در (۱۹) صدق می کنند عبارتند از

$$u_{mn} = (A_{mn} \cos ck_{mn}t + B_{mn} \sin ck_{mn}t) J_n(k_{mn}r) \cos n\theta$$

$$u_{mn}^* = (A_{mn}^* \cos ck_{mn}t + B_{mn}^* \sin ck_{mn}t) J_n(k_{mn}r) \sin n\theta.$$

۱۲. نشان دهید که $u_{mo}^* \equiv 0$ و u_{mo} همان فرمول (۱۱) همین بخش است.

۱۳. نشان دهید که u_{mn} دارای $m+n-1$ خط گرهی است.

خطوط گرهی جوابهای زیر را رسم کنید

$$u_{rn}, n=1, 2, 3 \quad .15 \quad u_{rn}, n=1, 2, 3 \quad .14$$

$$u_{mn}^*, m, n=1, 2, 3 \quad .16$$

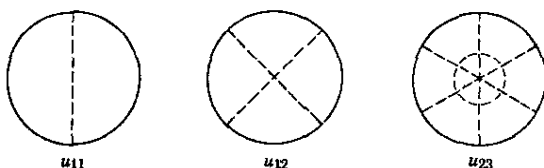
۱۷. نشان دهید که شرط اولیه $u_t(r, \theta, 0) = 0$ در (۲۰) به $B_{mn} = 0$ ، $B_{mn}^* = 0$ منجر می شود.

انحراف $u(r, t)$ غشای مستدیری به شعاع $R=1$ را بیابید، اگر وقتی $c=1$ ، سرعت اولیه صفر، و انحراف اولیه $f(r)$ باشد که در آن

$$f = k(1-r^2) \quad .19 \quad f = 0, J_0(\alpha_2 r) \quad .18$$

$$f = k(1-r^4) \quad .20$$

دانهمایی. مسائل ۲۵ الی ۳۲ بخش ۹.۲ را ملاحظه کنید.



شکل ۲۴۷. خطوط گرهی برخی از جوابهای (۲۰)

۱۱.۱.۱ معادله لاپلاس. پتانسیل

یکی از مهمترین معادلات با مشتق جزئی در فیزیک معادله لاپلاس

$$(۱) \quad \nabla^2 u = 0$$

است. در اینجا $\nabla^2 u$ لاپلاسی u است. لاپلاسی u بر حسب مختصات دکارتی x, y, z در فضا عبارت است از

$$(۲) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

نظریه جوابهای معادله لاپلاس نظریه پتانسیل نامیده می‌شود. جوابهای (۱) که دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند به توابع همساز موسومند.

در حالت دو بعدی، یعنی وقتی که u فقط به دو متغیر وابسته است، مناسبترین راه استفاده از روشهای آنالیز مختلط است. این موضوع در بخش ۵.۱۲ و فصل ۱۸ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای روشن شدن اهمیت معادله لاپلاس در ریاضیات مهندسی، برخی کاربردهای اساسی را ذکر می‌کنیم.

معادله لاپلاس در ارتباط با نیروهای گرانشی پیش می‌آید. در مثال ۴ بخش ۸.۸ دیدیم که هر گاه ذره A به جرم M در نقطه (ξ, η, ζ) ثابت باشد و ذره دیگری مانند B در نقطه (x, y, z) قرار داشته باشد، آنگاه ذره A ذره B را جذب می‌کند، و نیروی گرانشی تابع اسکالر است.

$$u(x, y, z) = \frac{c}{r}, \quad c = GMm = \text{ثابت}$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \quad (>0)$$

این تابع که پتانسیل میدان گرانشی نامیده می‌شود در معادله لاپلاس صدق می‌کند. تعمیم این موضوع به پتانسیل و نیروی حاصل از توزیع پیوسته جرم کاملاً روشن است. هر گاه جرمی به چگالی $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ سرتاسر يك ناحیه R افضا توزیع شده باشد، آنگاه پتانسیل متناظر u در نقطه (x, y, z) که خالی از جرم است. چنین تعریف می‌شود:

$$(3) \quad u(x, y, z) = k \iiint_R \frac{\rho}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad (k > 0).$$

نظر به اینکه $1/r$ ($r > 0$) جواب معادله (۱) است، یعنی $\nabla^2(1/r) = 0$ و بستگی به x, y, z ندارد، بنابراین به دست می‌آوریم

$$\nabla^2 u = k \iiint_R \rho \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta = 0,$$

یعنی، پتانسیل گرانشی که توسط (۳) تعریف می‌شود در هر نقطه‌ای که بدوسیله ماده اشغال نشده است در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

در الکترواستاتیک نیروی الکتریکی جاذبه یا دافعه بین ذرات از قانون کولن (ر.ک. بخش ۸.۸) که همان صورت ریاضی قانون گرانش نیوتن را دارد، پیروی می‌کند. از اینجا نتیجه می‌شود که میدان حاصل از يك توزیع بار الکتریکی از نقطه نظر ریاضی می‌تواند با تابع پتانسیلی، که در هر نقطه‌ای که توسط بار اشغال نشده است در معادله لاپلاس صدق می‌کند، بیان شود.

در فصل ۱۸ مشاهده خواهیم کرد که معادلهٔ لاپلاس در نظریهٔ جریان سیال تراکم - ناپذیر نیز ظاهر می‌شود.

بدعلاوه، معادلهٔ اساسی در مسائل هدایت گرما معادلهٔ گرمای (ر.ک. بخشهای ۹.۹ و ۵.۱۱)

$$u_t = c^2 \nabla^2 u,$$

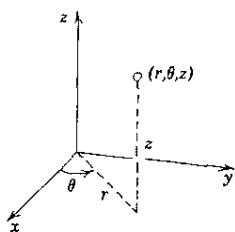
است و هرگاه دمای u مستقل از زمان t باشد («حالت مانا») این معادله به معادلهٔ لاپلاس تبدیل می‌شود.

در اغلب کاربردهایی که به معادلهٔ لاپلاس منتهی می‌شوند، لازم است که مسائل با مقدار کرانه‌ای حل کنیم، یعنی جوابهایی از (۱) را که در شرایط کرانه‌ای مفروض بر روی رویه‌های معینی صدق می‌کنند مشخص کنیم. بنا بر این انتخاب مختصاتی در فضا که بتوان این رویه‌ها را به طریقی ساده در آن مختصات نمایش داد لازم می‌آید. این امر نیاز به تبدیل لاپلاسی (۲) به لاپلاسی در دستگاههای مختصات دیگر دارد. واضح است که این تبدیل بسیار شبیه تبدیل لاپلاسی تابع دومتغیری خواهد بود (ر.ک. بخش ۹.۱۱). از (۴) بخش ۹.۱۱ بلافاصله نتیجه می‌شود که لاپلاسی تابع u در مختصات استوانه‌ای^۱ (شکل ۲۴۸)

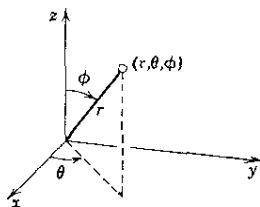
$$(۴) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \text{Arc tan } \frac{y}{x}, \quad z = z$$

عبارت است از

$$(۵) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$



شکل ۲۴۹. مختصات کروی



شکل ۲۴۸. مختصات استوانه‌ای

۱. توجه کنید که نسبت y/x کاملاً θ را مشخص نمی‌کند بلکه باید علامتهای x و y را نیز در نظر بگیریم.

مختصات مهم دیگر مختصات کروی r, θ, ϕ هستند که به شکل زیر به مختصات دکارتی مربوط می‌شوند (شکل ۲۴۹):

$$(۶) \quad x = r \cos \theta \sin \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \phi.$$

لاپلاسی تابعی مانند u در مختصات کروی عبارت است از

$$(۷) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \phi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

این عبارت را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$(۷') \quad \nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right].$$

این فرمول را به‌طریقی مشابه با آنچه در بخش ۹.۱۱ دیدیم می‌توان نتیجه گرفت؛ جزئیات آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

مسائل بخش ۱۱.۱۱

۱. مطلوب است لاپلاسی در مختصات قائم $x^* = ax$, $y^* = by$, $z^* = cz$ ، که در آن x, y, z مختصات دکارتی هستند.

۲. با شروع از (۲)، با محاسبه نسبت به مختصات دکارتی که با (۹) و (۱۰) بخش ۹.۸ تعریف شده‌اند تحقیق کنید که

$$\nabla^2 u = u_{x^*x^*} + u_{y^*y^*} + u_{z^*z^*}.$$

نشان دهید توابع $u = f(x, y)$ زیر در معادله لاپلاس صدق می‌کنند، نمودار برخی از خطوط هم پتانسیل ثابت u را رسم کنید.

$$۳. \quad x^2 - y^2 \quad ۴. \quad x^2 - 3xy^2 \quad ۵. \quad \frac{x}{(x^2 + y^2)}$$

$$۶. \quad \frac{y}{(x^2 + y^2)} \quad ۷. \quad \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

۸. مختصات کروی را که با (۶) تعریف شده‌اند، بر حسب مختصات دکارتی تحقیق کنید.

۹. درستی (۵) را با تبدیل مجدد $\nabla^2 u$ به مختصات دکارتی تحقیق کنید.

۱. گاهی مختصات قطبی نیز نامیده می‌شود.

۱۰. تحقیق کنید که $u = c/r$ در معادله لاپلاس در مختصات کروی صدق می کند.

۱۱. نشان دهید تنها جواب $\nabla^2 u = 0$ که فقط به $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ بستگی دارد برابر $u = c/r + k$ است، در اینجا c و k ثابت هستند.

۱۲. در مسئله ۱۱، c و k را طوری تعیین کنید که u نمایش پتانسیل الکترواستاتیک بین دو کره متحدالمرکز به شعاعهای $r_1 = 10$ سانتیمتر و $r_2 = 2$ سانتیمتر، که به ترتیب در پتانسیلهای $U_1 = 110$ ولت و $U_2 = 10$ ولت قرار گرفته اند، باشد.

۱۳. نشان دهید تنها جواب معادله لاپلاس دوبعدی که تنها به $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ بستگی دارد $u = c \ln r + k$ است.

۱۴. پتانسیل الکترواستاتیکی بین دو استوانه هم محور با شعاعهای $r_1 = 10$ سانتیمتر و $r_2 = 2$ سانتیمتر را، که به ترتیب در پتانسیلهای $U_1 = 110$ ولت و $U_2 = 10$ ولت قرار گرفته اند، بیابید. نمودار جوابهای مسائل ۱۲ و ۱۴ را رسم کرده و باهم مقایسه کنید.

۱۵. هر گاه $u(r, \theta)$ در $\nabla^2 u = 0$ صدق کند، نشان دهید که $v(r, \theta) = u(r^{-1}, \theta)$ در $\nabla^2 v = 0$ صدق می کند. (r و θ مختصات قطبی هستند.)

۱۶. فرض می کنیم r, θ, ϕ مختصات استوانه ای باشند. هر گاه $u(r, \theta, \phi)$ در $\nabla^2 u = 0$ صدق کند، نشان دهید که $v(r, \theta, \phi) = r^{-1} u(r^{-1}, \theta, \phi)$ در $\nabla^2 v = 0$ صدق می کند.

۱۷. نشان دهید که با جانشانی $u = U(x, y, z)e^{-i\omega t}$ ($i = \sqrt{-1}$) در معادله موج سه بعدی $u_{,ii} = c^2 \nabla^2 u$ معادله هلمهولتز^۱

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad k = \omega/c$$

حاصل می شود.

مطلوب است توزیع دمای حالت مانا (مستقل از زمان):

۱۸. بین دو صفحه موازی $x = x_0$ و $x = x_1$ که دمای آنها به ترتیب u_0 و u_1 است.

۱۹. بین دو استوانه مستدیر هم محور با شعاعهای r_0 و r_1 که به ترتیب در دماهای u_0 و u_1 قرار گرفته اند.

۲۰. بین دو کره متحدالمرکز با شعاعهای r_0 و r_1 که دمای آنها به ترتیب u_0 و u_1 است.

۱. هرمان فن هلمهولتز (Hermann Von Helmholtz)، ۱۸۲۱-۱۸۹۴، فیزیکدان آلمانی که به خاطر آثار مهمش در ترمودینامیک، هیدرودینامیک و اکوستیک معروف است.

۱۲.۱۱ معادله لاپلاس در مختصات کروی. معادله نژاندر

هم اکنون به بررسی يك مسئله با مقدار کرانه‌ای نمونه‌وار که شامل معادله لاپلاس در مختصات کروی است می‌پردازیم. فرض می‌کنیم کسره S که شعاع آن R است در توزیع پتانسیل الکتریکی ثابت

$$(۱) \quad u(R, \theta, \phi) = f(\phi)$$

قرار داشته باشد، در اینجا r, θ, ϕ مختصات کروی هستند که در بخش قبل تعریف شده‌اند، به این شرط که مرکز S ، مبدأ مختصات فرض شود و تابع $f(\phi)$ مفروض باشد. قصد ما یافتن پتانسیل u در همه نقاط فضا که خالی از بار اضافی فرض شده است می‌باشد. نظر به اینکه پتانسیل روی S مستقل از θ است، در نتیجه پتانسیل در فضا نیز چنین خواهد بود. بنابراین $\partial^2 u / \partial \theta^2 = 0$ ، و بنابه $(۷')$ از بخش ۱۱.۱۱ معادله لاپلاس به صورت

$$(۲) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) = 0$$

درمی‌آید. به علاوه، در بینهایت پتانسیل صفر است:

$$(۳) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \phi) = 0$$

می‌خواهیم مسئله با مقدار کرانه‌ای مرکز از معادله (۲) و شرایط کرانه‌ای (۱) و (۳) را به روش تفکیک متغیرها حل کنیم. با قراردادن جوابی به صورت

$$u(r, \phi) = G(r) H(\phi)$$

در (۲) ، و تقسیم معادله حاصل بر GH ، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = - \frac{1}{H \sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dH}{d\phi} \right)$$

طبق معمول، طرفین این معادله باید مساوی مقدار ثابتی، مثلاً k ، باشد، طوری که

$$(۴) \quad \frac{1}{\sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dH}{d\phi} \right) + kH = 0$$

و

$$\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = k$$

معادله دوم را می‌توان چنین نوشت

$$r^2 G'' + 2rG' - kG = 0.$$

این معادله کشی است، و در بخش ۷.۲ دیدیم که معادله کشی دارای جوابهایی به صورت

$G = r^\alpha$ است. این جوابها دارای صورت ساده‌تری خواهد شد هرگاه نمادگذاری را عوض کنیم و به جای k ، $n(n+1)$ قرار دهیم. در واقع، با این نمادگذاری معادله مزبور چنین می‌شود:

$$(5) \quad r^2 G'' + 2rG' - n(n+1)G = 0$$

که در آن n هنوز دلخواه است. با قراردادن $G = r^\alpha$ در (۵) داریم

$$[\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - n(n+1)]r^\alpha = 0.$$

صفرهای عبارت داخل کروشه $\alpha = n$ و $\alpha = -n-1$ هستند. در نتیجه جوابهای زیر حاصل می‌شوند:

$$(6) \quad G_n(r) = r^n, \quad G_n^*(r) = \frac{1}{r^{n+1}}$$

با وارد کردن $k = n(n+1)$ در (۴) و قراردادن

$$\cos \phi = w,$$

خواهیم داشت $\sin^2 \phi = 1 - w^2$ و

$$\frac{d}{d\phi} = \frac{d}{dw} \frac{dw}{d\phi} = -\sin \phi \frac{d}{dw}$$

در نتیجه، (۴) به صورت

$$(7) \quad \frac{d}{dw} \left[(1-w^2) \frac{dH}{dw} \right] + n(n+1)H = 0$$

یا

$$(7') \quad (1-w^2) \frac{d^2 H}{dw^2} - 2w \frac{dH}{dw} + n(n+1)H = 0$$

درمی‌آید. این معادله لژاندر است (ر.ک. ۳.۴). به ازای عدد صحیح^۱ $n = 0, 1, \dots$ چند جمله‌ایهای لژاندر

$$H = P_n(w) = P_n(\cos \phi), \quad n = 0, 1, \dots$$

جواب معادله (۷) هستند. بنابراین دو رشته جوابهای $u = GH$ به صورت زیر برای معادله لاپلاس (۲) حاصل می‌شوند:

۱. تاکنون، n دلخواه بود زیرا k دلخواه بود. می‌توان نشان داد که تحدید n به عدد صحیح برای آنکه جواب (۷) همراه مشتق آن در فاصله $-1 \leq w \leq 1$ یا $0 \leq \phi \leq \pi$ باشد امری ضروری است.

$$(\lambda^*) \quad u_n(r, \phi) = A_n r^n P_n(\cos \phi), \quad u_n^*(r, \phi) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \phi)$$

که در آن B_n و A_n و $n = 0, 1, \dots$ ثابت هستند.
برای یافتن جوابی از (۲) که در نقاط داخلی کره برقرار بوده و در (۱) صدق کنند، به بررسی^۱ زیر می‌پردازیم

$$(\lambda) \quad u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \phi).$$

برای اینکه (۸) در (۱) صدق کند باید داشته باشیم

$$(\lambda) \quad u(R, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \phi) = f(\phi);$$

یعنی، (۹) باید برابر سری فوریه^۲ $f(\phi)$ بر حسب چندجمله‌ایهای لژاندر باشد. از (۶) و (۷) بخش ۷.۴ و (۲) بخش ۹.۴ نتیجه می‌شود

$$A_n R^n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(w) P_n(w) dw$$

که در آن $f(w)$ تابع $f(\phi)$ را به صورت تابعی از $w = \cos \phi$ نشان می‌دهد. چون $dw = -\sin \phi d\phi$ ، و حدود انتگرالگیری ۱ و -۱ به ترتیب با $\phi = 0$ و $\phi = \pi$ متناظر است، داریم

$$(10) \quad A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos \phi) \sin \phi d\phi, \quad n = 0, 1, \dots$$

بنابراین سری (۸) با ضرایب (۱۰) جواب مسئله فوق در نقاط داخل کره است.
برای یافتن جواب در نقاط خارج کره نمی‌توان از توابع $u_n(r, \phi)$ استفاده کرد زیرا این توابع در (۳) صدق نمی‌کنند، ولی می‌توان از توابع $u_n^*(r, \phi)$ که در (۳) صدق می‌کنند، استفاده کرد و مانند قبل عمل کرد. این به جواب

$$(11) \quad u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \phi) \quad (r \geq R)$$

۱. همگرایی را مورد بررسی قرار نمی‌دهیم، می‌توان نشان داد که هرگاه $f(\phi)$ و $f'(\phi)$ در فاصله $0 \leq \phi \leq \pi$ تکه‌ای پیوسته باشند، از سری (۸) با ضرایب (۱۰) می‌توان جمله به جمله نسبت به r و ϕ مشتق گرفت و سریهای حاصل همگرا و به ترتیب $\partial^2 u / \partial r^2$ و $\partial^2 u / \partial \phi^2$ را نمایش می‌دهند. پس سری (۸) با ضرایب (۱۰) جواب مسئله موردنظر در داخل کره است.

با ضرایب

$$(۱۲) \quad B_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos \phi) \sin \phi d\phi$$

منجر می شود .

مسائل بخش ۱۲.۱۱

۱. با جانشانی تحقیق کنید $u_n(r, \phi)$ و $u_n^*(r, \phi)$ ، $n = 0, 1, 2$ ، که با (λ^*) داده شده اند جوابهای (۲) هستند.

۲. رویه‌هایی را که توابع u_1, u_2, u_3 بر آنها صفر هستند بیابید.

۳. نمودار توابع $P_n(\cos \phi)$ را به ازای $n = 0, 1, 2$ رسم کنید [ر. ک. (۱۱') بخش ۳.۴].

۴. توابع $P_4(\cos \phi)$ و $P_5(\cos \phi)$ را رسم کنید.

فرض می کنیم r, θ, ϕ مختصات کروی که در متن کتاب مورد استفاده قرار گرفته، باشند. مطلوب است پتانسیل در داخل کره $R=1$ ، با فرض آنکه هیچ باری در داخل کره وجود ندارد و پتانسیل روی کره برابر $f(\phi)$ است که

$$۵. \quad f(\phi) = 1 \quad ۶. \quad f(\phi) = \cos \phi \quad ۷. \quad f(\phi) = \cos^2 \phi$$

$$۸. \quad f(\phi) = \cos^3 \phi \quad ۹. \quad f(\phi) = \cos^2 \phi \quad ۱۰. \quad f(\phi) = \cos^3 \phi$$

$$۱۱. \quad f(\phi) = 10 \cos^3 \phi = 3 \cos^2 \phi - 5 \cos \phi - 1$$

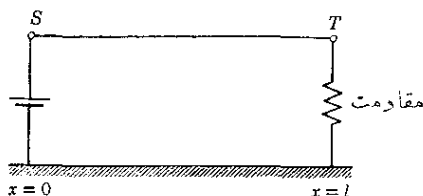
۱۲. نشان دهید در مسئله ۵ ، پتانسیل در خارج کره برابر پتانسیل حاصل از يك بار نقطه‌ای است که در مبدأ قرار دارد.

۱۳. فصل مشترك رویه‌های هم پتانسیل مسئله ۶ با صفحه xz را رسم کنید.

۱۴. مطلوب است پتانسیل در خارج کره‌ای که در مسائل ۵ تا ۱۱ آمده است.

۱۵. با جانشانی تحقیق کنید که جواب مسئله ۷ در (۲) صدق می کند.

۱۶. (معادلات خط انتقال) يك كابل یا سیم تلفن طولانی (شکل را ببینید) را که به‌طور ناقص عایق پوش شده است، به‌طوری که سیم در سراسر طولش نشست می کند، در نظر می گیریم. چشمه S جریان $i(x, t)$ سیم در $x=0$ و انتهای دریافت کننده T در $x=l$ واقع است. جریان از S به طرف T برقرار می شود و از داخل مصرف کننده به زمین برمی گردد. فرض می کنیم C, L, R و G به ترتیب، مقاومت، القا، ظرفیت



مسئله ۱۶. خط انتقال

نسبت به زمین و هدایت نسبت به زمین برای واحد کابل باشد. نشان دهید که

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{اولین معادله خط انتقال})$$

که در آن $u(x, t)$ پتانسیل در کابل است. راهنمایی. قانون ولتاژ کیرشهف را برای تکه کوچکی از کابل که بین x و $x + \Delta x$ واقع است به کار ببرید (اختلاف پتانسیل بین x و $x + \Delta x$ ، افت القایی + افت مقاومتی $= x + \Delta x$).

۱۷. نشان دهید که برای کابل مسئله ۱۶

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{دومین معادله خط انتقال})$$

راهنمایی. از قانون جریان کیرشهف استفاده کنید (اختلاف جریان در x و $x + \Delta x$ ، اتلاف به علت نشت به زمین + اتلاف ظرفیتی $= x + \Delta x$).

۱۸. نشان دهید که با حذف i از معادلات خط انتقال معادله

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + GL)u_t + RG u$$

حاصل می شود.

۱۹. (معادلات تلگراف) در مورد کابلهای زیر دریایی G قابل چشم پوشی است و فرکانسها پایین هستند. نشان دهید که این فرضها منجر به معادلاتی که اصطلاحاً معادلات کابل زیر دریایی یا معادلات تلگراف نام دارند می شوند:

$$u_{xx} = RCu_t, \quad i_{xx} = RCi_t.$$

۲۰. (معادلات خط بالا فرکانس) نشان دهید که در مورد جریانهایی متناوب بالا فرکانس معادله مذکور در مسئله ۱۸ و همین طور معادله جریان i را می توان با تقریب به معادلات

زیر که اصطلاحاً معادلات خط بالا فرکانس نام دارد تبدیل کرد.

$$u_{xx} = LCu_{tt}, \quad i_{xx} = LCi_{tt}.$$

۱۳.۱۱ کاربرد تبدیل لاپلاس در معادلات با مشتق جزئی

خوانندگانانی که با تبدیل لاپلاس (فصل ۵) آشنا هستند ممکن است مایل باشند بدانند که آیا روش مزبور را می‌توان برای حل معادلات با مشتق جزئی به کار برد. پاسخ مثبت است، و ما اساس انجام این کار را با آوردن مثال نوعی (زیر) روشن می‌کنیم. (مسائل پیچیده‌تر با استفاده از روشهای آنالیز مختلط قابل حلند؛ ر.ک. به مرجع [B۳] که در ضمیمه ۱ لیست شده است. بعضی اوقات تبدیل فوریه (ر.ک. بخش ۹.۱۰) مناسبتر است؛ برای روشن شدن این نکته مرجع [B ۱۶] را ببینید).

در فصل ۵ دیدیم که در مورد معادله دیفرانسیل معمولی، تبدیل لاپلاس يك معادله جبری برای تبدیل به دست می‌دهد. در مورد معادله با مشتق جزئی دو متغیره چنانچه مشاهده خواهیم کرد، این روش منجر به يك معادله دیفرانسیل معمولی برای تبدیل می‌شود. دلیل این امر آن است که ما معادله مفروض را نسبت به یکی از متغیرهای مستقل، معمولاً نسبت به t ، تبدیل می‌کنیم، طوری که مشتقات نسبت به دیگر متغیرهای مستقل در معادله تبدیل شده باقی می‌مانند. هرگاه ضرایب معادله مفروض بستگی به t نداشته باشند، تبدیل لاپلاس مسئله را ساده‌تر خواهد کرد.

مثال ۱. يك معادله مرتبه اول

مسئله

$$(1) \quad \frac{\partial w}{\partial x} + x \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = t \quad (t \geq 0)$$

را حل کنید. در اینجا به این دلیل w را به کار برده‌ایم که u را برای نمایش دادن تابع پله‌ای واحد (بخش ۳.۵) لازم داریم.

حل. تبدیل لاپلاس (۱) نسبت به t را در نظر می‌گیریم. بنابه (۱) بخش ۲.۵

$$(2) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} + x[s\mathcal{L}\{w\} - w(x, 0)] = 0.$$

در اینجا $w(x, 0) = 0$ ، فرض می‌کنیم که بتوان در جمله اول ترتیب انتگرالگیری و مشتقگیری را عوض کرد:

$$(3) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial w}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t) dt = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}\{w(x, t)\}.$$

با نوشتن $w(x, s) = \mathcal{L}\{w(x, t)\}$ ، از (۲) به دست می آوریم

$$\frac{\partial W}{\partial x} + xsW = 0$$

این معادله را می توان يك معادله دیفرانسیل معمولی که متغیر مستقل آن x است فرض کرد، چرا که در آن مشتق نسبت به s وجود ندارد. جواب عمومی عبارت است از (بخش ۷.۱)

$$W(x, s) = c(s)e^{-sx^2/2}.$$

چون $\mathcal{L}(t) = 1/s^2$ ، از شرط $w(0, t) = t$ نتیجه می شود $W(0, s) = 1/s^2$ ، یعنی،

$$W(0, s) = c(s) = \frac{1}{s^2}$$

در نتیجه

$$W(x, s) = \frac{1}{s^2} e^{-sx^2/2}.$$

حال $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} = t$ ، بنابراین دومین قضیه انتقال (بخش ۳.۵) به ازای $a = x^2/2$ نتیجه می دهد

$$(۴) \quad w(x, t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{x^2}{2} \\ \left(t - \frac{x^2}{2}\right) u_{x^2/2}(t) & t > \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

چون تا اینجا فقط صوری عمل کرده ایم، باید تحقیق کنیم که (۴) در (۱) صدق می کند. این کار را به خواننده واگذار می کنیم.

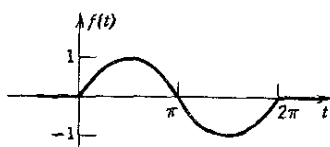
مثال ۲. نخ از یک سو نامتناهی

مطلوب است تغییر مکان^۱ $w(x, t)$ نخ کشسانی که شرایط زیر را دارد.

(الف) نخ در آغاز کار بر روی محور x ها از $x = 0$ تا ∞ («نخ نیمه بینهایت») قرار دارد و بی حرکت است.

(ب) به ازای $t > 0$ معادله حرکت انتهای چپ نخ عبارت است از (شکل ۲۵۰)

۱. w را در اینجا به کار برده ایم زیرا u را برای نمایش دادن تابع پله ای واحد لازم داریم.



شکل ۲۵۰. حرکت انتهای چپ نخ مذکور
در مثال به عنوان تابعی از t

$$w(0, t) = f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(پ) به علاوه

$$t \geq 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) = 0$$

البته نخ با طول بینهایت وجود خارجی ندارد ولی مدل ما نخ یا طنابی طویل (باورنسی ناچیز) است که انتهای راست آن در نقطه دوری واقع بر محور y ها ثابت شده است.

حل. باید معادله موج (بخش ۲۰.۱۱)

$$(5) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{l}{\rho}$$

را تحت «شرایط کرانه‌ای»

$$(6) \quad w(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

به ازای f ی که در بالا داده شده است، و شرایط اولیه

$$(7) \quad w(x, 0) = 0$$

$$(8) \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

حل کنیم. نسبت به t تبدیل لاپلاس می‌گیریم. بنابه (۲) بخش ۲۰.۵

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} = s^2 \mathcal{L}\{w\} - s w(x, 0) - \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = c^2 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\}.$$

بنابه (۷) و (۸) دو جمله حذف می‌شوند. فرض می‌کنیم در طرف راست بتوان ترتیب

انتگرالگیری و مشتقگیری را عوض کرد:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t) dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{w(x, t)\}$$

با نوشتن $W(x, s) = \mathcal{L}\{w(x, t)\}$ به دست می آوریم

$$s^2 W = c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

یا

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2} W = 0.$$

چون این معادله فقط شامل يك مشتق نسبت به x است. آن را می توان به عنوان يك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی برای $W(x, s)$ به عنوان تابعی از x تصور کرد. جواب عمومی عبارت است از

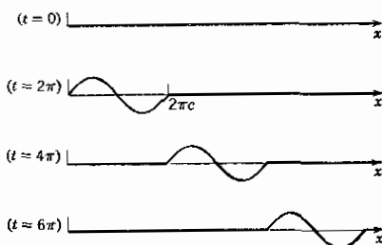
$$(9) \quad W(x, s) = A(s)e^{sx/c} + B(s)e^{-sx/c}.$$

از (۶)، با نوشتن $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ، به دست می آوریم

$$W(0, s) = \mathcal{L}\{w(0, t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

و، با فرض آنکه می توان تقدم انتگرالگیری نسبت به t و حدگیری وقتی که $x \rightarrow \infty$ را عوض کرد، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} W(x, s) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} w(x, t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) dt = 0. \end{aligned}$$



شکل ۲۵۱. موج سیار مثال ۲

از اینجا لازم می‌آید که در (۹)، $A(s) = 0$ زیرا $c > 0$ ، بنابراین به ازای هر s ثابت مثبت با افزایش x تابع $e^{sx/c}$ زیاد می‌شود. توجه کنید که می‌توان فرض کرد $s > 0$ چرا که همیشه تبدیل لاپلاس به ازای هر s بزرگتر از عدد مشخصی مانند γ موجود است (بخش ۲۰.۵). در نتیجه داریم

$$W(0, s) = B(s) = F(s),$$

بنابراین (۹) چنین می‌شود:

$$W(x, s) = F(s) e^{-sx/c}.$$

از دومین قضیه انتقال (بخش ۳۰.۵) به ازای $a = x/c$ تبدیل معکوس (شکل ۲۵۱)

$$(10) \quad w(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) u_{x/c}(t),$$

به دست می‌آید، یعنی،

$$w(x, t) = \sin\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{اگر} \quad \frac{x}{c} < t < \frac{x}{c} + 2\pi \quad \text{یا} \quad ct > x > (t - 2\pi)c$$

و در غیر این صورت W صفر است. این یک موج سینوسی منفرد است که با سرعت c به طرف راست در حال حرکت است. توجه کنید که نقطه x تا لحظه $t = x/c$ ساکن می‌ماند، $t = x/c$ زمان لازم برای رسیدن به x است اگر آغاز حرکت در $t = 0$ (آغاز حرکت طرف چپ) بوده و سرعت حرکت c باشد. نتیجه حاصل با شهود فیزیکی مطابقت دارد. چون اثبات صوری است، باید تحقیق کنیم که (۱۰) در شرایط مفروض صدق می‌کند. این مرحله را به خواننده واگذار می‌کنیم.

مسائل بخش ۱۳.۱۱

۱. مطلوب است رسم شکلی مانند شکل ۲۵۱ هر گاه $c = 1$ ، و f مانند تابع مذکور در مثال ۱، بخش ۳.۱۱، به ازای $k = 1/2$ «مثلی» باشد.

۲. سرعت موجی که در مثال ۳ تشریح شد چگونه به کشش و جرم نخ بستگی دارد؟

۳. درستی جواب مثال ۲ را تحقیق کنید. هر گاه در لحظه $t = 0$ شروع به اعمال حرکت سینوسی به انتهای چپ نخ در لحظه $t = 0$ بکنیم چه موج سیاری به دست می‌آید؟

با به کار بردن تبدیل لاپلاس معادلات زیر را حل کنید

$$u(0, t) = 1, \quad u(x, 0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma x \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma x \quad ۴.$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = xt \quad ۵.$$

۶. مسئله ۵ را بدروش دیگری حل کنید.

مطلوب است دمای $w(x, t)$ در میله‌ای از يك سو نامتناهی با سطح جانبی عایق پوش شده که روی محور x از ۰ تا ∞ قرار گرفته است، با فرض اینکه دمای اولیه صفر باشد و هنگامی که $x \rightarrow \infty$ به ازای هر $t \geq 0$ مشخص، $w(x, t) \rightarrow 0$ و $w(0, t) = f(t)$ به شرح زیر عمل کنید.

۷. مدلی بسازید و نشان دهید که تبدیل لاپلاس منجر به

$$sW(x, s) = c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad W = \mathcal{L}\{w\}$$

و

$$W(x, s) = F(s) e^{-\sqrt{s} x/c} \quad F = \mathcal{L}\{f\}$$

می‌شود.

۸. با به کار بردن قضیه پیچش در مسئله ۷، نشان دهید که

$$w(x, t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t f(t-\tau) \tau^{-3/2} e^{-x^2/4c^2\tau} d\tau$$

۹. فرض می‌کنیم $w(0, t) = f(t) = u_0(t)$ (بخش ۳.۵). w و F متناظر را با w_0 ، W_0 و F_0 نشان دهید. آنگاه ثابت کنید که در مسئله ۸

$$w_0(x, t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau^{-3/2} e^{-x^2/4c^2\tau} d\tau = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)$$

که در آن تابع خطای erf دارای همان تعریفی است که در مجموعه مسائل بخش ۶.۱۱ آمده است.

۱۰. (فرمول دوهامل) در مسئله ۹ نشان دهید،

$$W_0(x, s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s} x/c}$$

و بنا به قضیه پیچش

$$w(x, t) = \int_0^t f(t-\tau) \frac{\partial w_0}{\partial \tau} d\tau .$$

[این صورتی از فرمول معروف به فرمول دوهامل است که جواب متناظر با هرتابع مفروض f را برحسب w_0 متناظر با $f(t) = u_0(t)$ بیان می کند.]

اعداد مختلط. توابع تحلیلی مختلط

بسیاری از مسائل مهندسی را می‌توان با روشهای آنالیز مختلط بررسی و حل کرد. این گونه مسائل را می‌توان به دو دسته بزرگ تقسیم نمود. دسته اول از «مسائل مقدماتی» تشکیل یافته است که برای حل آنها آگاهی از اعداد مختلط به میزانی که در جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی* فرا گرفته شده، کافی است. به عنوان مثال، بسیاری از مسائل کاربردی مربوط به مدارهای الکتریکی و دستگاههای ارتعاش کننده مکانیکی از این دسته اند. برای دسته دوم مسائل، اطلاعات مبسوطی از نظریه توابع تحلیلی مختلط (یا به اختصار «نظریه توابع») و روشهای دقیق و پر قدرتی، که در این شاخه از ریاضیات به کار گرفته شده اند، لازم است. مسائل جالب نظریه گرما، دینامیک سیالات و الکترواستاتیک، به این دسته تعلق دارند.

فصلهای بعدی این کتاب به مباحث عمده نظریه توابع تحلیلی مختلط و کاربرد آنها اختصاص دارد. خواهیم دید که اهمیت این توابع در ریاضیات مهندسی ریشه در سه موضوع اصلی زیر دارد.

۱. قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی جوابهای معادله لاپلاس هستند. در نتیجه مسائل پتانسیل دوبعدی را می‌توان، با روشهایی که در ارتباط با توابع تحلیلی به وجود آمده اند بررسی کرد.
۲. بسیاری از انتگرالهای حقیقی و مختلط پیچیده‌ای که در کاربردها پیش می‌آیند با روشهای انتگرالگیری مختلط قابل محاسبه هستند.

* منظور دوره پیش دانشگاهی امریکاست. — م.

۳. بخش اعظم توابع غیرمقدّماتی که در ریاضیات مهندسی ظاهر می‌شوند توابع تحلیلی هستند، و بررسی این توابع هنگامی که متغیر مستقل مختلط است سبب تعمیق و توسعه آگاهی ما از خواص آنها می‌شود.

در این فصل اعداد مختلط و توابع تحلیلی و خواص عمومی آنها را بررسی می‌کنیم. نیمه دوم این فصل به مهمترین توابع مختلط مقدّماتی اختصاص یافته است.

پیشنیاز این فصل: حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدّماتی.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت F.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱.۱۲ اعداد مختلط

وجود معادلاتی که هیچ عدد حقیقی در آنها صدق نمی‌کند، مثلاً

$$x^2 + 3 = 0, \quad x^2 - 10x + 40 = 0.$$

در گذشته بسیار دوری کشف شد و همین امر بالاخره سبب تعریف اعداد مختلط گردید.

تعریف

عدد مختلط z يك زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی x و y است، و می‌نویسیم

$$z = (x, y).$$

x را قسمت حقیقی z و y را قسمت موهومی z می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

به عنوان مثال، $\operatorname{Re}(4, -3) = 4$ و $\operatorname{Im}(4, -3) = -3$. به علاوه تعریف می‌کنیم که دو عدد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ مساوی هستند وقتی و فقط وقتی که قسمتهای حقیقی آنها با هم و قسمتهای موهومی‌شان باهم برابر باشند.

جمع اعداد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ با قاعده زیر تعریف می‌شود:

$$(1) \quad z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

۱. اولین کسی که اعداد مختلط را بدین منظور به کاربرد ریاضیدان ایتالیایی **جیرولامو کاردانو** Girolamo Cardano (۱۵۰۱-۱۵۷۶) همان کسی که فرمولی برای حل معادلات درجه سوم به دست آورده بود. اصطلاح «اعداد مختلط» به وسیله ریاضیدان بزرگ آلمانی کارل فردریش گوس (ر.ک. پانوش بخش ۴.۴) وضع شد و هم‌اکنون که راه را برای استفاده عمومی و سیستماتیک از اعداد مختلط باز کرد.

ضرب با قاعده

$$(2) \quad z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

تعریف می‌شود. در دنباله بحث راجع به این اعمال حسابی بیشتر صحبت می‌کنیم.

نمایش به صورت $z = x + iy$

عدد مختلطی که قسمت موهومی آن صفر باشد به صورت $(x, 0)$ است. برای این اعداد از روابط (۱) و (۲) به آسانی نتیجه می‌شود، که مانند اعداد حقیقی،

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

این موضوع ما را وسوسه می‌کند که $(x, 0)$ را با عدد حقیقی x یکی بگیریم. از این رو دستگاه اعداد مختلط گسترشی از دستگاه اعداد حقیقی است. به علاوه، عدد مختلط

$$i = (0, 1)$$

یکه موهومی نامیده می‌شود. بنا به (۲)، به ازای هر y حقیقی داریم

$$iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y).$$

توجه کنید که، بنا به (۱)، برای $z = (x, y)$ داریم

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y),$$

با قراردادن x به جای $(x, 0)$ و با استفاده از $iy = (0, y)$ به شکل مناسب

$$z = x + iy$$

می‌رسیم، شکلی که می‌توان گفت درعمل همیشه به کار می‌رود. یک خاصیت مهم i این است که

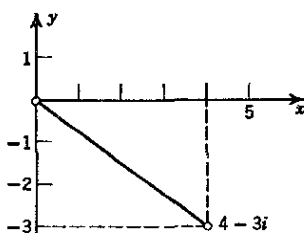
$$(3) \quad i^2 = -1$$

این نتیجه از (۲) بدست می‌آید. در واقع، $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

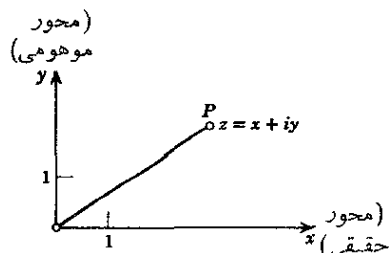
صفحه مختلط

در اینجا از نمایش هندسی اعداد مختلط به صورت نقاطی در صفحه صحبت می‌کنیم. چنین نمایشی از نظر کار بردی اهمیت بسیار دارد. ایده این کار بسیار ساده و طبیعی است. دو محور مختصات عمود برهم انتخاب می‌کنیم، محور افقی x ، که محور حقیقی نامیده می‌شود، و محور قائم y که آن را محور موهومی می‌نامیم. واحد طول را برای هر دو محور یکسان

می گیریم (شکل ۲۵۲). این دستگاه را دستگاه مختصات دکارتی^۱ می نامند. حال $z = (x, y) = x + iy$ را مانند نقطه P با مختصات x و y رسم می کنیم. صفحه xy را، که در آن اعداد مختلط بدین طریق نمایش داده می شوند، صفحه مختلط یا نمودار آرگان^۲ می نامند.



شکل ۲۵۳. عدد $4 - 3i$ در صفحه مختلط



شکل ۲۵۲. صفحه مختلط

به جای اینکه بگوییم «نقطه ای که در صفحه مختلط با z نمایش داده شده است» به اختصار می گوییم «نقطه z در صفحه مختلط». این اختصار اشتباهی را سبب نمی شود.

اعمال حسابی

اکنون می توانیم از نماد گذاری $z = x + iy$ و صفحه مختلط استفاده کنیم.

جمع. مجموع $z_1 + z_2$ (۱) را می توان به صورت

$$(۴) \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

نوشت. می بینیم که جمع اعداد مختلط با قانون متوازی الاضلاع که در مکانیک جمع نیروها را با آن انجام می دهند مطابقت دارد (شکل ۲۵۴).

تفریق. این عمل به عنوان معکوس عمل جمع تعریف می شود، یعنی، تفاضل $z_1 - z_2$ عدد مختلط z است به طوری که $z_1 = z + z_2$. بدیهی است (ر.ک. شکل ۲۵۵)

$$(۵) \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

ضرب. حاصل ضرب $z_1 z_2$ (۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

۱. این نامگذاری به افتخار فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی رناتوس کارتسیوس Renatus Cartesius (لاتینی شده رنه دکارت René Descartes (۱۵۹۶-۱۶۵۰))، که هندسه تحلیلی را اختراع کرد، صورت گرفته است.

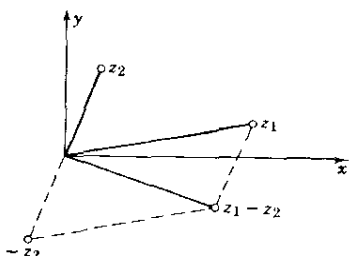
۲. ژان روبرت آرگان Jean Robert Argand (۱۷۶۸-۱۸۲۲)، ریاضیدان فرانسوی، مقاله آرگان درباره صفحه مختلط در ۱۸۰۶، سه سال پس از انتشار مقاله مشابهی از ریاضیدان نروژی کاسپار وسل Caspar Wessel (۱۷۴۵-۱۸۱۸)، منتشر شد.

$$(۶) \quad z_1 z_2 = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

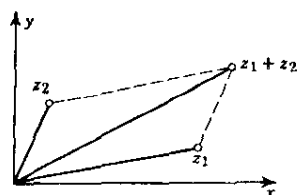
به خاطر سپردن فرمول بالا ساده است زیرا این فرمول به طور صوری از قواعد حساب اعداد حقیقی وبا استفاده از (۳)، یعنی $i^2 = -1$ ، به دست آمده است.

تقسیم. این عمل به عنوان معکوس عمل ضرب تعریف می شود؛ خارج قسمت $z = z_1 / z_2$ عدد مختلط $z = x + i y$ است به طوری که

$$(۷) \quad z_1 = z z_2 = (x + i y)(x_2 + i y_2) \quad (z_2 \neq 0)$$



شکل ۲۵۵. تفریق اعداد مختلط



شکل ۲۵۶. جمع اعداد مختلط

نشان می دهیم که به ازای $z_2 \neq 0$ خارج قسمت $z = x + i y = z_1 / z_2$ عبارت است از

$$(۸^*) \quad x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

قاعده عملی برای به دست آوردن (۸^*) ضرب کردن صورت و مخرج خارج قسمت z_1 / z_2 در $x_2 - i y_2$ و ساده کردن حاصل ضرب است:

$$(۸) \quad z = \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2} = \frac{(x_1 + i y_1)(x_2 - i y_2)}{(x_2 + i y_2)(x_2 - i y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثلا، اگر $z_2 = 2 - 3i$ و $z_1 = -5 + i$ ، آنگاه

$$\frac{2 - 3i}{-5 + i} = \frac{(2 - 3i)(-5 - i)}{(-5 + i)(-5 - i)} = \frac{-10 - 2i + 15i - 3}{25 + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

نتیجه ای که خواننده می تواند با نشان دادن

$$z z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(-5 + i) = 2 - 3i = z_1$$

آن را امتحان کند. يك اثبات (۸^*) به ترتیب زیر صورت می گیرد. از (۶) می بینیم که (۷) را می توان نوشت

$$x_1 + iy_1 = (x_2x - y_2y) + i(y_2x + x_2y)$$

بنابراین تعریف تساوی، قسمت‌های حقیقی و قسمت‌های موهومی دوطرف باید باهم مساوی باشند:

$$x_1 = x_2x - y_2y$$

$$y_1 = y_2x + x_2y$$

این يك دستگاه دو معادله‌ای خطی با مجهولات x و y است. به فرض آن که x_2 و y_2 هر دو صفر نباشند (اختصاراً می‌نویسیم $(z_2 \neq 0)$ ، جواب یکتای (x^*, y^*) را به دست می‌آوریم.

مثال ۱. جمع، تفریق، ضرب، تقسیم

فرض می‌کنیم $z_1 = 2 - 3i$ و $z_2 = -5 + i$. در این صورت

$$z_1 + z_2 = -3 - 2i, \quad z_1 - z_2 = 7 - 4i, \quad z_1 z_2 = -7 + 17i$$

$$z_1 / z_2 = (-1 + i) / 2$$

خواص اعمال حسابی

بنابر قوانین معروف اعداد حقیقی قوانین زیر را برای اعداد مختلط دلخواه z_1, z_2, z_3 به دست می‌آوریم

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{array} \right. \quad \text{(قوانین جابجایی)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \end{array} \right. \quad \text{(قوانین انجمنی)}$$

$$(9) \quad \text{قانون پخش پذیری} \quad z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

$$0 + z = z + 0 = z$$

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

$$z \times 1 = z$$

که $0 = (0, 0)$ و $-z = -x - iy$.

اعداد مختلط مزدوج

فرض کنید $z = x + iy$ يك عدد مختلط باشد. در این صورت $x - iy$ را مزدوج z نامیده، با $\bar{z}$ نشان می‌دهند. بنابراین،

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

مثلاً، مزدوج $z = 5 + 2i$ می‌شود $\bar{z} = 5 - 2i$ (شکل ۲۵۶). از این گذشته با جمع و تفریق کردن نتیجه می‌گیریم

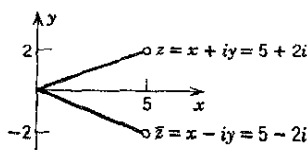
$$z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = 2iy$$

از اینجا به فرمولهای مهم زیر می‌رسیم

$$(10) \quad \operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

در حالت خاص، در مورد عدد حقیقی $z = x$ داریم $z = \bar{z}$. در مورد $z = 0 + iy = iy$ داریم $\bar{z} = -z$. چنین عددی که قسمت حقیقی آن صفر است عدد موهومی محض نامیده می‌شود. این عدد متناظر با نقطه‌ای واقع بر محور موهومی است. همچنین داریم

$$(11) \quad \begin{aligned} \overline{(z_1 + z_2)} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & \overline{(z_1 - z_2)} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ \overline{(z_1 z_2)} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2, & \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \end{aligned}$$



شکل ۲۵۶. اعداد مختلط مزدوج

مسائل بخش ۱.۱۲

۱. (توانهای یک‌ه موهومی) نشان دهید که

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \dots$$

$$(12) \quad \frac{1}{i} = -i, \quad \frac{1}{i^2} = -1, \quad \frac{1}{i^3} = i, \quad \dots$$

فرض کنید $z_1 = 3 + 4i$ و $z_2 = 5 - 2i$. مقادیر زیر را (به صورت $x + iy$) پیدا کنید

$$z_2 / z_1 \quad ۰.۳ \quad (z_1 - z_2)^2 \quad ۰.۴ \quad 1/z_1^2 \quad ۰.۵ \quad z_2 / 2z_1$$

مطلوب است

$$\text{Im } z^4 \quad .9 \quad \text{Re } z^3 \quad .8 \quad \text{Im } \frac{2+i}{3+2i} \quad .7 \quad \text{Re } \frac{1}{2+i} \quad .6$$

$$\text{Re } \frac{z}{\bar{z}} \quad .13 \quad \text{Im } \frac{1}{z^2} \quad .12 \quad \text{Im } \frac{2-i}{4-3i} \quad .11 \quad \text{Re } \frac{(1+i)^2}{3+2i} \quad .10$$

۱۴. قوانین جا به جایی (۹) را ثابت کنید.

۱۵. قوانین انجمنی (۹) را ثابت کنید.

۱۶. قانون بخش پذیری (۹) را ثابت کنید.

۱۷. هرگاه حاصل ضرب دو عدد مختلط صفر باشد نشان دهید که حداقل یکی از دو عدد صفر است.

ثابت کنید:

۱۸. هر عدد با مزدوج مزدوج خودش برابر است.

$$\overline{iz} = -i\bar{z} \quad .19$$

۲۰. z حقیقی است اگر و تنها اگر $\bar{z} = z$.

۲۱. z موهومی محض است اگر و تنها اگر $\bar{z} = -z$.

۲۲. z حقیقی یا موهومی محض است اگر و تنها اگر $(\bar{z})^2 = z^2$.

۲۳. فرمولهای (۱۱) را.

۲۴. $\text{Im}(iz) = \text{Re } z$ ، $\text{Re}(iz) = -\text{Im } z$.

۲۵. فرمولهایی شبیه فرمولهای مسئله ۲۴ برای $\text{Re}(\overline{iz})$ و $\text{Im}(\overline{iz})$ بیابید.

۲.۱۲ شکل قطبی اعداد مختلط. نامساوی مثلث

مختصات قطبی r ، θ در صفحه مختلط با روابط زیر معرفی می شوند

$$(1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

در این صورت هر عدد مختلط $z = x + iy \neq 0$ را می توان چنین نوشت:

$$(2) \quad z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

این را شکل قطبی و یا شکل مثلثاتی عدد مختلط می نامند. r را قدر مطلق یا مدول z نامیده، با $|z|$ نشان می دهند. بنابراین (شکل ۲۵۷)

$$(۳) \quad |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz} \quad (\geq 0)$$

زاویه جهت دار بین محور x های مثبت و OP را $\arg z$ (آرگومان) z نامیده، با نمایش می دهند؛ در این کتاب زوایا برحسب رادیان اندازه گیری خواهند شد و جهت مثبت آنها عکس جهت حرکت عقربه های ساعت فرض می شود. نظیر مثالهای داریم

$$(۴) \quad \arg z = \theta = \arcsin \frac{y}{r} = \arccos \frac{x}{r} = \arctan \frac{y}{x}$$

توجه کنید که به ازای $z = 0$ زاویه $\theta = \arg z$ تعریف شده نیست، به همین دلیل است که در بالا شرط کردیم $z \neq 0$.

از نظر هندسی، $|z|$ فاصله z از مبدأ است (شکل ۲۵۷). لذا نامساوی

$$|z_1| > |z_2|$$

بدین معنی است که نقطه z_1 نسبت به نقطه z_2 از مبدأ دورتر است، و $|z_1 - z_2|$ فاصله بین نقاط z_1 و z_2 است (شکل ۲۵۸).

ضمناً متذکر می شویم که برای اعداد مختلط (اگر روی محور حقیقی نباشند) نامساویهایی نظیر $z_1 < z_2$ یا $z_1 \geq z_2$ معنی ندارد. برای $z (\neq 0)$ مفروض، θ آرگومان z با مقادیری که اختلاف آنها از هم مضارب صحیح 2π است مشخص می شود. مقداری از θ که در فاصله

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

قرار دارد مقدار اصلی آرگومان z نام دارد.

مثال ۱. شکل قطبی اعداد مختلط. مقدار اصلی

فرض کنید $z = 1 + i$. در این صورت

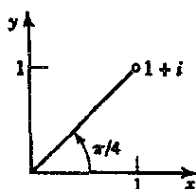
$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad |z| = \sqrt{2}, \quad \arg z = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

مقدار اصلی $\arg z$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است (شکل ۲۵۹).

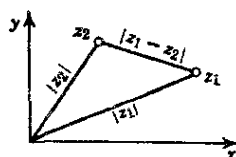
مثال ۲. شکل قطبی اعداد مختلط. مقدار اصلی

فرض کنید $z = 3 + 3\sqrt{3}i$. در این صورت $z = 6 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ ، قدر مطلق z

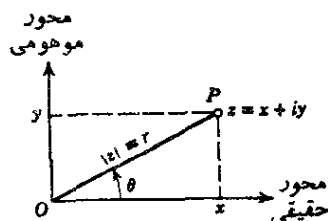
برابر است با $|z| = 6$ ، و مقدار اصلی $\arg z$ برابر است با $\frac{\pi}{3}$.



شکل ۲۵۹. مثال ۱



شکل ۲۵۸. فاصله بین دو نقطه در صفحه مختلط



شکل ۲۵۷. صفحه مختلط، شکل قطبی عدد مختلط

شکل قطبی اعداد مختلط مخصوصاً در محاسبه ضرب و تقسیم مفید است، فرض کنید

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{و} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

بنابر (۶)، بخش ۱.۱۲، حاصل ضرب z_1 و z_2 عبارت است از

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

با استفاده از قضایای معروف مربوط به سینوس و کسینوس مجموع، می توان نوشت

$$(۵) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

از اینجا قواعد مهم زیر حاصل می شود:

$$(۶) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

و

$$(۷) \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (۲\pi \text{ مضارب})$$

به طریقی مشابه، از تعریف تقسیم نتیجه می گیریم که

$$(۸) \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

و

$$(۹) \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \quad (۲\pi \text{ مضارب})$$

مثال ۳. فرمول دموآور

از (۶) و (۷) به دست می آوریم

$$z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

و از اینجا فرمول زیر، که مشهور به فرمول دموآور^۱ است، نتیجه می شود:

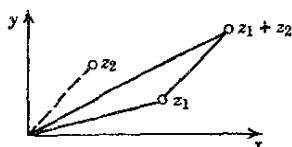
$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

نامساویها

برای اعداد مختلط دلخواه، نامساوی مثلثی (شکل ۲۶۰) مهم

$$(۱۰) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

را داریم که بکرات از آن استفاده خواهیم کرد. از آنجا که نقاط z_1 و z_2 و $z_1 + z_2$ رئوس مثلثی^۲ (شکل ۲۶۰) به اضلاع $|z_1|$ ، $|z_2|$ و $|z_1 + z_2|$ را تشکیل می دهند و یک ضلع نمی تواند از مجموع دو ضلع دیگر بزرگتر باشد، این نامساوی نتیجه می شود. اثبات صوری به خواننده وا گذار می شود (مسئله ۱۹).



شکل ۲۶۰. نامساوی مثلثی

با روش استقرا می توان نامساوی مثلثی را به هر جمع دلخواهی تعمیم داد:

$$(۱۱) \quad |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

یعنی، قدرمطلق مجموع چند عدد مختلط حداکثر برابر با مجموع قدرمطلقهای آن اعداد است. نامساویهای مفید دیگر عبارتند از

$$(۱۲) \quad |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

این نامساویها از آنجا نتیجه می شوند که به ازای هر $z = x + iy$ داریم

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x| \quad \text{و همین طور} \quad |z| \geq |y|$$

مسائل بخش ۲۰.۱۲

مطلوب است

$$۱. \quad |1+i|^2 \quad ۲. \quad |-3i| \quad ۳. \quad |\cos \theta + i \sin \theta|$$

۱. آبراهام دموآور Abraham De Moivre (۱۶۶۷-۱۷۵۴)، ریاضیدان فرانسوی که کمیتهای موهومی را وارد مثلثات کرد و درباره نظریه احتمال ریاضی کار کرد.
۲. هرگاه z_1 و z_2 بر روی خطی که از مبدأ می گذرد واقع باشند این مثلث تنهگون می شود.

$$۴. \left| \frac{1+4i}{4+i} \right| \quad ۵. \frac{z-1}{z+1} \quad ۶. \left| \frac{(2+4i)^4}{(3-4i)^3} \right| \quad ۷. \left| \frac{z}{\bar{z}} \right|$$

مقدار اصلی آوند اعداد زیر را تعیین کنید:

$$۸. -3 \quad ۹. 3+3i \quad ۱۰. 1-\sqrt{3}i \quad ۱۱. -4i$$

اعداد زیر را به شکل قطبی نمایش دهید:

$$۱۲. 3-3i \quad ۱۳. -5 \quad ۱۴. -4i \quad ۱۵. 1/(4+3i)$$

۱۶. درستی نامساوی مثلثی را برای $z_1 = -1-i$ و $z_2 = -2+3i$ تحقیق کنید.

۱۷. درستی نامساوی مثلثی را به ازای $z_1 = 5+2i$ و $z_2 = 1-4i$ تحقیق کنید.

۱۸. تحت چه شرایطی نامساوی مثلثی به تساوی تبدیل می‌شود؟

۱۹. نامساوی مثلثی را ثابت کنید.

۲۰. با استفاده از نامساوی مثلثی ثابت کنید که $|z_1+z_2| \geq |z_1|-|z_2|$.

۲۱. نشان دهید که $|x|+|y| \geq |z| \geq \frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}$. مثال بزنید.

۲۲. نشان دهید که $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

۲۳. درستی رابطه (۱۲) را به ازای $z = (4+5i)^2$ تحقیق کنید.

۲۴. (ضرب در i) نشان دهید که ضرب یک عدد مختلط در i بردار نظیر آن را به اندازه $\pi/2$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، دوران می‌دهد.

۲۵. با استفاده از شکل قطبی اعداد مختلط، یک تعبیر هندسی برای حاصل ضرب دو عدد مختلط پیشنهاد کنید. مطلب را با یک مثال، مثلاً $(3+2i)(1+i)$ روشن سازید.

۳.۱۲ منحنیها و نواحی در صفحه مختلط

منحنیها و نواحی واقع در صفحه مختلط در کارهای بعدی، بسیار مورد نیاز خواهند بود. حال برای اینکه وارد بحث شویم، بعضی انواع مهم منحنیها و نواحی و طرز نمایش آنها با معادلات و نامساویها را بررسی می‌کنیم. این امر به ما کمک خواهد کرد تا با صفحه مختلط بیشتر آشنا شویم.

چون فاصله بین دو نقطه z و a عبارت است از $|z-a|$ ، نتیجه می‌گیریم که دایره به شعاع p ، و مرکز a (شکل ۲۶۱)، را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$(۱) \quad |z-a| = \rho$$

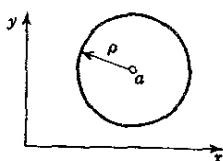
در نتیجه، نامساوی

$$(۲) \quad |z-a| < \rho$$

در مورد هر نقطه z داخل C برقرار است؛ یعنی، (۲) نقاط درونی C را نمایش می‌دهد. چنین ناحیه‌ای را قرص دایره‌ای می‌نامند، یا، دقیق‌تر بگوییم، قرص دایره‌ای باز، در مقابل قرص دایره‌ای بسته

$$|z-a| \leq \rho,$$

که متشکل از نقاط درونی C و خود C است. و قرص باز (۲) يك همسایگی از نقطه a نیز نامیده می‌شود. واضح است که a بینهایت از این همسایگیها دارد، که هر يك متناظر با مقدار معینی از $\rho (>0)$ است.



شکل ۲۶۱. دایره در صفحه مختلط

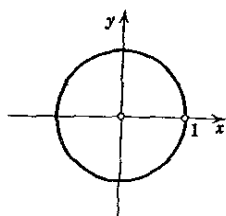
به همین نحو، نامساوی

$$|z-a| > \rho$$

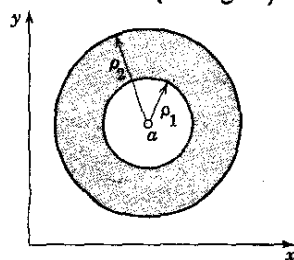
نقاط بیرونی دایره C را نمایش می‌دهد. به علاوه ناحیه بین دو دایره متحدالمرکز بدشعاعهای $\rho_1 (>0)$ و $\rho_2 (>\rho_1)$ را می‌توان به صورت

$$\rho_1 < |z-a| < \rho_2,$$

که در آن a مرکز دواير است، نمایش داد. چنین ناحیه‌ای را حلقه دایره‌ای باز یا طوق باز می‌نامند (شکل ۲۶۲).



شکل ۲۶۳. دایره یکه



شکل ۲۶۲. طوق در صفحه مختلط

معادله

$$|z| = 1$$

دایره یکه را نمایش می‌دهد، یعنی، دایره‌ای به شعاع ۱ را که مرکز آن در مبدأ است (شکل ۲۶۳) این دایره درمباحث مختلف ریاضی نقش مهمی دارد.

مثال ۱. قرص دایره‌ای

ناحیه $|z| \leq 4$ را در صفحه مختلط مشخص کنید.

حل. این نامساوی برای هر مقدار z که فاصله آن از $i - 3 = a$ بیشتر از ۴ نباشد، دقیقاً برقرار است لذا ناحیه مورد نظر یک قرص دایره‌ای بسته به شعاع ۴ و به مرکز $i - 3$ است.

مثال ۲. دایره یکه و قرص یکه

هر یک از نواحی زیر را مشخص کنید

$$(الف) \quad |z| < 1 \quad (ب) \quad |z| \leq 1 \quad (پ) \quad |z| > 1$$

حل. (الف) نقاط درونی دایره واحد. این ناحیه را قرص یکه باز گویند.
(ب) دایره واحد و نقاط درونی آن. این ناحیه را قرص یکه بسته گویند.
(پ) نقاط بیرونی دایره یکه.

آشنایی کامل دانشجو با نمایش منحنیها و نواحی در صفحه مختلط حائز اهمیت است. بنابراین باید به مسائلی که در این بخش مطرح شده توجه خاص مبذول داشت تا از مشکلاتی که ممکن است بعداً پیش آید، کاسته شود.
سرانجام، به تعریف مفاهیمی می‌پردازیم که از اهمیت کلی برخوردارند و در کارهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

اصطلاح مجموعه نقاط در صفحه مختلط به هر نوع گردآورده‌ای از نقاط، متناهی یا نامتناهی، اطلاق می‌شود. به عنوان مثال، جوابهای یک معادله درجه دوم، نقاط روی یک خط، و نقاط داخل یک دایره مجموعه‌اند.

مجموعه S را باز نامند هر گاه هر نقطه‌ی همسایگی‌ای داشته باشد که هر نقطه از آن متعلق به S باشد. مثلاً، نقاط درونی یک دایره و یا یک مربع مجموعه‌ای باز را تشکیل می‌دهند، و همین‌طور نقاط «نیم صفحه راست» $\text{Re } z = x > 0$. مجموعه متشکل از نقاط درونی دایره C و روی C («قرص دایره‌ای بسته») باز نیست، زیرا هیچ همسایگی نقاط روی C تماماً در مجموعه قرار نمی‌گیرد.

مجموعه S در صفحه مختلط را بسته نامند هر گاه مکمل آن باز باشد. مکمل مجموعه S در صفحه مختلط مجموعه تمام نقاطی از صفحه مختلط است که متعلق به S نباشند.

به عنوان مثال، نقاط داخل و روی دایره یک مجموعه ای بسته تشکیل می دهند (مثال ۲ را نیز ببینید).

یک مجموعه را کراندار نامند هر گاه تمام نقاطش در دایره ای، باشعاع به قدر کافی بزرگ، قرار داشته باشند. به عنوان مثال، نقاط داخل یک مستطیل مجموعه ای کراندار تشکیل می دهند، در حالی که نقاط روی یک خط راست مجموعه ای کراندار تشکیل نمی دهند. مجموعه باز D را همبند نامند هرگاه هر دو نقطه دلخواه آن را بتوان با خط شکسته ای که از تعدادی متناهی پاره خط تشکیل شده است به طوری، که تمام آنها متعلق به D باشد، به هم وصل کرد. مجموعه همبند باز را حوزه می نامند. لذا نقاط درونی دایره حوزه است. نقطه کرانه ای مجموعه D نقطه ای است که هر همسایگی آن هم شامل نقاطی است که به D متعلقند و هم شامل نقاطی است که به D تعلق ندارند. مثلاً، نقاط کرانه ای یک طوق، نقاط واقع بر روی دو دایره کرانه ای آن طوق هستند. واضح است که هرگاه مجموعه D باز باشد آنگاه هیچ نقطه کرانه ای به D تعلق ندارد، هرگاه D بسته باشد آنگاه هر نقطه کرانه ای به D تعلق دارد.

ناحیه مجموعه ای است متشکل از یک حوزه و، شاید، برخی ویا تمام نقاط کرانه ای آن حوزه. (یادآوری می کنیم که بعضی از مؤلفین اصطلاح «ناحیه» را برای آنچه ما حوزه می خوانیم [به تبعیت از اصطلاح متعارف امروزی] به کار می برند، و دیگران بین این دو اصطلاح تمایزی قائل نیستند).

مسائل بخش ۳.۱۲

مکانهای زیر را مشخص کنید و آنها را رسم نمایید :

$$1. \operatorname{Im} z \geq -1 \quad 2. \operatorname{Im}(z^2) \leq 2 \quad 3. \operatorname{Re}(z^2) \geq 1$$

$$4. |\arg z| < \pi/4 \quad 5. -\pi < \operatorname{Re} z < \pi \quad 6. |1/z| > 1$$

$$7. \left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 2 \quad 8. \left| \frac{z+i}{z-i} \right| = 1 \quad 9. \left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$$

$$10. \operatorname{Im} \frac{z+1}{z-1} \leq 2 \quad 11. \operatorname{Re} \frac{1}{z} > 1 \quad 12. \operatorname{Im} \frac{z+1}{z-1} \leq 1$$

۱۳. فرض کنید z_1 و z_2 اعداد مختلط دلخواهی باشند. مکان هندسی نقاط $\alpha z_1 + \beta z_2$ ، که در آن α و β حقیقی و غیرمنفی هستند و $\alpha + \beta = 1$ چیست؟

۱۴. نشان دهید که هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را می توان به صورت $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ نوشت.

۱۵. معادله $|z-1| + |z+1| = 2\sqrt{2}$ نمایش دهنده یک بیضی است. (الف) این مطلب

را با بحثی هندسی نشان دهید. (ب) آن را به طریق جبری نشان دهید.

۴.۱۲ تابع مختلط. حد. مشتق. تابع تحلیلی

اکنون بعضی از مفاهیم اساسی آنالیز مختلط را مطرح می‌کنیم، یعنی، توابع z متغیر مختلط و محدود مشتق چنین توابعی را بررسی می‌کنیم. یادآور می‌شویم که این مفاهیم شبیه مفاهیمی است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان می‌شوند. سپس توابع تحلیلی (مختلط) را تعریف می‌کنیم. این توابع در آنالیز مختلط نقش اصلی را بازی می‌کنند.

بحث را با تعریف تابعی از z متغیر مختلط شروع می‌کنیم. فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد. منظور از یک تابع تعریف شده بر S ، قاعده‌ای است که به هر z در S یک عدد مختلط یکتای w نسبت دهد. در این صورت می‌نویسیم

$$w = f(z)$$

یا $w = g(z)$ ، و غیره، یا بعضی مواقع به طور ساده $w(z)$. اینجا z در S تغییر می‌کند و متغیر مختلط نامیده می‌شود. مجموعه S را حوزه تعریف^۱ $f(z)$ می‌نامند. وقتی که z در S تغییر کند، مجموعه اعداد مختلطی را که $w = f(z)$ اختیار می‌کند برد مقادیر تابع $w = f(z)$ می‌گویند.

فرض کنید u و v قسمت‌های حقیقی و موهومی w باشند. در این صورت، چون w وابسته به $z = x + iy$ است، واضح است که در حالت کلی u و همین‌طور v به x و y بستگی دارند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

و این نشان می‌دهد که تابع مختلط $f(z)$ با دو تابع حقیقی $u(x, y)$ و $v(x, y)$ ، که هر یک به دو متغیر حقیقی x و y بستگی دارند، هم‌ارز است.

۱. این جمله‌ای استاندارد اما نارساست زیرا نیازی نیست که S حوزه‌ای طبق آنچه در بخش ۳.۱۲ تعریف شد (یعنی، مجموعه‌ای همبند و باز) باشد. گرچه در بسیاری حالات چنین است. در نوشته‌های مربوط به آنالیز مختلط گاه روابطی به کار می‌رود که ممکن است به یک مقدار z بیش از یک مقدار w نظیر کنند و بر حسب عادت چنین رابطه‌ای را تابع می‌نامند («تابع چند مقداری»). ما این قرارداد را نمی‌پذیریم بلکه فرض می‌کنیم تمام توابعی که به کار می‌بریم روابطی **تک مقداری** هستند، یعنی، توابع معمولیند.

$f(z)$ به مفهوم مقدار f در z است، اما به غلط مصطلح شده است که به آن تابع $f(z)$ می‌گویند (به جای تابع f)، و بدین طریق نمادی را هم که برای متغیر مستقل به کار می‌برند معرفی می‌کنند.

مثال ۱. تابع يك متغير مختلط

فرض کنید

$$w = f(z) = z^2 + 3z.$$

در این صورت

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = 2xy + 3y \quad \text{و} \quad u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 3x$$

در $z = x + iy = 1 + 3i$ تابع دارای مقدار زیر است:

$$(1 + 3i)^2 + 3(1 + 3i) = -5 + 15i,$$

و می توان نوشت

$$f(1 + 3i) = -5 + 15i, \quad u(1, 3) = -5, \quad v(1, 3) = 15$$

به همین طریق $f(1 + i) = 3 + 5i$ ، و غیره. بدیهی است که این تابع به ازای تمام مقادیر z تعریف شده است.

مثال ۲. تابع يك متغير مختلط

مقدار $f(z) = 3\bar{z} = 3x - 3iy$ را به ازای $z = 2 + 4i$ تعیین کنید.

حل. چون $x = 2$ و $y = 4$ ، نتیجه می گیریم $f(2 + 4i) = 6 - 12i$.
 گویند تابع $f(z)$ وقتی z به سمت z_0 میل می کند دارای حد l است هرگاه $f(z)$ در يك همسایگی از z_0 (محتملا جز در خود z_0) تعریف شده باشد و اگر به ازای هر عدد مثبت حقیقی ε (مهم نیست چقدر كوچك باشد اما صفر نباشد) بتوان يك عدد حقیقی مثبت δ پیدا کرد به قسمی که به ازای تمام مقادیر $z \neq z_0$ در قرص $|z - z_0| < \delta$ ،

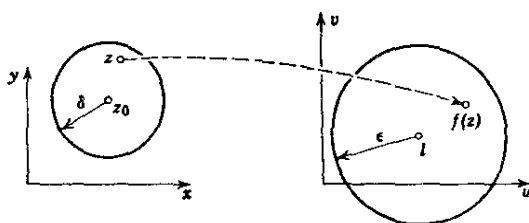
$$(1) \quad |f(z) - l| < \varepsilon.$$

این بدان معنی است که مقادیر $f(z)$ به ازای هر مقداری از z که به اندازه کافی به z_0 نزدیک باشد هر قدر که بخواهیم به l نزدیک هستند (شکل ۲۶۴)، و می نویسیم

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l.$$

خوب توجه کنید که بنا به این تعریف حد z می تواند از طریق هر امتدادی در صفحه مختلط به z_0 میل کند. در نتیجه این تعریف نسبت به تعریف حد در حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی محدودیتهای بیشتری ایجاد می کند. (این موضوع را تشریح کنید!)
 هر گاه حدی وجود داشته باشد یکتاست (ر.ك. مسئله ۱۲).

تابع $f(z)$ را در $z = z_0$ پیوسته گویند اگر $f(z_0)$ معین باشد و نیز



شکل ۲۶۴. حد

$$(۳) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

توجه کنید که بنا به تعریف حد از اینجا لازم می آید که $f(z)$ لاقلا در يك همسایگی z_0 معین باشد.

$f(z)$ را در يك حوزه پیوسته نامند اگر در هر نقطه از آن حوزه پیوسته باشد.

تابع $f(z)$ را در نقطه $z = z_0$ مشتقپذیر گویند هر گاه حد

$$(۴) \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

وجود داشته باشد. این حد را مشتق $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ نامند.

با قراردادن $z + \Delta z = z$ داریم $\Delta z = z - z_0$ و می توانیم بنویسیم

$$(۴') \quad f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

به خاطر داشته باشید که تعریف حد ایجاب می کند که $f(z)$ اقلا در يك همسایگی

z_0 تعریف شده باشد. همین طور، بنا به همان تعریف، z از هر امتدادی می تواند به z_0

میل کند. از این رو مشتقپذیری در z_0 بدین معنی است که، از هر مسیری که z به z_0 میل کند

خارج قسمت $(۴')$ همیشه به مقدار مشخصی میل می کند و تمام این مقادیر مشخص بسا هم

برابرند. این واقعیت در بررسیهای بعدی ما اهمیت زیادی دارد.

بنا به تعریف حد، معنی $(۴')$ این است که يك عدد مختلط $f'(z_0)$ وجود دارد که

به ازای آن در مقابل هر $\epsilon > 0$ می توان يك $\delta > 0$ یافت به قسمی که

$$(۵) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{وقتی که} \quad |z - z_0| < \delta$$

هر گاه $f(z)$ در نقطه z_0 مشتقپذیر باشد، در آن نقطه پیوسته هم هست (ر. ک.

مسئله ۲۸).

مثال ۳. مشتقپذیری . مشتق

تابع $f(z) = z^2$ به ازای تمام مقادیر z مشتقپذیر بوده و مشتق آن $f'(z) = 2z$ است زیرا

$$\Delta \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

تمام قواعد آشنای حساب دیفرانسیل حقیقی نظیر قاعده مشتقگیری از ثابت، توانهای صحیح z ، جمعها، حاصلضربها، و خارج قسمتهای توابع مشتقپذیر، و قاعده زنجیری در مورد مشتقگیری از تابع تابع، در مورد اعداد مختلط صادقند. در واقع اثباتهای متناظر کلمه به کلمه همانندند.

مثال ۴. $\bar{z}$ مشتقپذیر نیست

توجه به این مطلب لازم است که توابع ساده زیادی هستند که در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارند. مثلاً $f(z) = \bar{z} = x - iy$ چنین است. با قراردادن $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ داریم

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{[(x + \Delta x) - i(y + \Delta y)] - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \quad (۶)$$

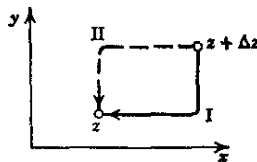
هرگاه $\Delta y = 0$ ، آنگاه خارج قسمت فوق ۱ می‌شود. اگر $\Delta x = 0$ ، مقدار فوق ۱- است. بنابراین (۶) از مسیر I شکل ۲۶۵ به ۱+ و از مسیر II شکل ۲۶۵ به ۱- میل می‌کند. بنابه تعریف حد (۶) وقتی که $\Delta z \rightarrow 0$ در هیچ z وجود ندارد. این مثال ممکن است تعجب آور باشد اما صرفاً نشان دهنده این است که مشتقپذیری يك تابع مختلط شرط نسبتاً مشکلی است. حال به هدف اصلی این بخش می‌رسیم و آن معرفی مفهوم زیر است.

تعریف (تحلیلی بودن)

تابع $f(z)$ را در حوزه D تحلیلی نامند هرگاه $f(z)$ در تمام نقاط D تعریف شده و مشتقپذیر باشد. تابع $f(z)$ را در نقطه $z = z_0$ واقع در D تحلیلی نامند هرگاه $f(z)$ در يك همسایگی z_0 تحلیلی باشد (رک. بخش ۳.۱۲).

بنابراین تحلیلی بودن $f(z)$ بدین معنی است که $f(z)$ در هر نقطه از يك همسایگی z_0 (منجمله خود z_0 زیرا، بنابه تعریف، z_0 نقطه‌ای از تمام همسایگیهایش هست) مشتق داشته باشد. انگیزه تعریف مفهوم تحلیلی بودن این واقعیت است که از نظر عملی اینکه تابعی صرفاً در يك نقطه z_0 مشتقپذیر باشد اما در هیچ همسایگی آن نقطه مشتق نشده باشد جالب نیست.

اصطلاح قدیمیتر برای تحلیلی در D منظم در D و اصطلاح نوین آن هلودیخت در D است.



شکل ۲۶۵. مسیرها در مورد (۶)

همچنین اصطلاح تابع تحلیلی را بدون آنکه به حوزه خاصی اشاره کنیم نیز به کار خواهیم برد؛ در این صورت منظور ما از این اصطلاح تابعی است که در یک حوزه مانند D تحلیلی است.

مثال ۵. چند جمله‌ای

توانهای صحیح $1, z, z^2, \dots$ و کلیتر از آن، چند جمله‌ایها، یعنی توابعی به صورت

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

که در آنها $c_0, \dots, c_n$ ثابتهای مختلطند، در تمام صفحه مختلط تحلیلی هستند. تابع $f(z) = 1/(1-z)$ همه جا جز در $z=1$ تحلیلی است.

آنالیز مختلط منحصرأ به توابع تحلیلی می‌پردازد، و اگرچه بسیاری از توابع ساده غیر تحلیلیند، مجموعه متنوع عظیم توابع تحلیلی که باقی می‌ماند رشته‌ای از ریاضیات را به وجود می‌آورد که از جنبه نظری زیباترین و از دیدگاه عملی مفیدترین رشته ریاضی است.

مسائل بخش ۲۰۱۲

مطلوب است محاسبه $f(-4+i)$ ، $f(3i)$ ، $f(2+i)$ هرگاه $f(z)$ برابر باشد با

$$1. \quad 3z^2 + z \quad 2. \quad 1/z^2 \quad 3. \quad (z+1)/(z-1)$$

قسمتهای حقیقی و موهومی توابع زیر را پیدا کنید:

$$4. \quad f(z) = 2z^2 - 3z \quad 5. \quad f(z) = 1/(1-z) \quad 6. \quad f(z) = z^2 - z^2 + z$$

فرض کنید z در ناحیه R از صفحه z تغییر می‌کند. ناحیه‌ای را (به طور دقیق) در صفحه w پیدا کنید که مقادیر متناظر $w = f(z)$ در آن قرار می‌گیرد، نمودار هر دو ناحیه را رسم کنید.

$$f(z) = 1/z, \operatorname{Re} z > 0 \quad .۸ \quad f(z) = z, |\arg z| < \pi/2 \quad .۷$$

$$f(z) = z^2, |\arg z| \leq \pi/4 \quad .۱۰ \quad f(z) = z^2, |z| > 3 \quad .۹$$

$$f(z) = 1/z^2, |\arg z| \leq \pi/4 \quad .۱۱$$

۱۲. هرگاه $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ وجود داشته باشد، نشان دهید که این حد یکتاست.

۱۳. ثابت کنید که (۲) معادل با دو رابطه زیر است :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} l, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} l.$$

۱۴. هرگاه $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ و $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = p$ نشان دهید که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = l + p,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = lp.$$

آیا توابع زیر در مبدأ پیوسته‌اند ؟

$$f(0) = 0, \quad z \neq 0 \quad \text{وقتی که} \quad f(z) = \operatorname{Re} z / |z| \quad .۱۵$$

$$f(0) = 0, \quad z \neq 0 \quad \text{وقتی که} \quad f(z) = \operatorname{Im} z / (1 + |z|) \quad .۱۶$$

$$f(0) = 0, \quad z \neq 0 \quad \text{وقتی که} \quad f(z) = (\operatorname{Re} z)^2 / |z| \quad .۱۷$$

۱۸. با استفاده از تعریف حد، نشان دهید که $f(z) = z^2$ پیوسته است.

نشان دهید که

$$[af(z) + bg(z)]' = af'(z) + bg'(z) \quad .۱۹$$

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \quad .۲۰$$

از توابع زیر مشتق بگیرید

$$(z+1)^2/(z^2+1) \quad .۲۳ \quad 1/(1-z) \quad .۲۲ \quad (z^2+1)^2 \quad .۲۱$$

مقدار مشتق توابع زیر را در z_0 حساب کنید :

$$f(z) = (z+2i)/(z-2i), z_0 = 3+i \quad .۲۵ \quad f(z) = z^2 - 2z, z_0 = 1-i \quad .۲۴$$

$$f(z) = (z^2 - 1)^2, z_0 = i. ۲۶$$

$$f(z) = iz^2 + (1+i)z, z_0 = -2+i. ۲۷$$

۲۸. هرگاه $f(z)$ در z مشتقپذیر باشد، نشان دهید که $f(z)$ در z_0 پیوسته است.

۲۹. نشان دهید که $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ در هیچ z مشتقپذیر نیست.

۳۱. نشان دهید که $f(z) = |z|^2$ فقط در $z = 0$ مشتقپذیر است. راهنمایی. از رابطه $|z + \Delta z|^2 = (z + \Delta z)(\bar{z} + \bar{\Delta z})$ استفاده کنید.

۵.۱۲ معادلات کوشی - ریمان. معادله لاپلاس

حال معیاری برای تحلیلی بودن تابع مختلط

$$(۱) \quad w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

پیدامی کنیم، نشان می‌دهیم که اگر $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد، در این صورت u و v در هر نقطه از D در معادلات موسوم به کوشی - ریمان (۵) صدق می‌کنند؛ بالعکس اگرگاه u و v پیوسته بوده، مشتقات جزئی اولی که در هر نقطه از D در (۵) صدق می‌کنند داشته باشند، در این صورت $f(z)$ در D تحلیلی است. این برنامه ما است که تفصیل آن به شرح زیر است.

فرض کنید $f(z)$ در یک همسایگی نقطه دلخواه مشخص z تعریف شده و پیوسته بوده و در آن z مشتقپذیر باشد. در این صورت، بنا به تعریف، مشتق

$$(۲) \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

در آن نقطه z وجود دارد. در اینجا Δz می‌تواند از طریق هر مسیری در یک همسایگی از z به صفر میل کند. می‌توان نوشت $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. با انتخاب مسیر I در شکل ۲۶۶ نخست فرض می‌کنیم $\Delta y \rightarrow 0$ و سپس $\Delta x \rightarrow 0$. وقتی Δy صفر شود، $\Delta z = \Delta x$ ، و بنا به (۱)،

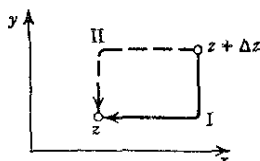
$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x}$$

۱. این فرض را می‌توان ضعیفتر کرد، مرجع زیر را ببیند

D. Menchoff, *Les conditions de monogénéité*. Paris: Hermann, 1936

اثبات ما با این فرض قویتر که مشتقات جزئی اول u و v پیوسته‌اند صورت می‌گیرد.

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}$$



شکل ۲۶۶. مسیرها در مورد (۲)

چون $f'(z)$ وجود دارد، دوحد حقیقی اخیر وجود دارند این دو مشتقات جزئی u و v نسبت به x هستند. از این رو $f'(z)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(۳) \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

به همین نحو، هر گاه مسیر II شکل ۲۶۶ را برگزینیم، نخست فرض می کنیم $\Delta x \rightarrow 0$ و سپس $\Delta z \rightarrow 0$ وقتی $\Delta z = i\Delta y$ ، و

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y};$$

یعنی،

$$(۴) \quad f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

زیرا $i/i = 1$. بنابراین وجود $f'(z)$ وجود چهار مشتق جزئی در (۳) و (۴) را ایجاب می کند.

مسلماً، هر گاه همان گونه که فرض کردیم، $f'(z)$ وجود داشته باشد، می توانیم آن را با استفاده از (۳) یا (۴) محاسبه کنیم. از این مهمتر، با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی (۳) و (۴) باهم و نیز مساوی قرار دادن قسمتهای موهومی آنها به دست می آوریم

$$(۵) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

این معادلات بنیادی را معادلات دیفرانسیل کوشی - ریمنان^۱ می نامند.

۱. ر.ک. پانوشت بخشی ۷.۲. برنهارد ریمنان Bernhard Riemann (۱۸۲۶ - ۱۸۶۶) ریاضیدان آلمانی، وی چیزی را که می توان «رهیافت هندسی» به آنالیز مختلط خواند بر پایه معادلات کوشی - ریمنان و نگاشت همدیسی توسعه داد، درحالی که ریاضیدان آلمانی کاول ←

می توانیم نتایجی را که به دست آورده ایم به صورت زیر خلاصه کنیم.

قضیه ۱ (معادلات کوشی - ریمان)

فرض کنید $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در یک همسایگی نقطه $z = x + iy$ تعریف شده و پیوسته باشد و در خود z مشتقپذیر باشد. در این صورت مشتقات جزئی مرتبه اول u و v در آن نقطه وجود دارند و در معادلات کوشی - ریمان (۵) صدق می کنند.

از این رو هر گاه $f(z)$ در یک حوزه D تحلیلی باشد، مشتقات جزئی مزبور وجود داشته، در تمام نقاط D در (۵) صدق می کنند.

مثال ۱. معادلات کوشی - ریمان

تابع $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است، و $f'(z) = 2z$ داریم $v = 2xy, u = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,$$

و معادلات کوشی - ریمان به ازای تمام مقادیر x و y صادقند. ▲

معادلات کوشی - ریمان معادلاتی بنیادی هستند. زیرا آنها نه تنها برای تحلیلی بودن یک تابع لازمند، بلکه کافی نیز هستند. دقیقتر، قضیه زیر صادق است. (شرایط این قضیه برای تحلیلی بودن کافیند اما لازم نیستند. شرایطی با محدودیت کمتر در کتابی که در پانویس ۱ صفحه ۷۷۴ ذکر شده آمده است.)

قضیه ۲ (معادلات کوشی - ریمان)

هرگاه دو تابع پیوسته حقیقی $u(x, y)$ و $v(x, y)$ از دو متغیر حقیقی x و y مشتقهای جزئی رتبه اول پیوسته ای که در حوزه ای مانند D در معادلات کوشی - ریمان صدق می کنند داشته باشند، در این صورت تابع مختلط $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در D تحلیلی است.

اثبات. فرض کنید $(x, y) : P$ نقطه مشخصی در D باشد. چون D یک حوزه است یک همسایگی از P را در بردارد. در این همسایگی نقطه ای مانند $Q : (x + \Delta x, y + \Delta y)$

وایتر اشتراس Karl Weierstrass (۱۸۱۵ - ۱۸۹۷)، آنالیز مختلط را بر پایه سری توانی بنا نهاد (ر. ک. بخشهای ۱.۱۶، ۲.۱۶). ریمان همچنین هندسه ریمانی را که پایه ریاضی نظری نسبت اینشتین است توسعه بخشید. آثار وی انگیزه ایده های زیادی در ریاضیات نوین (مخصوصاً در توپولوژی و آنالیز تابعی) شد. مرجع زیر را ببینید.

N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, General Topology, Part 1*, PP. 162 - 166, Paris; Hermann, 1966.

را می توان طوری انتخاب کرد که خط مستقیم PQ در D باشد. به دلیل فرضهای پیوستگی می توانیم قضیه مقدار میانگین بخش ۷.۸ را به کار ببریم. در نتیجه

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) = \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_1} + \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{M_2},$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y) = \Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} + \Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{M_2} \quad (۶)$$

این مشتقات در نقاط مناسب M_1 و M_2 از باره خط مزبور محاسبه شده اند. حال می نویسیم

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad \Delta z = \Delta x + i \Delta y, \quad \Delta f = f(z + \Delta z) - f(z)$$

سپس از (۶) به دست می آوریم

$$\Delta f = \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_1} + \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{M_1} + i \left[\Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} + \Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{M_2} \right]$$

با استفاده از معادلات کوشی - ریمن می توانیم $\partial v / \partial x$ و $\partial u / \partial x$ را به ترتیب جایگزین $\partial u / \partial y$ و $\partial v / \partial y$ کنیم و دریا بیم که

$$\Delta f = \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_1} + i \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_2} + i \left[\Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} + i \Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} \right]$$

با استفاده از $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ ، رابطه فوق به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta z \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_1} + i \Delta y \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_1} \right\} \\ &\quad + i \left[\Delta z \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} + \Delta x \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} \right\} \right]. \end{aligned}$$

طرفین رابطه را بر Δz تقسیم کرده، Δz را به سمت صفر میل می دهیم. سپس از آنجا که مشتقات جزئی سمت راست معادله پیوسته اند، این مشتقات به $\partial u / \partial x$ و $\partial v / \partial x$ می گوییم که در (x, y) محاسبه شده اند میل می کنند. به علاوه، چون $|\Delta x / \Delta z| \leq 1$ ، $|\Delta y / \Delta z| \leq 1$ ، حد عبارت سمت راست وجود داشته، مستقل از مسیری است که Δz از طریق آن به صفر میل می کند، می بینیم که این حد برابر است با سمت راست (۳). این بدان معنی است که $f(z)$ در D تحلیلی است و بدین ترتیب اثبات کامل است. ▲

این قضایا در عمل از اهمیت زیادی برخوردارند زیرا به کمک آنها می توان دریافت که تابع مختلط مفروضی تحلیلی است یا خیر.

مثال ۲. معادلات کوشی - ریمان

فرض کنید $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ در این صورت

$$v = 0 \quad \text{و} \quad u = x$$

معادلات (۵) برقرار نیستند، یعنی $\operatorname{Re} z$ تحلیلی نیست. به همین نحو $\operatorname{Im} z$ نیز تحلیلی نیست. در مسائل این بخش توابع ساده دیگری هم که تحلیلی نیستند مطرح می شوند. ▲
یادآور می شویم که هر گاه صورت قطبی $z = r(\cos \theta - i \sin \theta)$ را به کار ببریم و بنویسیم $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ ، در این صورت معادلات کوشی - ریمان به صورت زیر درمی آیند:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (۷)$$

مثال ۳. معادلات کوشی - ریمان به صورت قطبی

فرض کنید $f(z) = z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$ در این صورت

$$u = r^3 \cos 3\theta, \quad v = r^3 \sin 3\theta$$

از این رو

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2 \cos 3\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 3r^2 \sin 3\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

بنابراین (۷) متقاعد می شویم که $f(z) = z^3$ به ازای تمام مقادیر $z \neq 0$ تحلیلی است. (همان-طور که می دانیم تابع z^3 در $z = 0$ نیز تحلیلی است). ▲

حال رابطه ای بین آنالیز مختلط و معادله لاپلاس دومتغیری به دست می آوریم که از نظر عملی حائز اهمیت است. بعداً ثابت می کنیم (در بخش ۶.۱۴) که مشتق تابع تحلیلی $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ خود تحلیلی است. به دلیل این واقعیت مهم $u(x, y)$ و $v(x, y)$ مشتقات جزئی پیوسته از هم مرتبه ای دارند. مخصوصاً مشتقات دوم مخلوط این توابع با هم برابرند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

بامشتقگیری از معادلات کوشی - ریمان به دست می آوریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

و این به نتیجه مهم زیر منجر می شود.

قضیه ۳ (معادله لاپلاس)

قسمت حقیقی و قسمت موهومی تابع مختلط

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

که در حوزه D تحلیلی است جوابهای معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

در D هستند و مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در D دارند.

همانطور که در فصلهای ۱۳ و ۱۸ خواهیم دید، این موضوع یکی از دلایل عمده اهمیت عملی زیاد آنالیز مختلط در ریاضیات مهندسی است.

جوابی از معادله لاپلاس را که مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشد تابع همساز می نامند (بخش ۱۱-۱۱ را نیز ببینید). بنابراین قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی توابع همسازند.

هر گاه دو تابع همساز $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در یک حوزه D در معادلات کوشی - ریمان صدق کنند، یعنی هر گاه u و v قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی $f(z)$ در D باشند، در این صورت $v(x, y)$ را تابع همساز مزدوج $u(x, y)$ در D نامند. البته این مورد استفاده از کلمه «مزدوج» با استفاده ای که از آن در تعریف مزدوج عدد مختلط z یعنی $\bar{z}$ شد متفاوت است).

مزدوج یک تابع همساز را می توان از معادلات کوشی - ریمان به دست آورد و این را با مثال زیر توضیح می دهیم.

مثال ۴. تابع همساز مزدوج

تابع $u = x^2 - y^2$ همساز است و داریم $\partial u / \partial x = 2x$ ، $\partial u / \partial y = -2y$. بنابراین مزدوج u باید در معادلات زیر صدق کند

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

با انتگرال گیری از معادله اول نسبت به y به دست می آوریم

$$v = 2xy + h(x)$$

که $h(x)$ فقط به x بستگی دارد. با جایگزین کردن این v در معادله دیگر، داریم $h'(x) = 0$ ، و بنابراین، ثابت $h = c$. از این دو کلیترین تابع مزدوج $x^2 - y^2$ عبارت است از $2xy + c$ ، که c يك ثابت حقیقی است، و کلیترین تابع تحلیلی با قسمت حقیقی $x^2 - y^2$ عبارت است از $z^2 + ic$.

مسائل بخش ۵.۱۲

با استفاده از (۳) یا (۴)، مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$f(z) = az + b \quad ۱. \quad f(z) = z^2 \quad ۲. \quad f(z) = 1/z \quad ۳.$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad ۴. \quad f(z) = z + \frac{1}{z} \quad ۵. \quad f(z) = \frac{z+1}{z-2} \quad ۶.$$

۷. نشان دهید که علاوه بر (۳) و (۴)، داریم

$$(۸) \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

تحقیق کنید که جفت تابعهای زیر در معادلات کوشی - ریمنان صدق می کنند.

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y \quad ۹. \quad u = x, \quad v = y \quad ۸.$$

$$u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3 \quad ۱۰.$$

آیا توابع زیر تحلیلند؟

$$f(z) = \operatorname{Im} z \quad ۱۱. \quad f(z) = z^2 + z \quad ۱۲.$$

$$f(z) = |z|^2 \quad ۱۳. \quad f(z) = \bar{z} \quad ۱۴.$$

$$f(z) = e^x (\cos y + i \sin y) \quad ۱۵. \quad f(z) = 1/(1-z) \quad ۱۶.$$

$$f(z) = 1/z^2 \quad ۱۷. \quad f(z) = e^x \cos y \quad ۱۸.$$

$$f(z) = \arg z \quad ۱۹.$$

۲۰. (۷) را از (۵) به دست آورید.

۲۱. با استفاده از (۷)، نشان دهید که $f(z) = z^4$ تحلیلی است.

۲۲. با استفاده از (۷)، نشان دهید که $f(z) = 1/z^2$ ($z \neq 0$) تحلیلی است.

نشان دهید که توابع زیر همسازند و تابع تحلیلی متناظر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را پیدا کنید.

$$u = x \quad .۲۳ \quad v = xy \quad .۲۴ \quad u = xy \quad .۲۵$$

$$u = \sin x \cosh y \quad .۲۶ \quad v = -\sin x \sinh y \quad .۲۷ \quad u = x/(x^2 + y^2) \quad .۲۸$$

$$.۲۹ \text{ تحت چه شرایطی } u = ax^2 + bxy + cy^2 + k \text{ همساز است؟}$$

$$.۳۰ \text{ تحت چه شرایطی } e^{\alpha x} \cos \beta y \text{ همساز است؟}$$

$$.۳۱ \text{ هرگاه } v \text{ تابع همساز مزدوج } u \text{ باشد نشان دهید که } u \text{ تابع همساز مزدوج } v \text{ — است.}$$

$$.۳۲ \text{ با چه شرطی } \cos \alpha x \cosh \beta y \text{ همساز است؟}$$

$$.۳۳ \text{ هرگاه } f(z) \text{ در حوزه } D \text{ تحلیلی باشد و در } D \text{ داشته باشیم ثابت } |f(z)| = \text{ نشان دهید که ثابت } f(z) =$$

$$.۳۴ \text{ هرگاه } f(z) \text{ در حوزه } D \text{ تحلیلی باشد و در } D \text{ داشته باشیم ثابت } \operatorname{Re} f(z) = \text{ نشان دهید که ثابت } f =$$

$$.۳۵ \text{ هرگاه } f(z) \text{ در حوزه } D \text{ تحلیلی باشد و در همه نقاط } D \text{ داشته باشیم } f'(z) = 0 \text{ نشان دهید که ثابت } f(z) =$$

۶.۱۲ تابع گویا. ریشه

بقیه بخشهای این فصل به مهمترین توابع مختلط مقدماتی مانند توانها، تابع نمایی، لگاریتم، توابع مثلثاتی، و غیره اختصاص داده شده است. خواهیم دید که می توان توابع فوق را به سادگی طوری تعریف کرد که وقتی متغیرهای مستقل آنها مقادیر حقیقی اختیار می کنند با توابع حقیقی آشنا یکسان شوند. بعضی توابع مختلط از خواص جالبی برخوردارند که وقتی متغیر مستقل محدود به مقادیر حقیقی باشد این خواص مشاهده نمی شوند. از آنجا که این توابع مقدماتی در کاربردها فراوان مورد نیاز هستند، دانشجو باید این مطالب را به دقت تعقیب کند. بعلاوه، داشتن اطلاع جامع درباره این توابع خاص برای درک بهتر مطالب عمومیتر مفید است.

برخی از این توابع در سرتاسر صفحه مختلط تحلیلیند. چنین توابعی را توابع نام خوانند.

توانهای

$$(۱) \quad w = z^n \quad n = 0, 1, \dots$$

در سرتاسر صفحه تحلیلیند، بنابراین آنها توابع نام هستند. همچنین است تابع

$$(۲) \quad w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n \quad (c_n \neq 0)$$

که در آن $c_0, \dots, c_n$ ثابتهای (مختلط یا حقیقی) هستند. چنین تابعی را چند جمله‌ای یا تابع گویای نامند. نمای n را درجه چند جمله‌ای گویند. بررسی چند جمله‌ایها موضوع اصلی جبر کلاسیک است.

خارج قسمت دو چندجمله‌ای $p(z)$ و $q(z)$ را تابع گویا (کسری) نامند. چنین تابعی

$$(۳) \quad w = \frac{p(z)}{q(z)}$$

به ازای تمام مقادیر z که به ازای آنها $q(z)$ صفر نباشد تحلیلی است؛ در اینجا فرض می‌کنیم که عاملهای مشترک $p(z)$ و $q(z)$ حذف شده‌اند. تابع گویایی که به شکل ساده

$$(c \neq 0) \quad \frac{c}{(z - z_0)^m}$$

است کسر جزئی نامیده می‌شود؛ در اینجا c و z_0 اعداد مختلط بوده، m عدد صحیح مثبتی است. در جبر ثابت می‌کنند که هر تابع کسری را می‌توان به صورت مجموع یک چندجمله‌ای و تعداد متناهی کسر جزئی نوشت.

هر گاه $z = w^n (n = 1, 2, \dots)$ در آن صورت با هر مقدار w یک مقدار z متناظر است. می‌بینیم که متناظر به هر $z \neq 0$ دقیقاً n مقدار متمایز w وجود دارد. هر یک از این مقادیر را یک ریشه n ام z نامیده، می‌نویسیم

$$(۴) \quad w = \sqrt[n]{z}$$

بنابراین نماد بالا چند مقدادی، یعنی n مقدادی است، برخلاف اعداد حقیقی که در آنجا معمولاً این تابع را یک مقدادی قرارداد می‌کنند n مقدار $\sqrt[n]{z}$ را به سادگی می‌توان به ترتیب زیر معین کرد. می‌نویسیم

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{و} \quad w = R(\cos \phi + i \sin \phi)$$

سپس بنا به فرمول دموآور (ر.ک. بخش ۲۰۱۲) نتیجه می‌شود که

$$z = w^n = R^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

بامساوی هم قرارداد قدر مطلقهای طرفین داریم

$$R = \sqrt[n]{r} \quad \text{یا} \quad R^n = r$$

ریشه n ام این معادله مثبت و حقیقی است و بنابراین به طور یکتا معین می‌شود. بامساوی هم قرار-

دادن آوندها به دست می آوریم

$$\phi = \frac{\theta}{n} + \frac{\gamma k \pi}{n} \quad \text{یا} \quad n\phi = \theta + \gamma k \pi$$

که در آن k يك عدد صحيح است. در نتیجه $\sqrt[n]{z}$ ، به ازای $z \neq 0$ ، دارای n مقدار متمایز زیر است:

$$(\Delta) \quad \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + \gamma k \pi}{n} + i \sin \frac{\theta + \gamma k \pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

این n مقدار روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ به مرکز واقع در مبدأ قرار داشته، رئوس يك n ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند.

مقداری از $\sqrt[n]{r}$ که با در نظر گرفتن مقدار اصلی $\arg z$ (ر. ک. بخش ۲۰۱۲) و به ازای $k=0$ از (۵) حاصل می‌شود مقدار اصلی $w = \sqrt[n]{z}$ نامیده می‌شود.

مثال ۱. ریشه دوم

$w = \sqrt{z}$ دارای دومقدار

$$z_1 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{\gamma} + i \sin \frac{\theta}{\gamma} \right)$$

و

$$z_2 = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{\gamma} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{\gamma} + \pi \right) \right] = -z_1$$

است که نسبت به مبدأ متقارن هستند. مثلاً

$$\sqrt[4]{i} = \pm \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \pm (\sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2})$$

مثال ۲. ریشه سوم عدد حقیقی مثبت

هرگاه z حقیقی مثبت باشد، در آن صورت $w = \sqrt[3]{z}$ مقدار حقیقی $\sqrt[3]{r}$ و مقادیر مختلط مزدوج

$$\sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\gamma \pi}{3} + i \sin \frac{\gamma \pi}{3} \right) = \sqrt[3]{r} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

و

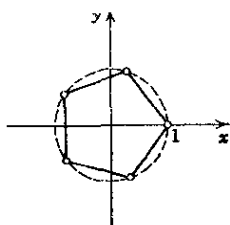
$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{r} \left(-\frac{1}{\varphi} - \frac{\sqrt{\varphi}}{\varphi} i \right)$$

را دارد. مثلاً، $\sqrt[3]{1} = 1$ ، $-\frac{1}{\varphi} \pm \frac{\sqrt{\varphi}}{\varphi} i$ ، (شکل ۲۶۷). بدیهی است که اینها ریشه‌های معادله $w^3 - 1 = 0$ هستند.

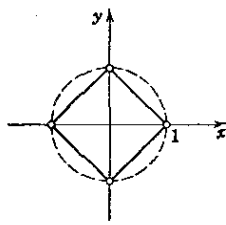
مثال ۳. ریشه n ام واحد

از (۵) به دست می‌آوریم

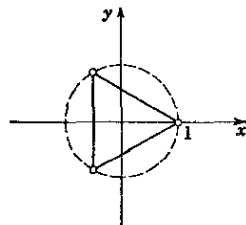
$$(۶) \quad \sqrt[n]{1} = \cos \frac{\varphi k \pi}{n} + i \sin \frac{\varphi k \pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$



شکل ۲۶۹. $\sqrt[5]{1}$



شکل ۲۶۸. $\sqrt[4]{1}$



شکل ۲۶۷. $\sqrt[3]{1}$

هرگاه مقدار متناظر با $k=1$ را با w نمایش دهیم در این صورت n مقدار $\sqrt[n]{1}$ را می‌توان به صورت $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$ نوشت. این مقادیر رئوس n ضلعی منتظمی را که در دایره واحد محاط شده و یک رأس آن نقطه 1 است تشکیل می‌دهند. هر یک از این n مقدار را یک ریشه n ام واحد می‌نامند. مثلاً، مقادیر $\sqrt[4]{1}$ عبارتند از $1, i, -1, -i$ (شکل

۲۶۸). شکل ۲۶۹ $\sqrt[5]{1}$ را نشان می‌دهد.

هرگاه w_1 یکی از ریشه‌های n ام عدد مختلط دلخواه z باشد، در آن صورت

$$w_1, w_1 w, w_1 w^2, \dots, w_1 w^{n-1}$$

n مقدار $\sqrt[n]{z}$ هستند، چرا که ضرب کردن w در w_1 به معنی افزایش آن‌ها به میزان $2k\pi/n$ است.

مسائل بخش ۶.۱۲

تمام مقادیر ریشه‌های زیر را تعیین کنید و نقاط متناظر با آنها را در صفحه مختلط نمایش دهید.

$$\begin{array}{llllll} ۱. & \sqrt{i} & ۲. & \sqrt{-i} & ۳. & \sqrt{-۴} & ۴. & \sqrt{۱-i/\sqrt{3}} \\ ۵. & \sqrt[3]{-۱} & ۶. & \sqrt[3]{i} & ۷. & \sqrt[3]{-i} & ۸. & \sqrt[3]{۱+i} \\ ۹. & \sqrt[4]{-۱} & ۱۰. & \sqrt[5]{-۱} & ۱۱. & \sqrt[6]{-۱} & ۱۲. & \sqrt[8]{۱} \end{array}$$

تمام جوابهای معادلات زیر را پیدا کنید و آنها را در صفحه مختلط نمایش دهید.

$$\begin{array}{llll} ۱۳. & z^3 = ۲۷ & ۱۴. & z^4 + ۵z^2 = ۳۶ \\ ۱۵. & z^4 + ۸۱ = ۰ & ۱۶. & z^6 + ۷z^3 = ۸ \end{array}$$

۱۷. مجموع n ریشه n ام واحد را پیدا کنید: (الف) به ازای $n=۲$ و $n=۴$ ، (ب) به ازای n دلخواه.

۱۸. (ریشه دوم) ثابت کنید

$$\sqrt{z} = \pm [\sqrt{|z|+x}/2 + (\text{sign } y)i\sqrt{(|z|-x)/2}] \quad (z=x+iy)$$

که در آن $\text{sign } y = ۱$ اگر $y \geq ۰$ ، $\text{sign } y = -۱$ اگر $y < ۰$ ، و تمام ریشه‌های دوم اعداد مثبت دارند. راهنمایی. بنویسید $\sqrt{z} = w = u+iv$ ، و u^2 و v^2 را بر حسب x و y بدست آورید.

با استفاده از نتیجه مسئله ۱۸ مقادیر زیر را بیابید:

$$\begin{array}{llll} ۱۹. & \sqrt{۴i} & ۲۰. & \sqrt{۳+۴i} \\ ۲۱. & \sqrt{-۵+۱۲i} & ۲۲. & \sqrt{-۸-۶i} \end{array}$$

با استفاده از نتیجه مسئله ۱۸ معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{llll} ۲۳. & z^2 + z + ۱ = i & ۲۴. & z^2 - ۳z + ۳ = i \\ ۲۵. & z^2 - (۵+i)z + ۸+i = ۰ & ۲۶. & z^4 - ۳(۱+۲i)z^2 = ۸-۶i \end{array}$$

۲۷. دو معادله زیر را پس از تبدیل آنها به یک معادله بر حسب y و $x+iz$ حل کنید:

$$x^4 - ۶x^2y^2 + y^4 = ۴, \quad xy(x^2 - y^2) = ۱ \quad (x, y \text{ حقیقی هستند})$$

۲۸. $z^4 + ۴$ را به صورت حاصلضرب عوامل درجه دوم باضرایب حقیقی نمایش دهید.

۲۹. $z^4 + ۱$ را به صورت حاصلضرب عوامل درجه دوم باضرایب حقیقی نمایش دهید.

۳۵. فرض کنید P ، ضلعی منتظمی باشد که رئوس آن بردایرهٔ واحد قرار دارند. حاصلضرب طولهای $n-1$ پاره خط مستقیمی را که يك رأس مشخص P را به $(n-1)$ رأس دیگر وصل می کنند پیدا کنید.

۲.۱۲ تابع نمایی

تابع نمایی حقیقی e^x (که به صورت $\exp x$ نیز نوشته می شود) دارای خواص

$$(1) \quad (e^x)' = e^x$$

$$(2) \quad e^{(x_1+x_2)} = e^{x_1} e^{x_2}$$

است و سری مکلاورن^۱ آن

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

است. تابع نمایی را به ازای عدد مختلط $z = x + iy$ به صورت e^z نمایش می دهیم و آن را برحسب توابع حقیقی e^x ، $\cos y$ و $\sin y$ به ترتیب زیر تعریف می کنیم

$$(4) \quad e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (\text{که به صورت } \exp z \text{ نیز نوشته می شود})$$

این تعریف ملهم از واقعیهای زیر است. در صورتی که $z = x$ حقیقی باشد، آنگاه $e^z = e^x$. از معادلات کوشی - ریمن نتیجه می شود که e^z به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است. بنا به (۳) از بخش ۵.۱۲ می بینیم که

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

یعنی،

$$(5) \quad (e^z)' = e^z$$

به علاوه با انتخاب $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ و اعمال فرمولهای مربوط به سینوس و کسینوس مجموع [ر.ک. (۶) ضمیمه ۳]، به سادگی درمی یابیم که

$$(6) \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

که همانند (۲) است. بخصوص، وقتی که $z_1 = x$ و $z_2 = iy$ داریم

$$(7) \quad e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

بعداً (در فصل ۱۶) خواهیم دید که توابع تحلیلی مختلط دارای بسط سری تیلوری

۱. کلین مکلاورن Colin Maclaurin (۱۶۹۸ - ۱۷۴۶)، ریاضیدان اسکاتلندی.

مشابه سری تیلور توابع حقیقی هستند. بدین ترتیب به سادگی نتیجه می شود که هر گاه در (۳) به جای x قرار دهیم z ، سری مک لورن e^z به دست می آید.

از (۴) فرمول اولر

$$(۸) \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

به دست می آید. این فرمول نشان می دهد که شکل قطبی عدد مختلط $z = x + iy$ (ر. ک. بخش ۲۰۱۲) را حالا می توان چنین نوشت:

$$(۹) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

به علاوه، از (۸) داریم

$$(۱۰) \quad |e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1;$$

یعنی، تابع نمایی به ازای نماهای موهومی محض، قدر مطلق برابر یک دارد؛ نتیجه ای که دانشجو باید به خاطر بسپارد. در نتیجه، بنا به (۴)،

$$(۱۱) \quad |e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y.$$

چون $\cos 2\pi = 1$ و $\sin 2\pi = 0$ ، از (۸) به دست می آید

$$(۱۲) \quad e^{2\pi i} = 1$$

به همین ترتیب

$$(۱۳) \quad e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1, \quad e^{i/2} = i, \quad e^{-i/2} = -i.$$

از (۱۲) و (۶) داریم

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$$

و این نشان می دهد که e^z تابعی است دوره ای با دوره موهومی $2\pi i$. بنا بر این

$$(۱۴) \quad e^{z \pm 2n\pi i} = e^z \quad (n = 0, 1, \dots).$$

از آنجا که $w = e^z$ دوره ای است، می توان فرض کرد که $w = e^z$ کلیه مقادیر خود را در

۱. از این سری می توان برای تعریف e^z استفاده کرد. برای نیل به این هدف باید نخست بخشهای ۱.۱۶ و ۲.۱۶ را بررسی کرد. همچنان که در مثال ۲ بخش ۴.۱۶ نشان داده شده است، خواص e^z از این سری نتیجه می شود. روش فعلی ما این امتیاز را دارد که زودتر میحت انتگرال (در فصل ۱۴) را مطرح می کنیم و ارتباط نزدیکتری بین بررسی عمومی سریها (فصل ۱۵) و سریهای تیلور ولوران (فصل ۱۶)، که در آنها انتگرال مورد نیاز است، خواهیم داشت. همچنین روش فوق مراعات حال دانشجویانی را که در این مراحل نخست اطلاعات کافی درباره سریها ندارند می کند.

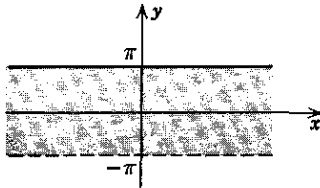
نوار (شکل ۲۷۰)

$$(۱۵) \quad -\pi < y \leq \pi$$

اختیار می‌کند. این نوار نامتناهی را ناحیه بنیادی e^z می‌نامند.

از (۶) به دست می‌آوریم $e^0 = e^z e^{-z} = 1$ ، که نتیجه می‌دهد

$$(۱۶) \quad e^z \neq 0 \quad \text{به ازای تمام مقادیر } z.$$



شکل ۲۷۰. ناحیه بنیادی تابع نمایی e^z

مسائل بخش ۲۰۱۲

۱. با استفاده از معادلات کوشی - ریمن، نشان دهید که e^z به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است.

۲. (۶) را، به روشی که در متن گفته شد، استنتاج کنید.

مقدار e^z را پیدا کنید در صورتی که z برابر باشد با

$$۳ + \pi i \quad .۶ \quad ۱ + i \quad .۵ \quad -\pi i / ۲ \quad .۴ \quad \pi i / ۲ \quad .۳$$

مطلوب است محاسبه قسمت‌های حقیقی و موهومی

$$e^{z^2} \quad .۷ \quad e^{-iz} \quad .۸ \quad e^{z^2} \quad .۹ \quad e^{z^2} \quad .۱۰$$

عبارت‌های زیر را به شکل قطبی (۹) بنویسید.

$$\sqrt{z}, \sqrt[n]{z} \quad .۱۴ \quad ۲ - ۲i \quad .۱۳ \quad ۳ - ۴i \quad .۱۲ \quad \sqrt{i}, \sqrt{-i} \quad .۱۱$$

تمام جواب‌های معادلات زیر را پیدا کنید و تعدادی از آنها را در صفحه مختلط ترسیم کنید.

$$e^z = ۱ \quad .۱۵ \quad e^z = ۳ \quad .۱۶ \quad e^z = -۲ \quad .۱۷ \quad e^{z^2} = ۱ \quad .۱۸$$

تمام مقادیری از z را بیابید که به ازای آنها

$$|e^{-z}| < ۱ \quad .۲۱ \quad e^{iz} = \overline{e^{iz}} \quad .۲۰ \quad e^z = \overline{e^z} \quad .۱۹$$

۲۲. e^z حقیقی باشد

۲۳. نشان دهید که $u = e^{xy} \cos(x^2/2 - y^2/2)$ همسازاست و مزدوج آن را بیابید.

۲۴. شرایط $f'(z) = f(z)$ ، $f(x+iy) = e^z$ ، تابع $f(z)$ (که به ازای تمام مقادیر z تحلیلی فرض می شود) را به طور یکتا مشخص می کنند، یعنی $f(z) = e^z$ همان طور که در (۴) تعریف شد. این مطلب را ثابت کنید. (از معادلات کوشی - ریمن استفاده کنید.)

۲۵. رفتار e^z را وقتی $|z| \rightarrow \infty$ در امتداد شعاعهای مختلف بررسی کنید، مثلاً به ازای $\pi/2, \pi, \arg z = 0$.

۸.۱۲ توابع مثلثاتی و هذلولی گون

از فرمول اوایلر، (۸) بخش قبل، به دست می آوریم

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

این فرمولها تعاریف زیر را برای عدد مختلط $z = x + iy$ متبادر به ذهن می سازند:

$$(۱) \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

به علاوه، مطابق با تعریفهای آشنای حساب حقیقی تعریف می کنیم

$$(۲) \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$(۳) \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

چون e^z به ازای تمام مقادیر تحلیلی است، توابع $\sin z$ و $\cos z$ نیز تحلیلی هستند. توابع $\tan z$ و $\sec z$ جز در نقاطی که $\cos z$ صفر است، و $\cot z$ و $\csc z$ جز در نقاطی که $\sin z$ صفر است تحلیلیند.

توابع $\cos z$ و $\sec z$ توابع زوج هستند و بقیه توابع فرد:

$$(۴) \quad \begin{aligned} \cos(-z) &= \cos z & \sin(-z) &= -\sin z \\ \cot(-z) &= -\cot z & \tan(-z) &= -\tan z \end{aligned}$$

و به همین ترتیب، از آنجا که تابع نمایی دوره‌ای است، توابع مثلثاتی نیز دوره‌ای هستند و داریم

$$\begin{aligned} \cos(z \pm 2n\pi) &= \cos z & \sin(z \pm 2n\pi) &= \sin z \\ \tan(z \pm n\pi) &= \tan z & \cot(z \pm n\pi) &= \cot z \end{aligned} \quad (5)$$

که در آنها $n = 0, 1, \dots$

از این تعاریف نتیجه می‌گیریم که تمام فرمولهای آشنای توابع مثلثاتی حقیقی برای مقادیر مختلط نیز صادقند. مثلاً

$$(6) \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z,$$

$$\begin{aligned} \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1 \\ \sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \end{aligned} \quad (7)$$

از (۱) درمی‌یابیم که فرمول اولر در مورد مقادیر مختلط صادق است.

$$(8) \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

با استفاده از (۷)، به آسانی می‌توان $\cos z$ و $\sin z$ را بر حسب توابع حقیقی نمایش داد. نخست داریم

$$\begin{aligned} \cos(x+iy) &= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\ \sin(x+iy) &= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \end{aligned} \quad (9)$$

حال از (۱) و تعریف کسینوس و سینوس هذلولی گون نتیجه می‌شود که

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y, \quad \sin iy = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^y) = i \sinh y.$$

و از اینجا نمایش مورد نظر

$$\begin{aligned} \cos(x+iy) &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \sin(x+iy) &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned} \quad (10)$$

به دست می‌آید که برای محاسبه عدی $\cos z$ و $\sin z$ مفید است.

کسینوس و سینوس هذلولی گون متغیر مختلط z با فرمولهای زیر تعریف می شوند

$$(۱۱) \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

که با تعریفهای آشنا در مورد متغیر حقیقی مطابقت دارد [ر. ک. (۱۷) ضمیمه ۳]. این توابع در تمامی صفحه تحلیلی هستند.

از (۱۱) و (۱) نتیجه می شود که

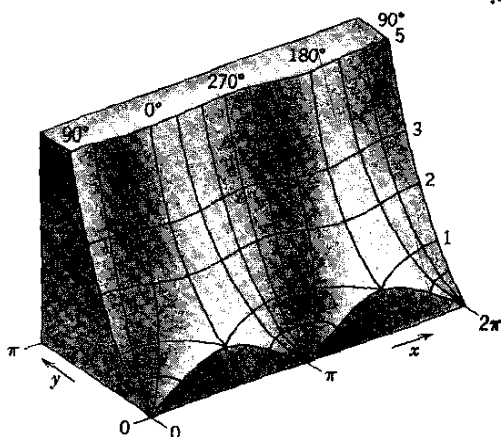
$$(۱۲) \quad \cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i \sin(iz)$$

نظیر حساب حقیقی تعریف می کنیم

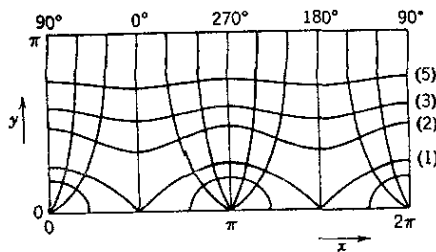
$$(۱۳) \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$(۱۴) \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

قدر مطلق $|f(z)|$ یک تابع تحلیلی $f(z)$ ، $z = x + iy$ ، تابعی حقیقی از دو متغیر حقیقی x و y است و، بنابراین، می توان آن را با سطحی در فضای سه بعدی نمایش داد؛ به هر نقطه (x, y) در صفحه xy نقطه ای با مختصات دکارتی $(x, y, |f|)$ در فضا نظیر می شود و این چنین نقاط تشکیل دهنده سطحی هستند که سطح پیمانه ای $f(z)$ نامیده می شود. بر روی این سطح می توان بعضی از منحنیهای ثابت $|f|$ و ثابت $\arg|f|$ را رسم کرد؛ به این ترتیب نمایش ترسیمی مفیدی از یک تابع تحلیلی و توضیح هندسی آن به دست می آید.



شکل ۲۷۱. سطح پیمانه ای $\sin z$



شکل ۲۷۲. منحنیهای ثابت $|\sin z|$ و ثابت $\arg(\sin z)$ در صفحه z

شکل ۲۷۱ قسمتی از سطح پیمانه‌ای $f(z) = \sin z$ و بعضی از منحنیهای ثابت $|\sin z|$ و ثابت $\arg(\sin z)$ را بر روی سطح نشان می‌دهد. شکل ۲۷۲ تصویر قائم این منحنیها بر صفحه xy را نشان می‌دهد؛ این نمایش ترسیمی تابع سینوسی مختلط رایج است و در مهندسی برق به کار می‌رود. سطوح پیمانه‌ای خواص هندسی جالبی دارند که در مرجع [C۸] ضمیمه ۱ بررسی شده‌اند.

مسائل بخش ۸.۱۲

۱. نشان دهید که $\sin z$ ، $\cosh z$ و $\sinh z$ به ازای تمام مقادیر z تحلیلی هستند.

۲. (۲) را ثابت کنید ۳. (۵) را از (۱) به دست آورید

۴. (۶) را ثابت کنید ۵. (۷) را ثابت کنید

۶. (۱۲) را ثابت کنید.

مطلوب است

۷. $|\cos z|$ ۸. $|\sin z|$ ۹. $|\tan z|$

۱۰. $\operatorname{Re} \tan z$ ۱۱. $\operatorname{Re} \cot z$ ۱۲. $\operatorname{Re} \sec z$

عبارت زیر را با استفاده از جدول A۱ ضمیمه ۴ محاسبه کنید:

۱۳. $\sin i$ ۱۴. $\cosh i$ ۱۵. $\cos(1+2i)$

۱۶. $\sin(1.7+1.5i)$ ۱۷. $\sinh(2+i)$ ۱۸. $\cos(1.7+1.5i)$

تمام جوابهای معادلات زیر را بیابید.

$$\cosh z = 0 \quad .21 \quad \sin z = 1000 \quad .20 \quad \cos z = 5 \quad .19$$

$$\sin z = i \sinh 1 \quad .24 \quad \cosh z = 0.5 \quad .23 \quad \sinh z = 0 \quad .22$$

نشان دهید که:

$$\sin z = -i \sinh iz \text{ و } \cos z = \cosh iz \quad .25$$

$$(\sinh z)' = \cosh z \text{ و } (\cosh z)' = \sinh z \quad .26$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \quad .27$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \quad \text{و}$$

$$|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y \text{ و } |\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y \quad .28$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad .29$$

$$\cot z \neq \pm i, \quad z \text{ به ازای تمام مقادیر } z \quad .30$$

$$\tanh z \text{ دارای دوره } \pi i \text{ است.} \quad .31$$

$$.32 \text{ تمام } z \text{ هایی که به ازای آنها } \cos z = 0, \text{ حقیقتیند.}$$

$$.33 \text{ تمام } z \text{ هایی که به ازای آنها } \sin z = 0, \text{ حقیقتیند.}$$

$$.34 \text{ با استفاده از (۱)، نشان دهید } \cos^4 \theta = \frac{1}{8} (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3) \quad .34$$

$$.35 \text{ با استفاده از (۸)، بخش ۷.۱۲ و } z = e^{i\theta}/2, \quad 1 + z + z^2 + \dots = 1/(1-z) \quad .35$$

نشان دهید که

$$1 + \frac{1}{4} \cos \theta + \frac{1}{9} \cos 2\theta + \frac{1}{16} \cos 3\theta + \dots = \frac{4 - 2 \cos \theta}{5 - 4 \cos \theta}$$

۹.۱۲ نگاریم. توان عمومی

لگاریتم طبیعی $z = x + iy$ با $\ln z$ گاهی نیز با $\log z$ نمایش داده شده، به صورت معکوس تابع نمایی تعریف می‌شود، یعنی $w = \ln z$ با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$(1) \quad e^w = z$$

به ازای هر $z \neq 0$.

با قراردادن $w = u + iv$ و $z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta}$ در (۱)، داریم

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = r e^{i\theta}.$$

قدرمطلقهای طرفین رابطه فوق باید مساوی باشند. قدرمطلق $e^u e^{iv}$ برابر است با e^u زیرا v حقیقی است و ازاین رو $|e^{iv}| = 1$ ؛ ر.ک. (۱۵) بخش ۷.۱۲. چون $r e^{i\theta}$ دارای قدرمطلق r است به دست می‌آوریم:

$$u = \ln |z| \quad \text{یا} \quad e^u = |z| = r$$

$\ln |z|$ ، لگاریتم طبیعی حقیقی مقدماتی عدد مثبت $|z|$ است. به همین نحو آوندهای طرفین باید مساوی باشند:

$$v = \theta = \arg z$$

بنابراین

$$(۲) \quad \ln z = \ln |z| + i \arg z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arg(x + iy).$$

چون آوند z با مقادیری که اختلاف آنها از هم مضارب صحیح 2π است مشخص می‌شود، لگاریتم طبیعی مختلط چند مقداره نامتناهی است. مقداری از $\ln z$ را که متناظر با مقدار اصلی $\arg z$ ، یعنی

$$-\pi < \arg z \leq \pi \quad (\text{بخش } ۲.۱۲)$$

است را مقدار اصلی $\ln z$ نامیده، اغلب با $\text{Ln } z$ نشان می‌دهند. بدیهی است که در این صورت سایر مقادیر $\ln z$ به شکل زیرند:

$$(۳) \quad \ln z = \text{Ln } z \pm 2n\pi i \quad (n = 1, 2, \dots);$$

قسمتهای حقیقی آنها یکی است و تفاوت قسمتهای موهومی آنها مضارب 2π است، و این موضوع با این واقعیت که $e^{2\pi i}$ دوره‌ای است و دوره موهومی آن $2\pi i$ است مطابقت دارد. همچنین، هرگاه z حقیقی مثبت باشد، مقدار اصلی $\arg z$ صفر است، و مقدار اصلی $\ln z$ با لگاریتم طبیعی حقیقی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آموخته‌ایم یکی می‌شود. هرگاه z حقیقی منفی باشد مقدار اصلی $\arg z$ برابر π می‌شود، و در این صورت

$$\text{Ln } z = \ln |z| + \pi i$$

مثال ۱. لگاریتم طبیعی. مقدار اصلی

$$\ln(-1) = \pm \pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i, \dots, \quad \text{Ln}(-1) = \pi i$$

$$\ln i = \frac{\pi}{2}i, \quad -\frac{3\pi}{2}i, \quad \frac{5\pi}{2}i, \quad -\frac{7\pi}{2}i, \quad \frac{9\pi}{2}i, \dots, \quad \text{Ln } i = \frac{\pi}{2}i$$

$$\Delta \quad \text{Ln}(-i) = -\frac{\pi}{2}i, \quad \text{Ln}(-2-2i) = \ln \sqrt{8} - \frac{3}{2}\pi i.$$

روابط آشنایی که درباره لگاریتم طبیعی به کار می‌بریم برای مقادیر مختلط نیز صادقند، یعنی

$$(الف) \quad \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \quad (ب) \quad \ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2 \quad (۴)$$

اما این روابط را بدین ترتیب باید شناخت که هر مقداری از یک طرف یکی از مقادیر طرف دیگر نیز هست.

مثال ۲. مثالی از صورت مختلط روابط تابعی (۴)

فرض کنید

$$z_1 = z_2 = e^{\pi i} = -1$$

اگر

$$\ln z_1 = \ln z_2 = \pi i,$$

انتخاب کنیم، در این صورت (۴الف) به ما اجازه می‌دهد بنویسیم $\ln(z_1 z_2) = \ln 1 = 2\pi i$ ؛ این رابطه در مورد مقدار اصلی صادق نیست، $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln} 1 = 0$.

با به کار بردن (۳) بخش ۵۰۱۲، در (۲)، همین بخش، درمی‌یابیم

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \frac{\partial}{\partial x} (\arg z)$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z};$$

یعنی، مشتق لگاریتم طبیعی عبارت است از

$$(۵) \quad \frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0).$$

از این رو مقدار اصلی $\text{Ln} z (z \neq 0)$ ، که تک مقداری و بنابراین یک تابع به تعبیر معمولی است، در حوزه $-\pi < \arg z < \pi$ — صفحه z تحلیلی است، یعنی در تمامی صفحه به جز نقاط واقع بر محور حقیقی منفی (جایی که در آن قسمت موهومی تابع حتی پیوسته نیست و جهشی به اندازه 2π دارد).

توان عمومی عدد مختلط $z = x + iy (z \neq 0)$ با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$(۶) \quad z^c = e^{c \ln z} \quad (c \text{ مختلط، } z \neq 0).$$

چون $\ln z$ چند مقداری نامتناهی است، z^c در حالت کلی، چند مقداری خواهد بود. مقدار خاص

$$z^c = e^{c \operatorname{Ln} z}$$

را مقدار اصلی z^c نامند.

هرگاه $1, 2, \dots, c^n$ ، در آن صورت z^n يك مقداری است و با توان n ام معمولی یکی است. هرگاه $1, -2, -1, c$ ، وضعیت مشابهی وجود دارد. هرگاه $c = 1/n$ که در آن $2, 3, \dots, n$ در آن صورت

$$z^c = \sqrt[n]{z} = e^{(1/n) \operatorname{Ln} z} \quad (z \neq 0),$$

به نمایی که معین می شود می توان مضارب $2\pi i/n$ را افزود، و به این ترتیب n مقدار متمایز برای ریشه n ام به دست می آید که این با نتیجه بخش ۶.۱۲ وفق می دهد. اگر $c = p/q$ ، خارج قسمت دو عدد صحیح مثبت باشد، وضعیت مشابهی داریم، و z^n مقادیر متمایز متناهی دارد. معذک، هرگاه c عدد گنگ حقیقی یا عدد مختلط باشد، در آن صورت z^c به طور نامتناهی چند مقداری است.

مثال ۳. توان عمومی

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i[(\pi/2)i \pm 2n\pi i]} = e^{-(\pi/2) \mp 2n\pi}$$

تمام این مقادیر حقیقی هستند و مقدار اصلی ($n=0$) برابر است با $e^{-\pi/2}$.

قرارداد چنین است که به ازای عدد حقیقی مثبت $z=x$ عبارت z^c به مفهوم $e^{c \operatorname{Ln} z}$ است که در آن $\operatorname{Ln} x$ لگاریتم حقیقی مقدماتی است (یعنی، بنا به تعریف ما، مقدار اصلی $\operatorname{Ln} z$ ($z=x>0$) است). همچنین هرگاه $z=e$ ، یعنی برابر با پایه لگاریتم طبیعی باشد، $z^c = e^c$ بنا به قرارداد مقدار یکنای حاصل از (۴) بخش ۷.۱۲ به حساب می آید. از (۶) ملاحظه می شود که برای هر عدد مختلط a ،

$$(7) \quad a^a = e^{a \operatorname{Ln} a}$$

مسائل بخش ۹.۱۲

۱. رابطه (۴) را به ازای $z_1=i$ ، $z_2=-1$ تحقیق کنید.
۲. با استفاده از (۷) بخش ۵.۱۲، نشان دهید که $\operatorname{Ln} z$ ($z \neq 0$) در ناحیه $-\pi < \theta < \pi$ تحلیلی است، در اینجا θ مقدار اصلی $\arg z$ است.
۳. نشان دهید که $\operatorname{Ln} z$ روی محور حقیقی منفی پیوسته نیست.
۴. نشان دهید که

$$e^{\ln z} = z, \ln(e^z) = z \pm 2n\pi i, n = 0, 1, \dots$$

تمام مقادیر عبارتهای زیر را تعیین کنید و بعضی از آنها را در صفحه مختلط رسم کنید.

$$\ln e \quad .۸ \quad \ln i \quad .۸ \quad \ln 2 \quad .۶ \quad \ln 1 \quad .۵$$

$$\ln(e^{-2}) \quad .۱۲ \quad \ln(e^i) \quad .۱۱ \quad \ln(-ie) \quad .۱۰ \quad \ln(ie) \quad .۹$$

معادلات زیر را نسبت به z حل کنید.

$$\ln z = \pi i / 2 \quad .۱۴ \quad \ln z = -\pi i / 2 \quad .۱۳$$

$$\ln z = (1+i)\pi \quad .۱۶ \quad \ln z = 1 + \pi i \quad .۱۵$$

با استفاده از جدول A۱ ضمیمه ۴، مقدار اصلی $\operatorname{Ln} z$ را محاسبه کنید، هر گاه z برابر باشد با

$$3+i\sqrt{27} \quad .۴۰ \quad -7 \quad .۱۹ \quad \sqrt{2}+i\sqrt{2} \quad .۱۸ \quad (1-i)^2 \quad .۱۷$$

مطلوب است مقدار اصلی

$$(1-i)^{1+i} \quad .۲۴ \quad (1+i)^{1-i} \quad .۲۳ \quad (1+i)^i \quad .۲۲ \quad (2i)^{1/2} \quad .۲۱$$

$$2^{2+2i} \quad .۲۸ \quad (2-i)^{1+i} \quad .۲۷ \quad 2^{2i} \quad .۲۶ \quad 3^{2-i} \quad .۲۵$$

معکوس سینوس $w = \sin^{-1} z$ عبارت از تابعی است که در رابطه $\sin w = z$ صدق می کند. معکوس کسینوس $w = \cos^{-1} z$ تابعی است که در رابطه $\cos w = z$ صدق می کند. سایر معکوسهای توابع مثلثاتی و هذلولی گون به طریقی مشابه تعریف و نمایش داده می شوند. با استفاده از توابع نمایی $(e^{iw} - e^{-iw}) / (2i) = \sin w$ (و غیره)، نشان دهید که

$$\cos^{-1} z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad .۳۰ \quad \sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2}) \quad .۲۹$$

$$\sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad .۳۲ \quad \cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad .۳۱$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \quad .۳۴ \quad \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z} \quad .۳۳$$

۳۵. نشان دهید که $w = \sin^{-1} z$ نامتناهی مقدار دارد، و هر گاه w_1 یکی از این مقادیر باشد، بقیه به صورت $w_1 \pm 2n\pi$ و $w_1 \pm 2n\pi + \pi - w_1$ هستند. $n = 0, 1, \dots$ (مقدار اصلی $w = u + iv = \sin^{-1} z$ مقداری تعریف شده است که $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ و $v \geq 0$ هر گاه $0 < v$)

نگاشت همدیسی

هر گاه تابع $w = f(z)$ در حوزۀ D از صفحه z تعریف شود، آنگاه به ازای هر نقطه از D نقطه‌ای از صفحه w متناظر قرار می‌گیرد. بدین ترتیب نگاشتی از D بر روی برد مقادیر $f(z)$ در صفحه w خواهیم داشت. این «رهیافت هندسی» به آنالیز مختلط به ما کمک می‌کند تا خصلت يك تابع مختلط را با بررسی این که آن تابع منحنیها و نواحی معین را چگونه می‌نگارد «تجسم کنیم».

چنانکه مشاهده خواهیم کرد هر گاه $f(z)$ تابعی تحلیلی باشد، نگاشت حاصل از $f(z)$ ، جز در نقاطی که در آنها مشتق $f'(z)$ صفر است، همدیسی است (زاویه را حفظ می‌کند).

نگاشت همدیسی در ریاضیات مهندسی مهم است، چرا که این نگاشت روشی متعارف برای حل مسائل با مقدار مرزی در نظریه پتانسیل دو بعدی است. با این روش يك ناحیه پیچیده مفروض را به ناحیه‌ای ساده‌تر تبدیل می‌کنند.

نخست به تعریف و تشریح مفهوم نگاشت می‌پردازیم و سپس نگاشتهای متناظر با توابع تحلیلی مقدماتی را بررسی می‌کنیم. کاربردهای این موضوع در همین فصل و فصل ۱۸ ارائه خواهند شد.

پیشنیاز این فصل: فصل ۱۲.

بخشهایی که برای دوره فشرده‌تر قابل حذف است: بخشهای ۴۰۱۳، ۴۰۱۳، ۶۰۱۳.

مراجع: ضمیمه ۱، بخش F.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۰۱۳ نگاشت

تابع حقیقی پیوسته $y = f(x)$ از متغیر حقیقی x را می‌توان با نقطه‌یابی به صورت یک منحنی در صفحه دکارتی xy نمایش داد؛ این منحنی را نمودار تابع می‌نامند. در مورد تابع مختلط

$$(۱) \quad w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy)$$

مسئله پیچیده‌تر است، زیرا از نظر هندسی هریک از دو متغیر مختلط w و z به صورت نقطه‌ای در صفحه مختلط نمایش داده می‌شوند. از این موضوع چنین برمی‌آید که برای دو متغیر باید از دو صفحه مختلط مجزا استفاده شود؛ یکی صفحه z ، که در آن نقطه $z = x + iy$ مشخص می‌شود، و دیگری صفحه w که در آن نقطه متناظر z ، یعنی $w = u + iv$ ، معین می‌شود. بدین طریق تابع f به هر نقطه z از دامنه خود نقطه $w = f(z)$ از صفحه w را مربوط می‌سازد. رابطه‌ای را که بدین شکل تعریف می‌شود **نگاشت** (یا تبدیل) دامنه f به توی صفحه w یا، به بیان دقیق‌تر، نگاشت دامنه f بر روی f در صفحه w می‌نامند. نقطه $w_0 = f(z_0)$ متناظر با نقطه z_0 را نقش نقطه یا نقش نقطه z_0 نسبت به نگاشت تعریف شده با $f(z)$ نامند. هرگاه z روی منحنی C حرکت کند و $f(z)$ پیوسته (غیر ثابت) باشد، آنگاه در حالت کلی نقطه متناظر $w = f(z)$ روی منحنی C^* در صفحه w حرکت خواهد کرد. در این صورت منحنی C^* نقش منحنی C نامیده می‌شود؛ کلمه «نقش» در مورد نواحی و سایر مجموعه‌های نقاط نیز به کار می‌رود.

چنانچه خواهیم دید خواص چنین نگاشت‌هایی را با ملاحظه منحنیها (ونواحی) در صفحه z و نقش آنها در صفحه w ، و بالعکس، می‌توان بررسی کرد. اطلاعاتی که با این کار می‌توان درباره توابع کسب کرد بیش از اطلاعاتی است که از بررسی چند نقطه منفرد نقش آنها به دست می‌آید.

اگرچه از دو صفحه مجزا برای نمایش w و z استفاده می‌شود، و گاهی خوب است با استفاده از اصطلاحات آشنایی مانند انتقال و دوران این طور تصور کنیم که نگاشت نقاط یک صفحه را هم تبدیل می‌کند. مثلاً، نگاشت $w = z + ۳$ را می‌توان انتقالی تصور کرد که هر نقطه شکلی از صفحه z را سه واحد به راست منتقل می‌کند.

به منظور مطالعه خواص ویژه نگاشتی که با تابع تحلیلی مفروض $w = u + iv = f(z)$ تعریف شده است، می‌توان نقشهای دوخط راست ثابت $x = \text{ثابت}$ و ثابت $y = \text{ثابت}$ در صفحه w را بررسی کرد. امکان دیگر مطالعه نقشهای دایره ثابت $|z| = \text{ثابت}$ و خطوط راستی که از مبدأ می‌گذرند است. به عنوان امکان سوم، می‌توان منحنیهای ثابت $u(x, y) = \text{ثابت}$ و

۱. اصطلاحات عمومی به شرح زیر اند. نگاشتی از مجموعه A به توی مجموعه B را **پوششی** یا نگاشتی از A بر روی B نامند هرگاه هر عضو B نقش لااقل یکی از اعضای A باشد. نگاشت را **انژکتیو** یا **یک به یک** گویند هرگاه اعضای مختلف A دارای نقشهای مختلف در B باشند. نگاشت را **دوسویی** گویند هرگاه هم پوششی و هم یک به یک باشد.

ثابت $v(x, y) = v$ در صفحه z را بررسی کرد. این منحنیها منحنیهای تراز u و v نامیده می‌شوند. یا می‌توان شکلهای ساده (مربع، مستطیل، وغيره) و نقشهایشان را بررسی کرد. برای اینکه از آنچه گفته می‌شود شهودی به دست آوریم، برخی مثالهای نوعی را، با شروع از نگاشتهای خیلی ساده، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱. تبدیل خطی $w = az + b$

نگاشت

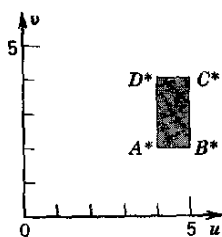
$$(1) \quad w = z + b$$

يك انتقال است. شکل ۲۷۳ نگاشت (۱) را به ازای $b = 2 + i$ نشان می‌دهد. در این شکل يك مستطیل و نقش آن، که قابل انطباق برهم هستند، (چرا؟) نشان داده شده است؛ A^* نقش A است، و همین طور، نمایش دادن نقاط بدین طریق، خصوصاً در مورد نگاشتهای پیچیده‌تر، مفید است. (۱) به ازای $b = 0$ نگاشت همانی

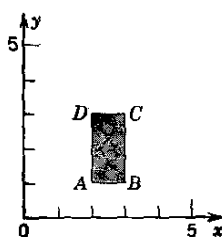
$$w = z$$

است. این نگاشت هر نقطه را بر روی خودش می‌نگارد
نگاشت

$$w = az \quad (|a| = 1)$$



(صفحه w)



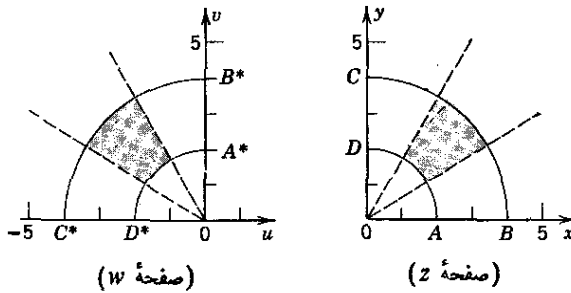
(صفحه z)

شکل ۲۷۳. انتقال $w = z + 2 + i$

دورانی با زاویه ثابت $\arg a$ است. شکل ۲۷۴، $w = iz$ را نشان می‌دهد.
نگاشت

$$w = az \quad (a \text{ حقیقی مثبت است})$$

انبساطی یکنواخت است هر گاه $a > 1$ یا انقباضی یکنواخت است هر گاه $0 < a < 1$.
نگاشت



شکل ۲.۷۴. دوران $w=iz$. (زاویه دوران $\pi/2$ ، در جهت عکس عقربه‌های ساعت)

(۲) $w = az$ (دلتخواه)

دورانی (با زاویه $\arg a$) همراه با انبساط یا انقباضی یکنواخت است. نگاشت

(۳) $w = az + b$

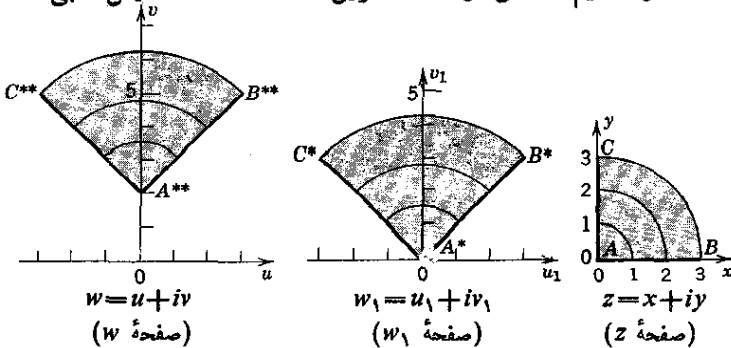
تبدیل خطی نامیده می‌شود. این نگاشت ترکیبی است از دوران و انبساط (یا انقباض) $w_1 = az$ و انتقال $w = w_1 + b$. شکل ۲.۷۵، $w = (1+i)z + 2i$ را نشان می‌دهد، که مرکب از دورانی به اندازه $\pi/4$ (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت) و انبساطی به اندازه $|1+i| = \sqrt{2}$ و انتقالی قائم به طرف بالا است.

مثال ۲. نگاشت $w = z^2$

می‌خواهیم خواص نگاشت

(۴) $w = z^2$

را مورد بحث قرار دهیم. در این مورد ساده‌ترین راه استفاده از نمایش قطبی است. اگر

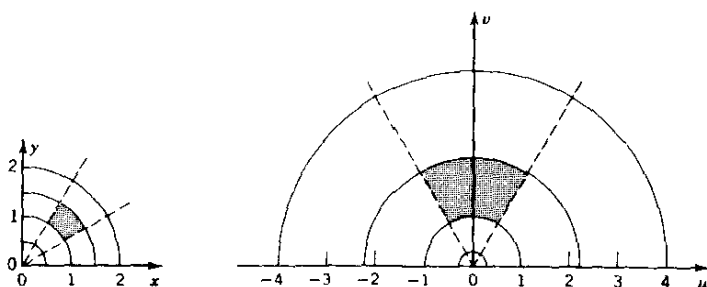


شکل ۲.۷۵. تبدیل خطی $w = (1+i)z + 2i$. مرکب از دوران و انبساط $w = w_1 + 2i$ ، به اضافه انتقال $w_1 = (1+i)z$

قرار دهیم $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$ ، آنگاه (۴) به $Re^{i\phi} = r^2 e^{i2\theta}$ تبدیل می‌شود، بنابراین

$$\phi = 2\theta \quad \text{و} \quad R = r^2$$

از این دو دایره ثابت $r = r_0 = R = r_0^2$ شعاع‌های ثابت $\theta = \theta_0$ و شعاع‌های ثابت $\phi = 2\theta_0$ نگاشته می‌شوند. بخصوص، محور حقیقی مثبت ($\theta = 0$) بر روی محور حقیقی مثبت صفحه w ، و محور موهومی مثبت ($\theta = \pi/2$) از صفحه z بر روی محور حقیقی منفی در صفحه w نگاشته می‌شوند. این نگاشت زوایایی را که رأس آنها بر مبدأ واقع است دو برابر می‌کند. ربع اول $0 \leq \theta \leq \pi/2$ بر روی تمام نیمه فوقانی صفحه w نگاشته می‌شود (شکل ۲۷۶).



شکل ۲۷۶. نگاشت $w = z^2$

تبدیل $w = z^2$ در مختصات مستطیلی چنین می‌شود:

$$u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

با تفکیک قسمت‌های حقیقی و موهومی به دست می‌آوریم

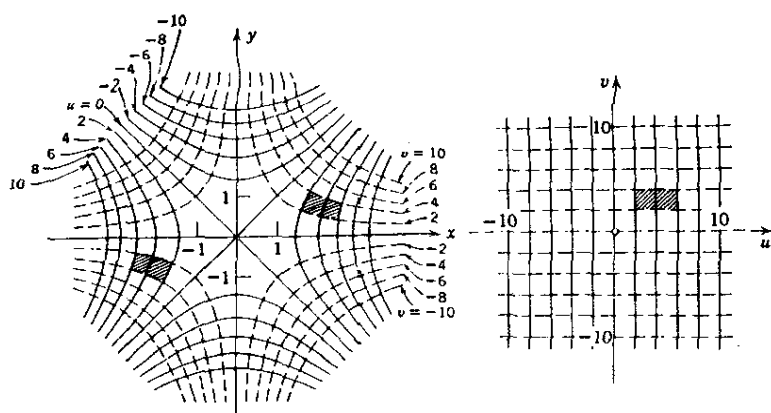
$$(۵) \quad u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

مشاهده می‌کنیم که منحنیهای تراز u و v هذلولیهای متساوی الساقین هستند که مجانبهای آنها خطوط $y = \pm x$ و محورهای مختصات هستند. ملاحظه می‌کنیم که این منحنیها مسیرهای متعامد یکدیگر هستند (ر. ک. بخش ۱۰.۱). در شکل ۲۷۷، د ناحیه هاشور زده در صفحه z هر دو بر روی مستطیل هاشور زده در صفحه w نگاشته می‌شوند. واضح است که هر نقطه $w \neq 0$ نقش درست دو نقطه از صفحه z است.

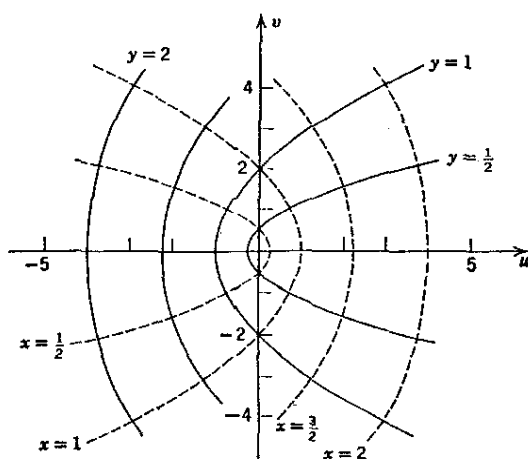
بالاخره، می‌توان از (۵) برای تعیین نقشهای خطهای راست ثابت $x = c$ و ثابت $y = c$ استفاده کرد. ثابت $x = c$ دارای نقش

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy$$

است. با حذف y از این دو معادله می‌یابیم



شکل ۲۷۷. منحنیهای تراز u و v در مورد نگاشت $w=z^2$



شکل ۲۷۸. نگاشت $w=z^2$. نقشهای خطهای راست x ثابت (خط چین) و y ثابت

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u).$$

این سهمی است که قانون آن در مبدأ قرار دارد و دهانه آن به طرف چپ است. همین طور، نقش خط ثابت $v = k$ را می توان به صورت

$$v^2 = 4k^2(k^2 + u)$$

نمایش داد. این سهمی است که قانون آن در مبدأ واقع شده و دهانه آن به طرف راست است

(شکل ۲۷۸).

سایر توانهای

$$(۶) \quad w = z^n, \quad n = 3, 4, \dots$$

را می‌توان به روشی مشابه بررسی کرد. البته، در این صورت منحنیهای تراز، و غیره، با معادلات پیچیده‌تری نمایش داده می‌شوند. ناحیه زاویه‌ای $0 \leq \arg z \leq \pi/n$ بر روی نیمه بالایی صفحه w نگاشته می‌شود (شکل ۲۷۹).

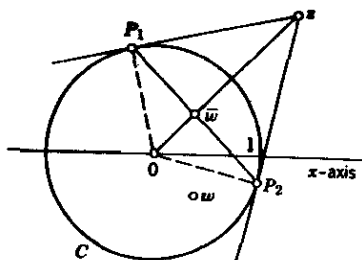
نگاشتهای $1/z$ ، $1/z^2$ ، ... را که با توانهای صحیح داده می‌شوند نیز می‌توان با استفاده از مختصات قطبی مورد بحث و بررسی قرارداد. مهمترین مورد در مثال زیر ارائه شده است.

مثال ۳. نگاشت $w = 1/z$. انعکاس

$$(۷) \quad w = \frac{1}{z} \quad z \neq 0.$$

را در نظر می‌گیریم. با استفاده مجدد از $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$ ، بنابه (۷) داریم

$$(۷') \quad R = \frac{1}{r}, \quad \phi = -\theta \quad (r \neq 0).$$

شکل ۲۷۹. نگاشتی که با $w = z^n$ تعریف می‌شود

شکل ۲۸۰. تعبیر هندسی $w = 1/z$. در اینجا w نقطه تقاطع Oz و P_1P_2 است، P_1 و P_2 نقاط تماس خطهایی است که از نقطه z بر دایره یک C مماس شده‌اند.

بنابراین نقطه $w = 1/z (z = 0)$ روی شعاعی که مبدأ را به $\bar{z}$ وصل می‌کند، در فاصله $|1/z|$ از مبدأ قرار داد.

متذکر می‌شویم که با داشتن z ابتدا با انعکاس نسبت به دایره یک (شکل ۲۸۵) و به دنبال آن با یافتن قرینه محوری نسبت به محور x می‌توان $w = 1/z$ را به روش هندسی تعیین کرد. خواننده می‌تواند این موضوع را با استفاده از مثلثهای متشابه ثابت کند. شکل ۲۸۱ نشان می‌دهد که $w = 1/z$ خطهای راست افقی وقائم را بردایره‌ها یا خطهای راست می‌نگارد، به طوری که حتی می‌توان گفت:

$w = 1/z$ هر خط راست یا دایره را بردوی يك دایره یا خط راست می‌نگارد. اثبات. هر خط راست یا دایره واقع در صفحه z را می‌توان چنین نوشت:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (D \text{ حقیقی}, A, B, C).$$

اگر $A = 0$ ، این معادله نمایش يك خط راست و اگر $A \neq 0$ ، نمایش يك دایره است، معادله بالا بر حسب z و $\bar{z}$ چنین می‌شود:

$$Az\bar{z} + B\frac{z+\bar{z}}{2} + C\frac{z-\bar{z}}{2i} + D = 0$$

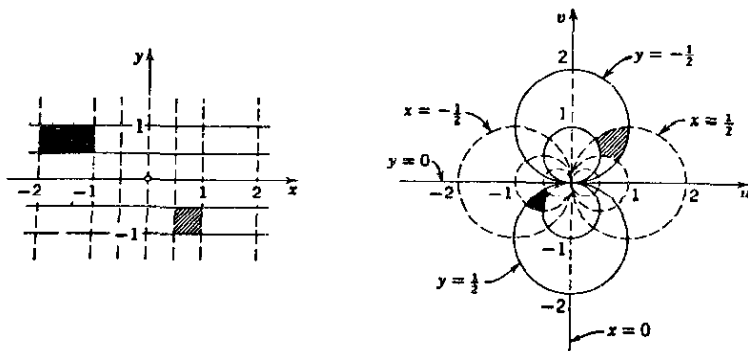
می‌دانیم که $w = 1/z$. با جانشانی $z = 1/w$ و ضرب کردن معادله در ww' نتیجه می‌شود

$$A + B\frac{w+\bar{w}}{2} + C\frac{w-\bar{w}}{2i} + Dww = 0$$

یا بر حسب u و v

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0.$$

این نمایش يك دایره (هرگاه $D \neq 0$) یا نمایش يك خط راست (هرگاه $D = 0$) در صفحه w است.



شکل ۲۸۱. نگاشت $w = 1/z$

مسائل بخش ۱۰۱۳

نگاشت $w = (1+i)z - 2$ را در نظری می گیریم. نقش هر يك از منحنیها، یا نواحی زیر را بیابید و آنها را رسم کنید

$$1. \quad x = 0, 1, 2, 3 \quad 2. \quad y = -1, 0, 1, 2 \quad 3. \quad |z - 2| \leq 2$$

نگاشت $w = u + iv = z^2$ را در نظر می گیریم. نقش منحنیهای زیر را بیابید و آنها را رسم کنید.

$$4. \quad y = x, y = -x \quad 5. \quad x = 0, 1, 2, 3 \quad 6. \quad y = 0, 1, 2, 3$$

$$7. \quad y = 1 + x \quad 8. \quad y = 1 - x \quad 9. \quad y^2 = x^2 + 1$$

نقش نواحی زیر را تحت نگاشت $w = z^2$ رسم کنید.

$$10. \quad |z| > 2 \quad 11. \quad |z| \leq 2 \quad 12. \quad |\arg z| < \pi/2$$

$$13. \quad 1 < x < 2 \quad 14. \quad 0 \leq y \leq 1 \quad 15. \quad -\pi/2 < \arg z < \pi/2$$

مطلوب است نقش دایرهها و خطهای راست زیر تحت نگاشت $w = 1/z$.

$$16. \quad |z| = 1 \quad 17. \quad |z + 1| = 1 \quad 18. \quad |z - 1| = 1$$

$$19. \quad |z - 2i| = 2 \quad 20. \quad y = x - 1 \quad 21. \quad x = 1$$

۲۲. مطلوب است نقش ناحیه $-2 < x < -1$ ، $-1 < y < 1$ تحت نگاشت $w = 1/z$.

۲۳. مطلوب است نقش ناحیه $1 < x < 2$ تحت نگاشت $w = 1/z$.

۲۴. $w = 1/z$ را در نظر می گیریم. کدام خطهای راست بر روی (الف) خطهای راست، (ب) دایرهها نگاشته می شوند؟ کدام دایرهها بر روی (ب) خطهای راست، (ت) دایرهها نگاشته می شوند.

۲۵. نشان دهید که تحت نگاشت $w = 1/z$ ، مرکز يك دایره مفروض بر روی مرکز دایره نقش نگاشته نمی شود؟

۲۶. با داشتن $3 + 4i$ بهمان روش هندسی که در رابطه با تبدیل $w = 1/z$ تشریح شد $1/(3 + 4i)$ را بیابید.

۲۷. نقش ناحیه زاویه ای $0 \leq \arg z \leq \pi/4$ را تحت هر يك از تبدیلهای $w = z$ ، $w = z^2$ ، $w = -iz^2$ ، $w = -z^2$ ، $w = iz^2$ ، $w = z^2$ ، $w = -iz$ ، $w = iz$ بیابید و رسم کنید.

۲۸. نقش ناحیه‌ای که در مسئله ۲۷ ذکر شد تحت تبدیلات $w = i/z$ ، $w = 1/z$ و $w = i/z^2$ بیابید و رسم کنید.

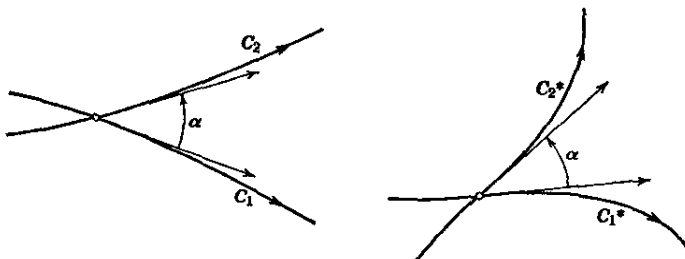
۲۹. تابع تحلیلی $w = u + iv = f(z)$ را، که نیم صفحه $x \geq 0$ را بر روی ناحیه $2 \geq u$ طوری می‌نگارد که $z = 0$ با $w = 2 + i$ متناظر می‌شود، بیابید.

۳۰. تابع تحلیلی $w = u + iv = f(z)$ را که ناحیه زاویه‌ای $0 < \arg z < \pi/3$ را بر روی ناحیه $1 < u$ می‌نگارد پیدا کنید.

۲.۱۳ نگاشت همدیسی

اکنون مهمترین خاصیت هندسی نگاشتهای تعریف شده با توابع تحلیلی، یعنی همدیس-بودن آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نگاشت در صفحه را حفظ‌کننده زاویه، یا همدیسی گویند، هرگاه زوایای بین منحنیهای جهتدار را از نظر اندازه و جهت حفظ کند، یعنی زاویه بین نقشهای هر دو منحنی جهتدار متقاطع، با توجه به جهشان، چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت همان زاویه بین دو منحنی باشد. منظور از زاویه بین دو منحنی جهتدار در اینجا زاویه‌ای مانند α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) است که بین مماسهای جهتدار در نقطه تقاطع پدید می‌آید (شکل ۲۸۲).



شکل ۲۸۲. منحنیهای C_1 و C_2 و نقشهای مربوط به آنها C_1^* و C_2^* تحت يك نگاشت همدیسی

می‌خواهیم نشان دهیم که نگاشت $w = f(z)$ در هر نقطه‌ای که $f(z)$ تحلیلی باشد همدیسی است، مگر در نقاطی که مشتق $f'(z)$ در آنها صفر است. چنین نقطه‌ای را نقطه بحرانی می‌نامند. مثلاً در مورد $f(z) = z^2$ به ازای $z = 0$ داریم $f'(z) = 2z = 0$ ، در نقطه $z = 0$ نگاشت همدیسی نیست چرا که در آن زوایا دو برابر شده است (ر. ک. مثال ۲، بخش ۱.۱۳).

البته، برای نیل به مقاصدی که ما داریم لازم است منحنیها و نقشهایشان را بررسی کنیم. منحنی C واقع در صفحه مختلط z را می‌توان به صورت

$$(1) \quad z(t) = x(t) + iy(t)$$

نمایش داد، که در آن t پارامتری حقیقی است. مثلاً تابع

$$z(t) = r \cos t + ir \sin t$$

دایره $|z| = r$ را نمایش می‌دهد، تابع

$$z(t) = t + it^2$$

سهمی $y = x^2$ را نمایش می‌دهد و غیره. جهت افزایش مقادیر t در (۱) جهت مثبت یا سوی مثبت بر C نامیده می‌شود. به این ترتیب (۱) روی C جهت مشخص می‌کند. فرض می‌کنیم که $z(t)$ در (۱) مشتق‌پذیر باشد و مشتق آن $\dot{z}(t)$ پیوسته بوده، هیچ‌جا صفر نباشد. آنگاه C در هر نقطه‌اش دارای مماسی یکتا است و منحنی هموار نامیده می‌شود. روی هر مماس جهت متناظر با جهت مثبت روی C را جهت مثبت روی آن مماس می‌نامند، و بدین طریق مماس جهت‌دار می‌شود.

در واقع، مماس بر C در نقطه $z_0 = z(t_0)$ را وضعیت حدی خط راستی که از z_0 و نقطه دیگری مانند $z_1 = z(t_0 + \Delta t)$ می‌گذرد هنگامی که z_1 در طول C به سمت z_0 میل می‌کند، یعنی وقتی که $\Delta t \rightarrow 0$ ، تعریف می‌کنیم. (به بخش ۵.۸ نیز مراجعه کنید.) حالا عدد $z_1 - z_0$ را می‌توان با برداری که ابتدای آن z_0 و انتهایش z_1 است نمایش داد (شکل ۲۸۳)، بردار $(z_1 - z_0)/\Delta t$ ، که در آن $\Delta t > 0$ ، هم امتداد با بردار $z_1 - z_0$ است. نتیجه می‌شود که بردار

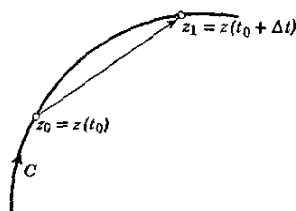
$$(۲) \quad \dot{z}(t_0) = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$$

در z_0 بر C مماس است، و زاویه بین این بردار و جهت مثبت محور x برابر است با $\arg \dot{z}(t_0)$.

اکنون نگاهیست داده شده با تابع تحلیلی غیر ثابت

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

را که در حوزه‌ای شامل C تعریف شده است در نظر می‌گیریم. در این صورت نقش C



شکل ۲۸۳. به دست آوردن فرمول (۲)

تحت این نگاشت، منحنی C^* واقع در صفحه w است که به صورت

$$w(t) = f[z(t)]$$

نمایش داده می‌شود. نقطه $z_0 = z(t_0)$ با نقطه $w(t_0)$ از C^* متناظر است، و $w(t_0)$ بردار مماس بر C^* در این نقطه را نمایش می‌دهد. حالا بنابه قاعده زنجیری،

$$(۳) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dt}.$$

در نتیجه، هر گاه $f'(z_0) \neq 0$ ، مشاهده می‌کنیم که $w(t_0) \neq 0$ و C^* دارای مماس یکتا در $w(t_0)$ است، زاویه بین بردار مماس $w(t_0)$ و جهت مثبت محور u عبارت است از $\arg \dot{w}(t_0)$. نظر به اینکه شناسه حاصلضرب مساوی با مجموع شناسه‌های عوامل ضرب است، با توجه به (۳) داریم

$$\arg \dot{w}(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \dot{z}(t_0)$$

در نتیجه تحت این نگاشت مماس جهندار بر C در z_0 به اندازه زاویه

$$(۴) \quad \arg \dot{w}(t_0) - \arg \dot{z}(t_0) = \arg f'(z_0),$$

زاویه بین دو بردار مماس بر C و C^* ، دوران می‌کند. چون عبارت طرف راست بستگی به انتخاب C ندارد، ملاحظه می‌کنیم که این زاویه مستقل از C است؛ یعنی، تبدیل $w = f(z)$ مماس بر هر منحنی دلخواه مار بر z_0 را به اندازه همان زاویه $\arg f'(z_0)$ دوران می‌دهد. از این رو دو منحنی مار بر z_0 که زاویه معینی در z_0 می‌سازند، بر منحنیهای مار بر نقطه w_0 ، نقش نقطه z_0 ، که همان زاویه را، چه از نظر جهت و چه از نظر اندازه، با هم می‌سازند نگاشته می‌شوند. در نتیجه قضیه اساسی زیر به اثبات می‌رسد.

قضیه ۱. (نگاشت همدیسی)

نگاشتی که با تابع تحلیلی $f(z)$ تعریف می‌شود همدیسی است، مگر در نقاطی که مشتق $f'(z)$ صفر است.

مثال ۱. همدیسی $w = z^2$

نگاشت $w = z^2$ ، جز در $z = 0$ که در آن $w' = 2z = 0$ ، همدیسی است. این مطلب با شکل‌های ۲۷۶ و ۲۷۸ تشریح شده است؛ در این شکل‌ها منحنیهای نقش یکدیگر را با زاویه قائمه قطع می‌کنند، جز در نقطه $z = 0$ که در آن زوایا تحت این نگاشت دو برابر می‌شوند، چرا که هر شعاع ثابت $\arg z = c$ به شعاع $\arg w = 2c$ تبدیل می‌شود (ر. ک. شکل ۲۷۶ بخش قبل).

اضافه می‌کنیم که بنابه تعریف مشتق داریم

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|.$$

بنابر این، نگاشت $w = f(z)$ طول پاره خط‌های کوتاه را تقریباً $|f'(z_0)|$ برابر بزرگ می‌کند. نقش يك شكل هندسی کوچک باشکلی اصلی همدیسی است به این معنی که تقریباً دارای همان شکلی است. اما از آنجا که $f'(z)$ از هر نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند، يك شكل هندسی بزرگ ممکن است دارای نقشی باشد که شکل آن کاملاً باشکلی اصلی تفاوت داشته باشد.

پانوجه به (۳) از بخش ۵.۱۲ و معادلات کشی - ریمان متذکر می‌شویم

$$(۵') \quad |f'(z)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

یعنی

$$(۵) \quad |f'(z)|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

این دترمینان به ژاکوبی (ر. ک. بخش ۳.۹) تبدیل $w = f(z)$ ، که به شکل حقیقی

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

نوشته می‌شود، موسوم است. در نتیجه، شرط $f'(z_0) \neq 0$ دلالت بر آن دارد که ژاکوبی در z_0 صفر نیست. این شرط کفایت می‌کند تحدید نگاشت $w = f(z)$ به همسایگی N_0 از z_0 که به اندازه کافی کوچک است يك به يك بانژکتیو باشد، یعنی نقاط مختلف دارای نقشهای مختلف باشند؛ اثبات در مرجع [A۲]، که در ضمیمه ۱ فهرست شده، آمده است. (پانوش ۱ بخش ۱.۱۳ را نیز ملاحظه کنید.)

مثال ۲

نگاشت $w = z^2$ در هر همسایگی از نقطه دلخواه $z \neq 0$ ، که به اندازه کافی کوچک باشد، يك به يك است. این نگاشت در همسایگی $z = 0$ يك به يك نیست. تمامی صفحه z بر روی صفحه w نگاشته می‌شود به طوری که هر نقطه $w \neq 0$ نقش دو نقطه از صفحه z باشد. برای نمونه، نقاط $z = 1$ و $z = -1$ بر روی $w = 1$ نگاشته می‌شوند و به طور کلی دو نقطه z_1 و $z_2 = -z_1$ دارای يك نقش $w = z_1^2$ هستند.

اهمیت عملی نگاشت همدیسی از این واقعیت ناشی می‌شود که توابع همساز بادی متغیر حقیقی (ر. ک. بخش ۵.۱۲) تحت تغییر متغیر حاصل از تبدیل همدیسی (قضیه ۲ زیر)

همساز باقی می‌مانند. این موضوع دارای نتایج مهمی است. فرض کنید که بخواهیم يك مسئله بامقدار مرزی را در ارتباط با پتانسیل دوبعدی حل کنیم، یعنی در ناحیه مفروض D جوابی برای معادله لاپلاس (بر حسب دو متغیر مستقل) بیابیم که بر مرز D مقادیر مفروضی را اختیار کند. امکان دارد بتوانیم نگاشتی همدیسی بیابیم که D را به ناحیه ساده‌تر D^* ، مثلاً به قرص مستدیر یا نیم صفحه، تبدیل کند. در این صورت می‌توانیم معادله لاپلاس را با توجه به شرایط مرزی تبدیل یافته در D^* حل کنیم. وقتی جواب حاصل با استفاده از نگاشت به D برگردانده شود همان جواب مسئله اصلی خواهد بود. این روش پر قدرت با قضیه زیر توجیه شده است.

قضیه ۲ (توابع همساز و نگاشت همدیسی)

تابع همساز $h(x, y)$ تحت تغییر متغیر ناشی از تبدیل همدیسی که با تابع تحلیلی $w = f(z)$ داده شده است همساز باقی می‌ماند.

اثبات اول، با فرض وجود همساز مزدوج. فرض می‌کنیم $h(x, y)$ در حوزه D همساز بوده، $g(x, y)$ مزدوج $h(x, y)$ در D باشد، به طوری که $h+ig$ تابع تحلیلی $H(z)$ از $z = x+iy$ در D باشد. بنابه فرض، نگاشت

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

يك به يك و همدیسی است. در نتیجه D^* ، نقش D ، يك حوزه است؛ همچنین در D ، $f'(z) \neq 0$ ، و تسایع معکوس $z = F(w)$ که D^* را بر روی D نگارد وجود دارد. $F(w)$ در D^* تحلیلی است؛ و مشتق آن عبارت است از

$$\frac{dF}{dw} = \frac{1}{df/dz}.$$

اثبات این فرمول شبیه اثبات مشابه آن در حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی است. در نتیجه $H(F(w))$ تابعی تحلیلی از w در D^* است. قسمت حقیقی این تابع برابر $h(x(u, v), y(u, v))$ و تابعی همساز v, u در D^* است.

اثبات دوم، بدون فرض وجود همساز مزدوج. فرض می‌کنیم $h(x, y)$ در D همساز باشد. مانند قبل، برای به دست آوردن $h(x(u, v), y(u, v))$ از $z = x+iy = F(w)$ استفاده می‌کنیم. این تابع را، که تابعی از u و v در نظر گرفته می‌شود، برای سادگی با همان h نشان می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که در D^* ، نقش D تحت $w = f(z)$ ، همساز است. قاعده زنجیری را به کار می‌بریم. ضمن آنکه مشتقات جزئی را با شاخص زیر نشان می‌دهیم:

۱. ر. ک. بخش ۵.۱۲ بدون آنکه اثبات کنیم متذکر می‌شویم که اگر D همبند ساده باشد، همساز مزدوج آن، وجود دارد (تعریف، بخش ۱۲.۹).

$$h_x = h_u u_x + h_v v_x.$$

قاعدهٔ زنجیری را یک بار دیگر به کار می‌بریم و زیرجملاتی که در جمع $h_{xx} + h_{yy}$ حذف می‌شوند خط می‌کشیم:

$$h_{xx} + \underline{h_u u_{xx}} + (h_{uu} u_x + h_{uv} v_x) u_x \\ + \underline{h_v v_{xx}} + (h_{vu} u_x + h_{vv} v_x) v_x$$

h_{yy} از همین عبارت با تبدیل x به y نتیجه می‌شود. اکنون مجموع $h_{xx} + h_{yy}$ را با توجه به

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

(چون $w = u + iv$ تحلیلی است) تشکیل می‌دهیم و درحاصل جمع $h_{uu} = h_{vv}$ در

$$u_x v_x + u_y v_y$$

که برطبق معادلات کشی - ریمان صفر است ضرب شده است. آنچه باقی می‌ماند عبارت است از

$$h_{xx} + h_{yy} = h_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + h_{vv}(v_x^2 + v_y^2)$$

که این نیز با توجه به معادلات کشی-ریمان برابر است با

$$(h_{uu} + h_{vv})(u_x^2 + v_x^2).$$

بنابراین بنا به (۵')

$$(۶) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right).$$

چون $f(z)$ همدیسی است $f'(z) \neq 0$ ، و بنا به فرض طرف چپ (۶)، در D ، برابر صفر است. بنابراین عبارت داخل پرانتز در D^* صفر است.

وقتی از روش نگاشت همدیسی در نظریهٔ پتانسیل استفاده می‌کنیم، مشکل یافتن تابعی تحلیلی است که ناحیهٔ مفروضی را بر روی ناحیهٔ ساده‌تری می‌نگارد. برای این منظور نیاز به تجربه و دانش مفصلی از خواص نگاشتی توابع تحلیلی مقدماتی داریم. بنابراین، مهمترین توابع مقدماتی را از این نقطه نظر مورد بررسی قرار دهیم.

مسائل بخش ۲۰۱۳

۱. چرا نقشه‌های منحنیهای ثابت $|z|$ و ثابت $\arg z$ تحت نگاشت بایک تابع تحلیلی با زاویه قائمه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۲. به چه دلیلی منحنیهای تراز $u = \text{ثابت}$ و $v = \text{ثابت}$ تابع تحلیلی $w = u + iv = f(z)$ در هر نقطه‌ای که $f'(z) \neq 0$ با زاویه قائمه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۳. آیا نگاشت $w = z = x - iy$ زوایا را از نظر اندازه و از نظر جهت حفظ می‌کند؟ منحنیهای زیر را، که در صفحه $z = x + iy$ قرار دارند، به صورت $z = z(t)$ نمایش دهید.

$$۴. \quad x^2 + y^2 = ۲ \quad ۵. \quad y = ۱/x \quad ۶. \quad y = ۲x^2$$

$$۷. \quad x^2 - y^2 = ۱ \quad ۸. \quad y = ax + b \quad ۹. \quad (x-۱)^2 + (y+۲)^2 = ۹$$

نقاطی را در صفحه z معین کنید که در آن نقاط $w = f(z)$ همدمی نباشد، $f(z)$ برابر است با

$$۱۰. \quad z^4 \quad ۱۱. \quad \sin z \quad ۱۲. \quad z + z^{-1} (z \neq 0)$$

$$۱۳. \quad e^{z^2} \quad ۱۴. \quad z^4 - z^2 \quad ۱۵. \quad z^2 + az + b$$

(۵) را در مورد توابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ زیر تحقیق کنید.

$$۱۶. \quad e^z \quad ۱۷. \quad \cos z \quad ۱۸. \quad z^2 - 3z$$

۱۹. همه فرمولهای اثبات دوم قضیه ۲ را بنویسید و مراحل اثبات را به تفصیل انجام دهید.

۲۰. درستی قضیه ۲ را به ازای $h(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ ، $f(z) = 2z + 1$ تحقیق کنید.

۳.۱۳ تبدیلهای کسری خطی

منظور از تبدیل کسری خطی (یا تبدیل موبیوس) تبدیلی به صورت

$$(۱) \quad w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

است، که در آن ثابتهای a, b, c, d اعداد حقیقی یا مختلط هستند. لزوم شرط $ad - bc \neq 0$ با توجه به مشتق (۱):

$$w' = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

روشن می‌شود. این تساوی نشان می‌دهد که اگر $ad - bc \neq 0$ مخالف صفر باشد $w' \neq 0$ ، که این شرط نیز همدمی بودن نگاشت را تضمین می‌کند، حال آنکه

$ad - bc = 0$ منجر به $w' \equiv 0$ یا ثابت $w =$ می شود، که جالب نیست و در بحثهای آینده ما جایی ندارد.

حالتهای خاصی از (۱) که در بخش ۱.۱۳ مورد بحث قرار گرفتند عبارتند از انتقال

$$(۲) \quad w = z + b$$

دوران و انبساط یا انقباض

$$(۳) \quad w = az,$$

انعکاس و یافتن قرینه محوری نسبت به محور x

$$(۴) \quad w = \frac{1}{z}$$

و تبدیل خطی

$$(۵) \quad w = az + b.$$

صفحهٔ مختلط توسعه یافته، با توجه به (۱) مشاهده می کنیم با هر z که به ازای آن $cz + d \neq 0$ ، درست يك عدد مختلط w متناظر است. فرض می کنیم که $c \neq 0$. آنگاه با مقدار $z = -d/c$ که به ازای آن $cz + d = 0$ ، w بی متناظر نمی شود. این موضوع ما را ترغیب می کند که يك «نقطهٔ ناسره» به صفحهٔ w بیفزاییم. این نقطه را نقطهٔ در بینهایت می نامند و با علامت ∞ (بینهایت) نمایش می دهند. صفحهٔ مختلط به انضمام نقطهٔ ∞ را صفحهٔ مختلط توسعه یافته می گویند. در این صورت صفحهٔ مختلط بدون نقطهٔ ناسره صفحهٔ مختلط متناهی نامیده می شود. اکنون فرض می کنیم $w = \infty$ نقش نقطهٔ ($c \neq 0$) $z = -d/c$ تحت نگاشتی که با (۱) تعریف می شود باشد. وقتی که در (۱)، $c = 0$ ، آنگاه $d \neq 0$ ، $a \neq 0$ ، $d \neq 0$ (چرا؟)، و فرض می کنیم که $w = \infty$ نقش نقطهٔ $z = \infty$ ، نقطهٔ ناسره صفحهٔ z توسعه یافته، است.

نگاشت معکوس (۱) از حل (۱) نسبت به z حاصل می شود؛ خواهیم داشت

$$(۶) \quad z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

وقتی $c \neq 0$ ، آنگاه به ازای $w = a/c$ ، $cw - a = 0$ ، و فرض می کنیم $w = a/c$ نظیر $z = \infty$ باشد. وقتی که $c = 0$ ، آنگاه $a \neq 0$ و $d \neq 0$ ، و در این صورت مانند قبل $w = \infty$ را با $z = \infty$ متناظر قرار می دهیم. بنابراین هر نگاشتی که به صورت (۱) باشد نگاشتی يك به يك از صفحهٔ z توسعه یافته بر روی صفحهٔ w توسعه یافته است؛ گوییم هر تبدیل کسری خطی (۱) «صفحهٔ توسعه یافته را به طور يك به يك بر روی خودش» می نگارد.

با توجه به آنچه گفته شد می توان نتیجه گرفت:

تبصره کلی. اگر $z = \infty$ ، آنگاه طرف راست (۱) به صورت عبارت بی معنی $(c \cdot \infty + b) / (c \cdot \infty + d)$ در می آید. وقتی که $c \neq 0$ ، مقدار $w = a/c$ و هنگامی که $c = 0$ ، مقدار $w = \infty$ را بدین عبارت نسبت می دهیم.

نقاط ثابت. یک نقطه ثابت نگاشت $w = f(z)$ نقطه ای است که نقش آن همان عدد مختلط باشد؛ یعنی نقاط ثابت از رابطه

$$w = f(z) = z$$

به دست می آیند. در نتیجه نقاط ثابت از معادله

$$z = \frac{az+b}{cz+d}$$

با

$$(۷) \quad cz^2 - (a-d)z - b = 0$$

به دست می آیند. این يك معادله درجه دو بر حسب z است که ضرایب آن وقتی فقط وقتی صفر ندهند که نگاشت همانی باشد (در این حالت $a = d \neq 0$ ، $b = c = 0$). در نتیجه داریم

قضیه ۱ (نقاط ثابت)

هر تبدیل کسری خطی، غیر همانی، حداکثر دو نقطه ثابت دارد. هرگاه تبدیل کسری خطی دارای سه یا تعداد بیشتری نقاط ثابت باشد، آنگاه این تبدیل نگاشت همانی است. تبدیلهای کسری خطی خاص که از نظر عملی با اهمیت هستند و همچنین تعداد بیشتری از خواص عمومی تبدیلهای کسری خطی در بخش بعد مورد بحث قرار خواهند گرفت.

مسائل بخش ۳.۱۳

نقاط ثابت نگاشتهای زیر را بیابید.

۱. $w = iz$	۲. $w = -iz + ۴$	۳. $w = z^2$
۴. $w = (z - i)^2$	۵. $w = z^2$	۶. $w = iz^2$
۷. $w = \frac{3z - 1}{z + 3}$	۸. $w = \frac{5z + ۴}{z + 5}$	۹. $w = \frac{2iz - 1}{z + 2i}$

مطلوب است تبدیل کسری خطی که نقاط ثابت آن عبارت باشند از

$$۱. ۱۰. ۱, -۱. ۱۱. i, -i. ۱۲. ۱. ۱۲$$

۱۳. تمام تبدیلات کسری خطی را که نقاط ثابت آنها i ، $-i$ هستند، بیابید.

۱۴. تمام تبدیلات کسری خطی را که نقاط ثابت آنها ۱ ، -۱ هستند، بیابید.

۱۵. تمام تبدیلات کسری خطی را که در صفحه متناهی نقطه ثابتی ندارند، بیابید. [از (۷) استفاده کنید.]

۳.۱۳ تبدیلهای کسری خطی خاص

در این بخش توضیح می‌دهیم که چطور می‌توان تبدیلهای کسری خطی

$$(1) \quad w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

را که برای نگاشتن حوزه‌های ساده معین بر روی سایر حوزه‌ها به کار می‌روند تعیین کرد، و چگونه می‌توان خواص (۱) را مورد بحث قرارداد. راه گشای چنین بحثی عبارت است از

قضیه ۱ (دوایر و خطهای راست)

هر تبدیل کسری خطی (۲) مجموع دایر و خطهای راست صفحه z را بر روی مجموع دایر و خطهای راست صفحه w می‌نگارد.

اثبات. صحت این ادعا در مورد انتقال یا دوران بدیهی است، و همین طور در مورد انقباض و انقباض یکنواخت واضح است و، بنا به مثال ۳ بخش ۱.۱۳ قضیه در مورد $w = 1/z$ صادق است. قضیه بالا همچنین در مورد ترکیب این نگاشتها نیز درست است. بنابراین به ازای $c \neq 0$ قضیه در مورد (۱) برقرار خواهد بود، زیرا به ازای $c \neq 0$ نگاشت (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$(2) \quad K = -\frac{ad-bc}{c} \quad \text{که در آن} \quad w = K \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$$

و با قرارداد

$$w_1 = cz, \quad w_2 = w_1 + d, \quad w_3 = \frac{1}{w_2}, \quad w_4 = Kw_3,$$

داریم $w = w_4 + a/c$. این موضوع نشان می‌دهد که (۱) ترکیبی از حالت‌های خاص (۲) الی (۴) بخش ۳.۱۳ است.

تبدیل کسری خطی (۱) به سه مقدار ثابت اساسی، که عبارتند از نسبت هر سه تادخواه از مقادیر ثابت a, b, c, d به مقدار چهارم بستگی دارد. شرط اینکه سه نقطه مجزا از صفحه z دارای نقشه‌ای مشخص در صفحه w باشد، به شرح زیر منجر به تبدیل کسری خطی یکتایی می‌گردد.

قضیه ۲ (سه نقطه ثابت و نقشه‌های داده شده آنها)

سه نقطه مجزا و مفروض z_1, z_2, z_3 را همواره می‌توان با یک، و تنها یک، تبدیل کسری خطی $w = f(z)$ بر روی سه نقطه مجزای مشخص w_1, w_2, w_3 نگاشت. این نگاشت به طور یکتا با معادله زیر داده می‌شود:

$$(۳) \quad \frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

(هرگاه یکی از این نقاط نقطه ∞ باشد، خارج قسمت دوفاضلی که شامل این نقطه هستند باید برابر ۱ فرض شود.)

اثبات. معادله (۳) به صورت $F(w) = G(z)$ است که در آن F و G توابع کسری خطی متغیرهای مربوط به خود هستند. از اینجا به سهولت به دست می‌آوریم $w = f(z) = F^{-1}[G(z)]$ که در آن F^{-1} نشان دهنده تابع معکوس F است. چون معکوس تبدیل کسری خطی و ترکیب تبدیلهای کسری خطی تبدیل کسری خطی هستند (ر. ک. مسئله ۳ آخر بخش)، $w = f(z)$ تبدیل کسری خطی است. به علاوه بنا به (۳) مشاهده می‌کنیم که

$$F(w_1) = 0, \quad F(w_2) = 1, \quad F(w_3) = \infty,$$

$$G(z_1) = 0, \quad G(z_2) = 1, \quad G(z_3) = \infty.$$

در نتیجه $w_1 = f(z_1)$ ، $w_2 = f(z_2)$ ، $w_3 = f(z_3)$. این موضوع وجود تبدیل کسری خطی $w = f(z)$ را که z_1 ، z_2 ، z_3 را به ترتیب بر روی w_1 ، w_2 ، w_3 می‌نگارد ثابت می‌کند.

اکنون ثابت می‌کنیم که $w = f(z)$ به طور یکتا معین می‌شود. فرض کنید که $w = g(z)$ تبدیل کسری خطی دیگری باشد که z_1 ، z_2 ، z_3 را به ترتیب بر روی w_1 ، w_2 ، w_3 می‌نگارد. در این صورت معکوس آن $g^{-1}(w)$ را بر روی z_1 ، z_2 ، z_3 را بر روی w_1 ، w_2 ، w_3 می‌نگارد. در نتیجه، نگاشت مرکب $H = g^{-1}[f(z)]$ هر یک از نقاط z_1 ، z_2 ، z_3 و z_3 را بر روی خودش می‌نگارد، یعنی دارای سه نقطه ثابت مجزای z_1 ، z_2 ، z_3 است. بنا به قضیه ۱ از بخش قبل نتیجه می‌گیریم که H نگاشتی همانی است و بنابراین $g(z) \equiv f(z)$.

آخرین عبارت قضیه بالا از تبصره کلی بخش قبل نتیجه می‌شود، و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

نگاشت نیم صفحه بر روی قرص. این نگاشت مثلاً در مسائل مربوط به پتانسیل از لحاظ عملی جالب است بدون آنکه به کلیت موضوع خطلی وارد شود، فرض می‌کنیم که می‌خواهیم نیم صفحه فوقانی $y \geq 0$ را بر روی قرص یک $|w| \leq 1$ بنگاریم. مرز نیم صفحه محور x ها است؛ واضح است که این مرز باید بر روی دایره $y=1$ نگاشته شود. و از همینجا الهام می‌گیریم: برای پیدا کردن نگاشت، سه نقطه روی محور x انتخاب می‌کنیم، نقشهای این نقاط را بر روی دایره تعیین می‌کنیم و قضیه ۲ را به کار می‌بریم. باید اطمینان حاصل کنیم که نیم صفحه $y \geq 0$ بر روی داخل و نه بر روی خارج دایره مزبور نگاشته شده است.

مثال ۱. نگاشت نیم صفحه بر روی قرص

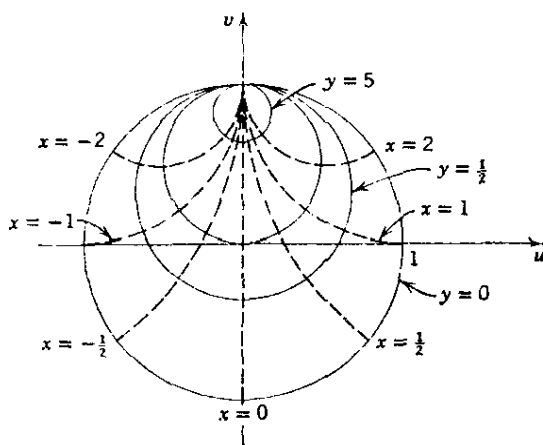
مطلوب است تبدیل کسری خطی (۱) که $z_1 = -1$ ، $z_2 = 0$ ، $z_3 = 1$ را به ترتیب بر روی $w_1 = -1$ ، $w_2 = -i$ ، $w_3 = 1$ می نگارد. از (۳) به دست می آوریم

$$\frac{w - (-1)}{w - 1} \cdot \frac{-i - 1}{-i - (-1)} = \frac{z - (-1)}{z - 1} \cdot \frac{0 - 1}{0 - (-1)}$$

یا

$$(۴) \quad w = \frac{z - i}{-iz + 1}$$

هم اکنون نشان می دهیم که خواص ویژه چنین نگاشتی را بدون انجام دادن محاسبات مشکل می توان تعیین کرد. نقشه های خطوط ثابت x و ثابت y به شرح زیر به دست می آیند. نقطه $z = i$ با $w = 0$ و نقطه $z = \infty$ با $w = i$ متناظر است. هرگاه $z = iy$ ، $u = 0$ ، $1 \leq v \leq -1$ نگاشته می شود. چون نگاشت همدیسی است و خطوط راست بر روی دایره یا خطوط راست نگاشته می شوند، خطوط ثابت y بر روی دایره ای که از نقش $z = \infty$ می گذرند نگاشته می شوند، یعنی بر روی دایره ای که از $w = i$ می گذرند و مرکز آن روی محور v قرار دارد. به همین دلیل، نتیجه می شود که، خطوط ثابت x بر روی دایره ای که بر دایره های نقش خطوط ثابت y عمودند نگاشته می شوند (شکل ۳۸۴). نیم صفحه تحتانی با خارج دایره یکه $|w| = 1$ متناظر است.



شکل ۳۸۴. تبدیل کسری خطی مثال ۱

مثال ۲. رخداد ∞

تبدیل کسری خطی را تعیین کنید که $z_1 = 0$ ، $z_2 = 1$ ، $z_3 = \infty$ را به ترتیب بر روی $w_1 = -1$ ، $w_2 = -i$ ، $w_3 = 1$ بنگارد. به توجه به (۳) نگاشت مورد نظر به دست می آید:

$$(5) \quad w = \frac{z-i}{z+i}$$

این نگاشت را گاهی اوقات تبدیل کیلی* می نامند. در این حالت، ابتدا از (۳) $(1-\infty)/(z-\infty)$ به دست می آید، که به جای آن ۱ می گذاریم. $\blacktriangle$

نگاشت نیم صفحه ها بر روی نیم صفحه ها. نگاشت نیم صفحه ها بر روی نیم صفحه ها نیز از نظر عملی جالب است، به عنوان یک مورد نمونه وار، می توان نیم صفحه فوقانی $y \geq 0$ را بر روی نیم صفحه فوقانی $v \geq 0$ نگاشت. در این صورت محور x باید بر روی محور u نگاشته شود.

مثال ۳. نگاشت نیم صفحه بر روی نیم صفحه

تبدیل کسری خطی را بیابید که نقاط $z_1 = -2$ ، $z_2 = 0$ ، $z_3 = 2$ را به ترتیب بر روی $w_1 = \infty$ ، $w_2 = 1/4$ ، $w_3 = 3/8$ بنگارد. چنانکه خواننده می تواند نشان دهد، با توجه به (۳) داریم

$$(6) \quad w = \frac{z+1}{2z+4}$$

$\blacktriangle$ نقش محور x چیست؟

نگاشت قرصها بر روی قرصها. دسته سوم از مسائل عملی نگاشت قرصها بر روی قرصها است. می توان قرص یک صفحه z را بر روی قرص یک صفحه w نگاشت. به سهولت می توان تحقیق کرد که تابع

$$(7) \quad w = \frac{z-z_0}{cz-1}, \quad c = \bar{z}_0, \quad |z_0| < 1$$

چنین نگاشتی را انجام می دهد. این تابع نقطه z_0 را بر روی مرکز $w=0$ می نگارد (د. ک. مسئله ۶).

مثال ۴. نگاشت قرص یک بر روی قرص یک

فرض می کنیم $z_0 = 1/2$. آنگاه با توجه به (۷)،

$$w(z) = \frac{2z-1}{z-2}$$

محورهای حقیقی باهمدیگر متناظرند؛ به‌ویژه

$$w(-1)=1, \quad w(0)=\frac{1}{2}, \quad w(1)=-1.$$

نظر به اینکه نگاشت همدیسی است و خطوط راست بر روی دایره یا خطوط راست می‌شوند و $w(\infty)=2$ ، نقشه‌های خطوط ثابت x دایره‌ای هستند که از $w=2$ می‌گذرند و مرکز آنها روی محور u قرار دارد؛ و خطوط ثابت y بر روی دایره نگاشته می‌شوند که به دایره قبلی عمودند (شکل ۲۸۵).

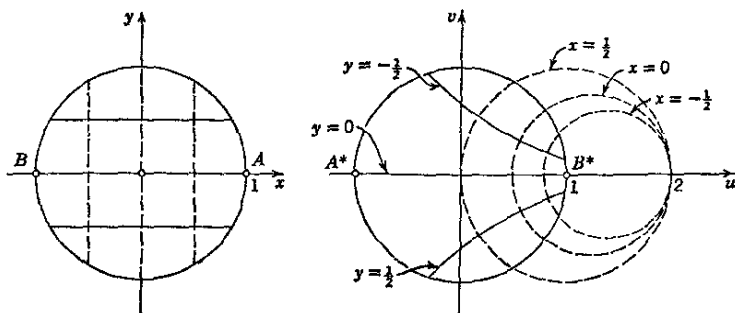
نگاشت نواحی زاویه‌ای بر روی قرص یکه را می‌توان از ترکیب تبدیلهای کسری خطی با تبدیلهایی از نوع $w=z^n$ ، که در آن n عددی صحیح و بزرگتر از ۱ است، به دست آورد.

مثال ۵. نگاشت ناحیه زاویه‌ای بر روی قرص یکه

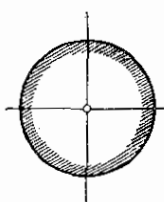
ناحیه زاویه‌ای $D: -\pi/6 \leq \arg z \leq \pi/6$ را بر روی قرص یکه $|w| \leq 1$ می‌نگاریم. برای این منظور به روش زیر عمل می‌کنیم. نگاشت $t=z^3$ ناحیه D را بر روی نیمه راست صفحه t می‌نگارد. سپس از یک تبدیل کسری خطی استفاده می‌کنیم تا این نیم صفحه را بر روی قرص یکه بنگاریم، این تبدیل، به عنوان مثال، می‌تواند

$$w = i \frac{t-1}{t+1}$$

باشد. اگر در این نگاشت قرار دهیم $t=z^3$ ، خواهیم داشت



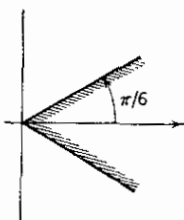
شکل ۲۸۵. نگاشت مثال ۴



(صفحه w)



(صفحه z)



(صفحه z)

شکل ۲۸۶. نگاشت مثال ۵

$$w = i \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1};$$

و این نگاشت دارای خواص مورد نظر است (شکل ۲۸۶).

مسائل بخش ۴.۱۳

۱. $w = (z+i)/(iz+4)$ را به صورت ترکیبی از نگاشتهای نوع (۲)، (۳) و (۴) بخش ۳.۱۳ نمایش دهید.
۲. قضیه ۱ را به ازای $w = az$ ، که در آن $a \neq 0$ ، ثابت کنید.
۳. نشان دهید که ترکیب دوتبدیل کسری خطی یک تبدیل کسری خطی است.
۴. (۵) را از (۳) نتیجه بگیرید.
۵. (۵) را به صورت ترکیبی از نگاشتهای نوع (۲)، (۳) و (۴) بخش ۳.۱۳ نمایش دهید.
۶. حکم مربوط به (۷) را ثابت کنید.
۷. تبدیل کسری خطی بیابید که $|z| \leq 1$ را بروی $|w| \leq 1$ بنگارد به طوری که $z = i/4$ بروی $w = 0$ نگاشته شود، و نقشهای خطوط ثابت $x = \text{ثابت}$ و $y = \text{ثابت}$ را رسم کنید.
۸. معکوس (۴) را بیابید. نشان دهید که (۴) خطوط ثابت $x = c$ را بروی دایری که مراکزشان بر خط $v = 1$ قرار دارد، می نگارد.
مطلوب است تبدیل کسری خطی که به ترتیب
۹. $0, 1, \infty$ را بروی $0, 1, \infty$ می نگارد.
۱۰. $0, 1, i$ را بروی $2+i, 3, 2$ می نگارد.

۱۱. $۱۰، ۱، ۲$ را بر روی $۱، ۱/۲، ۱/۳$ می نگارد.

۱۲. $۱، ۰، -۱$ را بر روی $۱۰، ۰، -۱$ می نگارد.

۱۳. $i، ۰، -i$ را بر روی $۱۰۰، ۰، -۱$ می نگارد.

۱۴. $i، ۰، ۲i$ را بر روی $۱۰۰، ۲i، ۵i/۲$ می نگارد.

۱۵. $-۱، i، ۱+i$ را بر روی $۱۰۰، ۰، ۲+i$ می نگارد.

۱۶. $i، ۰، ۱$ را بر روی $i/۲، ۰، (۱+i)/۲$ می نگارد.

۱۷. $۱/۲، ۱، ۳$ را بر روی $۱۰۰، ۴، ۶/۵$ می نگارد.

۱۸. $۱۰، ۱، ۱۰۰$ را بر روی $۱۰۰، (۱-i)/۲، ۱/۲$ می نگارد.

مطلوب است کلیه تبدیلهای خطی $w(z)$ که خاصیت زیر را دارند.

۱۹. $z_1 = ۰$ يك نقطه ثابت آنها است.

۲۰. $z_1 = ۰، z_2 = ۱۰۰$ نقاط ثابت آنها هستند.

۲۱. محور x را بر روی محور u می نگارند.

۲۲. تبدیل کسری خطی بیابید که ۰ را بر روی ip بنگارد، p در اینجا عددی حقیقی است، و نقاط ثابت آن $۱، -۱$ باشند. حالتها $p=۰$ و $p=۱$ را مورد بحث و بررسی قرار دهید.

۲۳. تابعی تحلیلی بیابید که ربع دوم صفحه z را بر روی داخل دایره ۱ صفحه w بنگارد.

۲۴. مطلوب است تابع تحلیلی $w=f(z)$ که ناحیه $۱ < x < ۲$ را بر روی قرص $۱ < |w|$ می نگارد.

۲۵. مطلوب است تابع تحلیلی $w=f(z)$ که ناحیه $۰ < \arg z < \pi/۲$ را بر روی قرص $۱ < |w|$ می نگارد.

۵.۱۳ نگاشت با سایر توابع مقدماتی

اکنون خواص نگاشتی چند تابع خاص مهم دیگر را بررسی می کنیم.

تابع نمایی (بخش ۷.۱۲)

$$(۱) \quad w = e^z$$

نگاشتی را تعریف می کند که همه جا همدیسی است، زیرا مشتق آن در همه نقاط مخالف

صفر است. هر گاه قراردادیم $w = Re^{i\phi}$ ، آنگاه

$$Re^{i\phi} = e^{*+iy} = e^* e^{iy}$$

و (۱) را می‌توان به صورت

$$(۲) \quad R = e^*, \quad \phi = y$$

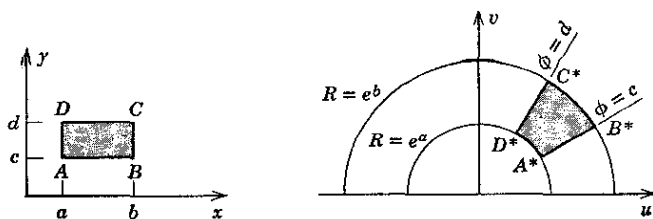
نوشت. بنا بر این مشاهده می‌کنیم که خطوط ثابت $x = a =$ بر روی دایره $R = e^a$ ، و خطوط $y = c =$ بر روی شعاعهای $\phi = c$ نگاشته می‌شوند. چون، به ازای هر z ، $e^z \neq 0$ ، نقطه $w = 0$ نقش هیچ نقطه z نیست. يك ناحیه مستطیلی، مثلاً ناحیه $a \leq x \leq b$ ، $c \leq y \leq d$ بر روی ناحیه

$$e^a \leq R \leq e^b, \quad c \leq \phi \leq d$$

که با قسمتهایی از شعاعها و دایره محصور شده است، نگاشته می‌شود (شکل ۲۸۷).
نوار بنیادی $-\pi < y \leq \pi$ بر روی تمامی صفحه w (که در طول محور حقیقی منفی بریده شده است) نگاشته می‌شود. به طور کلی، هر نوار افقی که بین خطوط $y = c$ و $y = c + 2\pi$ محصور شده است بر روی تمامی صفحه w نگاشته می‌شود. این موضوع بیانگر این واقعیت است که e^z دوره‌ای است و دوره آن $2\pi i$ است.

همان طور که از (۲) نتیجه می‌شود، نوار افقی $0 \leq y \leq \pi$ بر روی نیمه فوقانی صفحه w نگاشته می‌شود. مرز $y = 0$ بر روی نیمه مثبت محور u و خط $y = \pi$ بر روی نیمه منفی محور u نگاشته می‌شود. پاره خطی که 0 را به πi وصل می‌کند بر روی نیمدایره $|w| = 1$ ، $v \geq 0$ ، نگاشته می‌شود. نیمه چپ ($x \leq 0$) نوار بر روی ناحیه $|w| \leq 1$ ، $v \geq 0$ ، و نیمه راست ($x \geq 0$) آن بر روی خارج نیمدایره $|w| = 1$ که در نیمه فوقانی صفحه w قرار دارد نگاشته می‌شود (شکل ۲۸۸).

چون لگاریتم طبیعی $w = u + iv = \ln z$ رابطه معکوس تابع نمایی است، خواص نگاشت همدیسی متناظر با آن را به سادگی می‌توان از خواص تابع نمایی به دست آورد، متتهی باید جای صفحه‌های z و w را در تمام عبارتهای بالا باهم عوض کرد. مقدار اصلی $w = \text{Ln } z$ صفحه z را که در طول قسمت منفی محور حقیقی بریده شده است) بر روی نوار $-\pi < v \leq \pi$ از صفحه w می‌نگارد. جزئیات بیشتری از این نگاشت در مثال ۲ از بخش



شکل ۲۸۷. نگاشت $w = e^z$ با

بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

تابع سینوسی (بخش ۸.۱۲)

$$(۳) \quad w = u + iv = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

که در آن

$$(۴) \quad u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y,$$

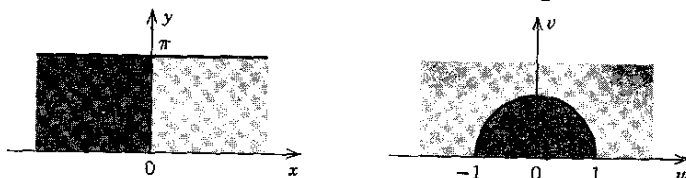
دوره ای است. از این رو، هر گاه این تابع را در تمامی صفحه xy بررسی کنیم مطمئناً يك به يك نخواهد شد. z را به نوار نامتناهی، که با $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ - تعریف می شود، محدود می کنیم. نظر به اینکه $f'(z) = \cos z$ در $z = \pm \pi/2$ صفر است، نگاشت در این دو نقطه همدیسی نیست. از (۴) نتیجه می شود که مرز S در محور u نگاشته می شود قطعه $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ از محور x بر روی قطعه $-1 \leq u \leq 1$ از محور u نگاشته می شود، خط $x = -\pi/2$ بر روی $u \leq -1$ ، $v = 0$ ، و خط $x = \pi/2$ بر روی $u \geq 1$ ، $v = 0$ نگاشته می شود. پاره خط $y = c > 0$ ، $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ بر روی قسمتی از بیضی

$$u = \cosh c \sin x, \quad v = \sinh c \cos x$$

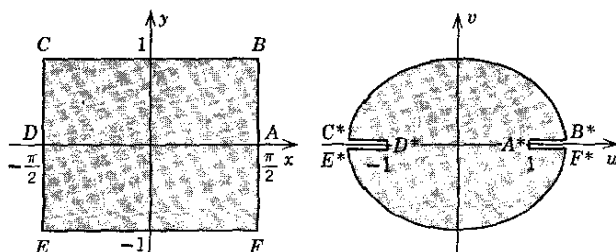
یا

$$(۵) \quad \frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1$$

که در نیمه فوقانی صفحه w قرار دارد نگاشته می شود. پاره خط $y = -c$ ،



شکل ۲۸۸. نگاشت با $w = e^z$



شکل ۲۸۹. نگاشت با $w = \sin z$

$-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ ($c > 0$) بر روی نیمه تختانی بیضی (۵) نگاشته می شود. کانونهای بیضی در $w = \pm 1$ هستند، و چنانچه مشاهده می کنیم مستقل از c هستند. در نتیجه، هرگاه c را تغییر دهیم، دسته ای از بیضیهای هم کانون به دست می آوریم. بنابراین ناحیه مستطیلی تعریف شده با $-\pi/2 < x < \pi/2$ ، $-c < y < c$ بر روی داخل بیضی (۵) نگاشته می شود؛ اما توجه کنید که نقش مرز، همان طور که در شکل ۲۸۹ (که در آن $c=1$) نشان داده شده است عبارت است از بیضی و دو قطعه از محور u ، نقش نقاط واقع بر قسمتهای قائم مرز دو به دو برهم منطبقند. خصوصاً، $C^* = E^*$ و $B^* = F^*$.

مستطیل $-\pi < x < \pi$ ، $c < y < d$ ($c > 0$) بر روی حلقه ای بیضی که در طول محور v منفی بریده شده است نگاشته می شود (شکل ۲۹۰). خطهای راست $-\pi/2 < x < \pi/2$ ، ثابت x بر روی هذلولیهای هم کانونی که آنها را تحت زاویه قائمه قطع می کنند نگاشته می شوند، و محور y بر روی محور v نگاشته می شود.

تابع کسینوسی

$$(۶) \quad w = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

همان نگاشت مربوط به $\sin z$ را که به اندازه $\pi/2$ واحد به راست انتقال یافته است تعریف می کند.

تابع هذلولی گون

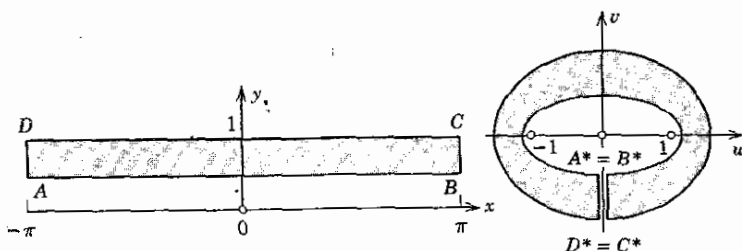
$$(۷) \quad w = \sinh z = -i \sin(iz)$$

تبدیلی را تعریف می کند که عبارت است از دوران $t = iz$ و نگاشت $p = \sin t$ و به دنبال آن دوران $w = -ip$.

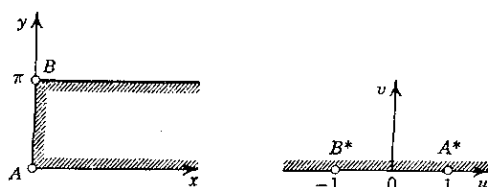
به همین نحو، تبدیل

$$(۸) \quad w = \cosh z = \cos(iz)$$

عبارت است از دوران $t = iz$ به اضافه نگاشت $w = \cos t$.



شکل ۲۹۰. نگاشت $w = \sin z$



شکل ۲۹۱. نگاشت مربوط به مثال ۱

مثال ۱. نگاشت نوار از يك طرف نامتناهی بر روی نیم صفحه

مطلوب است نقش نوار از يك طرف نامتناهی $0 \leq y \leq \pi$, $x \geq 0$ (شکل ۲۹۱) تحت نگاشت ۸. قرار می دهیم $w = u + iv$. چون $\cosh 0 = 1$, نقطه $z = 0$ بر روی $w = 1$ نگاشته می شود. به ازای عدد حقیقی $0 \leq z = x$, $\cosh z$ حقیقی است و با افزایش x , به طور یکنوا از ۱ صعود می کند. از این رو محور x مثبت بر روی قسمت $u \geq 1$ از محور u نگاشته می شود. به ازای مقدار موهومی محض $z = iy$ داریم $\cosh iy = \cos y$. نتیجه می شود که مرز چپ نوار بر روی قطعه $-1 \leq u \leq 1$ از محور u نگاشته می شود، ضمن آنکه نقطه $z = \pi i$ متناظر است با

$$w = \cosh i\pi = \cos \pi = -1$$

روی مرز فوقانی نوار، $y = \pi$, و نظر به اینکه $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, نتیجه می شود که این قسمت مرز بر روی قسمت $u \leq -1$ از محور u نگاشته می شود. از این رو مرز نوار بر روی محور u نگاشته می شود. بررسی این موضوع که داخل نوار بر روی نیمه فوقانی صفحه w نگاشته می شود و نگاشت يك به يك است مشکل نیست.

مثال ۲. يك مسئله مقدار مرزی

مطلوب است دمای $T(x, y)$ در نواری که در مثال ۱ بررسی شد، هرگاه دما در روی مرز برابر باشد با

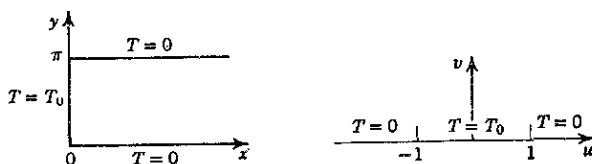
$$T = T_0 \text{ روی پاره خطی که به } 0 \text{ و } \pi i \text{ محدود می شود}$$

$$T = 0 \text{ روی مرزهای فوقانی و تحتانی}$$

چون T بستگی به زمان ندارد («توزیع دمای حالت مانا»)، معادله گرما به معادله لاپلاس (ر. ک. بخش ۱۱.۱) تبدیل می شود:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

وما باید جوابی از این معادله را که در شرایط مرزی مزبور صدق می کند بیابیم. برای حل این مسئله نوار را به وسیله (۸) بر روی نیمه فوقانی صفحه w می نگاریم.



شکل ۲۹۲. شرایط مرزی مثال ۲

چون قطعه $0 \leq v \leq \pi$ از محور v بر روی قطعه $-1 \leq u \leq 1$ از محور u نگاشته می‌شود، شرایط مرزی در صفحه w عبارتند از (شکل ۲۹۲)

$$T = T_0 \text{ روی پاره خطی که به } -1 \text{ و } 1 \text{ محدود می‌شود}$$

$$T = 0 \text{ در سایر قسمتهای محور } u$$

قسمتهای حقیقی و موهومی توابع تحلیلی جوابهای معادله لاپلاس هستند، و ما باید برای این معادله جوابی مانند $T(u, v)$ در نیمه فوقانی صفحه w بیابیم که در شرایط مرزی صدق کند. بدین جهت توابع

$$\text{Ln}(w+1) = \ln|w+1| + i\phi_1, \quad \phi_1 = \arg(w+1) = \arctan \frac{v}{u+1} \quad (9^*)$$

$$\text{Ln}(w-1) = \ln|w-1| + i\phi_2, \quad \phi_2 = \arg(w-1) = \arctan \frac{v}{u-1}$$

را در نظر می‌گیریم. نظر به اینکه $\phi_2(u, v)$ و $\phi_1(u, v)$ توابع همساز هستند، $\phi_2 - \phi_1$ همساز است. هرگاه $w = u$ حقیقی و کوچکتر از -1 باشد، آنگاه $\phi_2 - \phi_1 = \pi - \pi = 0$ ؛ به ازای مقدار حقیقی $w = u$ در فاصله $-1 < u < 1$ داریم $\phi_2 - \phi_1 = \pi - 0 = \pi$ و به ازای مقدار حقیقی $w = u > 1$ داریم $\phi_2 - \phi_1 = 0 - 0 = 0$. از این رو تابع

$$(9) \quad T(u, v) = \frac{T_0}{\pi} (\phi_2 - \phi_1)$$

در نیم صفحه $v > 0$ همساز است و در صفحه w در شرایط مرزی صدق می‌کند از آنجا که $\tan \phi_1 = v/(u+1)$ و $\tan \phi_2 = v/(u-1)$ ، نتیجه می‌شود

$$\tan(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\tan \phi_2 - \tan \phi_1}{1 + \tan \phi_1 \tan \phi_2} = \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1}$$

و (۹) به صورت

$$(10) \quad T(u, v) = \frac{T_0}{\pi} \arctan \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1}$$

درمی آید.

تابع $w = \cosh z$ نوار مورد نظر را بر روی نیم صفحه $v \geq 0$ می نگارد و داریم

$$w = u + iv = \cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

با جدا کردن قسمتهای حقیقی و موهومی در دو طرف تساوی فوق می توان نوشت

$$u = \cosh x \cos y, \quad v = \sinh x \sin y.$$

به ازای این مقادیر برای u و v نتیجه می شود که در (۱۰)،

$$u^2 + v^2 - 1 = \cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y - 1 = \sinh^2 x - \sin^2 y.$$

اگر مقدار $1 - u^2 + v^2$ را در (۱۰) قرار دهیم و $T(u(x, y), v(x, y))$ را با $T^*(x, y)$ نمایش دهیم خواهیم داشت

$$T^*(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \arctan \frac{\sinh x \sin y}{\sinh^2 x - \sin^2 y}$$

بسیار توجه به اینکه صورت و مخرج کسر به ترتیب قسمت موهومی و قسمت حقیقی تابع $(\sinh x + i \sin y)^2$ هستند، می توان نوشت

$$\begin{aligned} T^*(x, y) &= \frac{T_0}{\pi} \arg [(\sinh x + i \sin y)^2] \\ &= \frac{2T_0}{\pi} \arg (\sinh x + i \sin y). \end{aligned}$$

در نتیجه جواب مسئله ما عبارت است از

$$(11) \quad T^*(x, y) = \frac{2T_0}{\pi} \arctan \frac{\sin y}{\sinh x}.$$

این تابع در داخل نوار همساز است (ر.ک. قضیه ۲ بخش ۲۰.۱۳) و در شرایط مرزی صدق می کند. در واقع، وقتی که $y = 0$ یا $y = \pi$ ، $T^* = 0$ ، و وقتی که $x = 0$ ، $T^* = T_0$. همدماها (= منحنیهای دمای ثابت) عبارتند از

$$\frac{\sin y}{\sinh x} = \text{ثابت}$$

در مثال ۲ پتانسیل حقیقی $T(u, v)$ را با استفاده از تابع $w = u(x, y) + iv(x, y)$ که نیم صفحه را بر روی ناحیه مفروض می نگارد، به پتانسیل حقیقی $T^*(x, y)$ تبدیل

کردیم. در موارد زیادی این نوع مسائل را می‌توان با استفاده از پتانسیل مختلط ساده‌تر کرد، برای این کار يك تابع تحلیلی مختلط $F(w)$ ، در نظر می‌گیریم به طوری که پتانسیل حقیقی $T(u, v)$ قسمت حقیقی یا موهومی آن باشد، و به جای F ، T را تبدیل می‌کنیم. واضح است که چنین پتانسیل مختلط F را می‌توان به سادگی از T ، با تعیین تابع همساز مزدوج T (ر. ک. به آخر بخش ۵.۱۲)، به دست آورد. حالا به تشریح «روش پتانسیل مختلط» در مورد مثال قبل می‌پردازیم. بحث در جزئیات پتانسیل مختلط بعداً خواهد آمد (فصل ۱۸)

مثال ۳. پتانسیل مختلط

با توجه به (9^*) مشاهده می‌کنیم پتانسیل حقیقی

$$T(u, v) = \frac{T_0}{\pi} (\phi_2 - \phi_1),$$

که در مثال ۲ [ر. ک. (۹)] ذکر شد، قسمت موهومی پتانسیل مختلط

$$(12) \quad F(w) = \frac{T_0}{\pi} [\operatorname{Ln}(w-1) - \operatorname{Ln}(w+1)] = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{w-1}{w+1}$$

است. تابع نگاشت در مثال ۲ عبارت است از

$$w = \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

با توجه به این مشاهده می‌کنیم که در (۱۲)

$$\frac{w-1}{w+1} = \frac{\cosh z - 1}{\cosh z + 1} = \frac{e^z + e^{-z} - 2}{e^z + e^{-z} + 2} = \frac{(e^{z/2} - e^{-z/2})^2}{(e^{z/2} + e^{-z/2})^2} = \tanh^2 \frac{z}{2}$$

اگر این مقدار را در (۱۲) بگذاریم و $F(w(z))$ را با $F^*(z)$ و $\tanh(z/2)$ را با H نشان دهیم، خواهیم داشت

$$(13) \quad F^*(z) = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Ln} \tanh^2 \frac{z}{2} = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{Ln} \tanh \frac{z}{2} = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{Ln} H.$$

بنابراین (۲) از بخش ۹.۱۲ این تساوی را می‌توان چنین نوشت:

$$(14) \quad F^*(z) = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{Ln} H = \frac{2T_0}{\pi} \left(\ln |H| + i \arctan \frac{\operatorname{Im} H}{\operatorname{Re} H} \right)$$

$F^*(z)$ پتانسیل مختلط در نوار مربوط به مثال ۲ است، و قسمت موهومی آن جواب مسئله مورد نظر است. با استفاده از تعریف H بر حسب توابع نمایی نتیجه می‌گیریم

$$(15) \quad H = \frac{\sinh x + i \sin y}{\cosh x + \cos y}.$$

از اینجا و (۱۴) داریم

$$T^*(x, y) = \operatorname{Im} F^*(z) = \frac{2T_0}{\pi} \arctan \frac{\sinh y}{\sinh x},$$

که با نتیجه مثال ۲ مطابقت می‌کند.
به علاوه، از (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$|H|^2 = \frac{\sinh^2 x + \sin^2 y}{(\cosh x + \cos y)^2}$$

و با توجه به (۱۴) مشاهده می‌کنیم که قسمت حقیقی $F^*(z)$ چنین می‌شود:

$$S^*(x, y) = \operatorname{Re} F^*(z) = \frac{T_0}{\pi} \ln \frac{\sinh^2 x + \sin^2 y}{(\cosh x + \cos y)^2}$$

منحنیهای ثابت $S^* = S$ همدمای ثابت $T^* = T$ را با زاویه قائمه قطع می‌کنند و بنابراین منحنیهایی هستند که گرما در امتداد آنها جریان پیدا می‌کند. امتیاز بزرگ پتانسیل مختلط آن است که این پتانسیل هر دو خانواده منحنیها را نتیجه می‌دهد.

مسائل بخش ۵.۱۳

نقشهای نواحی زیر را تحت نگاشت $w = e^z$ بیابید و نمودار آنها را رسم کنید.

$$-1 < x < 1, \quad -\pi/2 < y < \pi/2 \quad ۱.$$

$$0 < x < 2, \quad 0 < y < \pi \quad ۲.$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad ۳.$$

$$-2 < x < -1, \quad 0 < y < \pi/4 \quad ۴.$$

$$-2 \leq x \leq 2, \quad -\pi \leq y \leq -\pi/2 \quad ۵.$$

$$-1 \leq x \leq 3, \quad -\pi \leq y \leq \pi \quad ۶.$$

۷. مطلوب است تابع تحلیلی که ناحیه محدود به محور x و محور y و هذلولی $x, y = \pi/2$ واقع در ربع اول، را بر روی نیم صفحه فوقانی می‌نگارد. (اھنمایی. نخست ناحیه مورد نظر را بر روی یک نوار افقی بنگارید.

نقشهای نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \sin z$ بیابید و نمودارشان را رسم کنید.

$$0 < x < \pi/2, \quad 0 < y < 2 \quad ۸.$$

$$-\pi/2 < x < \pi/2, \quad 1 < y < 2 \quad ۰.۹$$

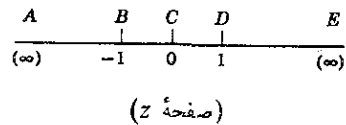
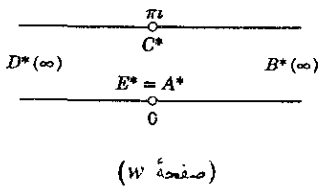
$$-\pi/2 < x < \pi/2, \quad 0 < y < 1 \quad ۰.۱۰$$

$$0 < x < 2\pi, \quad 1 < y < 2 \quad ۰.۱۱$$

۱۲. نقشه‌های خطوط $x = 0, \pm \pi/6, \pm \pi/3, \pm \pi/2$ را تحت نگاشت $w = \sin z$ بیابید و آنها را رسم کنید.

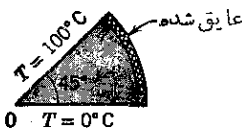
۱۳. تبدیل $w = \cosh z$ را بر حسب $w = \sin z$ و دوران و انتقال بیان کنید.

۱۴. نشان دهید که $w = \operatorname{Ln} \frac{z-1}{z+1}$ نیم صفحه فوقانی را به‌ترتیبی که در شکل نشان داده شده است بر روی نوار افقی $0 \leq \operatorname{Im} w \leq \pi$ می‌نگارد.

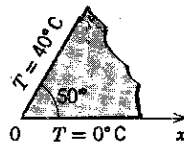


مسئله ۱۴

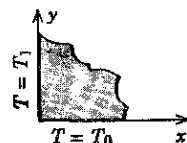
مطلوب است دمای $T(x, y)$ در ورقه نازک فلزی مفروضی که رویه‌های آن عایق است و لبه‌های آن دارای دماهایی است که در شکل نشان داده شده است.



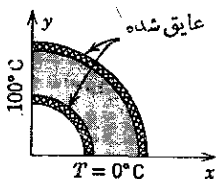
۰.۱۷



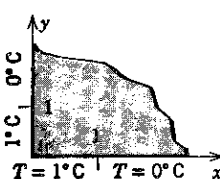
۰.۱۶



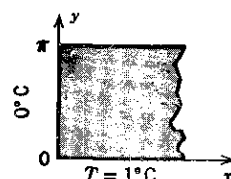
۰.۱۵



۰.۲۰



۰.۱۹



۰.۱۸

۶.۱۳ رویه‌های ریمان

نگاشتی را که با

(۱)

$$w = u + iv = z^2$$

تعریف می شود در نظر می گیریم (ر.ک. بخش ۱۰.۱۳). این نگاشت، جز در $z = 0$ که در آن $w' = 2z = 0$ صفر است، همدیسی است. در $z = 0$ زوایا تحت این نگاشت دوبرابر می شوند. نیمه راست صفحه z (که شامل قسمت مثبت محور y نیز هست) بر روی تمامی صفحه w که در طول نیمه منفی محور u بریده شده است نگاشته می شود؛ این نگاشت یک به یک است. به همین نحو، نیمه چپ صفحه z (که شامل قسمت منفی محور y است) به طور یک به یک بر روی صفحه w بی که بریده شده است نگاشته می شود.

واضح است که این نگاشت در تمامی صفحه z یک به یک نیست، زیرا هر نقطه $w \neq 0$ درست با دو نقطه از z متناظر است. در واقع، هرگاه z_1 یکی از این نقاط باشد آنگاه نقطه دیگر $z_2 = -z_1$ است. مثلاً نقاط $z = i$ و $z = -i$ دارای یک نقش $w = 1$ هستند و به همین ترتیب، در نتیجه، صفحه w توسط نقش صفحه z «دو بار پوشانده» می شود. می گوئیم که تمامی صفحه z بر روی صفحه w ی دولا به نگاشته می شود. لازم است تصویری را که از این نگاشت داریم با توضیح زیر تقویت کنیم.

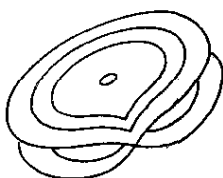
این طور تصویری کنیم که یک نمونه از صفحه w ی بریده شده روی نمونه دیگری از این صفحه قرار گیرد به طوری که ورقه یالایی نقش نیمه راست صفحه z ، و ورقه زیرین نقش نیمه چپ صفحه z باشد؛ این نیم صفحه ها را به ترتیب با R و L نشان می دهیم. وقتی که از R به L می رویم، نقطه نقش متناظر باید از ورقه بالایی به ورقه زیرین برود. بدین جهت دو ورقه را در طول قسمت بریده شده، یعنی، در طول محور حقیقی منفی، به طور ضربدری به هم وصل می کنیم. این تنها یک تصور ذهنی است، زیرا عبور دو صفحه مسادی از داخل هم هرگز به طور کامل امکان پذیر نیست. دو مبدأ به هم چسبیده اند. شکلی که به این ترتیب به دست می آید رویه ریمان نام دارد. روی این سطح هر نقطه $w \neq 0$ دو بار، بر روی هم، و مبدأ فقط یک بار ظاهر می شود. حالات تابع $z^2 = w$ تمامی صفحه z را به طور یک به یک بر روی رویه ریمان می نگارد، و این نگاشت جز در مورد «نقطه پیچشی» یا نقطه شاخه ای در $w = 0$ (شکل ۲۹۳) یک تغییر شکل است. هر نقطه شاخه ای از این نوع که دو ورقه را به هم وصل می کند، نقطه شاخه ای از مرتبه اول نامیده می شود. (در حالت کلیتر، هر نقطه شاخه ای که n ورقه را به هم وصل کند، نقطه شاخه ای از مرتبه $n - 1$ نامیده می شود.)

حالا رابطه دو مقداری

$$(۲) \quad w = \sqrt{z}$$

را در نظر می گیریم. به هر $w \neq 0$ دو مقدار w نظیر می شود، که یکی از آنها مقدار اصلی است. هرگاه جای صفحه z را بارویه ریمان دو ورقه ای، که هم اکنون بررسی شد، عوض کنیم آنگاه هر عدد مختلط $z \neq 0$ با دو نقطه از رویه، که بر روی هم قرار دارند، نمایش داده می شود. فرض می کنیم یکی از این نقاط - مثلاً، نقطه ای که در ورقه فوقانی واقع شده است - نظیر مقدار اصلی و نقطه دوم نظیر مقدار دیگر باشد. در این صورت (۲) یک مقداری می شود، یعنی (۲) تابعی از نقاط رویه ریمان است، و به هر حرکت پیوسته در رویه حرکت پیوسته از نقطه متناظر آن در صفحه w نظیر می شود. تابع ورقه متناظر با مقدار اصلی را بر روی نیمه

راست صفحه w و ورقه دیگر را بر روی نیمه چپ صفحه w می‌نگارد.



شکل ۲۹۳. نمونه‌ای از رویهٔ ریمان

حال چند مثال مهم دیگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱. رویهٔ ریمان $\sqrt[n]{z}$

در مورد رابطه

$$(۳) \quad w = \sqrt[n]{z} \quad n = 3, 4, \dots$$

نیاز به رویهٔ ریمانی با n ورقه داریم که دارای یک نقطهٔ شاخه‌ای از مرتبهٔ $n-1$ در $z=0$ باشد. یکی از این ورقه‌ها نظیر مقدار اصلی است و $n-1$ ورقهٔ دیگر با $n-1$ مقدار دیگر متناظرند.

مثال ۲. رویهٔ ریمان لگاریتم طبیعی

به ازای هر $z \neq 0$ رابطه

$$(۴) \quad w = \ln z = \operatorname{Ln} z + \gamma n \pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, z \neq 0)$$

پنهایت مقداری است، در نتیجه (۴) یک تابع بر رویهٔ ریمانی که مرکب از تعدادی نامتناهی ورقه است تعریف می‌کند. تابع $w = \operatorname{Ln} z$ با یکی از این ورقه‌ها متناظر است. برای ورقه θ شناسهٔ z ، در فاصلهٔ $-\pi \leq \theta \leq \pi$ تغییر می‌کند (ر.ک. بخش ۹.۱۲). ورقه در طول شعاع منفی محور حقیقی بریده شده است، و لبهٔ بالایی چاک به لبهٔ پایینی ورقهٔ دیگری، که نظیر فاصلهٔ $\pi \leq \theta \leq 3\pi$ یعنی نظیر تابع $w = \operatorname{Ln} z + 2\pi i$ است وصل شده است. به این ترتیب هر مقدار n که در (۴) بگذاریم متناظر با تنها یکی از این بینهایت ورقه می‌شود. تابع $w = \operatorname{Ln} z$ ورقهٔ مربوط به خود را بر روی نوار افقی $-\pi \leq v \leq \pi$ در صفحهٔ w می‌نگارد. ورقهٔ بعدی بر روی نوار مجاور یعنی $\pi \leq v \leq 3\pi$ نگاشته می‌شود و همین طور الی آخر. بنابراین تابع $w = \operatorname{Ln} z$ همهٔ ورقه‌های رویهٔ ریمان متناظر با خود را بر روی تمامی صفحهٔ w می‌نگارد، تناظر بین نقاط $z \neq 0$ از رویهٔ ریمان و نقاط صفحهٔ w یک به یک است.

مثال ۳. نگاشت $w = z + z^{-1}$. هواپر

نگاشت

$$(۵) \quad w = z + \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$$

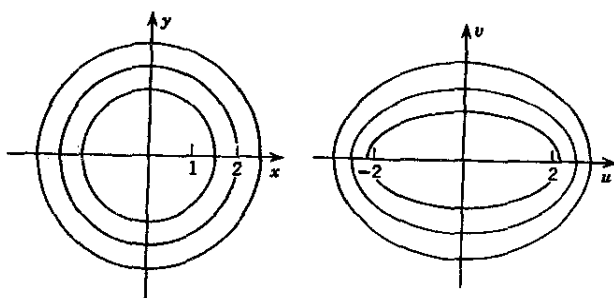
را که در آن ژوردینامیک است در نظر می گیریم. نظر به اینکه

$$w' = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2}$$

این نگاشت جز در نقاط $z = 1$ و $z = -1$ همدیسی است؛ این نقاط به ترتیب با $w = 2$ و $w = -2$ متناظرند. از (۵) نتیجه می گیریم

$$(۶) \quad z = \frac{w}{2} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1} = \frac{w}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(w+2)(w-2)}$$

پس، نقاط $w = 2$ و $w = -2$ نقاط شاخه ای مرتبه اول $z = z(w)$ هستند. به هر مقدار ($w \neq 2$ و $w \neq -2$) دو مقدار z نظیر می شود. در نتیجه، (۵) صفحه z را بر روی یک رویهٔ ریمان دو ورقه ای می نگارد، که این دو ورقه به طور ضربدری از $w = 2$ تا $w = -2$ (شکل ۲۹۲) به هم مرتبط اند و این نگاشت، یک به یک است. با فرض $z = re^{i\theta}$ نقش منحنیهای ثابت $r = r$ و ثابت θ را تعیین می کنیم. از (۵) به دست می آوریم



شکل ۲۹۴. مثال ۳

$$w = u + iv = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

از مساوی گرفتن قسمتهای حقیقی و موهومی طرفین معادله بالا داریم

$$(۷) \quad u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

از اینجا به دست می آوریم

$$b = \left| r - \frac{1}{r} \right|, \quad a = r + \frac{1}{r} \quad \text{که در آن} \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

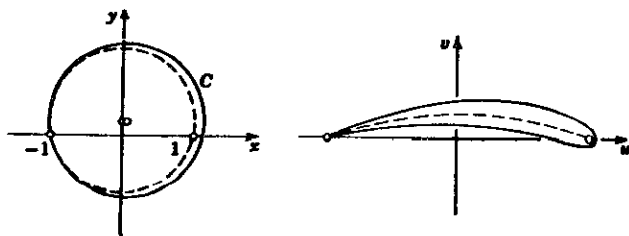
بنابراین دایره‌های ثابت $r = 1$ بر روی بیضیهایی نگاشته می‌شوند که محورهای اصلی آنها و برمحورهای u و v منطبق و طول آنها به ترتیب $2a$ و $2b$ باشد. چون $a^2 - b^2 = 4$ ، مستقل از r است، این بیضیها هم کانون هستند و کانونهای آنها نقاط $w = 2$ و $w = -2$ هستند. دایره‌یکه $r = 1$ بر روی پاره خطی که به $w = 2$ و $w = -2$ محدود است نگاشته می‌شود. به ازای هر $r \neq 1$ دو دایره‌ای که شعاعهایشان r و $1/r$ است بر روی یک بیضی در صفحه w ، که متناظر با دو ورقه از رویهٔ ریمان است، نگاشته می‌شوند. بنابراین داخل دایره‌یکه $|z| = 1$ با یکی از این ورقه‌ها و خارج آن با ورقهٔ دیگر متناظر است. به علاوه، از (۷) به دست می‌آوریم

$$(۸) \quad \frac{u^2}{\cos^2 \theta} - \frac{v^2}{\sin^2 \theta} = -4.$$

بنابراین خطوط ثابت θ بر روی هذلولیهایی که مسیرهای متعامد این بیضیها هستند نگاشته می‌شوند. محور حقیقی، یعنی شعاعهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ ، بر روی قسمتی از محور حقیقی از $w = 2$ تا $w = -2$ نگاشته می‌شود. محور v بر روی دو شاخهٔ همان هذلولی نگاشته می‌شود.

ناحیهٔ خارجی یکی از بیضیهای فوق عاری از نقطهٔ شاخه‌ای است و با داخل یا خارج دایرهٔ نظیر در صفحهٔ z ، بسته به ورقه‌ای از رویهٔ ریمان که ناحیه به آن تعلق دارد متناظر است. به ویژه تمامی صفحهٔ w همان طور که قبلاً متذکر شدیم با داخل یا خارج دایره‌یکه $|z| = 1$ متناظر است.

نگاشت (۵) دواير مناسب را به هوا برهائی می‌برد که لبهٔ عقبی تیز دارند و زاویهٔ داخلی آنها صفر است و به هوا برهائی ژوکوفسکی معروفند. نظر به اینکه هوا بر دارای لبهٔ تیزی



شکل ۲۹۵. هوا بر ژوکوفسکی

است، واضح است دایره‌ای که نگاشته می‌شود باید از یکی از دو نقطه $z = \pm 1$ که نگاشت در آنها همدیمی است بگذرد. دایره C را طوری انتخاب می‌کنیم که از $z = -1$ بگذرد و $z = 1$ درون آن باشد. ساده‌ترین راه تعیین نقش این دایره آن است که بردارهای متناظر با z و $1/z$ را به روش ترسیمی جمع کنیم (همان طور که در بخش ۱.۱۳ نشان داده شد می‌توان $1/z$ را از z به دست آورد). نتیجه در شکل ۲۹۵ آورده شده است. تفصیل این مطلب در مرجع [F۹] ضمیمه ۱ آمده است.

بررسی دقیقتر رویه‌های ریمانی در مرجع [F۱۰] آمده است.

مسائل بخش ۶.۱۳

۱. $w = \sqrt{z}$ را نظر می‌گیریم. مسیر w ، نقش نقطه z ، را که از وضع اولیه $z = 1$ شروع کرده دوبار روی دایره‌یکه دور می‌زند پیدا کنید.
۲. نشان دهید که رویه ریمان $w = \sqrt[3]{z}$ مرکب از سه ورقه است و در نقطه $z = 0$ دارای نقطه شاخه‌ای مرتبه دوم است. مسیر w ، نقش نقطه z را که از وضع اولیه $z = 1$ شروع کرده سه بار روی دایره‌یکه دور می‌زند بیاید.
۳. رویه‌های ریمان $w = \sqrt[4]{z}$ و $w = \sqrt[5]{z}$ را به‌طریقی مشابه با مسئله ۲ بررسی کنید.
۴. نموداری مانند شکل ۲۹۳ از رویه‌های $\sqrt[3]{z}$ و $\sqrt[4]{z}$ رسم کنید.
۵. مطلوب است نقش طوقهای $1/2 < |z| < 1$ ، $1 < |z| < 2$ ، و $2 < |z| < 3$ تحت نگاشت $w = z + 1/z$.
۶. مطلوب است مسیر نقش نقطه z تحت نگاشت $w = \ln z$ وقتی که z چندین بار روی دایره‌یکه دور می‌زند.
۷. نشان دهید که رویه ریمان $w = \sqrt{(z-1)(z-4)}$ در $z = 1$ و $z = 4$ دارای نقاط شاخه‌ای است و مرکب است از دو ورقه که می‌توان آنها را در طول قطعه خطی که از ۱ تا ۴ ادامه دارد برید و به‌طور ضربدری به هم وصل کرد. راهنمایی. مختصات قطبی $z - 1 = re^{i\theta_1}$ و $z - 4 = re^{i\theta_2}$ را به کار ببرید.
۸. نشان دهید که رویه ریمان $w = \sqrt{(1-z^2)(4-z^2)}$ دارای چهار نقطه شاخه‌ای است و دو ورقه دارد که می‌توان آنها را در طول قطعات $-2 \leq x \leq -1$ و $1 \leq x \leq 2$ از محور x به‌طور ضربدری به هم وصل کرد.

مکان نقاط شاخه‌ای و تعداد ورقه‌های رویه‌های ریمان توابع زیر را بیابید.

$$\begin{array}{llll}
 w = \sqrt[r]{z-i} & .11 & w = \sqrt{z-i} & .10 \quad w = i\sqrt{z} & .9 \\
 \sqrt{z(z-1)(z+1)} & .14 & \sqrt{z^2+1} & .13 & \sqrt[r]{2z+3i} & .12 \\
 \ln(z-a) & .17 & 1+z+\sqrt{z} & .16 & \sqrt{(z-a)(z-b)} & .15 \quad a \neq b \\
 \sqrt[r]{\sqrt{z}-1} & .20 & \sqrt{e^z} & .19 & e^{\sqrt{z}} & .18
 \end{array}$$

انتگرال مختلط

اهمیت انتگرال در صفحه مختلط دو دلیل دارد. دلیل عملی این است که در کاربردها انتگرالهای حقیقی بیش می‌آیند که با انتگرالگیری مختلط قابل محاسبه‌اند، درحالی که با روشهای معمول حساب انتگرال حقیقی نمی‌توان آنها را محاسبه کرد. دلیل دیگر ماهیت نظری دارد و از این واقعیت ناشی می‌شود که روش انتگرالگیری مختلط اثبات برخی از خواص اساسی توابع مختلط (خصوصاً وجود مشتقات بالاتر) را میسر می‌کند، در صورتی که اثبات این خواص بدون استفاده از انتگرال خیلی مشکل است. این موضوع نشان دهنده اختلافی اساسی بین حساب دیفرانسیل و انتگرال مختلط و حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی است.

در این فصل نخست انتگرال مختلط را تعریف می‌کنیم، اساسیترین نتیجه‌ای که می‌گیریم قضیه انتگرال کشی (بخش ۳.۱۴) است که فرمول مهم انتگرال کشی (بخش ۵.۱۴) از آن حاصل می‌شود. در بخش ۶.۱۴ ثابت می‌کنیم که اگر تابعی تحلیلی باشد، از هر مرتبه‌ای مشتق دارد. این بدان معنی است که رفتار توابع تحلیلی بسیار ساده‌تر از رفتار توابع حقیقی با متغیر حقیقی است.

(انتگرالگیری به وسیله مانده و کاربرد آن برای انتگرالهای حقیقی در فصل ۱۷ مورد بررسی قرار می‌گیرد.)

پیشنیاز این فصل: فصل ۱۲

مراجع: ضمیمه ۱، بخش F

جواب مسائل: ضمیمه ۲

۱۰۱۴ انتگرال روی خط در صفحه مختلط

مانند حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی، بین انتگرالهای معین و انتگرالهای نامعین یا توابع اولیه فرق می گذاریم. یک انتگرال نامعین تابعی است که مشتق آن در یک ناحیه با تابع تحلیلی مفروضی برابر است. بامعکوس کردن فرمولهای معلوم مشتگیری می توان بسیاری از انواع انتگرالهای نامعین را یافت.

اکنون انتگرال معین، یا انتگرال روی خط، تابع مختلط $f(z)$ را، کسه در آن $z = x + iy$ ، تعریف می کنیم. خواهیم دید که این تعریف تعمیمی طبیعی از تعریف آشنای انتگرال معین حقیقی است و مباحث مربوط به آن شبیه مباحثی است که در بخش ۱۰۹ آمده است. در مورد انتگرال معین مسیر انتگرالگیری بازه ای از محور حقیقی است. در مورد انتگرال معین مختلط، در طول یک منحنی^۱ واقع در صفحه مختلط انتگرال می گیریم. فرض می کنیم C منحنی همواری (ر. ک. بخش ۲۰۱۳) در صفحه z مختلط باشد. در این صورت می توان C را به صورت

$$(1) \quad z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

نمایش داد، که در آن $z(t)$ به ازای هر t دارای مشتق پیوسته $z'(t) \neq 0$ است، به طوری که C با درازایی متناهی (ر. ک. بخش ۴۰۸) و دارای مماسی یکتا در هر نقطه باشد. یادآور می شویم که جهت مثبت بر روی C با جهت افزایش مقادیر پارامتر t مطابقت می کند. فرض می کنیم $f(z)$ تابعی پیوسته باشد که (افلا^۲) در تمام نقاط C تعریف شده باشد. فاصله $a \leq t \leq b$ را که در (۱) معرفی شد توسط نقاط

$$t_0 (=a), t_1, \dots, t_{n-1}, t_n (=b),$$

که در آن $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ تقسیم جزئی («افراز») می کنیم. این کار سبب می شود که C نیز توسط نقاط (شکل ۲۹۶)

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n (=z),$$

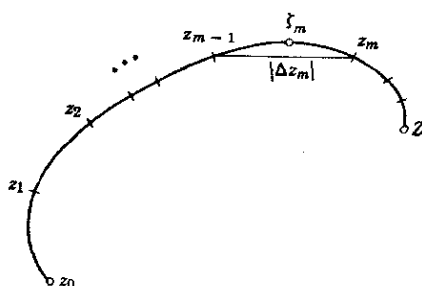
که در آن $z_j = z(t_j)$ افراز شود. در هر قسمت از تقسیم جزئی C نقطه دلخواهی، مثل نقطه ξ_1 که بین z_0 و z_1 واقع است (یعنی $\xi_1 = z(t)$ که در آن $t_0 \leq t \leq t_1$)، نقطه ξ_2 که بین z_1 و z_2 قرار دارد و به همین ترتیب، انتخاب می کنیم. سپس مجموع

$$(2) \quad S_n = \sum_{m=1}^n f(\xi_m) \Delta z_m$$

که در آن

$$\Delta z_m = z - z_{m-1}$$

۱. عملاً در طول یک قسمت، یا قوس، از یک منحنی. به خاطر سادگی کلمه «منحنی» را هم برای کل منحنی و هم برای قسمتی از آن مورد استفاده قرار خواهیم داد.



شکل ۲۹۶. انتگرال روی خط مختلط

تشکیل می‌دهیم. این کار را به ازای هر $n = 2, 3, \dots$ به طور کاملاً مستقل انجام می‌دهیم اما طوری این کار را می‌کنیم که بزرگترین $|\Delta z_m|$ وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند به سمت صفر میل کند. بدین طریق دنباله‌ای از اعداد مختلط $\zeta_2, \zeta_3, \dots$ به دست می‌آید. حد این دنباله را انتگرال روی خط (یا به طور ساده انتگرال) $f(z)$ در طول منحنی جهت دار C می‌نامند و با

$$(۳) \quad \int_C f(z) dz$$

نشان می‌دهند. منحنی C را مسیر انتگرالگیری می‌گویند.

در سراسر مباحث زیر فرض می‌کنیم که همه مسیرهای انتگرالگیری انتگرال روی خط مختلط هموار تکه‌ای باشند، یعنی مرکب از تعدادی متناهی منحنی هموار باشند.

وجود انتگرال روی خط (۳) از فرضیهایی که کردیم نتیجه می‌شود. در واقع، فرض می‌کنیم $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ و قرار می‌دهیم

$$\Delta z_m = \Delta x_m + i \Delta y_m, \quad \xi_m = \xi_m + i \eta_m.$$

در آن صورت (۲) را می‌توان به صورت

$$(۴) \quad S_n = \sum (u + iv)(\Delta x_m + i \Delta y_m).$$

نوشت، که در آن $u = u(\xi_m, \eta_m)$ ، $v = v(\xi_m, \eta_m)$ و جمع نسبت به m از ۱ تا n انجام می‌پذیرد. حال S_n را به صورت چهارمجموع می‌نویسیم:

$$S_n = \sum u \Delta x_m - \sum v \Delta y_m + i [\sum u \Delta y_m + \sum v \Delta x_m].$$

این مجموعه‌ها حقیقی هستند. نظر به اینکه f پیوسته است، u و v پیوسته‌اند. در نتیجه، هر گاه n به طریقی که گفته شد به سمت بینهایت میل کند، آنگاه بزرگترین Δx_m ، Δy_m به سمت صفر میل می‌کنند و هر یک از چهار مجموع فوق یک انتگرال روی خط حقیقی خواهد شد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_c f(z) dz = \int_c u dx - \int_c v dy + i \left[\int_c u dy + \int_c v dx \right]. \quad (5)$$

این نشان می‌دهد که انتگرال روی خط (۳) وجود دارد و مقدار آن مستقل از انتخاب تقسیم جزئی و نقاط بخش‌کننده m است.

به علاوه، مانند بخش ۲.۹، هر یک از انتگرالهای روی خط حقیقی را می‌توان با استفاده از نمایش (۱) منحنی C به انتگرال معین تبدیل کرد:

$$(6) \quad \int_c f(z) dz = \int_a^b u \dot{x} dt - \int_a^b u \dot{y} dt + i \left[\int_a^b u \dot{y} dt + \int_a^b v \dot{x} dt \right]$$

که در آن $u = u[x(t), y(t)]$ ، $v = v[x(t), y(t)]$ و نقطه‌ها مشتق نسبت به t را نشان می‌دهند.

بدون آنکه سوء تعبیر شود، می‌توانیم چنین نیز بنویسیم:

$$\int_c f(z) dz = \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y}) dt$$

یا اجمالا

$$(6^*) \quad \int_c f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt$$

حال برخی مثالهای اساسی را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. انتگرال $1/z$ روی دایره یک

با شروع از $z = 1$ از تابع $f(z) = 1/z$ روی دایره یک C بایک بار گردش روی آن در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیرد. هرگاه C را به صورت

$$(7) \quad z(t) = \cos t + i \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

نمایش دهیم، خواهیم داشت

$$\dot{z}(t) = -\sin t + i \cos t,$$

و با توجه به (6^*) انتگرال مورد نظر چنین می‌شود:

$$\int_c \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} (-\sin t + i \cos t) dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$

و این قضیه‌ای اساسی است که درمباحث بعدی کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد. واضح است که به جای (۷) فرمولهای ساده‌تر

$$(۷') \quad z(t) = e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

را می توان نوشت. آنگاه بامشتغیری به دست می آوریم

$$z(t) = ie^{it}, \quad dz = ie^{it} dt,$$

واز اینجا همان نتیجه قبل عاید می شود:

$$(۸) \quad \int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

مثال ۲. انتگرال يك تابع غير تحلیلی

از $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ در طول پاره خطی که از $z_0 = 0$ تا $z = 1+i$ امتداد دارد (مسیر C_1 در شکل ۲۹۷) انتگرال بگیریم.

این پاره خط را می توان به صورت

$$z(t) = x(t) + iy(t) = (1+i)t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

نمایش داد. پس

$$f[z(t)] = \operatorname{Re} z(t) = x(t) = t, \quad dz = (1+i) dt.$$

بنابراین، نتیجه

$$\int_{C_1} \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t(1+i) dt = (1+i) \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}(1+i)$$

به دست می آید.

اکنون از $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ در طول محور حقیقی از ۰ تا ۱، و سپس در طول خطی که به طور قائم از ۱ تا $1+i$ کشیده شده است (مسیر C_2 در شکل ۲۹۷) انتگرال می گیریم. اولین قسمت C_2 را با

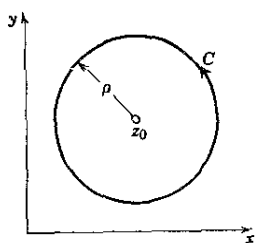
$$z = z(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

و آخرین قسمت آن را به صورت

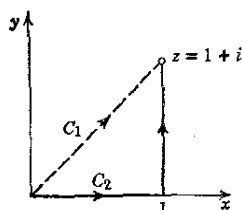
$$z(t) = 1 + i(t-1) \quad (1 \leq t \leq 2)$$

نمایش می دهیم. در این صورت کل مسیر با فاصله $0 \leq t \leq 2$ متناظر است. روی قسمت اول $\operatorname{Re} z = t$ ، $dz = dt$ و روی قسمت آخر، $\operatorname{Re} z = 1$ ، $dz = i dt$. بنابراین

$$\int_{C_2} \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t dt + \int_1^2 i dt = \frac{1}{2} + i.$$



شکل ۲۹۸. مسیرهای مثال ۳



شکل ۲۹۷. مسیرهای مثال ۲

توجه کنید که قسمت آخر C_2 را می‌توان به صورت

$$z(t) = 1 + it \quad (0 \leq t \leq 1)$$

نیز نمایش داد؛ در این صورت حدود انتگرال آخر ۰ و ۱ هستند، و مقدار آن همان مقدار قبلی است.

بامقایسه این دو نتیجه مشاهده می‌کنیم در مورد تابع $\operatorname{Re} z$ (که تحلیلی نیست) مقدار انتگرال نه فقط به نقاط انتهایی مسیر، بلکه به شکل هندسی آن نیز وابسته است.

مثال ۳. انتگرال توانهای صحیح

فرض می‌کنیم $f(z) = (z - z_0)^m$ که در آن m عددی صحیح و z_0 ثابت است. از این تابع در طول دایره C که شعاع آن ρ و مرکزش z_0 است (ر. ک. شکل ۲۹۸) در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال می‌گیریم.

C را می‌توان به صورت

$$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \sin t) = z_0 + \rho e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

نمایش داد. در این صورت داریم

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{imt}, \quad dz = i\rho e^{it} dt,$$

و به دست می‌آوریم

$$\int_C (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i\rho e^{it} dt = i\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt.$$

حالت $m = -1$ در مثال ۱ بررسی شد، و وقتی که $m \neq -1$ ، به دست می‌آوریم (ر. ک. (۱۴) بخش ۷.۱۲)

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \left[\frac{e^{i(m+1)t}}{i(m+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (m \neq -1 \text{ صحیح})$$

نتیجه چنین است:

$$(۹) \quad \int (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1 \text{ و صحیح}) \end{cases}$$

مثال ۴. يك استفاده مستقیم از تعریف

فرض کنیم ثابت $f(z) = k$ ، و C منحنی دلخواهی باشد که دو نقطه z_0 و Z را به هم وصل می کند. در این صورت می توان از تعریف انتگرال روی خط به عنوان حد مجموع S_n استفاده کرد. از (۲) داریم

$$S_n = \sum_{m=1}^n k \Delta z_m = k[(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (Z - z_{n-1})] = k(Z - z_0).$$

از اینجا بلافاصله نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\int_C k dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = k(Z - z_0)$$

توجه کنید که مقدار این انتگرال فقط به z_0 و Z وابسته است، نه به انتخاب مسیری که این نقاط را به هم وصل می کند. در حالت خاص اگر C بسته باشد، آنگاه $z_0 = Z$ و انتگرال صفر است.

مثال ۵. استفاده مستقیم دیگری از تعریف

فرض می کنیم $f(z) = z$ و C منحنی دلخواهی باشد که نقاط z_0 و Z را به هم وصل می کند. مجدداً از (۲) استفاده می کنیم. $z_m = \zeta_m$ می گیریم و به دست می آوریم

$$S_n = \sum_{m=1}^n z_m \Delta z_m = z_1(z_1 - z_0) + z_2(z_2 - z_1) + \dots + Z(Z - z_{n-1})$$

با فرض $\zeta_m = z_{m-1}$ می یابیم

$$S_n^* = \sum_{m=1}^n z_{m-1} \Delta z_m = z_0(z_1 - z_0) + z_1(z_2 - z_1) + \dots + z_{n-1}(Z - z_{n-1})$$

از جمع کردن مجموعهای فوق نتیجه می شود $S_n + S_n^* = Z^2 - z_0^2$. در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + S_n^*) = 2 \int_{z_0}^Z z dz = Z^2 - z_0^2$$

از اینجا نتیجه می شود که در طول هر مسیری که z_0 را به Z وصل می کند

$$\int_{z_0}^Z z dz = \frac{1}{2} (Z^2 - z_0^2)$$

در حالت خاص، اگر C مسیری بسته باشد، آنگاه $z_0 = z$ و

$$(۱۰) \quad \int_C z \, dz = 0$$

توجه کنید که این نتیجه از قضیه گرین (ر. ک. بخش ۴.۹) نیز با استفاده از فرمول (۶) این بخش به دست می آید.

مسائل بخش ۱.۱۴

پاره خطهایی را که A را به B وصل می کنند به صورت $z = z(t)$ نمایش دهید. A و B عبارتند از

$$A: z = 0, \quad B: z = 4 - 8i \quad ۲. \quad A: z = 0, \quad B: z = 1 + 2i \quad ۱.$$

$$A: z = 3i, \quad B: z = 4 - i \quad ۴. \quad A: z = 1 + i, \quad B: z = 3 - 4i \quad ۳.$$

$$A: z = -2 + i, \quad B: z = -2 + 4i \quad ۵.$$

$$A: z = 3 - i, \quad B: z = 5 - 7i \quad ۶.$$

منحنیهای زیر را به صورت $z = z(t)$ نمایش دهید.

$$(3, 9) \text{ تا } (0, 0) \text{ از } y = x^2 \quad ۸. \quad |z - 1 + 2i| = 3 \quad ۷.$$

$$4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \quad ۱۰. \quad x^2 + 9y^2 = 9 \quad ۹.$$

$$y = \frac{1}{x} \text{ از } (1, 1) \text{ تا } (4, \frac{1}{4}) \quad ۱۱.$$

$$y = -1 + 3/x \text{ از } (1, 2) \text{ تا } (3, 0) \quad ۱۲.$$

چه منحنیهایی با توابع زیر نمایش داده می شوند؟

$$i - t + 3it, \quad -1 \leq t \leq 2 \quad ۱۴. \quad 1 + (2 - i)t, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad ۱۳.$$

$$4 + 2e^{it}, \quad -\pi \leq t \leq 0 \quad ۱۶. \quad 3i + 3e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad ۱۵.$$

$$i + t - t^2 i, \quad 0 \leq t \leq 3 \quad ۱۸. \quad t + 3i^2 t, \quad -1 \leq t \leq 2 \quad ۱۷.$$

از z^2 در طول هریک از پاره خطهای زیر انتگرال بگیرید:

$$1 + i \text{ از } 0 \text{ تا } 1 + i \quad ۲۰. \quad 2i \text{ از } 0 \text{ تا } 2i \quad ۱۹.$$

$$4 - i \text{ از } 3i \text{ تا } 4 - i \quad ۲۲. \quad 3 - 4i \text{ از } 1 + i \text{ تا } 3 - 4i \quad ۲۱.$$

انتگرال بگیرد

۲۳. از $3z^2$ روی محیط مثلثی با رئوس $0, 1, i$ (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت).

۲۴. از $z + 1/z$ روی دایره یکه (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت).

۲۵. از z ابتدا به‌طور قائم از 1 تا $i + 1$ و سپس به‌طور افقی تا $i + 2$

۲۶. از $az + b$ در طول پاره خطی که از 0 تا $i - 4 - 4$ ادامه دارد.

۲۷. مطلوب است محاسبه $\int_C (z - 3)^{-1} dz$ ، $C: |z - 3| = 2$

(الف) در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، (ب) در جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

۲۸. مطلوب است محاسبه $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$ روی دایره $|z| = r$: (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۹. مطلوب است محاسبه $\int_C |z| \, dz$ از $A: z = -i$ تا $B: z = i$ در طول (الف)

پاره خط AB (ب) دایره یکه‌ای که در نیمه صفحه چپ واقع است، (ج) دایره یکه‌ای که در نیمه صفحه راست واقع است.

۳۰. مطلوب است محاسبه $\int_C (1/\sqrt{z}) \, dz$ از 1 تا -1 (الف) در طول نیم دایره فوقانی $|z| = 1$ ، (ب) در طول نیم دایره تحتانی $|z| = 1$ ، در اینجا $\sqrt{z}$ مقدار اصلی ریشه دوم است.

۲.۱۲ خواص اساسی انتگرال روی خط مختلط

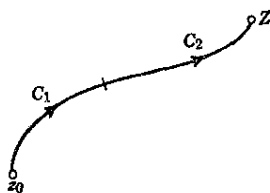
از تعریف انتگرال روی خط مختلط به‌عنوان حد یک مجموعه می‌توان خواص زیر را به‌دست آورد.

هرگاه مسیر C را به دو قسمت C_1 و C_2 تقسیم کنیم (شکل ۲۹۹)،

$$(۱) \quad \int_C f(z) \, dz = \int_{C_1} f(z) \, dz + \int_{C_2} f(z) \, dz.$$

اگر جهت انتگرالگیری را عوض کنیم، علامت مقدار انتگرال عوض می‌شود:

$$(۲) \quad \int_{z_0}^z f(z) \, dz = - \int_z^{z_0} f(z) \, dz;$$



شکل ۲۹۹. فرمول (۱)

در اینجا مسیر C با نقاط انتهایی z_0 و z همان مسیر قبلی است؛ در طرف چپ از z_0 تا z ، و در طرف راست از z_0 تا z انتگرال می‌گیریم از مجموع دو تابع (یا بیشتر) می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت، و ضریب ثابت را می‌توان از زیر علامت انتگرال خارج کرد، یعنی

$$(۳) \quad \int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)] dz = k_1 \int_C f_1(z) dz + k_2 \int_C f_2(z) dz$$

اغلب اوقات لازم می‌آید که قدر مطلق انتگرال روی خط مختلط را تخمین بزنیم. فرمول اساسی چنین است:

$$(۴) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq Ml$$

که در آن l طول مسیر C و M عدد حقیقی ثابتی است که در هر نقطه از C ، $|f(z)| \leq M$.

برای اثبات (۴)، (۱۱) از بخش ۲۰۱۲ را در مجموع S_n که با (۲) بخش ۱۰۱۴ تعریف شده است به کار می‌بریم و می‌یابیم

$$|S_n| = \left| \sum_{m=1}^n f(\xi_m) \Delta z_m \right| \leq \sum_{m=1}^n |f(\xi_m)| |\Delta z_m| \leq M \sum_{m=1}^n |\Delta z_m|.$$

حال $|\Delta z_m|$ طول وتر است که نقاط انتهایی آن z_m و z_{m-1} هستند، به شکل ۲۹۶ بخش ۱۰۱۴ مراجعه کنید. بنا بر این مجموع طرف راست طول L خط شکسته مرکب از وترهایی را که نقاط انتهایی آنها $z_0, z_1, \dots, z_n (= Z)$ هستند نمایش می‌دهد. هرگاه n طوری به سمت بینهایت برود که بزرگترین $|\Delta z_m|$ به سمت صفر میل کند، آنگاه بنا به تعریف طول قوس (ر. ل. بخش ۴۰۸) L به سمت l ، طول منحنی C ، میل می‌کند. از اینجا نامساوی (۴) نتیجه می‌شود.

مثال ۱. استفاده از فرمول (۴)

فرض می‌کنیم $f(z) = 1/z$ و از این تابع روی دایره $|z| = \rho$ انتگرال می‌گیریم. پس $l = 2\pi\rho$ و بر روی دایره $|f(z)| = 1/\rho$ در نتیجه، با توجه به (۴)

$$\left| \int_C \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi \quad (\text{ر. ک. مثال ۱، بخش ۱۰۱۴})$$

مثال ۲. تخمین یک انتگرال دیگر

مسیر C_ρ ی مثال ۲ بخش ۱۰۱۴ دارای طول $l=2$ است، و روی C_ρ ، $|\operatorname{Re} z| \leq 1$. بنابراین با توجه به (۲)

$$\left| \int_{C_\rho} \operatorname{Re} z \, dz \right| \leq 2.$$

مسائل بخش ۲۰۱۴

۱. درستی (۱) را در مورد $f(z) = 1/z$ در حالتی که C دایرهٔ یک، C_ρ نیمهٔ فوقانی دایرهٔ یک و C_ρ نیمهٔ تحتانی آن است، تحقیق کنید.

۲. درستی (۲) را در مورد $f(z) = z^2$ در حالتی که C پاره خطی است که از $1-i$ تا $1+i$ ادامه دارد تحقیق کنید.

۳. درستی (۳) را در مورد $k_1 f_1 + k_2 f_2 = 3z - z^2$ در حالتی که C نیمهٔ فوقانی دایرهٔ یک، از 1 تا -1 ، است تحقیق کنید.

۴. درستی (۴) را، در مورد $f(z) = 1/z$ و C بی که در مسئلهٔ ۳ آمده است تحقیق کنید. مطلوب است محاسبهٔ $\int_C f(z) dz$ در حالتی که

۵. $f(z) = az + b$ ، C مانند مسئلهٔ ۲

۶. $f(z) = z^2 + 2z^{-1}$ ، C دایرهٔ یک (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۷. $f(z) = z^2 + 3z^{-4}$ ، C مانند مسئلهٔ ۳

۸. $f(z) = 2z - z^{-1} + 2z^{-2}$ ، C دایرهٔ یک (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۹. $f(z) = e^z$ ، C پاره خطی که از 0 تا $1 + \pi i/2$ کشیده شده است.

۱۰. $f(z) = (z-1)^{-1} - 2(z-1)^{-2}$ ، C دایرهٔ $|z-1|=4$ (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت).

۱۱. $f(z) = \cos z$ ، C پاره خطی که از πi تا $2\pi i$ کشیده شده است.

۱۲. $f(z) = \sin z$ ، C مانند مسئلهٔ ۱۱

۱۳. $f(z) = \sin z$ ، C پاره خطی که از 0 تا i کشیده شده است.

$$۱۴. f(z) = \sinh z, C \text{ مانند مسئله } ۱۳$$

$$۱۵. f(z) = \cosh z, C \text{ مانند مسئله } ۱۳$$

با استفاده از (۴)، کرانه‌های بالای انتگرالهای زیرین را تعیین کنید، C پاره خطی است که از 0 تا $3 + 4i$ کشیده شده است.

$$۱۶. \int_C z \, dz. \quad ۱۷. \int_C e^z \, dz. \quad ۱۸. \int_C \ln(z+1) \, dz. \quad ۱۹. \int_C (z+1)^{-1} \, dz.$$

۲۰. در مسئله ۱۶ با تقسیم کردن C به دو قوس، کران بهتری برای انتگرال بیابید.

۳.۱۴ قضیه انتگرال کشی

قضیه انتگرال کشی در آنالیز مختلط بسیار مهم است و دارای نتایج متعدد نظری و عملی است. برای بیان این قضیه به مفاهیم زیر نیاز داریم.

حوزه D واقع در صفحه مختلط را **حوزه همبند ساده** نامند اگر هر منحنی بسته ساده در D (یعنی، منحنی بسته‌ای در D که خود را قطع نمی‌کند) فقط شامل نقاط D باشد. حوزه‌ای که همبند ساده نباشد همبند چندگانه نامیده می‌شود.

مثلاً، داخل یک دایره («قرص مستدیر»)، بیضی یا مربع همبند ساده است. به طور کلی داخل یک منحنی بسته ساده همبند ساده است. حلقه دایره‌ای (ر. ک. بخش ۳.۱۲) همبند چندگانه (به عبارت دقیقتر: همبند دوگانه^۱) است.

به علاوه، حوزه D را کراندار نامند هرگاه D به طور کامل در داخل دایره‌ای به مرکز مبدأ قرار داشته باشد. در غیر این صورت D را بیکران گویند.

قضیه انتگرال کشی

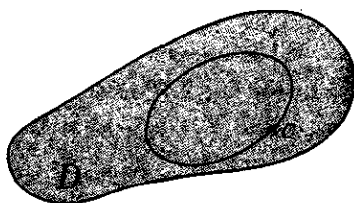
هرگاه $f(z)$ در حوزه کراندار همبند ساده D تحلیلی^۲ باشد. آنگاه به ازای هر مسیر بسته^۳ C واقع در D

$$(۱) \quad \int_C f(z) \, dz = 0$$

اثبات کشی، با توجه به (۵) بخش ۱.۱۴ داریم

۱. یک حوزه کراندار را همبند p گانه نامند هرگاه مرکز آن مرکب از p مجموعه همبند بسته که با هم هیچ نقطه مشترکی ندارند باشد. در مورد طوق $p=2$ ، زیرا مرکز آن تشکیل شده است از دو دایره که دارای نقطه مشترک نیستند.

۲. یادآوری می‌کنیم که بنا به تعریف، تابع یک رابطه یک مقداری است. ر. ک. بخش ۳.۱۲.



شکل ۳۰۰. قضیه انتگرال کشی

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx).$$

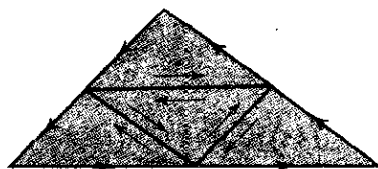
$f(z)$ تحلیلی است و بنا براین $f'(z)$ موجود است. کشی این فرض اضافی را که $f'(z)$ پیوسته است وارد مسئله کرد. با این فرض چنانکه از (۳) و (۴) بخش ۵۰۲ نتیجه می شود u و v دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در D هستند، می توان از قضیه گرین (ر. ک. بخش ۴۰۹) (با u و v به جای f و g) استفاده کرد، و

$$\int_C (u dx - v dy) = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

در اینجا R ناحیه ای است که با C محصور شده است. معادله دوم کشی - ریمان (بخش ۵۰۲) نشان می دهد که انتگران طرف راست همواره صفر است. در نتیجه انتگرال طرف چپ صفر است. به همین طریق بسا استفاده از معادله اول کشی - ریمان نتیجه می شود که انتگرال آخر در فرمول بالا صفر است، و بدین ترتیب اثبات تمام می شود. ▲

اثبات گورسا. گورسا قضیه کشی را بدون آنکه فرض کند $f'(z)$ پیوسته است ثابت کرد. این کار بسیار مهم است. ابتدا حالتی را که C کرانه يك مثلث است در نظر می گیریم. این مثلث را در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت جهتدار می کنیم. وسطهای اضلاع مثلث را به هم وصل می کنیم تا مثلث به چهار مثلث متشابه تقسیم شود (شکل ۳۰۱). آنگاه

$$\int_C f dz = \int_{c_I} f dz + \int_{c_{II}} f dz + \int_{c_{III}} f dz + \int_{c_{IV}} f dz$$



شکل ۳۰۱. اثبات قضیه انتگرال کشی

در اینجا $C_1, \dots, C_{17}$ کرانه‌های مثلثها هستند؛ در واقع، در طرف راست فرمول بالا در طول هر يك از سه پاره خطی که وسطهای اضلاع را به هم وصل کرده‌اند در هر دو جهت انتگرال می‌گیریم، این انتگرالها دوبرو با همدیگر حذف می‌شوند، و مجموع انتگرالهای طرف راست برابر انتگرال طرف چپ می‌شود. از میان چهار انتگرال طرف راست، یکی از آنها، که کرانه آن را C_1 می‌نامیم، باید طوری باشد که

$$\left| \int_C f dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} f dz \right|$$

چرا که ممکن نیست قدر مطلق يك يك چهار انتگرال از $1/4$ قدر مطلق مجموع انتگرالها کوچکتر باشد. این موضوع به سادگی از (۱۱) بخش ۲۰۱۲ نتیجه می‌شود. مانند قبل مثلث محصور به C_1 را تقسیم می‌کنیم و از میان مثلثهای حاصل مثلثی با کرانه C_2 را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\left| \int_C f dz \right| \leq 4^2 \left| \int_{C_2} f dz \right| \quad \text{و بنا بر این} \quad \left| \int_{C_1} f dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_2} f dz \right|$$

اگر به این کار ادامه دهیم، دنباله‌ای از مثلثهای $T_1, T_2, \dots$ با کرانه‌های $C_1, C_2, \dots$ به دست می‌آوریم که با هم متشابه بوده، طوری هستند که به ازای $n > m$ ، T_n داخل T_m قرار می‌گیرد، و

$$(2) \quad \left| \int_C f dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f dz \right| \quad n=1, 2, \dots$$

فرض می‌کنیم z_0 نقطه‌ای باشد که به تمام این مثلثها تعلق دارد. چون f در $z = z_0$ مشتق‌پذیر است، مشتق $f'(z_0)$ وجود دارد، و می‌توانیم بنویسیم

$$(3) \quad f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + h(z)(z - z_0).$$

در نتیجه از انتگرال‌گیری روی کرانه C_n از مثلث T_n داریم

$$\int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_n} f(z_0) dz + \int_{C_n} (z - z_0)f'(z_0) dz + \int_{C_n} h(z)(z - z_0) dz$$

چون $f(z_0)$ و $f'(z_0)$ ثابتند، با توجه به نتایج حاصل از مثالهای ۴ و ۵ بخش ۱۰۱۴ نتیجه می‌شود که دو انتگرال اول طرف راست صفرند. در نتیجه

$$\int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_n} h(z)(z - z_0) dz.$$

با تقسیم (۳) بر $(z - z_0)$ ، انتقال دوجمله از سمت راست آن به طرف چپ، و قدر مطلق گرفتن از دو طرف به دست می‌آوریم

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| = |h(z)|.$$

باتوجه به این و (۵) از بخش ۴.۱۲ مشاهده می‌کنیم که به‌ازای عدد مثبت مفروض ε عدد مثبتی مانند δ یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$|h(z)| < \varepsilon \quad \text{اگر} \quad |z - z_0| < \delta$$

اکنون n را می‌توان آنقدر بزرگ گرفت که مثلث T_n در قرص $|z - z_0| < \delta$ واقع شود. فرض می‌کنیم l_n طول C_n باشد. آنگاه به‌ازای هر نقطه z که روی C_n و هر نقطه z_0 که درون T_n قرار داشته باشد $|z - z_0| \leq l_n/2$ با استفاده از (۴) بخش ۲.۱۴ به دست می‌آوریم

$$(۴) \quad \left| \int_{C_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{C_n} h(z)(z - z_0) dz \right| < \varepsilon \frac{l_n}{2} l_n = \frac{\varepsilon}{2} l_n^2$$

فرض می‌کنیم l طول C باشد. دراین صورت مسیر C_1 دارای طول $l_1 = l/2$ ، مسیر C_2 دارای طول $l_2 = l_1/2 = l/4$ ، و C_n دارای طول

$$l_n = \frac{l}{2^n}$$

خواهد بود. بنابراین از (۲) و (۴) به‌دست می‌آوریم

$$\left| \int_C f dz \right| \leq 2^n \left| \int_{C_n} f dz \right| < 2^n \frac{\varepsilon}{2} l_n^2 = 2^n \frac{\varepsilon}{2} \frac{l^2}{2^{2n}} = \frac{\varepsilon}{2} l^2.$$

با انتخاب $\varepsilon > 0$ ، که به قدر کافی کوچک باشد، می‌توانیم عبارت طرف راست را هر قدر که بخواهیم کوچک کنیم، و حال آنکه عبارت طرف چپ مقدار معین یک انتگرال است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که این مقدار باید صفر باشد، و اثبات کامل می‌شود.

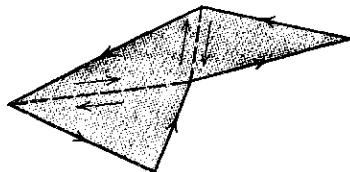
اثبات قضیه در حالتی که C کرانه یک چند ضلعی باشد، با تقسیم چند ضلعی به مثلث (شکل ۳۰۲)، از اثبات قبلی نتیجه می‌شود. انتگرال مربوط به هر یک از مثلثها صفر است. مجموع این انتگرالها برابر است با انتگرال روی C ، زیرا از آنجا که روی هر یک از پاره خطهای تقسیم‌کننده در دو جهت انتگرال گرفته‌ایم. انتگرالهای تناظر دویبدو با هم حذف می‌شوند، و آنچه باقی می‌ماند انتگرال روی C است.

به‌طور کلی هر مسیر بسته ساده C را می‌توان با محاط کردن چند ضلعی p از وترها در C به حالت قبل برگرداند، به شرط اینکه « با دقت کافی » تقریبی برای C باشد، و می‌توان نشان داد که یک چند ضلعی مانند P موجود است به طوری که تفاوت انتگرال روی P با انتگرال روی C از هر عدد حقیقی مثبتی مانند ε کوچکتر باشد، هر قدر هم که ε کوچک باشد. جزئیات اثبات اخیر را می‌توان در مرجع [F۶] ضمیمه ۱ یافت. ▲

مثال ۱

به ازای هر مسیر بسته C

$$\int_C e^z dz = 0$$

چرا که e^z به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است.

شکل ۳۰۲. اثبات قضیه انتگرال کشی در مورد چند ضلعی

مثال ۲

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

که در آن C دایرهٔ یکه است (ر. ک. بخش ۱۰۴). این موضوع از قضیهٔ کشی نتیجه می‌شود، زیرا $f(z) = 1/z^2$ در $z=0$ تحلیلی نیست. در نتیجه این شرط که f در D تحلیلی باشد شرط کافی برقراری (۱) است و نه لازم.

مثال ۳

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

انتگرالگیری روی دایرهٔ یکه در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انجام گرفته است (ر. ک. بخش ۱۰۴). C درون طوق $1/2 < |z| < 3/2$ ، که در آن $1/z$ تحلیلی است، قرار دارد، اما این حوزه همبند ساده نیست، بنابراین در اینجا نمی‌توان از قضیهٔ کشی استفاده کرد. در نتیجه شرط همبند ساده بودن حوزهٔ D کاملاً ضروری است. ▲

هر گاه در قضیهٔ کشی مسیر C را به دوقوس C_1 و C_2^* تبدیل کنیم (شکل ۳۰۳)، آنگاه (۱) به صورت

$$\int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{C_2^*} f dz = 0$$

در می‌آید. در نتیجه

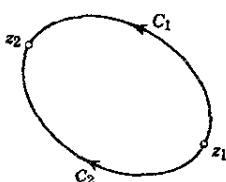
$$(\delta') \quad -\int_{C_2^*} f dz = \int_{C_1} f dz.$$

هر گاه جهت انتگرالگیری در طول C_2^* را عوض کنیم، آنگاه انتگرال روی C_2^* در ۱- ضرب می شود، و به دست می آوریم (شکل ۳۰۴)

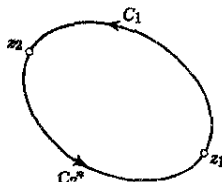
$$(۵) \quad \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz.$$

پس، هر گاه f در D تحلیلی باشد، و C_1 و C_2 مسیرهای دلخواهی در D باشند که دو نقطه از آن را به هم وصل می کنند و دارای نقطه مشترک دیگری نباشند، آنگاه (۵) برقرار است.

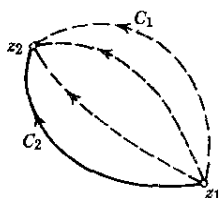
هر گاه مسیرهای C_1 و C_2 دارای تعداد متناهی نقاط مشترک باشند (شکل ۳۰۵)، آنگاه (۵) همچنان برقرار است؛ این موضوع را می توان با استفاده از نتیجه قبل در مورد قسمتهایی از C_1 و C_2 که بین هر زوج متوالی از نقاط تقاطع قرار دارند نشان داد.



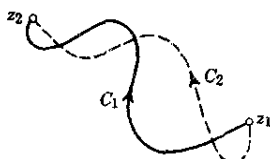
شکل ۳۰۴. فرمول (۵)



شکل ۳۰۳. فرمول (۵')



شکل ۳۰۶. تغییر شکل پیوسته مسیر



شکل ۳۰۵. مسیرهایی که دارای تعدادی متناهی نقاط تقاطع هستند

حتی می توان گفت که (۵) در مورد هر مسیری که به طور کامل در حوزه همبند ساده D قرار داشته باشد و دو نقطه z_1 و z_2 از D را به هم وصل کند و $f(z)$ روی آن تحلیلی باشد برقرار است. بنابراین گوئیم که انتگرال $f(z)$ از z_1 تا z_2 مستقل از مسیری در D است. (البته مقدار انتگرال به انتخاب z_1 و z_2 بستگی دارد).

برای اثبات این ادعا لازم است موردی را که C_1 و C_2 دارای تعدادی نامتناهی نقاط تقاطع هستند بررسی کنیم، و ما در اینجا اثبات را نمی آوریم.

می توان تصور کرد که مسیر C_2 در (۵) از C_1 با یک تغییر شکل پیوسته به دست آمده است (شکل ۳۰۶). نتیجه می گیریم که در یک انتگرال می توانیم تغییر شکل پیوسته ای

به مسیر انتگرالگیری بدهیم (نقاط انتهایی را ثابت نگه می‌داریم)؛ تا وقتی مسیر تغییر شکل یافته از نقطه‌ای که $f(z)$ در آن تحلیلی نیست نگذرد، مقدار انتگرال روی خط تحت تغییر-شکل تغییر نمی‌کند، و این به اصل تغییر شکل مسیر معروف است.

حوزه همبند چندگانه D^* را می‌توان طوری برید که حوزه حاصل (D^* بدون نقاط بریده شده) همبند ساده شود. در مورد حوزه همبند دوگانه D^* نیاز به یک بریدگی C داریم (شکل ۳۰۷). هرگاه $f(z)$ در D^* و در هر نقطه از C_1 و C_2 تحلیلی باشد آنگاه، نظریه اینکه C_1 ، C_2 ، و $\bar{C}$ کرانه‌های یک حوزه همبند ساده هستند، از قضیه کشی نتیجه می‌شود که انتگرال f روی C_1 ، $\bar{C}$ ، C_2 در جهتی که در شکل ۳۰۷ با پیکان نشان داده شده است دارای مقدار صفر است. چون در طول $\bar{C}$ در هر دو جهت انتگرال می‌گیریم، انتگرالهای متناظر با همدیگر حذف می‌شوند و به دست می‌آوریم

$$(۶) \quad \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0$$

در اینجا یکی از منحنیها در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت و دیگری در جهت مخالف آن پیموده می‌شود.

معادله (۶) را به شکل زیر هم می‌توان نوشت:

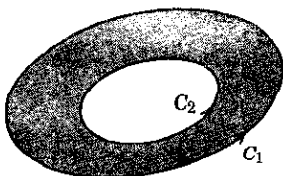
$$(۷) \quad \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz,$$

که در اینجا حالا C_1 و C_2 همجهت هستند (شکل ۳۰۸). یادآوری می‌کنیم که (۷) بنا بر فرض تحلیلی بودن $f(z)$ در حوزه محصور به C_1 و C_2 و در هر نقطه از C_1 و C_2 برقرار است.

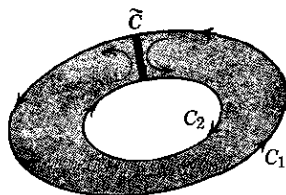
در مورد حوزه‌های پیچیده‌تر ممکن است به بیش از یک بریدگی نیاز باشد. اما ایده اساسی همان است که در بالا گفته شد. مثلاً، در مورد حوزه همبند سه گانه شکل ۳۰۹

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz = 0$$

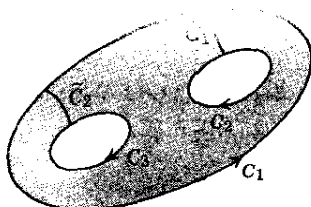
که در آن C_1 و C_2 در یک جهت و C_3 در جهت مخالف پیموده می‌شوند.



شکل ۳۰۸. مسیرهای (۷)



شکل ۳۰۷. حوزه همبند دوگانه



شکل ۳۰۹. حوزه همبند سه گانه

متذکر می شویم که بعضی اوقات مسیر ساده بسته را مرز می نامند، و انتگرال در طول چنین مسیرهایی انتگرال روی مرز نامیده می شود.

مثال ۴

فرض می کنیم C_1 دایره یکه $|z|=1$ و C_2 دایره $|z|=1/2$ باشد. آنگاه با توجه به (۷)،

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} = \int_{C_1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (\text{د. ک. مثال ۱ بخش ۱۰۱۴})$$

که در آن هر دو مسیر در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت پیموده می شوند.

مثال ۵

از مثال ۳ بخش ۱۰۱۴ واصل تغییر شکل مسیر نتیجه می شود که

$$\int_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1 \text{ و عدد صحیح}) \end{cases}$$

در اینجا C مرز دلخواهی است که نقطه z_0 درون آن قرار دارد و انتگرالگیری در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت صورت می گیرد.

مسائل بخش ۳۰۱۴

۱. درستی قضیه کشی را در مورد $\int_C z^2 dz$ که در آن C کرانه مثلثی با رئوس $0, 1, i$ و $2i$ است تحقیق کنید.

۲. نشان دهید که انتگرال $1/z^2$ روی دایره یکه صفر است. آیا این موضوع از قضیه کشی نتیجه می شود؟

۳. روی کدام مسیر بسته ساده انتگرال $1/z$ برابر صفر است؟

در هر مورد مقدار انتگرال تابع داده شده را روی دایره یکه در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بیابید و به این سؤال جواب دهید که آیا قضیه کشی را می‌توان به کار برد.

۴. $f(z) = 1/z^4$ ۵. $f(z) = e^{-z}$ ۶. $f(z) = |z|$

۷. $f(z) = \operatorname{Im} z$ ۸. $f(z) = \operatorname{Re} z$ ۹. $f(z) = \tanh z$

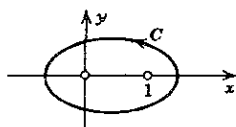
۱۰. $f(z) = 1/(z^2 + 2)$ ۱۱. $f(z) = 1/\bar{z}$ ۱۲. $f(z) = z^2 \sec z$

۱۳. جواب مسئله ۸ را با استفاده از مسئله ۷ و به کار بردن قضیه کشی در مورد $f(z) = z$ به دست آورید.

۱۴. با استفاده از تغییر شکل مسیر و

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \int_C \frac{dz}{z} + \int_C \frac{dz}{z-1} = 4\pi i \quad \text{نشان دهید که} \quad \frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

در اینجا C مسیری است که در شکل نشان داده شده است.



مسئله ۱۴

۱۵. از $f(z) = \bar{z}/|z|$ روی دایره (الف) $|z|=2$ ، (ب) $|z|=4$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیرید. آیا می‌توان نتیجه قسمت (ب) را از نتیجه قسمت (الف) به کمک اصل تغییر شکل مسیر به دست آورد؟

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید. (داهنمایی. در صورت لزوم، انتگرال را بر حسب کسرهای جزئی بنویسید.)

۱۶. $\int_C \frac{dz}{z}$ ، عبارت است از دایره $|z-2|=1$ (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت)

۱۷. $\int_C \frac{z^2-z+1}{z^3-z^2} dz$ ، عبارت است از دایره (الف) $|z|=2$ ، (ب) $|z|=1/2$ (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۱۸. $\int_C \frac{dz}{z^2-1}$ ، عبارت است از دایره (الف) $|z|=2$ ، (ب) $|z-1|=1$

(درجهت حرکت عقربه‌های ساعت)

۱۹. $\int_C \frac{z}{z^2+1} dz$ ، عبارت است از دایره (الف) $|z|=2$ ، (ب) $|z+i|=1$ (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۰. $\int_C \frac{dz}{z^2+1}$ ، عبارت است از دایره (الف) $|z+i|=1$ ، (ب) $|z-i|=1$ (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۱. $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ ، عبارت است از دایره $|z|=2$ (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت) و $|z|=1$ (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۲. $\int_C \frac{\cos z}{z^2} dz$ ، عبارت است از دایره $|z-2i|=1$ (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۳. $\int_C \frac{z^2+1}{z^2-z} dz$ ، عبارت است از دایره (الف) $|z|=1/2$ ، (ب) $|z|=2$ (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۴. $\int_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2} dz$ ، عبارت است از دایره $|z-2|=4$ (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۵. $\int_C \frac{dz}{z^4+4z^2}$ ، مرکب است از $|z|=3/2$ (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت) و $|z|=1$ (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۴.۱۴ محاسبه انتگرال روی خط با انتگرالگیری نامعین

می‌خواهیم با استفاده از قضیه انتگرال کشی نشان دهیم که در بسیاری از موارد می‌توان انتگرالهای روی خط را باروشی خیلی ساده، یعنی، با انتگرالگیری نامعین محاسبه کرد. فرض می‌کنیم $f(z)$ در حوزۀ همبند ساده D تحلیلی باشد، و فرض می‌کنیم z_0 نقطه دلخواهی از D باشد که ثابت بماند. در این صورت انتگرال

$$\int_{z_0}^z f(z^*) dz^*$$

به ازای تمامی مسیرهایی که در D قرار دارند و z_0 و z را به هم وصل می کنند تابعی از z است، و می توان نوشت

$$(۱) \quad F(z) = \int_{z_0}^z f(z^*) dz^*.$$

حال ثابت می کنیم که $F(z)$ تابعی تحلیلی از z در D است، و $F'(z) = f(z)$.
 z را مشخص می گیریم. چون D یک حوزه است، همسایگی N از z وجود دارد که متعلق به D است. در نقطه $z + \Delta z$ را طوری انتخاب می کنیم که پاره خطی که نقاط انتهایی آن z و $z + \Delta z$ است در N و در نتیجه در D قرار داشته باشد. سپس از (۱) به دست می آوریم

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(z^*) dz^* \\ - \int_{z_0}^z f(z^*) dz^* = \int_z^{z + \Delta z} f(z^*) dz^*$$

در اینجا می توان از z تا $z + \Delta z$ در طول پاره خطی که در بالا معرفی شد انتگرال گرفت (شکل ۳۱۰). بنابراین

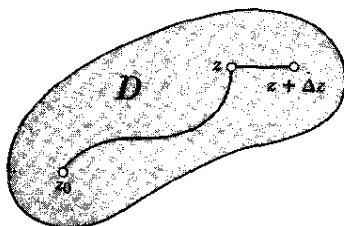
$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(z^*) - f(z)] dz^*$$

زیرا z ثابت نگه داشته شده است و بنابراین

$$-\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) dz^* = -\frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} dz^* = -f(z).$$

$f(z)$ پیوسته است. در نتیجه، به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض عددی مانند $\delta > 0$ می توان یافت به طوری که

$$|f(z^*) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{وقتی که} \quad |z^* - z| < \delta$$



شکل ۳۱۰. مسیر انتگرالگیری

در نتیجه، هرگاه $|\Delta z| < \delta$ ، آنگاه

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} [f(z^*) - f(z)] dz^* \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} dz^* \right| = \varepsilon;$$

یعنی،

$$(۲) \quad F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

از (۱) نتیجه می‌شود که اگر z_0 با نقطه ثابت دیگری در D عوض شود، به تابع $f(z)$ مقدار ثابتی اضافه می‌شود. بنابراین (۲) مشاهده می‌کنیم $F(z)$ انتگرال نامعین یا تابع اولیه $f(z)$ است، که به صورت

$$F(z) = \int f(z) dz;$$

نوشته می‌شود، یعنی، $F(z)$ تابعی تحلیلی در D است که مشتق آن برابر $f(z)$ است. هرگاه $F'(z) = f(z)$ و $G'(z) = f(z)$ ، آنگاه در D $F'(z) - G'(z) \equiv 0$. در نتیجه تابع $F(z) - G(z)$ ثابت است (د. ک. مسئله ۳۵ در انتهای بخش ۵۰۱۲). یعنی، دو انتگرال نامعین $F(z)$ و $G(z)$ تنها یک مقدار ثابت باهم تفاوت دارند. با توجه به (۱)، به ازای هر دو نقطه a و b در D و هر مسیری در D که a را به b وصل می‌کند داریم

$$\int_a^b f(z) dz = \int_{z_0}^b f(z) dz - \int_{z_0}^a f(z) dz = F(b) - F(a)$$

و این همان چیزی است که در مورد انتگرال معین داشتیم، ولی نکته مهم اینکه در اینجا مسیرهای انتگرالگیری در حوزه همبند ساده‌ای مانند D که در آن $f(z)$ تحلیلی است قرار دارند.

نتیجه فوق را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد.

قضیه ۱ (محاسبه انتگرال روی خط با انتگرالگیری نامعین)

هرگاه $f(z)$ در حوزه همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه انتگرال نامعینی از $f(z)$ در حوزه D وجود دارد، یعنی، تابعی تحلیلی مانند $F(z)$ وجود دارد به طوری که در D $F'(z) = f(z)$ ، و به ازای هر مسیری در D که دو نقطه a و b از D را به هم وصل می‌کند

$$(۳) \quad \int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a)$$

این قضیه ما را قادر می‌سازد که انتگرالهای روی خط مختلط را به کمک انتگرالگیری نامعین محاسبه کنیم. توجه کنید که در (۳) می‌توان هر انتگرال نامعین $F(z)$ ی از $f(z)$ در D را در نظر گرفت، زیرا $F(z)$ صرفنظر از جمع آن بامقادارهای ثابت یکتا است.

مثال ۱

$$\int_i^{1+i} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_i^{1+i} = \frac{1}{3} [(1+i)^3 - i^3] = -\frac{47}{3} - 17i$$

مثال ۲

$$\int_i^{\pi/2} \cos z dz = \sin z \Big|_i^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin i = 1 - i \sinh 1$$

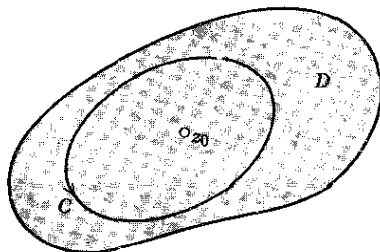
مسائل بخش ۴.۱۴

مطلوب است محاسبه

۱. $\int_i^{1+i} z dz$
۲. $\int_1^{2i} z^2 dz$
۳. $\int_i^1 (z+1)^2 dz$
۴. $\int_{1-i}^{1+i} z^2 dz$
۵. $\int_1^{1+\pi i} e^z dz$
۶. $\int_{\pi i}^{\pi} e^{yz} dz$
۷. $\int_0^i z e^{z^2} dz$
۸. $\int_{1-\pi i}^{1+\pi i} e^{z/2} dz$
۹. $\int_0^{\pi i} \cos z dz$
۱۰. $\int_0^{\pi i} \sin^2 z dz$
۱۱. $\int_0^{\pi i} z \cos z^2 dz$
۱۲. $\int_0^{\pi i} z \cos z dz$
۱۳. $\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz$
۱۴. $\int_{1-i}^{1+i} \cos z dz$
۱۵. $\int_0^{2i} z \cosh z dz$
۱۶. $\int_i^{1+i} \sinh z dz$
۱۷. $\int_0^{2i} \sinh z dz$
۱۸. $\int_i^{2i} z \sinh z^2 dz$
۱۹. $\int_{-i}^i z \cosh z^2 dz$
۲۰. $\int_{-\pi i}^{\pi i} z \cosh z dz$

۵.۱۴ فرمول انتگرال کشی

مهمترین نتیجه قضیه انتگرال کشی فرمول انتگرال کشی است. این فرمول و شرایط برقراری



شکل ۳۱۱. فرمول انتگرال کشی

آن را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۱ (فرمول انتگرال کشی)

فرض می‌کنیم $f(z)$ در حوزه همبند ساده D تحلیلی باشد. آنگاه به ازای هر نقطه z_0 از D و هر مسیر بسته ساده C در D که z_0 را محصور کند (شکل ۳۱۱)،

$$(۱) \quad \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (\text{فرمول انتگرال کشی})$$

انتگرالگیری در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انجام می‌گیرد.

اثبات. اگر بنویسیم $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$ ، با توجه به اینکه ضریب ثابت را می‌توان از زیر علامت انتگرال خارج کرد، داریم

$$(۲) \quad \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_C \frac{dz}{z - z_0} + \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

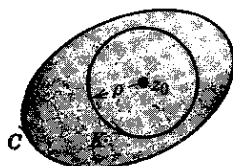
از مثال ۵ بخش ۳۰۱۴ نتیجه می‌شود که جمله اول طرف راست برابر $2\pi i f(z_0)$ است. در نتیجه (۱) وقتی برقرار است که انتگرال آخر در (۲) صفر باشد. اما انتگران این انتگرال در D جز در نقطه z_0 ، تحلیلی است. بنابراین می‌توان C را با دایره کوچک K به مرکز z_0 عوض کرد بدون آنکه مقدار انتگرال تغییر کند (شکل ۳۱۲). $f(z)$ چون تحلیلی است پیوسته است. در نتیجه به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، می‌توان عددی مانند $\delta > 0$ یافت به طوری که

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \text{ به ازای هر } z \text{ از قرص } |z - z_0| < \delta.$$

اگر ρ ، شعاع دایره K ، را کوچکتر از δ انتخاب کنیم در هر نقطه از K نامساوی

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{\rho}$$

را خواهیم داشت. طول K برابر است با $2\pi\rho$. بنابراین، با توجه به (۲) از بخش ۲۰۱۴



شکل ۳۱۲. اثبات فرمول انتگرال کشی

$$\left| \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

از آنجا که می‌توانیم ε را هر قدر که بخواهیم کوچک اختیار کنیم، نتیجه می‌گیریم که انتگرال آخر در طرف راست (۲) دارای مقدار صفر است، و بدین ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد. ▲

مثال ۱. انتگرالگیری در روی مسیرهای بسته گوناگون

از

$$\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$$

در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت در روی دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز هر یک از نقاط زیر انتگرال بگیرد:

$$z = i \text{ (الف)} \quad z = 1 \text{ (ب)} \quad z = \frac{1}{i} \text{ (ب)} \quad z = -1 \text{ (ت)} \quad z = i$$

(الف) انتگرال مورد نظر را می‌توان چنین نوشت:

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \int_C \frac{z^2 + 1}{z + 1} \frac{dz}{z - 1}$$

عبارت طرف راست به صورت (۱) است که در آن $z_0 = 1$ و

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1}.$$

نقطه $z_0 + 1$ درون دایره C قرار دارد، و $f(z)$ در داخل و روی C تحلیلی است. [نقطه $z = -1$ ، که در آن $f(z)$ تحلیلی نیست، خارج دایره C قرار دارد.] در نتیجه بنا به فرمول انتگرال کشی

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \int_C \frac{z^2 + 1}{z + 1} \frac{dz}{z - 1} = 2\pi i \left[\frac{z^2 + 1}{z + 1} \right]_{z=1} = 2\pi i$$

(ب) در این مورد نیز همان نتیجه قبل را به دست می‌آوریم زیرا تابع ما جز در نقاط $z = 1$ و $z = -1$ تحلیلی است، می‌توانیم دایره (ب) را بسا یک تغییر شکل پیوسته

(و) احياناً با يك انتقال) از دایره (الف) به دست آوریم بدون آنکه از نقطه‌ای که تابع در آن تحلیلی نیست بگذریم.
(پ) می‌توان نوشت

$$\int_c \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = \int_c \frac{z^2+1}{z-1} \frac{dz}{z+1}.$$

انتگرال طرف راست به صورت (۱) است با $z_0 = -1$ و

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$$

نقطه $z_0 = -1$ درون دایره C که اکنون مورد بررسی ما است قرار دارد، و $f(z)$ در داخل و روی C تحلیلی است. در نتیجه بنا به (۱)،

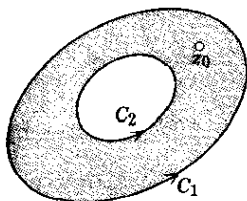
$$\int_c \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = \int_c \frac{z^2+1}{z-1} \frac{dz}{z+1} = 2\pi i \left[\frac{z^2+1}{z-1} \right]_{z=-1} = -2\pi i$$

(ت) تسایع داده شده در داخل و روی دایره مورد نظر همه جا تحلیلی است. در نتیجه، بنا به قضیه انتگرال کشی، انتگرال دارای مقدار صفر است. Δ

در مورد حوزه‌های چندگانه می‌توان مانند بخش ۳۰۱۴ عمل کرد. مثلاً، هرگاه $f(z)$ روی C_1 و C_2 و در حوزه حلقه‌ای شکل محدود بسته C_1 و C_2 (شکل ۳۱۳) تحلیلی بوده z_0 نقطه دلخواهی از این حوزه باشد، آنگاه

$$(۳) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

که هر دو انتگرال‌گیری در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انجام می‌گیرند.



شکل ۳۱۳. فرمول (۳)

مسائل بخش ۵۰۱۴

از $z^2/(z^2+1)$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی هر يك از دایره‌های زیر انتگرال بگیرد.

$$|z| = 1/2 \quad .۴ \quad |z| = 2 \quad .۳ \quad |z-i| = 1/2 \quad .۲ \quad |z+i| = 1 \quad .۱$$

از $z^2/(z^4-1)$ درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی هریک از دایره‌های زیر انتگرال بگیرد.

$$|z| = 2 \quad .۸ \quad |z-i| = 1/2 \quad .۴ \quad |z+i| = 1 \quad .۶ \quad |z-1| = 1 \quad .۵$$

از توابع زیر درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره یکه انتگرال بگیرد.

$$1/(4z+i) \quad .۱۱ \quad 1/(z^2+4) \quad .۱۰ \quad 1/z \quad .۹$$

$$e^{z^2}/(2z-i) \quad .۱۴ \quad e^{z^2}/(z+2i) \quad .۱۳ \quad e^z/z \quad .۱۲$$

$$(e^z-1)/z \quad .۱۷ \quad (\sin z)/z \quad .۱۶ \quad (\cos z)/z \quad .۱۵$$

$$(z-2)^{-1} \sin z \quad .۲۰ \quad (\cosh z)/z \quad .۱۹ \quad (\sinh z)/z \quad .۱۸$$

۶.۱۴ مشتقات يك تابع تحلیلی

از این فرض که تابعی حقیقی از یک متغیر حقیقی يك بار مشتق پذیر است در مورد وجود مشتقات مراتب بالاتر نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت. ولی چنانچه خواهیم دید اگر فرض کنیم که يك تابع مختلط در حوزه D مشتق مرتبه اول دارد می‌توانیم وجود مشتق از هر مرتبه‌ای را در D نتیجه بگیریم. یعنی توابع تحلیلی مختلط بدین طریق بسیار ساده‌تر از توابع حقیقی که يك بار مشتق پذیر هستند رفتار می‌کنند.

قضیه ۱ (مشتقات يك تابع تحلیلی)

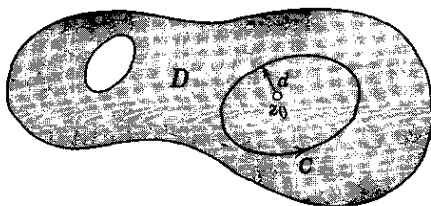
هرگاه $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد، آنگاه f در D از هر مرتبه‌ای مشتق دارد و بنابراین همه این مشتقات نیز در D تحلیلی هستند. مقادیر این مشتقات در نقطه‌ای مانند z_0 از D فرمولهای

$$(۱') \quad f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz,$$

$$(۱'') \quad f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz,$$

و در حالت کلی با

$$(۱) \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (n=1, 2, \dots);$$



شکل ۳۱۴. قضیه ۱

داده می شوند؛ در اینجا C مسیر بسته ساده دلخواهی در D است که z_0 را دربر می گیرد و تمامی درون آن متعلق به D است؛ منحنی C در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت پیموده می شود (شکل ۳۱۴).

تبعیه. برای به خاطر سپردن (۱)، بدنیست در نظر داشته باشید که این فرمول بامشتغلی از فرمول کشی (۱)، بخش ۵۰۱۴، در زیر علامت انتگرال نسبت به z_0 حاصل می شود.

اثبات قضیه ۱. (۱') را ثابت می کنیم. بنا به تعریف

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

از اینجا و از فرمول انتگرال کشی (۱) بخش ۵۰۱۴ نتیجه می شود که

$$(۲) \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left[\int_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} dz - \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right].$$

با محاسبه مستقیم نتیجه می شود

$$\frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{z - (z_0 + \Delta z)} - \frac{1}{z - z_0} \right] = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2}$$

پس (۲) را می توان چنین نوشت:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz.$$

در نتیجه (۱') وقتی به اثبات می رسد که نشان دهیم عبارت آخر طرف راست صفر است، و این همان کاری است که خواهیم کرد.

تابع $f(z)$ روی C پیوسته است. بنا بر این قدر مطلق $f(z)$ روی C کراندار است، مثلا $|f(z)| < M$. فرض می کنیم d فاصله نزدیکترین نقطه (یا نقاط) C از z_0 باشد. در آن صورت به ازای هر z از C ،

$$|z - z_0| \geq d \text{ و } \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{d}$$

به علاوه، هر گاه $|\Delta z| \leq d/2$ ، آنگاه به ازای هر z از C نامساوی زیر را داریم

$$|z - z_0 - \Delta z| \geq \frac{d}{2} \text{ و } \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \leq \frac{2}{d}$$

اگر طول C را با L نشان دهیم و از فرمول (۴) بخش ۲.۱۴ استفاده کنیم به دست می آوریم

$$\left| \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} dz \right| < \frac{|\Delta z|}{2\pi} \frac{M}{\frac{1}{2}dd^2} L \quad (|\Delta z| \leq \frac{d}{2})$$

هر گاه Δz به سمت صفر میل کند، عبارت طرف راست به سمت صفر میل می کند. بدین ترتیب (۱') به اثبات می رسد. توجه کنید که ما از فرمول انتگرال کشی (۱) بخش ۵.۱۴ استفاده کرده ایم؛ اگر تمام معلومات ما در مورد $f(z_0)$ این بود که می توان $f(z_0)$ را به صورت (۱) بخش ۵.۱۴ نمایش داد، با توجه به آنچه گفته شد وجود $f'(z_0)$ ، مشتق $f(z)$ به اثبات می رسید. فرمول (۱'') نیز با برهان مشابهی ثابت می شود، و فرمول کلی (۱) با استقرا به دست می آید.

با استفاده از قضیه ۱، عکس قضیه کشی را ثابت می کنیم.

قضیه مرزا^۱

اگر $f(z)$ در حوزه همبند ساده D پیوسته باشد و اگر به ازای هر مسیر بسته در D

$$(۳) \quad \int_C f(z) dz = 0,$$

آنگاه $f(z)$ در D تحلیلی است.

اثبات. در بخش ۴.۱۴ نشان دادیم که اگر $f(z)$ در D تحلیلی باشد، آنگاه تابع

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z^*) dz^*$$

در D تحلیلی است و $F'(z) = f(z)$. برای اثبات این قضیه فقط از پیوستگی $f(z)$ و این خاصیت که انتگرال آن روی هر مسیر بسته در D صفر است استفاده کردیم؛ از این فرضها نتیجه گرفتیم که $F(z)$ تحلیلی است. بنابه قضیه ۱، مشتق $F(z)$ تحلیلی است، یعنی $f(z)$ در D تحلیلی است، و قضیه مرزا به اثبات می رسد. ▲

حال می خواهیم نامساوی مهمی را به دست آوریم. در (۱)، فرض می کنیم که C

۱. جیاچینتو مرزا (Giacinto Morera)، ۱۸۵۶-۱۹۰۹، ریاضیدان ایتالیایی.

دایره‌ای به شعاع r و مرکز z_0 ، و M ماکزیمم $|f(z)|$ روی C باشد. در این صورت با استفاده از (۴) بخش ۲۰۱۴، در (۱) می‌یابیم

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r.$$

از نامساوی بالا نامساوی کشی حاصل می‌شود

$$(۴) \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

با استفاده از (۴)، قضیه اساسی و جالب زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه لیوویل

هرگاه $f(z)$ به ازای هر z از صفحه مختلط منتهای (ر.ک. بخش ۳۰۱۳) تحلیلی و قدرمطلق آن کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ ثابت است.

اثبات. بنا به فرض، $|f(z)|$ کراندار است، مثلاً به ازای هر z منتهای $|f(z)| < K$. با استفاده از (۴)، مشاهده می‌کنیم $|f'(z_0)| < K/r$. چون این نامساوی به ازای هر r برقرار است، می‌توانیم r را هر قدر که می‌خواهیم بزرگ اختیار کنیم و نتیجه بگیریم که $f'(z_0) = 0$. از آنجا که z_0 دلخواه است، پس به ازای هر z منتهای، $f'(z) = 0$ ، و $f(z)$ ثابت است (ر.ک. مسئله ۳۵ در انتهای بخش ۵۰۱۲). بدین ترتیب اثبات به اتمام می‌رسد.

مسائل بخش ۶۰۱۴

با استفاده از قضیه ۱، از توابع زیر در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره یکبار انتگرال بگیرید. (n در مسائل ۸، ۱۲، ۱۳ عددی صحیح و مثبت است.)

۱. $z^2/(2z-1)^2$	۲. $z^2/(2z-1)^4$	۳. $z^2/(2z+i)^2$
۴. $z^4/(z-3i)^2$	۵. $z/(4z+i)^2$	۶. e^z/z^2
۷. e^z/z^2	۸. e^z/z^n	۹. $ze^z/(4z+\pi i)^2$
۱۰. $z^{-2}\cos z$	۱۱. $z^{-2}\sin z$	۱۲. $z^{-2n}\cos z$
۱۳. $z^{-2n-1}\cos z$	۱۴. e^{z^2}/z^2	۱۵. $z^{-2}e^{-z}\sin z$
۱۶. e^{z^2}/z^3		

۱۷. هرگاه $f(z)$ ثابت نبوده، به ازای هر مقدار z (متناهی) تحلیلی باشد، و R و M اعداد حقیقی مثبت دلخواه باشند (صرفنظر از اینکه چقدر بزرگ باشند)، نشان دهید مقادیری از z موجود است به طوری که $|z| > R$ و $|f(z)| > M$. دهنمایی. از قضیه لیوویل استفاده کنید.

۱۸. هرگاه $f(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n > 0$ و M عدد حقیقی مثبت دلخواهی باشد (صرفنظر از اینکه چقدر بزرگ باشد)، نشان دهید که عدد حقیقی مثبت R وجود دارد به طوری که $|f(z)| > M$ به ازای هر $|z| > R$.

۱۹. نشان دهید که $f(z) = e^z$ خاصیتی را که در مسئله ۱۷ ذکر شد دارد، ولی دارای خاصیتی که در مسئله ۱۸ بیان شد نیست.

۲۰. قضیه بنیادی جبر را ثابت کنید: هرگاه $f(z)$ که ثابت نیست یک چند جمله‌ای بر حسب z باشد، آنگاه لااقل به ازای یک مقدار z ، $f(z) = 0$. دهنمایی. فرض کنید که به ازای هر z $f(z) \neq 0$ و نتیجه حاصل از مسئله ۱۷ را در مورد $g = 1/f$ به کار برید.

دنباله‌ها و سریها

در این فصل مفاهیم اساسی و حقایق مربوط به دنباله‌ها و سریهای حقیقی و مختلط به طور خودکفا عرضه می‌شود.

بخشهای ۱۰۱۵ و ۲۰۱۵ تعاریف اساسی را دربردارند.

بخشهای ۳۰۱۵ - ۵۰۱۵ به آزمونهای همگرایی می‌پردازند و بخش ۶۰۱۵ به اعمالی

که روی سریها انجام می‌شود نظیر جمع جمله به جمله و باز آرایش اختصاص دارد. بخشهای ۳۰۱۵ - ۶۰۱۵ برای خواننده‌ای که صرفاً به توابع تحلیلی مختلط علاقه‌مند است و درباره سریهای حقیقی مطالعاتی دارد اختیاری هستند، بنابراین چنین خواننده‌ای می‌تواند بعد از بخش ۲۰۱۵ یکسر سراغ فصل ۱۶ (سریهای توانی، سری تیاور و سری لورن که در آنالیز مختلط اساسی هستند) برود. یعنی، می‌توان بخشهای ۳۰۱۵ - ۶۰۱۵ را حذف کرد و از آنها، در صورت لزوم، به عنوان مرجع استفاده کرد و بدین ترتیب سرعت مطالعه را بیشتر ساخت.

دسته‌های خاص سریها را می‌توان در فصلهای زیر یافت:

فصل ۱۰ (سری فوریه)

فصل ۱۶ (سری توانی)

بخش ۱۹، ۱۵ (بسط مجانبی)

پیشنیاذهای این فصل: بخشهای ۱۰۱۲ - ۵۰۱۲.

بخشهایی که برای دوده‌های فشرده‌تر قابل حذف است: بخشهای ۳۰۱۵ - ۶۰۱۵.

مراجع: [A۱۵], [A۹], [A۷], [A۳], [A۲] در ضمیمه ۱.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۰۱۵ دنباله‌ها

سریها و بخصوص سریهای توانی، در آنالیز مختلط نقشی اساسی دارند. برای معرفی سریها بحث را با دنباله و مفاهیم مربوط به آن آغاز می‌کنیم. خواهیم دید که بیشتر تعاریف و قضایای مربوط به دنباله‌ها و سریهای مختلط شبیه تعاریف و قضایای مربوط به دنباله و سریهای حقیقی هستند که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها آشنا شده‌ایم.

هرگاه به هر عدد صحیح مثبت n عددی مانند z_n نسبت داده شود آنگاه گوییند که اعداد

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

یک دنباله نامتناهی یا، به اختصار یک دنباله تشکیل می‌دهند و اعداد z_n را جمله‌های این دنباله می‌نامند.

دنباله‌ای را که جملاتش حقیقی باشند دنباله حقیقی می‌نامند.

گاهی مناسب است که شماره گذاری جملات یک دنباله را با ۰، ۱، ۲، ... یا هر عدد صحیح دیگری، آغاز کنیم.

دنباله $z_1, z_2, \dots$ را همگرا نامند هرگاه عددی مانند c با این خاصیت وجود داشته باشد که به ازای هر عدد حقیقی مثبت ε (اینکه چقدر کوچک باشد مهم نیست ولسی صفر نباشد) بتوانیم عدد صحیح N را طوری بیابیم که

$$|z_n - c| < \varepsilon \quad n > N \quad \text{به ازای هر}$$

c را حد دنباله می‌نامند. در این صورت می‌نویسیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$$

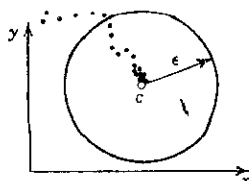
یا به طور ساده

$$z_n \rightarrow c \quad (n \rightarrow \infty)$$

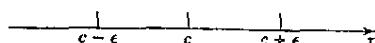
و می‌گوییم که این دنباله به c همگراست و یا دارای حد c است.

دنباله‌ای را که همگرا نباشد واگرا نامند.

شرط (۱) تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. بدین مضمون که هر جمله z_n با $n > N$ درون قرص دایره‌ای بازی به شعاع ε و به مرکز c قرار دارد (شکل ۳۱۵)، و هر قدر هم که شعاع ε



شکل ۳۱۵. دنباله مختلط همگرا



شکل ۳۱۶. دنباله حقیقی همگرا

قرص کوچک انتخاب شود تعدادی متناهی از جمله‌های z_n درون قرص قرار نمی‌گیرند. البته، در حالت کلی، N به انتخاب ε بستگی دارد.

در مورد دنباله حقیقی مفهوم هندسی شرط (۱) آن است که هر جمله z_n با $n > N$ بین $c - \varepsilon$ و $c + \varepsilon$ قرار می‌گیرد (شکل ۳۱۶)، و حداکثر تعدادی متناهی از جمله‌های دنباله در آن فاصله قرار نمی‌گیرد.

مثال ۱. دنباله‌های همگرا و واگرا

دنباله‌ای که جمله‌های آن به صورت $z_n = 1 + 2/n$ است عبارت است از $3, 2, 5/3, 4/3, 7/5, \dots$. این سری همگرا و حد آن $c = 1$ است. در واقع، در (۱) $z_n - c + 1 = 2/n - 1 = 2/n$ و وقتی که $n/2 > 1/\varepsilon$ یا $n > 2/\varepsilon$ داریم $2/n < \varepsilon$. مثلاً با انتخاب $\varepsilon = 0.01$ وقتی که $n > 200$ داریم $2/n < 0.01$. دنباله‌های $1, 2, 3, \dots$ و $1/4, 1/5, 1/6, 4/5, 1/6, 5/6, \dots$ واگرا هستند.

دنباله‌ای که جمله‌های آن به صورت زیرند:

$$z_n = 2 - \frac{1}{n} + i \left(1 + \frac{2}{n} \right)$$

عبارت است از

$$1 + 2i, \quad \frac{3}{2} + 2i, \quad \frac{5}{3} + \frac{5}{3}i, \quad \frac{7}{4} + \frac{3}{4}i, \quad \dots$$

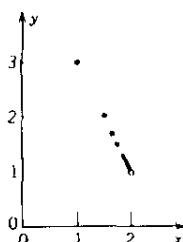
ر. ک. شکل ۳۱۷. این دنباله همگراست و حد آن $c = 2 + i$ است. در واقع، در (۱) داریم

$$|z_n - c| = \left| \frac{2n-1}{n} + i \frac{n+2}{n} - (2+i) \right| = \left| -\frac{1}{n} + \frac{2i}{n} \right| = \frac{\sqrt{5}}{n}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon \quad \text{داریم} \quad n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} = \frac{2.236 \dots}{\varepsilon} \quad \text{یا} \quad \frac{n}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\varepsilon}$$

مثلاً با انتخاب $\varepsilon = 1/100$ وقتی که $n = 224, 225, \dots$ داریم $|z_n - c| < \varepsilon$.

در مورد دنباله مختلط $z_1, z_2, z_3, \dots$ می‌توانیم بنویسیم $z_n = x_n + iy_n$ و دنباله



شکل ۳۱۷. آخرین دنباله مثال ۱

قسمتهای حقیقی و دنباله قسمتهای موهومی، یعنی

$$x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots$$

را در نظر بگیریم. مثلاً در مورد آخرین دنباله مثال ۱، دو دنباله عبارتند از

$$3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \dots, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots$$

می بینیم که این دو دنباله به ترتیب به ۱ و همگراست، این اعداد قسمتهای حقیقی و موهومی حد دنباله مختلط مزبور هستند. مثالی که گفته شد نمونه خوبی است و در حقیقت مصداقی از قضیه زیر است:

قضیه ۱ (دنباله قسمتهای حقیقی و موهومی)

دنباله $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ از اعداد مختلط ($z_n = x_n + iy_n$ ($n = 1, 2, \dots$)) به $c = a + ib$ همگراست اگر و تنها اگر دنباله قسمتهای حقیقی $x_1, x_2, \dots$ به a و دنباله قسمتهای موهومی $y_1, y_2, \dots$ به b همگرا باشد.

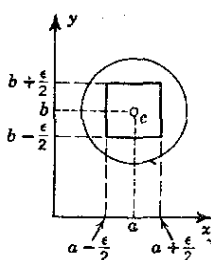
اثبات. هرگاه $|z_n - c| < \varepsilon$ ، آنگاه $z_n = x_n + iy_n$ درون دایره‌ای به شعاع ε و به مرکز $c = a + ib$ قرار دارد به طوری که الزاماً (شکل ۳۱۸ الف)

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon.$$

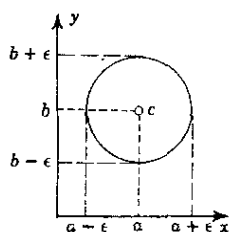
بنابراین همگرایی $z_n \rightarrow c$ وقتی که $n \rightarrow \infty$ مستلزم همگرایی $x_n \rightarrow a$ و $y_n \rightarrow b$ است. برعکس، هرگاه $x_n \rightarrow a$ و $y_n \rightarrow b$ وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، در آن صورت به ازای $\varepsilon > 0$ می توان N را به اندازه‌ای بزرگ انتخاب کرد که، به ازای هر $n > N$ داشته باشیم

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

لازمه این دونا مساوی آن است که $z_n = x_n + iy_n$ در مری به ضلع ε و به مرکز c



(ب)



(الف)

شکل ۳۱۸. اثبات قضیه ۱

قرار داشته باشد. از این رو z_n باید داخل دایره‌ای به مرکز c و به شعاع ϵ قرار گیرد (شکل ۳۱۸ ب)، و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. ▲

این قضیه نشان می‌دهد که با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و قسمت‌های موهومی، می‌توان بررسی همگرایی دنباله‌های مختلط را به بررسی همگرایی دنباله‌های حقیقی تبدیل کرد. دنباله $z_1, z_2, \dots$ را کواندار نامند در صورتی که عدد مثبتی مانند K وجود داشته باشد به طوری که تمام جملات دنباله در قرصی به شعاع K و به مرکز مبدأ واقع باشند، یعنی

$$|z_n| < K \quad \text{به‌ازای هر } n$$

دنباله‌ای را که کراندار نباشد بیکران نامند. اغلب می‌توان با استفاده از این مفهوم، واگرایی را به کمک قضیه ساده‌تر زیر دریافت:

قضیه ۲

هر دنباله همگرا کراندار است. از این دو هرگاه دنباله‌ای بیکران باشد واگراست.

اثبات. فرض کنید دنباله $z_1, z_2, \dots$ همگرا بوده، حد آن c باشد. در این صورت می‌توان يك $\epsilon > 0$ انتخاب و N متناظر با آن را طوری پیدا کرد که هر z_n با $n > N$ در قرصی به شعاع ϵ و به مرکز c قرار گیرد و در نهایت ممکن است تعدادی متناهی جمله در قرص قرار نگیرد. واضح است که می‌توان قرصی به شعاع K و به مرکز مبدأ در نظر گرفت که آنقدر بزرگ باشد که قرص و آن تعداد متناهی جملات خارج قرص درون دایره مزبور واقع شوند. بدین ترتیب کراندار بودن دنباله ثابت می‌شود. ▲

توجه کنید که کراندار بودن برای همگرایی کافی نیست. مثلاً، دنباله $1, 0, 1, 0, \dots$ کراندار است اما واگراست (چرا؟) دنباله‌های بیکران از این قبیلند:

$$۱, ۲, ۳, ۴, \dots, \frac{1}{۲}, ۲, \frac{1}{۳}, ۳, \frac{1}{۴}, ۴, \dots$$

این دنباله‌ها بنابه قضیه ۲ واگرا هستند.

مسائل بخش ۱۰۱۵

چند جمله اول دنباله $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ را پیدا کنید و آنها را رسم نمایید در صورتی که z_n برابر است با

$$۱. \quad n/(n+۳) \quad ۲. \quad ۲n/(n^۲+۱) \quad ۳. \quad i^n/n^۳$$

$$۴. \quad i^n/n+۱ \quad ۵. \quad i^n n^۲/(n+i) \quad ۶. \quad (-۱)^n + ۲n\pi i$$

۷. چند جمله اول و حد دنباله $z_1=1, z_2=i/2, z_n=iz_{n-۲}z_{n-۱} (n=3, 4, \dots)$ را پیدا کنید.

آیا دنباله‌های $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ که در زیر داده شده اند کراندارند؟ همگرا چطور؟ درموردی که دنباله همگراست حد آن را بیابید.

$$۸. \quad z_n = i^n \quad ۹. \quad z_n = i^n/n \quad ۱۰. \quad z_n = in/(n+۱)$$

$$۱۱. \quad z_n = n^۲/(n+i) \quad ۱۲. \quad z_n = (-1)^n/n^۳ \quad ۱۳. \quad z_n = e^{in\pi/۴}$$

۱۴. (یکتایی حد) نشان دهید که هرگاه دنباله‌ای همگرا باشد حد آن یکتاست.

۱۵. با روشی که در مثال ۱ به کار بردیم، همگرایی در مسئله ۳ را ثابت کنید.

۱۶. قضیه ۱ را مورد دنباله‌ای که جملات آن با فرمول

$$z_n = (n^۲ - ۱)/(۲n^۲ + ۱) + in/(n+۲)$$

داده شده است به کار برید.

۱۷. نشان دهید که دنباله مختلط $z_1, z_2, \dots$ کراندار است اگر و تنها اگر دو دنباله متناظر قسمتهای حقیقی و قسمتهای موهومی آن کراندار باشد.

۱۸. هرگاه دنباله $z_1, z_2, \dots$ همگرا و حد آن 0 باشد، و هرگاه دنباله $b_1, b_2, \dots$ طوری باشد که به ازای هر n مقدار مشخص $0 < K$ ، $|b_n| \leq K|z_n|$ ، نشان دهید که دنباله $b_1, b_2, \dots$ همگرا و حد آن 0 است.

۱۹. هرگاه $z_1, z_2, \dots$ همگرا و حد آن l ، و $z_1^*, z_2^*, \dots$ همگراست و حد آن l^* باشد، نشان دهید که $z_1 + z_1^*, z_2 + z_2^*, \dots$ همگراست و حد آن $l + l^*$ است.

۲۵. نشان دهید که با مفروضات مسئله ۱۹ دنباله $zz_1^*, z_1z_2^*, \dots$ همگراست و حد آن 11^* است.

۲۰۱۵ سری

فرض کنید $w_1, w_2, \dots, w_m, \dots$ دنباله‌ای از اعداد، مختلط یا حقیقی، باشد. در این صورت می‌توانیم سری نامتناهی یا، به اختصار، سری

$$(۱) \quad \sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

را مورد بررسی قرار دهیم. هر w_m يك جمله از سری است. مجموع n جمله اول عبارت است از

$$(۲) \quad s_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

این عبارت n امین مجموع جزئی سری (۱) نامیده می‌شود. بدیهی است که هرگاه جملات s_n را از (۱) حذف کنیم عبارت باقیمانده به صورت زیر است:

$$(۳) \quad R_n = w_{n+1} + w_{n+2} + w_{n+3} + \dots$$

این عبارت را باقیمانده بعد از جمله n ام سری (۱) می‌نامند.

بدین ترتیب دنباله مجموعهای جزئی $s_1, s_2, s_3, \dots$ را به سری (۱) مربوط می‌کنیم. هرگاه این دنباله همگرا باشد، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

در این صورت سری (۱) را همگرا می‌نامیم، عدد s مقدار یا مجموع نامیده می‌شود و می‌توان نوشت

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + \dots$$

هرگاه دنباله مجموعهای جزئی واگرا باشد، سری (۱) را واگرا نامند.

اگر سری (۱) همگرا و مقدارش s باشد در این صورت

$$(۴) \quad R_n = s - s_n \quad \text{یا} \quad s = s_n + R_n$$

و از تعریف همگرایی دنباله، نتیجه می‌شود که با انتخاب n بزرگ می‌توانیم $|R_n|$ را هر قدر که بخواهیم کوچک کنیم. در بسیاری موارد پیدا کردن مجموع s يك سری همگرا غیرممکن است. بنا بر این برای مقاصد محاسبه‌ای باید مجموع جزئی s_n را به عنوان تقریبهایی از s به کار ببریم، در این صورت با تخمین باقیمانده R_n می‌توانیم به میزان دقت این تقریب واقف گردیم.

مثال ۱. سریهای همگرا و واگرا

سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

همگرا و مقدارش ۱ است، زیرا

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$$

سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} m = 1 + 2 + 3 + \dots$$

واگراست. سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

واگراست زیرا

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 - 1 = 0, \quad s_2 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad \text{غیره}$$

و دنباله ۱، ۰، ۱، ۰، ... واگراست.

سری همساز

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

واگراست. در واقع

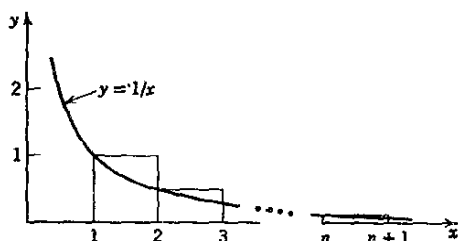
$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

و s_n برابر است با مجموع سطوح n مستطیل شکل ۳۱۹. این سطح بزرگتر از سطح A_n ، سطح زیرمنحنی $y = 1/x$ است، و

$$A_n = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \rightarrow \infty \quad \text{وقتی که } n \rightarrow \infty$$

چون $s_n > A_n$ ، نتیجه می‌شود وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $s_n \rightarrow \infty$ ، یعنی سری واگراست. Δ

از قضیه ۱ بخش قبل قضیه متناظری درمورد سریها به دست می‌آوریم:



شکل ۳۱۹. مثال ۱

قضیه ۱ (سری قسمتهای حقیقی و موهومی)

فرض کنید $w_m = u_m + iv_m$. دراین صورت سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

همگراست و مقدارش برابر $s = a + ib$ است اگر و تنها اگر سری قسمتهای حقیقی و سری قسمتهای موهومی، یعنی

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = u_1 + u_2 + \dots, \quad \sum_{m=1}^{\infty} v_m = v_1 + v_2 + \dots$$

همگرا باشند و مقادیر آنها به ترتیب a و b باشد.

می‌بینیم که این قضیه رابطه‌ای بین سریهای حقیقی و سریهای مختلط برقرار می‌کند. رابطه مهمتری وجود دارد که پایه آن مفهوم زیر است.

سری $w_1 + w_2 + \dots$ را همگرای مطلق نامند هرگاه سری متناظرش

$$(5) \quad \sum_{m=1}^{\infty} |w_m| = |w_1| + |w_2| + \dots$$

(که جملات آن حقیقی و غیرمنفی هستند) همگرا باشد.

هرگاه سری $w_1 + w_2 + \dots$ همگرا باشد اما (۵) واگرا باشد، در آن صورت

سری را، به‌طور دقیقتر، همگرای شرطی نامند.

مثال ۲. سریهای همگرای مطلق و همگرای شرطی

سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

همگرای مطلق است زیرا سری (۵) متناظرش همگراست (ر. ک. مثال ۱). سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

فقط همگرایی شرطی است، زیرا خود سری همگراست (بنابه آزمون مشهور لایبنیتس در مورد سری حقیقی، که در بخش ۴.۱۵ مجدداً بررسی می‌شود)، اما سری (۵) متناظرش سری همساز است که واگراست (ر.ک. مثال ۱).

خاصیت زیر در مورد سری همگرایی مطلق تقریباً بدیهی است.

قضیه ۲.

هرگاه سری $w_1 + w_2 + \dots$ همگرایی مطلق باشد، همگراست. در آخر بخش بعد با استفاده از اصل همگرایی کوشی این قضیه را به طور ساده اثبات می‌کنیم. بالاخره قضیه ساده دیگری را بیان می‌کنیم که اغلب مفید واقع می‌شود.

قضیه ۳

هرگاه سری $w_1 + w_2 + \dots$ همگرا باشد، در آن صورت

$$(۶) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$$

از این دو هر سویی که در (۶) صدق نکند واگراست.

اثبات. فرض کنید $w_1 + w_2 + \dots$ همگرا بوده، مجموع آن s باشد. آنگاه

$$w_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

و

$$\Delta \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s - s = 0.$$

خوب توجه کنید که (۶) فقط شرط لازم همگرایی است اما کافی نیست. مثلاً سری همساز مثال ۱ در (۶) صدق می‌کند اما واگراست. دومین و سومین سری در مثال ۱ در (۶) صدق نمی‌کنند و بنابراین واگرا هستند.

۳.۱۵ اصل همگرایی کوشی در مورد سریها و دنباله‌ها

قبل از آنکه یک سری یا دنباله را مورد استفاده قرار دهیم باید دریابیم که همگراست یا خیر. استفاده مستقیم از تعریف همگرایی ممکن است دشوار باشد زیرا در بیشتر موارد دنباله یا

۱. به خوانندگانی که علاقه‌شان بیشتر متوجه توابع تحلیلی مختلط است و در ضمن مطالعاتی در زمینه سریها و دنباله‌های حقیقی دارند، توصیه می‌کنیم که مقدمه این فصل (فصل ۱۵) در مورد ترتیب موضوعات را دوباره بخوانند. چنین خواننده‌ای می‌تواند بلافاصله فصل ۱۶ را که درباره سری توانی، سری تیلور و سری لورن است شروع کند و در مواقع لزوم بخشهای ۳.۱۵-۶.۱۵ را به عنوان مرجع مورد استفاده قرار دهد.

سری را در دست نداریم. اصل همگرایی کوشی برای این دشواری فایده می‌آید چه این اصل معیاری برای قضاوت درباره همگرایی به دست می‌دهد که در آن به دانستن حد نیازی نیست.

در اثبات اصل همگرایی کوشی از قضیه مشهور بولسانو - وایرشتراس* (قضیه ۱ زیر) استفاده خواهیم کرد، برای بیان این قضیه به مفهوم زیر که موارد استفاده دیگری هم دارد نیازمندیم.

نقطه a را نقطه حدی دنباله $z_1, z_2, \dots$ نامند اگر، به ازای $\epsilon > 0$ (هر قدر هم کوچک باشد) داشته باشیم

به ازای تعدادی نامتناهی n $|z_n - a| < \epsilon$ (۱)

معنی هندسی این گفته آن است که تعدادی نامتناهی از جملات دنباله درون دایره‌ای به شعاع ϵ و به مرکز a قرار دارند مستقل از اینکه ϵ چقدر کوچک انتخاب شود.

توجه کنید که اگر (۱) صادق باشد هنوز ممکن است تعدادی نامتناهی جمله وجود داشته باشند که داخل دایره قرار نگیرند و دنباله همگرا نباشد. در حقیقت هرگاه دنباله‌ای همگرا باشد حد آن يك نقطه حدی است (چرا؟) که در عین حال نقطه حدی دنباله است و هرگاه دنباله‌ای بیش از يك نقطه حدی داشته باشد واگراست.

به علاوه توجه کنید هر عددی که بینهایت بار در دنباله تکرار شود، بنا به تعریف، نقطه حدی دنباله است.

با چند مثال مطلب را روشن می‌کنیم. یاد آور می‌شویم که کراندار بودن در اواخر بخش ۱۰.۱۵ تعریف شده است

مثال ۱. نقاط حدی، همگرایی، کراندار بودن

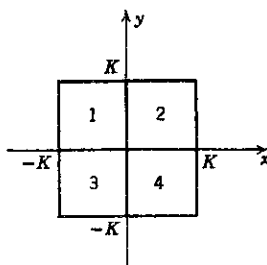
دنباله	نقاط حدی در	همگرایی یا واگرایی	کراندار یا بی کران
$1, 2, 3, \dots$	(هیچ جا)	واگرا	بی کران
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$	۱	همگرا	کراندار
$\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \dots$	۰	واگرا	بی کران
$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \dots$	۱ و ۰	واگرا	کراندار

مشاهده می‌کنیم که دو دنباله کراندار که در این مثال آمده اند نقطه‌حدی دارند. این مثال اهمیت قضیه زیر را نشان می‌دهد:

قضیه ۱ (بولتسانو^۱ و وایرستراس^۲)

دنباله نامتناهی کراندار $z_1, z_2, z_3, \dots$ در صفحه مختلط حداقل يك نقطه حدی دارد. اثبات. واضح است که ما به دوشرط زیر نیاز داریم. نخست آنکه دنباله متناهی نمی‌تواند نقطه حدی داشته باشد، و درثانی دنباله $1, 2, 3, \dots$ که نامتناهی است ولی کراندار نیست نقطه حدی ندارد. برای اثبات قضیه دنباله نامتناهی کراندار $z_1, z_2, \dots$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم K طوری باشد که به ازای هر n ، چون دنباله نامتناهی است، یکی از این اعداد، مثلاً z باید بینهایت بار در دنباله تکرار شود و، بنابه تعریف، این عدد يك نقطه حدی دنباله است.

اکنون حالتی را که در آن تعداد جملات متفاوت دنباله نامتناهی است در نظر می‌گیریم. مربع بزرگ Q_0 را که دربرگیرنده تمام z_n هاست رسم می‌کنیم (شکل ۳۲۰). Q_0 را به ۴ مربع مساوی تقسیم می‌کنیم. بدیهی است که اقلایکی از این مربعها (هرمربع را با تمامی کرانه‌اش در نظر می‌گیریم). باید تعدادی نامتناهی از جملات دنباله را دربرداشته باشد. از بین مربعهایی که چنین خاصیتی دارند آن را که کوچکترین شماره (۱، ۲، ۳ یا ۴) را دارد با Q_1 نمایش می‌دهیم. این اولین مرحله است. در مرحله بعد Q_1 را به چهارمربع مساوی تقسیم کرده و مربعی مانند Q_2 بدوشرط فوق از میان آنها انتخاب می‌کنیم و کار را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. از اینجا يك دنباله نامتناهی از مربعهای $Q_0, Q_1, \dots, Q_n, \dots$ به دست می‌آید با این خاصیت که وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند Q_n به سمت صفر میل می‌کند، و با این خاصیت که Q_n دربرگیرنده تمام Q_m های با $n > m$



شکل ۳۲۰. اثبات قضیه ۱

۱. برنهارد بولتسانو Bernhard Bolzano (۱۷۸۱-۱۸۴۸) ریاضیدان آلمانی و یکی از پیشگامان مطالعه مجموعه‌های نقطه‌ای.

۲. ر.ك. پانوش ۸ بخش ۵۱۲.

است. به سادگی معلوم می‌شود عددی که به تمامی این مربها تعلق دارد، و آن را $z = a$ می‌گیریم، یکی از نقاط حدی دنباله است. درحقیقت، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، می‌توانیم N را طوری بزرگ بگیریم که ضلع مربع Q_N از ε کوچکتر باشد، و از آن‌جا که Q_N شامل تعدادی نامتناهی z_n است، به‌ازای تعدادی نامتناهی n داریم $|z_n - a| < \varepsilon$ ؛ و برهان کامل است. $\blacktriangle$

اکنون همه چیز برای بیان قضیه اصلی این بخش آماده است.

قضیه ۲ (اصل همگرایی کوشی در مورد دنباله‌ها)

دنباله $z_1, z_2, z_3, \dots$ همگراست اگر و تنها اگر به‌ازای هر عدد مثبت ε بتوان عددی مانند N (که ممکن است به ε بستگی داشته باشد) یافت که

$$(2) \quad |z_m - z_n| < \varepsilon \quad n > N, m > N$$

وقتی که $n > N$ و $m > N$ از یکدیگر باید کمتر از ε (یعنی، فاصله هر دو جمله z_n و z_m با $n > N$ و $m > N$ از یکدیگر باید کمتر از ε باشد).

اثبات. (الف) فرض کنید دنباله $z_1, z_2, \dots$ همگرا بوده حد آن c باشد. در این صورت، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض می‌توان N ی یافت که

$$\text{به‌ازای هر } n > N \quad |z_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

از این رو، وقتی که $n > N, m > N$ ، بنا به نامساوی مثلثی داریم

$$|z_m - z_n| = |(z_m - c) - (z_n - c)| \leq |z_m - c| + |z_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

که نشان می‌دهد اگر دنباله همگرا باشد، آنگاه (۲) صادق است.

(ب) بالعکس، دنباله‌ای مانند $z_1, z_2, \dots$ را که (۲) در مورد آن صادق است در نظر بگیریم. نخست نشان می‌دهیم که این دنباله کراندار است. یک ε و یک $n = n_0 > N$ مشخص برای (۲) انتخاب می‌کنیم. در این صورت بنا به (۲) هر z_m ی با $m > N$ در قرصی به شعاع ε و به مرکز z_{n_0} قرار می‌گیرد و فقط تعدادی متناهی از جملات دنباله درون قرص قرار نمی‌گیرند. واضح است که می‌توان دایره‌ای به مرکز مبدأ و به قدری بزرگ در نظر گرفت که هم قرص و هم z_n ها داخل آن واقع شوند. این نشان می‌دهد

۱. این واقعیت که چنین عدد یکتای $z = a$ ی وجود دارد بدیهی به نظر می‌رسد، اما درحقیقت این نتیجه یکی از اصول موضوع دستگاه اعداد حقیقی؛ به‌نام اصل موضوع کانتور - ددکیند (Cantor - Dedekind) است. ر. ک. پانوش بخش بعد.

که دنباله کراندار است و از قضیه بولتسانو - وایرشتراس نتیجه می گیریم که این دنباله حداقل يك نقطه حدی، مثلا L ، دارد.

نشان می دهیم که دنباله همگراست و حد آن L است. بنا به تعریف نقطه حد، به ازای يك $\varepsilon > 0$ مفروض، به ازای تعدادی نامتناهی n داریم $|z_n - L| < \varepsilon/2$. چون (۲) به ازای هر $\varepsilon > 0$ صادق است، به ازای يك $\varepsilon > 0$ مفروض می توانیم N^* را به گونه ای پیدا کنیم که به ازای $n > N^*$ ، $m > N^*$ داشته باشیم $|z_m - z_n| < \varepsilon/2$. $n > N^*$ ، $m > N^*$ را انتخاب می کنیم به طوری که $|z_n - L| < \varepsilon/2$ ، و m را عدد صحیحی، بزرگتر از N^* می گیریم. در این صورت بنا به نامساوی مثلثی

$$|z_m - L| = |(z_m - z_n) + (z_n - L)| \leq |z_m - z_n| + |z_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

یعنی، به ازای تمام مقادیر $m > N^*$ داریم $|z_m - L| < \varepsilon$ ؛ و بنا به تعریف این بدان معنی است که دنباله همگراست و حد آن L است. بدینسان قضیه ثابت می شود.

در مورد سری $w_1 + w_2 + \dots$ می توانیم قضیه بالا را برای دنباله مجموعهای جزئی s_n به کار ببریم. در این صورت نامساوی (۲) به صورت زیر درمی آید:

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \quad (m > N, n > N)$$

یا هرگاه قرار دهیم $m = n + p$

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \quad (n > N, p = 1, 2, \dots)$$

حال بنا به تعریف مجموع جزئی

$$s_{n+p} - s_n = w_{n+1} + w_{n+2} + \dots + w_{n+p}$$

و این اثبات قضیه اساسی زیر است:

قضیه ۳ (اصل همگرایی کوشی در مورد سریها)

سری $w_1 + w_2 + \dots$ همگراست اگر و تنها اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض (هرچند کوچک) بتوان N را (که در حالت کلی به ε بستگی دارد) طوری پیدا کرد که

$$|w_{n+1} + w_{n+2} + \dots + w_{n+p}| < \varepsilon \quad n > N \text{ و } p = 1, 2, \dots$$

به عنوان اولین کاربرد این قضیه مهم به اثبات قضیه ای که قبلا بیان کرده ایم (قضیه

۲ بخش قبل) می پردازیم:

قضیه ۴

اگر سری $w_1 + w_2 + \dots$ همگرای مطلق باشد، همگراست.

اثبات. بنا به تعمیم نامساوی مثلثی (۱۱) بخش ۲.۱۲ داریم

$$(۳) \quad |w_{n+1} + \dots + w_{n+p}| \leq |w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \dots + |w_{n+p}|.$$

چون، بنا به فرض، سری $|w_1| + |w_2| + \dots$ همگراست، از قضیه ۳ نتیجه می‌شود که سمت راست (۳) به ازای هر $n > N$ (که N به اندازه کافی بزرگ است) و $p = 1, 2, \dots$ از هر $\varepsilon > 0$ کوچکتر می‌شود. در نتیجه این حکم در مورد سمت چپ (۳) نیز صادق است، و، بنا به همان قضیه، همگرایی سری $w_1 + w_2 + \dots$ ثابت می‌شود. $\blacktriangle$

مسائل بخش ۳.۱۵

آیا دنباله $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ زیر کراندار است؟ همگرا چطور؟ نقاط حدی را بیابید.

$$۱. \quad z_n = (2i)^n \quad ۲. \quad z_n = 1 + i^n \quad ۳. \quad z_n = (-1)^n + i/n$$

$$۴. \quad z_n = e^{in\pi/2} \quad ۵. \quad z_n = i^n \cos n\pi \quad ۶. \quad z_n = i^n \cosh n\pi$$

$$۷. \quad z_n = (1-i)^n \quad ۸. \quad z_n = (1+i)^n/n \quad ۹. \quad z_n = (3+4i)^n/n!$$

$$۱۰. \quad z_n = \pi i + \sin n\pi \quad ۱۱. \quad z_n = (\cos n\pi)/\sqrt{n} \quad ۱۲. \quad z_n = i^n n^2$$

$$۱۳. \quad z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3, z_n = z_{n-3} - z_{n-2} + z_{n-1} (n = 4, 5, \dots)$$

$$۱۴. \quad z_1 = 1/3, z_2 = 1/4, z_n = z_{n-2}/z_{n-1} (n = 3, 4, \dots)$$

$$۱۵. \quad z_1 = 1, z_2 = i, z_n = z_{n-2}z_{n-1} (n = 3, 4, \dots)$$

۲.۱۵ دنباله حقیقی یکنوا. آزمون لایبنیتس در مورد سریهای حقیقی

این بخش شامل دو قضیه درباره سریها و دنباله‌های حقیقی است که مشابه آنها در مورد سریها و دنباله‌های مختلط وجود ندارد. هر دو قضیه از نظر عملی مورد توجه هستند.

دنباله حقیقی $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ را صعودی یکنوا نامند اگر

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$$

به همین ترتیب دنباله را نزولی یکنوا نامند اگر

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$$

دنباله‌ای که صعودی یکنوا یا نزولی یکنوا باشد دنباله یکنوا نامیده می‌شود.

مثلاً دنباله واگرای $۱, ۲, ۳, \dots$ یکنوا و بی کران است. دنباله همگرای $۱/۲, ۲/۳, ۳/۴, \dots$ یکنوا و کراندار است و ثابت خواهیم کرد که این دو خاصیت برای همگرایی کافی است:

قضیه ۱ (همگرایی دنباله حقیقی)

هرگاه يك دنباله حقیقی کراندار و یکنوا باشد، همگراست.

اثبات. فرض کنید $x_1, x_2, \dots$ يك دنباله صعودی یکنوای کراندار است. در این صورت جملات دنباله از عددی مانند B کوچکترند و چون به ازای تمام n ها $x_1 \leq x_n$ این جملات در بازه $B \leq x_n \leq x_1$ که آن را با I_0 نشان می دهیم قرار می گیرند. I_0 را نصف می کنیم یعنی آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کنیم. اگر نیمه راست (به انضمام دو نقطه انتهاییش) جملات دنباله را در بر داشته باشد آن را با I_1 نمایش می دهیم. اگر نیمه راست شامل جملات دنباله نباشد، در این صورت نیمه چپ I_0 (به انضمام دو نقطه انتهاییش) را I_1 می نامیم. این مرحله نخست است.

در مرحله دوم I_1 را نصف می کنیم و یکی از نیمه ها را به روش بالا انتخاب کرده و آن را I_2 می نامیم و کار را به همین شکل دنبال می کنیم (شکل ۳۲۱).

بدین ترتیب بازه های کوچک و کوچکتر $I_0, I_1, I_2, \dots$ را که خواص زیر را دارند به دست می آوریم. به ازای $n > m$ هر I_m در بر گیرنده تمام I_n ها است. هیچ جمله دنباله در سمت راست I_m قرار ندارد و چون دنباله صعودی یکنواست، تمام x_n هایی که n آنها از عددی مانند N بزرگتر است در I_m قرار می گیرند؛ البته، در حالت کلی N به m بستگی دارد. وقتی m به سمت بینهایت میل می کند طول I_m به سمت صفر میل می کند. از این رو دقیقاً يك عدد، مساند L ، وجود دارد که در همه این بازه ها قرار می گیرند و حال به سادگی می توان ثابت کرد که دنباله همگراست و حد آن L است.

در واقع به ازای يك $\epsilon > 0$ مفروض، m را طوری انتخاب می کنیم که طول I_m از ϵ کوچکتر باشد. در این صورت L و تمام x_n های با $n > N(m)$ در I_m قرار می گیرند و بنابراین به ازای همه این n ها داریم $|x_n - L| < \epsilon$. بدین ترتیب اثبات

۱. این حکم بدیهی به نظر می رسد اما در واقع چنین نیست؛ آن را می توان اصلی اذستگاه اعداد حقیقی به صورت زیر در نظر گرفت. فرض کنید $J_1, J_2, \dots$ بازه های بسته ای باشند که هر J_m شامل تمام J_n ها با $n > m$ باشد، و وقتی که m به سمت بینهایت میل می کنند اندازه های J_m به سمت صفر میل کنند، در این صورت دقیقاً يك عدد حقیقی یافت می شود که در تمام آن بازه ها وجود دارد. این اصل را به یاد ریاضیدان آلمانی گئورگ کانتور Georg Cantor (۱۸۴۵-۱۹۱۸)، واضع نظریه گره، ریچارد دکیند Richard Dedekind (۱۸۳۱-۱۹۱۶) اصل کانتور-دکیند می نامند. برای توضیح بیشتر مرجع [A۲] ضمیمه ۱ را ببینید. (بازه I را بسته نامند هرگاه دوسرش نقاطی متعلق به I محسوب شوند. آن را باز می نامند در صورتی که دوسرش نقاطی متعلق به I نباشند.)



شکل ۳۲۱. اثبات قضیه ۱

قضیه در مورد دنباله صعودی تمام می‌شود. در مورد دنباله نزولی اثبات به همین نحو انجام می‌شود جز آنکه هنگام ساختن بازه‌ها در موارد لزوم جای کلمات «چپ» و «راست» باهم عوض می‌شود.

حال به اثبات قضیه دیگر که از نظر عملی مفید است می‌پردازیم. این قضیه درباره سری حقیقی است که علامت جملاتش يك در میان تغییر می‌کند و از نظر قدر مطلق نزولی است. این قضیه شرایط کافی همگرایی را بیان می‌کند و بر آوردی از باقیمانده به دست می‌دهد.

قضیه ۲ (آزمون لایبنتس در مورد سریهای حقیقی)

فرض کنید $u_1, u_2, \dots$ حقیقی هستند و

$$(الف) \quad u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots, \quad (ب) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} u_m = 0 \quad (۱)$$

در این صورت سری

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

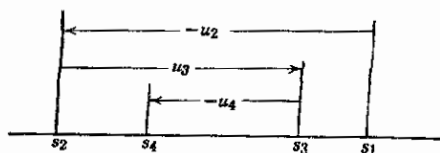
همگراست و برای باقیمانده R_n بعد از جمله n ام برآورد زیر را داریم

$$(۲) \quad |R_n| \leq u_{n+1}$$

اثبات. s_n را n امین مجموع جزئی سری در نظر بگیرید. در این صورت، بنا به (الف)

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 - u_2 \leq s_1,$$

$$s_3 = s_2 + u_3 \geq s_2, \quad s_4 = s_3 - u_4 \leq s_3,$$



شکل ۳۲۲. اثبات قضیه ۲ (آزمون لایبنتس)

بنابراین $s_1 \leq s_3 \leq s_4$. با این روش نتیجه می گیریم (شکل ۳۲۲)

$$(۳) \quad s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \dots \geq s_6 \geq s_4 \geq s_2$$

که نشان می دهد مجموعه های جزئی فرد تشکیل يك دنباله یکنوا می دهند و مجموعه های جزئی زوج نیز همینطور. از این رو، بنا به قضیه ۱، هر دو دنباله همگرا هستند، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = s, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s^*$$

حال چون $s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1}$ (۱ب) ایجاب می کند که

$$s - s^* = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = 0$$

از این رو $s^* = s$ و سری همگراست و مجموع آن s است.

حال بر آورد (۲) درمورد باقیمانده را ثابت می کنیم. چون $s_n \rightarrow s$ ، از (۳) نتیجه می شود که

$$s_{2n+1} \geq s \geq s_{2n} \text{ و همچنین } s_{2n+1} \geq s \geq s_{2n}$$

با تفریق s_{2n} و s_{2n-1} ، به ترتیب، به دست می آوریم

$$s_{2n+1} - s_{2n} \geq s - s_{2n} \geq 0, \quad 0 \geq s - s_{2n-1} \geq s_{2n} - s_{2n-1}$$

اولین عبارت این نامساویها برابر u_{2n+1} و آخرین عبارت آنها برابر $-u_{2n}$ است و عبارتهایی که بین دو علامت قرار دارند باقیمانده های R_{2n} و R_{2n-1} هستند. بنابراین می توان نامساویها را به صورت

$$u_{2n-1} \geq R_{2n} \geq 0, \quad 0 \geq R_{2n-1} \geq -u_{2n}$$

نوشت و می بینیم که این نامساویها (۲) را نتیجه می دهند.

مسائل بخش ۴.۱۵

دنباله های حقیقی زیر کراندارند یا نه؟ همگرا هستند یا نه؟ یکنوا هستند یا نه؟ نقاط حدی هر دنباله را تعیین کنید.

$$۲, -\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{3}, 4, -\frac{1}{4}, \dots \quad ۲.$$

$$۱, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots \quad ۱.$$

$$۱, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots \quad ۴.$$

$$۲, ۲^2, ۲^3, ۲^4, \dots \quad ۳.$$

$$\ln 1, \ln 2, \ln 3, \dots \quad .6 \quad \frac{7}{6}, \frac{11}{6}, \frac{8}{7}, \frac{13}{7}, \frac{9}{8}, \frac{15}{8}, \dots \quad .5$$

$$a, a^2, a^3, \dots \quad .8 \quad 4/1!, 4^2/2!, 4^3/3!, \dots \quad .7$$

$$c, 2^2c^2, 3^2c^3, \dots (|c| < 1) \quad .10 \quad c, 2c^2, 3c^3, \dots (|c| < 1) \quad .9$$

سریهای زیر همگرا هستند یا واگرا؟

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \quad .12 \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots \quad .11$$

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots \quad .14 \quad \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + \dots \quad .13$$

نشان دهید که سریهای زیر همگرا هستند. برای محاسبه مجموع s با خطایی کمتر از ۰.۰۱ در ۵ چند جمله لازم است؟

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \dots \quad .16 \quad s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots \quad .15$$

$$s = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots \quad .18 \quad s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots \quad .17$$

$$s = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots \quad .20 \quad s = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots \quad .19$$

۵.۱۵ آزمونهای همگرایی و واگرایی در مورد سریها

قبل از آنکه يك سری نامتناهی را در محاسبات یا برای مقاصد دیگر مورد استفاده قرار دهیم باید بدانیم که آن سری همگراست یا خیر. در ریاضیات مهندسی در اغلب موارد می‌توان با استفاده از یکی از آزمونهای گوناگونی که برای همگرایی و واگرایی وجود دارد به این سؤال جواب داد. به همین دلیل این آزمونها از نظر عملی بسیار جالب توجه هستند.

يك آزمون ساده همگرایی (قضیه ۳ بخش ۲.۱۵) و آزمون لایبنتس در مورد سری حقیقی را قبلاً شرح دادیم. قضیه زیر معیارهای مخلف همگرایی را نشان می‌دهد.

قضیه ۱ (آزمون مقایسه)

هرگاه سری $w_1 + w_2 + \dots$ داده شده باشد و بتوانیم سری همگرای $b_1 + b_2 + \dots$ را

که جملات آن حقیقی غیرمنفی هستند طوری بیاوریم که

$$(۱) \quad |w_n| \leq b_n \quad n=1, 2, \dots$$

در این صورت سری مفروض همگرای مطلق است.

اثبات. چون سری $b_1 + b_2 + \dots$ همگراست، از قضیه ۳ بخش ۳.۱۵ نتیجه می شود که به ازای هر $\varepsilon > 0$ می توان يك N پیدا کرد به طوری که

$$b_{n+1} + \dots + b_{n+p} < \varepsilon \quad p=1, 2, \dots \text{ و } n > N$$

از این رابطه و (۱) نتیجه می شود که به ازای همان n و p ها

$$|w_{n+1}| + \dots + |w_{n+p}| \leq b_{n+1} + \dots + b_{n+p} < \varepsilon$$

در نتیجه از قضیه ۳ بخش ۳.۱۵ نتیجه می شود که سری $|w_1| + |w_2| + \dots$ همگراست و سری مفروض همگرای مطلق است. ▲

برای اینکه بتوانیم از قضیه ۱ دو آزمون مهم را نتیجه بگیریم ابتدا ثابت می کنیم:

قضیه ۲ (سری هندسی)

سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$$

همگراست و مجموع آن $1/(1-q)$ است وقتی که $|q| < 1$ ، و واگراست وقتی که $|q| \geq 1$.

اثبات. وقتی که $|q| \geq 1$ ، در آن صورت $|q^n| \geq 1$ و واگرایی سری از قضیه ۳ بخش ۲.۱۵ نتیجه می شود. حال فرض کنید $|q| < 1$. n امین مجموع جزئی عبارت است از

$$s_n = 1 + q + \dots + q^n$$

و از این رو

$$q s_n = q + \dots + q^n + q^{n+1}$$

از تفریق دو رابطه به دست می آوریم

$$s_n - q s_n = (1 - q) s_n = 1 - q^{n+1}$$

بقیه جملات دو به دو حذف می شوند. حال $1 - q \neq 0$ زیرا $q \neq 1$ می توان از رابطه فوق s_n را پیدا کرد:

$$(۲) \quad s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}$$

چون $|q| < 1$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ جمله آخر به سمت صفر میل می کند. از این روشی همگرا و مقدار آن $1/(1 - q)$ است. $\blacktriangle$

اکنون از قضایای ۱ و ۲ دو آزمون مهم، آزمون نسبت و آزمون ریشه، را نتیجه بگیریم.

قضیه ۳ (آزمون نسبت)

سری زیر را در نظر بگیرید:

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

فرض کنید که به ازای $n = 1, 2, \dots$ ، $w_n \neq 0$ و دنباله نسبتهای

$$\left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| \quad n = 1, 2, \dots$$

همگرا بوده حدش L باشد. در این صورت سری داده شده

همگرای مطلق است اگر $L < 1$ ، و

واگراست اگر $L > 1$.

(اگر $L = 1$ ، این آزمون نتیجه ای ندارد).

اثبات. بنا به فرض

$$k_n = \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| \quad \text{که در آن} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = L$$

واضح است که k_n و L حقیقی هستند. بنا به تعریف حد، به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض می توان يك N یافت طوری که هر k_n با $n > N$ بین $L - \varepsilon$ و $L + \varepsilon$ قرار گیرد، یعنی

$$(۳) \quad k_n < L + \varepsilon \quad (\text{الف}) \quad k_n > L - \varepsilon \quad (\text{ب}) \quad (n > N).$$

نخست حالت $L < 1$ را بررسی می کنیم. می نویسیم $q = L + \varepsilon$ و ε را $(1 - L)/2$ انتخاب می کنیم. در این صورت $\varepsilon > 0$ و (۳ الف) به صورت زیر در می آید:

$$k_n < q = L + \frac{1 - L}{2} = \frac{1 + L}{2}$$

چون $L < 1$ ، داریم $q < 1$. حال می توان نوشت

$$\begin{aligned} & |w_{N+1}| + |w_{N+2}| + |w_{N+3}| + \dots \\ (۴) \quad & = |w_{N+1}| \left(1 + \left| \frac{w_{N+2}}{w_{N+1}} \right| + \left| \frac{w_{N+3}}{w_{N+2}} \right| \left| \frac{w_{N+2}}{w_{N+1}} \right| + \dots \right) \\ & = |w_{N+1}| (1 + k_{N+1} + k_{N+2} k_{N+1} + k_{N+3} k_{N+2} k_{N+1} + \dots) \end{aligned}$$

و چون $q < 1 < k_n$ ، هر جمله این سری از جمله متناظرش در سری هندسی

$$|w_{N+1}| (1 + q + q^2 + q^3 + \dots)$$

کوچکتر است. بنابه قضیه ۲ این سری همگراست زیرا $q < 1$. از قضیه ۱ نتیجه می شود که سری (۴) همگراست. از این رو سری $|w_1| + |w_2| + \dots$ همگراست و در نتیجه سری $w_1 + w_2 + \dots$ همگرای مطلق است.

حال مورد $L > 1$ را بررسی می کنیم. ε را برابر $(L-1)/2$ انتخاب می کنیم. واضح است که $\varepsilon > 0$ و $\varepsilon > 0$ (۳ ب) را می توان نوشت

$$k_n > L - \varepsilon = \frac{1+L}{2} > 1 \quad (n > N)$$

یعنی،

$$|w_{n+1}| > |w_n| \quad \text{یا} \quad k_n = \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| > 1 \quad (n > N).$$

آخرین نامساوی نشان می دهد جمله های سری صعودی است. از این نامساوی و قضیه ۳ بخش ۲۰۱۵ واگرایی سری نتیجه می شود.

در مورد $L = 1$ سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد در نتیجه این آزمون ناموفق است. برای روشن شدن این موضوع مثالهایی می آوریم. سری همساز (مثال ۱ بخش ۲۰۱۵)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

واگراست و در آن

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n}{n+1} \quad L = 1, \quad n \rightarrow \infty$$

در حالی که سری

$$(۵) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

که همگراست و در آن

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow L = 1, \quad n \rightarrow \infty \text{ وقتی}$$

همگرایی (۵) را می‌توان به ترتیب زیر نشان داد. n امین مجموع جزئی عبارت است از

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

بدیهی است $s_n > 0$ (شکل ۳۲۳)

$$s_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n}$$

این نشان می‌دهد که دنباله مجموعهای جزئی کراندار است. چون جملات سری مثبت‌اند، دنباله صعودی یکنواست و همگرایی از قضیه ۱ بخش قبل نتیجه می‌شود. Δ

آزمون زیسر از آزمون نسبت کلیتر است، اما در اغلب موارد استفاده از آن مشکل‌تر است.

قضیه ۴ (آزمون ریشه)

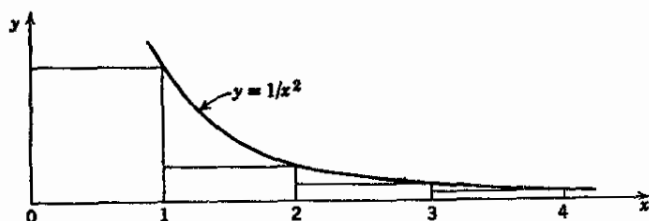
سری زیر را در نظر بگیرید:

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

فرض کنید که دنباله ریشه‌های

$$\sqrt[n]{|w_n|} \quad n = 1, 2, \dots$$

همگراست و حد آن L است. در این صورت سری داده شده همگرای مطلق است، اگر $L < 1$



شکل ۳۲۳. همگرایی سری (۵)

واگراست، اگر $L > 1$.

(اگر $L = 1$ ، این آزمون نتیجه‌ای ندارد).

اثبات. اگر $L < 1$ ، در این صورت، مانند اثبات آزمون نسبت، می‌توان q بی‌کوچکتر از ۱ انتخاب کرده N متناظر با آن را طوری پیدا کرد که

$$k_n^* \equiv \sqrt[n]{|w_n|} < q < 1 \quad n > N$$

به ازای هر $n > N$ از اینجا به دست می‌آوریم

$$|w_n| < q^n < 1 \quad (n > N),$$

و از مقایسه سری $|w_N| + |w_{N+1}| + \dots$ با سری هندسی نتیجه می‌گیریم که این سری همگراست. بنابراین سری $w_1 + w_2 + \dots$ همگرای مطلق است.

اگر $L > 1$ ، در این صورت به ازای همه n هایی که به اندازه کافی بزرگ هستند

$$\sqrt[n]{|w_n|} > 1 \quad \text{پس به ازای چنین مقادیری از } n, |w_n| > 1 \quad \text{و از قضیه ۳ بخش ۲۰۱۵}$$

نتیجه می‌گیریم که سری واگراست.

اگر $L = 1$ ، آزمون بی‌نتیجه است. این حالت را با مطالعه سری همساز توضیح

می‌دهیم:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{1}{e^{(1/n) \ln n}} \rightarrow \frac{1}{e^0} = 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

زیرا $(1/n) \ln n \rightarrow 0$ و سری (۵) که در آن

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{2/n}} = \frac{1}{e^{(2/n) \ln n}} \rightarrow \frac{1}{e^0} = 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

زیرا وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $(2/n) \ln n \rightarrow 0$.

مثال ۱. کاربرد آزمون نسبت و ریشه

سری زیر را بیابید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{2} + 1 + \frac{25}{2^2} + \dots$$

داریم

$$w_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad w_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}, \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

و همگرایی از آزمون نسبت نتیجه می‌شود. همچنین می‌توان آزمون ریشه را به کار برد:

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{n^{2/n}}{2} = \frac{e^{(2/n) \ln n}}{2} \rightarrow \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

و این نتیجه قبلی را تأیید می‌کند.

مثال ۲. کاربرد آزمون نسبت

سری زیر همگراست یا واگرا؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-4i)^n}{n!} = 1 + (3-4i) + \frac{1}{2!}(3-4i)^2 + \dots$$

داریم

$$|w_n| = \frac{|3-4i|^n}{n!} = \frac{\Delta^n}{n!}, \quad |w_{n+1}| = \frac{\Delta^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = \frac{\Delta}{n+1} \rightarrow 0$$

وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، و همگرایی از آزمون نسبت نتیجه می‌شود.

درخاتمه یادآوری می‌کنیم که هم آزمون نسبت و هم آزمون ریشه را می‌توان تعمیم

داد تا به ترتیب حالتی را که دنباله‌هایی که جملات آنها $|w_{n+1}/w_n|$ و $\sqrt[n]{|w_n|}$ که همگرا نیستند را نیز دربر گیرد.

قضیه ۵ (آزمون نسبت)

سری

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید $w_n \neq 0$ وقتی که $n = 1, 2, \dots$. اگر به ازای هر n که بزرگتر از عددی مانند N است داشته باشیم

$$(۶) \quad \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| \leq q,$$

که در آن q عدد مشخصی کوچکتر از ۱ است، در این صورت سری داده شده همگرای مطلق است. اگر

$$(۷) \quad \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| \geq 1 \quad \text{به ازای هر } n > N$$

سری واگراست.

اثبات. در قسمت نخست اثبات قضیه ۳ همگرایی را از این که عددی مانند $q < 1$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $n > N$ (۶) صادق است نتیجه گرفتیم. در مورد قضیه فعلی نیز بنا به همان استدلال همگرایی را نتیجه می گیریم. حکم آخر قضیه از این واقعیت که بنابه (۷) داریم $|w_{n+1}| \geq |w_n|$ و از قضیه ۳ بخش ۲.۱۵ نتیجه می شود.

مثال ۳. کاربرد قضیه ۵، ناموفق بودن قضیه ۳

در سری

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} + \dots$$

جملات فرد و جملات زوج هر کدام يك سری هندسی با قدر نسبت $1/8$ تشکیل می دهند. از قضیه ۵ همگرایی را نتیجه می گیریم زیرا نسبت جملات متوالی عبارتند از

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$$

می بینیم که دنباله این نسبتها همگرا نیست. از این رو قضیه ۳ را نمی توان به کاربرد و این مثال نشان می دهد که قضیه ۳ کلیتر است.

▲

قضیه ۶ (آزمون ریشه)

سری زیر را در نظر بگیرید:

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

اگر به ازای هر n که از عددی مانند N بزرگتر است باشیم

$$(۸) \quad \sqrt[n]{|w_n|} \leq q,$$

که در آن q عدد مشخصی کوچکتر از ۱ است، در این صورت سری داده شده همگرای مطلق است. اگر به ازای تعدادی نامتناهی n داشته باشیم

$$(۹) \quad \sqrt[n]{|w_n|} \geq 1$$

در این صورت سری واگراست.

اثبات. اگر (۸) صادق باشد، آنگاه

$$|w_n| \leq q^n < 1 \quad (n > N)$$

و از مقایسه با سری هندسی نتیجه می شود که سری $|w_N| + |w_{N+1}| + \dots$ همگراست. از این رو سری $w_1 + w_2 + \dots$ همگرای مطلق است. اگر (۹) صادق باشد، در این صورت به ازای تعدادی نامتناهی n ، $|w_n| \geq 1$ ، و بنا به قضیه ۳ بخش ۲.۱۵ سری واگراست. ▲

به ترتیب در دو قضیه اخیر برای همگرایی لازم است که $|w_{n+1}/w_n|$ و $\sqrt[n]{|w_n|}$ نهایتاً کوچکتر یا مساوی عدد معین $q < 1$ باشند. به هیچ وجه برای همگرایی کافی نیست که به ازای n به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم

$$\sqrt[n]{|w_n|} < 1 \quad \text{یا} \quad \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| < 1$$

مثلاً، به ازای n به اندازه کافی بزرگ در مورد سری همسان بخش ۲.۱۵ داریم

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1 \quad \text{و} \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} < 1$$

اما سری واگراست.

مسائل بخش ۵.۱۵

سریهای زیر همگرا هستند یا واگرا؟

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \quad .1$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots \quad .2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \times 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \times 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \times 4}} + \dots \quad .3$$

$$1 + 10i + \frac{(10i)^2}{2!} + \frac{(10i)^3}{3!} + \dots \quad .4$$

$$1 + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{2^2} + \frac{i^3}{2^3} + \dots \quad .5$$

$$1 + i + i^2 + i^3 + \dots \quad .6$$

سریهای زیر همگرا هستند یا واگرا؟

$$.۷ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad .۸ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} \quad .۹ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10+5i)^n}{n!}$$

$$.۱۰ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+i)^{2n}}{(2n)!} \quad .۱۱ \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{i}{2}\right)^n \quad .۱۲ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(4+3i)^n}{6}\right)$$

$$.۱۳ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3-4i}{2}\right)^n \quad .۱۴ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (10i)^{2n}}{(2n)!} \quad .۱۵ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n n}$$

$$.۱۶ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n} \quad .۱۷ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad .۱۸ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

۱۹. معین کنید که برای محاسبه مجموع s سری هندسی $1+q+q^2+\dots$ با خطایی کمتر از ۰٫۰۰۱، وقتی که $q=۰٫۲۵$ ، $q=۰٫۰۵$ ، $q=۰٫۰۹$ ، چند جمله لازم است.

۲۰. اگر $1 > q \geq |w_{n+1}/w_n|$ و در نتیجه بنا به آزمون نسبت (قضیه ۵) سری $R_n = w_{n+1} + w_{n+2} + \dots$ همگرا باشد، نشان دهید که باقیمانده $\dots + w_{n+2} + w_{n+1}$ در $|R_n| \leq |w_{n+1}|/(1-q)$ صدق می کند. (داهنمایی. از این واقعیت استفاده کنید که آزمون نسبت مقایسه ای بین سری $w_1 + w_2 + \dots$ و سری هندسی است.) با استفاده از این نتیجه تعداد جمله هایی را که برای محاسبه مجموع s سری مسئله ۱۶ با خطایی نه بیش از ۰٫۰۵ ره کفایت می کنند به دست آورید و s را با چنین دقتی محاسبه کنید.

۱۵.۶ اعمالی که روی سریها انجام می شود

حال اعمال ساده ای را که درکار با سریها معمول است بررسی می کنیم.

مطلب را با جمع سریها شروع می کنیم و نشان می دهیم که دوسری همگرا را می توان جمله به جمله با هم جمع کرد.

قضیه ۱ (جمع و تفریق جمله به جمله)

اگر دو سری $w_1 + w_2 + \dots$ و $z_1 + z_2 + \dots$ همگرا بوده و مجموع آنها به ترتیب s و s^* باشند، دراین صورت سریهای

$$(۱) \quad \sum_{n=1}^{\infty} k w_n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (w_n - z_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (w_n + z_n)$$

که k در آنها يك ثابت است همگرا هستند و مجموع آنها به ترتیب $s + s^*$ ، $s - s^*$ و ks است.

اثبات. مجموعه‌های جزئی دوسری داده شده عبارتند از

$$s_n = w_1 + \dots + w_n, \quad s_n^* = z_1 + \dots + z_n,$$

و بنا به تعریف همگرایی سری داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^* = s^*$$

حال n امین مجموع جزئی سری اول (۱) عبارت است از

$$S_n = s_n + s_n^* = (w_1 + z_1) + \dots + (w_n + z_n)$$

از این رابطه به دست می آوریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + s_n^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^* = s + s^*.$$

در نتیجه این سری همگراست و مجموع آن $s + s^*$ است. حکمهای دیگر را می توان با استدلالی مشابه ثابت کرد. ▲

عمل بعدی که باید بررسی شود وارد کردن پرانتز در يك سری است. این عمل را **سروه بندی** نامند.

مثلا، با گروه بندی جملات سری $w_1 + w_2 + w_3 + \dots$ می توان سری

$$(w_1 + w_2) + (w_3 + w_4) + \dots$$

را به دست آورد که جملاتش به صورت $W_n = w_{2n-1} + w_{2n}$ ، که در آن $n = 1, 2, \dots$ هستند.

البته در مورد سری متناهی (یعنی سری ای که فقط تعدادی متناهی جمله دارد) می توان پرانتز را در سری وارد کرد. بدون آنکه مجموع سری تغییر کند ثابت خواهیم کرد که در مورد سری نامتناهی همگرا هم می توان این کار را کرد. باید توجه کرد که در يك سری واگرا، گروه بندی ممکن است ایجاد همگرایی کند. به عنوان مثال، با گروه بندی سری واگرای

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

(ر. ک. مثال ۱ بخش ۲۰۱۵) سری همگرای

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots$$

را به دست می آوریم که مجموعش صفر است.

قضیه ۲ (سروه بندی)

اگر يك سری همگرا باشد، در این صورت وارد کردن پرانتز منجر به پیدایش سری جدیدی می شود که همگراست و مجموعش همان مجموع سری اولی است.

اثبات. بدیهی است که مجموعهای جزئی سری جدید با حذف مجموعهای جزئی مشخصی از مجموعهای جزئی سری داده شده به دست می آید. مثلاً مجموعهای جزئی سری

$$(w_1 + w_2 + w_3) + (w_4 + w_5 + w_6) + \dots$$

عبارتند از مجموعهای جزئی $s_3, s_6, s_9, \dots$ از سری $w_1 + w_2 + \dots$. حال اگر مجموعهای جزئی s_i سری داده شده دنباله همگرایی تشکیل دهند که حدش s باشد، از تعریف همگرایی دنباله نتیجه می شود که دنباله جدید که از حذف بعضی جمله های دنباله قبلی به دست می آید نیز همگراست و حدش s است. ▲

مثال ۱. گروه بندی

آزمون لایبنیتس (ر. ک. بخش ۴.۱۵). نشان می دهیم که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

همگراست. مجموع این سری را s فرض می کنیم. در این صورت بنا به قضیه ۲

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

(۲)

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \right) = s$$

و به همین ترتیب

$$\frac{1 \times 2 + 3 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{5 \times 6 + 7 \times 8}{5 \times 6 \times 7 \times 8} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots$$

(۳)

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{4m} \right) = s. \quad \blacktriangle$$

آخرین عملی که باید در این بخش بررسی شود تغییر ترتیب جملات سری است. واضح است که اگر یک سری متناهی باشد می توان ترتیب جملاتش را عوض کرد بدون آنکه مجموعش تغییر کند. همچنین می توان ترتیب تعداد متناهی از جملات سری نامتناهی مفروض را عوض کرد: اگر سری داده شده واگرا باشد، سری جدید نیز واگرا خواهد بود، و اگر سری مفروض همگرا باشد، سری جدید نیز همگرا بوده همان مجموع را خواهد داشت. این نتیجه از تعاریف همگرایی و واگرایی حاصل می شود.

حال ممکن است سؤال شود که اگر «ترتیب تعدادی نامتناهی از جملات سری را عوض کنیم» چه اتفاقی می‌افتد. البته ابتدا باید روشن شود که چگونه می‌توان ترتیب تعدادی نامتناهی از جملات سری را عوض کرد. این عمل را می‌توان به ترتیب زیر انجام داد. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n^* = w_1^* + w_2^* + \dots$$

را بازآرایی از سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + \dots$$

نامند هر گاه تناظری يك به يك بین شاخصهای n و m وجود داشته باشد به طوری که در مورد شاخصهای متناظر داشته باشیم $w_n^* = w_m$. مثلاً، سری

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \dots$$

بازآرایی از سری همساز زیر است:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

مثال زیر روشن می‌کند که می‌توان با بازآرایی يك سری همگرا، سری همگرایی دیگری به دست آورد که مجموعش با سری اصلی متفاوت باشد.

مثال ۲. بازآرایی که مجموع را تغییر می‌دهد

سری همگرایی

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

را بدین ترتیب باز می‌آرایم که اول دو جمله مثبت، سپس يك جمله منفی را می‌نویسیم، دوباره دو مثبت و يك منفی را به ترتیب می‌نویسیم و به همین نحو ادامه می‌دهیم. در نتیجه به بازآرایش زیر می‌رسیم:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \dots$$

می‌توان نشان داد که این سری همگراست (اثبات در [A۹]، صفحه ۱۲۵۵، د.ک. ضمیمه ۱)، مجموع این سری را s^* می‌نامیم. می‌خواهیم نشان دهیم که s و s^* متفاوتند. با

قراردادن پرانتزهایی در بازآرایش داریم

$$s^* = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m}\right).$$

از طرف دیگر با ضرب سری (۲) در $1/2$ و جمع جمله به جمله حاصل ضرب با سری (۳) (ر. ک. قضیه ۱) داریم

$$\frac{3s}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{4m} + \frac{1/2}{2m-1} - \frac{1/2}{2m}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m}\right) = s^*.$$

از این رو $s^* = 3s/2$.

یادآوری می‌کنیم سری سربسته در این مثال بررسی شد همگرایی مطلق نیست. اکنون ثابت می‌کنیم که سری همگرایی مطلق را همیشه می‌توان باز آراست بدون آنکه مجموعش تغییر کند.

قضیه ۳ (بازآرایش سری همگرایی مطلق)

اگر یک سری همگرایی مطلق باشد، در این صورت هر بازآرایش آن همگرایی مطلق است و مجموعش با مجموع سری اصلی یکی است.

اثبات. فرض کنید $w_1^* + w_2^* + w_3^* + \dots$ بازآرایی از سری همگرایی مطلق $w_1 + w_2 + w_3 + \dots$ باشد. در این صورت، چون هر w_m^* برابر یک w_n با n مناسب است و هیچ دو m ی بایک n متناظر نمی‌شوند؛ داریم

$$\sum_{m=1}^n |w_m^*| \leq \sum_{k=1}^n |w_k|. \quad \text{به ازای هر } n$$

مجموع درست چپ m امین مجموع جزئی سری $|w_1^*| + |w_2^*| + \dots$ است. چون این مجموعه‌های جزئی غیرمنفی هستند، برابری یا لا نشان می‌دهد که آنها دنباله کراندار را تشکیل می‌دهند. چون $|w_m^*| \geq 0$ ، دنباله صعودی یکنواست، و بنابراین، همگراست (ر. ک. قضیه ۱ بخش ۴.۱۵). از این دو بازآرایش $w_1^* + w_2^* + \dots$ همگرایی مطلق است. مجموع این بازآرایش را s^* و مجموع سری اصلی را s می‌نامیم. نشان می‌دهیم که $s^* = s$.

از تعریف همگرایی و از قضیه ۳ بخش ۳.۱۵ هنگامی که در مورد سری $|w_1| + |w_2| + \dots$ به کار رود نتیجه می‌گیریم که، وقتی يك $\varepsilon > 0$ داده شده است، می‌توان N را به گونه‌ای یافت که به ازای هر $n > N$ و $p = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$(الف) \quad |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{p} \quad (ب) \quad |w_{n+1}| + \dots + |w_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{p} \quad (۴)$$

در اینجا s_n عبارت است از n امین مجموع جزئی سری اصلی. حال به ازای m ی که به اندازه کافی بزرگ باشد، s_m^* مجموع جزئی m ام باز آرایش شامل تمام جملات $w_1, \dots, w_n$ ($n > N$) و مشخص است) و شاید هم چند جمله دیگر w_r ($r > n$) از سری اصلی است. از این رو s_m^* به صورت

$$(۵) \quad s_m^* = s_n + A_{mn}$$

خواهد بود که در آن A_{mn} مجموع جملات اضافی است. فرض کنید $n + p$ بزرگترین شاخص زیرجملات A_{mn} باشد. در این صورت بنا به (۴ ب)، چون $n > N$ داریم

$$|A_{mn}| \leq |w_{n+1}| + \dots + |w_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{p}$$

از این رابطه و (۵) نتیجه می‌شود که

$$|s_n^* - s_n| = |A_{mn}| < \frac{\varepsilon}{p}$$

با استفاده از (۴ الف) و نامساوی مثلثی، به ازای هر m ی که به اندازه کافی بزرگ باشد، به دست می‌آوریم:

$$|s_m^* - s| = |(s_m^* - s_n) + (s_n - s)| \leq |s_m^* - s_n| + |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{p} + \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$$

از این رو دنباله $s_1^*, s_2^*, \dots$ به s همگراست و بنابراین $s^* = s$. ▲

سری توانی، سری تیلور، سری لوران

سری توانی (بخش ۱۰۱۶) مهمترین سری در آنالیز مختلط است. دلیل این اهمیت آن است که هر سری توانی نمایش دهنده يك تابع تحلیلی (قضیه ۵، بخش ۲۰۱۶) است و بالعکس هر تابع تحلیلی يك نمایش سری توانی به نام سری تیلور دارد (بخشهای ۳۰۱۶-۶۰۱۶). این سری تیلور مشابه مختلط سری تیلور در حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی است. در واقع هر گاه در سری تیلور حقیقی متغیری مختلط را جایگزین متغیر حقیقی کنیم می توانیم توابع حقیقی را به حوزه توابع مختلط «توسعه» یا «امتداد» دهیم. قسمت آخر این فصل به نمایش توابع تحلیلی با سری لوران اختصاص دارد. سری لوران مشتمل بر توانهای صحیح مثبت و منفی متغیر مستقل است. چنانچه در فصل بعد خواهیم دید این سری برای محاسبه انتگرالهای حقیقی و مختلط نیز مفید است.

پیشنیاز این فصل: فصلهای ۱۲، ۱۴، ۱۵.

بخشهایی که در دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: ۶۰۱۶، ۸۰۱۶.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت F.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۰۱۶ سری توانی

در بخش ۲۰۱۵ در مورد سری با جمله‌های ثابت تعاریفی داشتیم. هر گاه جمله‌های يك سری متغیر باشند، یعنی تابع متغیری مانند z باشند، وقتی که z مقدار مشخصی به خود می‌گیرد، جملات سری نیز مقادیر معینی احراز می‌کنند. و بنا بر این تمام تعاریف قبلی در این حالت صادقند. آشکار است که در مورد اینگونه سریها که جملاتشان توابعی از z هستند مجموعه‌ای

جزئی، باقیمانده‌ها، و مجموع توابعی از z خواهند بود. معمولاً چنین سری‌ای به‌ازای بعضی مقادیر z ، مثلاً تمام z های درون یک ناحیه، همگرا و به‌ازای دیگر مقادیر z واگراست. در آنالیز مختلط سری‌توانی مهمترین سری باجمله‌های متغیر است. یک سری توانی^۱ برحسب توانهای $z - a$ یک سری نامتناهی به‌صورت

$$(۱) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

است که در آن z متغیر است، $c_0, c_1, \dots$ ثابت‌هایی هستند که ضریب نامیده می‌شوند و a ثابتی است که مرکز سری نامیده می‌شود.

هرگاه $a = 0$ ، حالت خاص سری توانی برحسب توانهای z به‌دست می‌آید:

$$(۲) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

همگرایی یک سری توانی را به‌طریقی بسیار ساده می‌توان تشخیص داد. مطلب را با سه مثال نمونه‌وار شروع می‌کنیم.

مثال ۱. همگرایی در یک قرص. سری هندسی

سری هندسی

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = 1 + z + z^2 + \dots$$

به‌طور مطلق همگراست هرگاه $|z| < 1$ و واگراست وقتی که $|z| \geq 1$ (ر. ک. قضیه ۲، بخش ۱۵-۵).

مثال ۲. همگرایی در سراسر صفحه متناهی

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

به‌ازای هر z (متناهی) به‌طور مطلق واگراست و این از آزمون نسبت نتیجه می‌شود. در واقع به‌ازای هر z مشخص،

۱. لازم به‌تأکید است که اصطلاح «سری توانی» وقتی به‌تنهایی مورد استفاده قرار گیرد معمولاً به‌سری‌هایی که به‌شکل (۱) هستند اطلاق می‌شود که باید توجه داشت که (۱) شامل حالت خاص (۲) نیز هست، اما سری‌هایی با توانهای منفی z نظیر $\dots + c_2 z^{-2} + c_1 z^{-1}$ ، یا سری‌هایی را که شامل توانهای کسری z هستند شامل نمی‌شود.

$$n \rightarrow \infty \text{ وقتی که } \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0$$

مثال ۳. همگرایی فقط در مرکز

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \dots$$

فقط در مرکز $z=0$ همگراست اما به ازای هر $z \neq 0$ واگراست. در واقع، این نتیجه از آزمون نسبت به دست می آید زیرا

$$\triangle n \rightarrow \infty \text{ وقتی که } \left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = (n+1)|z| \rightarrow \infty \text{ (و مشخص)} (z \neq 0)$$

وقتی $z=a$ ، سری توانی (۱) همگراست زیرا در آن صورت $z-a=0$ و سری به نك جمله c تقلیل می یابد. مثال ۳ روشن می کند که در برخی از حالات ممکن است این تنها مقداری از z باشد که به ازای آن سری همگراست. هر چند، اگر سری (۱) به ازای $z_0 \neq a$ همگرا باشد در آن صورت به ازای هر z هم که فاصله اش از مرکز کمتر از z_0 باشد همگراست. در واقع قضیه زیر صادق است.

قضیه ۱. همگرایی سری توانی

اگر سری توانی (۱) در نقطه $z=z_0$ همگرا باشد این سری به ازای هر z که در رابطه $|z-a| < |z_0-a|$ صدق کند، یعنی به ازای هر z که درون دایره به مرکز a و به شعاع z_0 باشد به طور مطلق همگراست.

اثبات. چون سری (۱) به ازای z_0 همگراست، قضیه ۳ بخش ۲۰۱۵ نشان می دهد که

$$n \rightarrow \infty \text{ وقتی که } c_n(z_0-a)^n \rightarrow 0$$

بنابراین به ازای $z=z_0$ جملات سری (۱) کراندارند، یعنی

$$n=0, 1, \dots \text{ به ازای هر } |c_n(z_0-a)^n| < M$$

از اینجا به دست می آوریم

$$|c_n(z-a)^n| = \left| c_n(z_0-a)^n + \left(\frac{z-a}{z_0-a} \right)^n \right| < M \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n$$

و بنابراین

$$(۳) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-a)^n| < \sum_{n=0}^{\infty} \left| M \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n$$

بنابه فرض $|z-a| < |z_0-a|$ ، نامساوی زیر را داریم:

$$\left| \frac{z-a}{z_0-a} \right| < 1,$$

وسری سمت راست (۳) یک سری هندسی همگراست. از این رو سری سمت چپ (۳) همگراست و سری (۱) وقتی که $|z-a| < |z_0-a|$ به طور مطلق همگراست. ▲

مثالهای ۲ و ۳ نشان می‌دهند که سری توانی ممکن است به ازای تمام مقادیر z یا فقط به ازای $z=a$ همگرا باشد. تا مدتی این دو حالت را کنار می‌گذاریم. حال، اگر سری توانی (۱) را داشته باشیم، می‌توانیم تمام نقاط z واقع در صفحه مختلط را که به ازای آنها سری همگراست در نظر بگیریم. فرض کنید R کوچکترین عدد حقیقی باشد که حداکثر فاصله هر یک از نقاط مذکور از مرکز a را نشان می‌دهد. (مثلاً، در مثال ۱ داریم $R=1$). در این صورت از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که به ازای تمام z های داخل دایره به شعاع R و به مرکز a یعنی به ازای تمام z هایی که در رابطه

$$(۴) \quad |z-a| < R$$

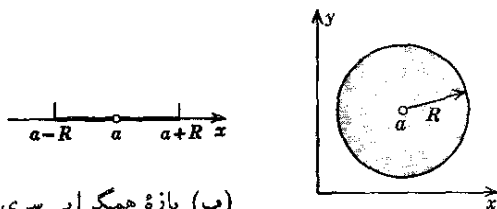
صدق کنند سری همگراست و بنابه تعریف R ، به ازای تمام z هایی که در رابطه

$$|z-a| > R$$

صدق می‌کنند سری واگراست. دایره

$$|z-a| = R$$

را دایره همگرایی و شعاع R آن را شعاع همگرایی (۱) می‌نامند. (ر.ک. شکل ۳۲۴ الف). در نقاطی که روی دایره همگرایی واقع اند ممکن است سری همگرا یا واگرا باشند. مثلاً، در مثال ۱ داریم $R=1$ ، و سری در هر نقطه از دایره همگرایی $|z|=1$ واگراست.



(ب) بازه همگرایی سری

توانی حقیقی

(الف) دایره همگرایی

شکل ۳۲۴. دایره همگرایی و بازه همگرایی

همان طور که از آزمون نسبت نتیجه می شود سری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

به ازای $|z| < 1$ همگرا و به ازای $|z| > 1$ واگراست. از این رو $R = 1$. در $z = 1$ سری همساز و واگرا می شود، و در $z = -1$ می شود

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

که همگراست (ر.ک. مثال ۲، بخش ۲۰۱۵). این نشان می دهد که ممکن است يك سری در بعضی نقاط دایره همگرایی همگرا باشد در حالیکه در سایر نقاط آن واگراست.

بدیهی است که اگر (۱) را يك سری توانی حقیقی در نظر بگیریم یعنی اگر $z = x$ ، مرکز و ضرایب حقیقی هستند، و در این صورت (۲) نمایانگر بازه ای به طول $2R$ است که نقطه میانی آن در a بروی محور x ها قرار دارد. بازه مزبور بازه همگرایی نامیده می شود (شکل ۳۲۲ ب).

اگر سری (۱) به ازای تمام z ها همگرا باشد (مانند مثال ۲)، در این صورت قرار

می دهیم

$$R = \infty \quad \left(\frac{1}{R} = 0 \right);$$

اگر سری فقط در مرکز $z = a$ همگرا باشد (مانند مثال ۳) در این صورت می نویسیم

$$R = 0 \quad \left(\frac{1}{R} = \infty \right);$$

با استفاده از این قراردادها، شعاع همگرایی R سری توانی (۱) را می توان از روی

ضرایب سری به ترتیب زیر به دست آورد.

قضیه ۲ (شعاع همگرایی)

اگر دنباله $\sqrt[n]{|c_n|}$ ، $n = 1, 2, \dots$ همگرا بوده حد آن L باشد، در این صورت شعاع همگرایی R سری توانی (۱) عبارت است از

$$R = \frac{1}{L} \quad (\text{فرمول کوشی - آدامار}) \quad (5 \text{ الف})$$

۱. به نام ریاضیدانان فرانسوی ا. ل. کشی A. L. Cauchy (ر. ک. پانوش بخش ۷.۲) و ژاک آدامار Jacques Hadamard (۱۸۶۵-۱۹۶۴).

که شامل $L = 0$ نیز می شود که در آن $R = \infty$ و سری (۱) برای تمام z ها همگراست. اگر دنباله مزبور همگرا نباشد اما کراندار باشد، در آن صورت

$$R = \frac{1}{l} \quad (5 \text{ ب})$$

که l بزرگترین نقطه حدی دنباله است.

هرگاه دنباله مزبور کراندار نباشد، در آن صورت $R = 0$ ، و سری فقط به ازای $z = a$ همگراست.

اثبات. اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \neq 0,$$

در آن صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} = |z-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |z-a|L$$

چون جملات سری (۱) به شکل $w_n = c_n(z-a)^n$ هستند، آزمون ریشه (بخش ۵.۱۵) نشان می دهد که سری به طور مطلق همگراست اگر

$$|z-a| < \frac{1}{L} = R \quad \text{یا} \quad |z-a|L < 1$$

و واگراست اگر

$$|z-a| > \frac{1}{L} = R \quad \text{یا} \quad |z-a|L > 1$$

اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L = 0,$$

از تعریف حد نتیجه می شود که به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، مثلاً، به ازای $\varepsilon = 1/(2|z_1-a|)$ ، که در آن z_1 يك مقدار مشخص دلخواه است، می توان عدد N را طوری یافت که

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z_1-a|} \quad n > N$$

به ازای هر $n > N$

$$|c_n(z_1-a)^n| < \frac{1}{2^n} \quad \text{یا} \quad |c_n| < \frac{1}{(2|z_1-a|)^n}$$

حال، چون $\sum 2^{-n}$ همگراست، آزمون مقایسه (بخش ۵.۱۵) نشان می دهد که سری (۱)

به ازای $z = z_0$ به طور مطلق همگراست. چون z_0 دلخواه است، نتیجه می گیریم که سری مورد نظر به ازای هر z متناهی همگراست و به این ترتیب اثبات حکم مربوط به (۵ الف) کامل می شود.

اینک حکم مربوط به (۵ ب) را ثابت می کنیم. وجود l از قضیه بولتسانو - وایرشتراس (بخش ۳۰۱۵) نتیجه می شود و چون $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 0$ به وضوح داریم $l > 0$. از تعریف نقطه حدی نتیجه می شود که به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض،

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{|c_n|} < l + \varepsilon, n \text{ نامتناهی}$$

باضرب کردن این رابطه در کمیت مثبت $|z - a|$ ، نامساویهای

$$(۶) \quad |z - a|(l - \varepsilon) < \sqrt[n]{|c_n(z - a)^n|}$$

و

$$(۷) \quad \sqrt[n]{|c_n(z - a)^n|} < |z - a|(l + \varepsilon)$$

را بدست می آوریم. نامساوی (۷) حتی برای n های به اندازه کافی بزرگ، مثلاً، $n > N$ هم صادق است زیرا l بزرگترین نقطه حدی است و بنا بر این، حداکثر تعدادی متناهی از جملات می توانند بزرگتر از عبارت سمت راست باشند. ثابت می کنیم که در مورد

$$(۸) \quad |z - a| < \frac{1}{l}$$

همگرایی سری توانی (۱) از (۷) نتیجه می شود. در واقع هرگاه ε را

$$\varepsilon = \frac{1 - l|z - a|}{2|z - a|}$$

انتخاب کنیم، در این صورت بنا به (۸) داریم $\varepsilon > 0$ ، و نامساوی (۷) به صورت زیر درمی آید:

$$\sqrt[n]{|c_n(z - a)^n|} < \frac{1 + l|z - a|}{2} \quad (n > N).$$

از (۸) نتیجه می گیریم که عبارت سمت راست کمتر از ۱ است و همگرایی آزمون ریشه اثبات می شود (بخش ۵۰۱۵، قضیه ۶). از طرفی، وقتی که

$$|z - a| > \frac{1}{l},$$

با انتخاب

$$\varepsilon = \frac{l|z-a|-1}{2|z-a|}$$

داریم $\varepsilon > 0$ و (۶) به صورت زیر درمی آید:

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > \frac{|z-a|l+1}{2} > 1.$$

از این رو، بنابه آزمون ریشه، سری به ازای آن z ها واگراست. تا اینجا حکم مربوط به (۵) اثبات شده است.

سرانجام هرگاه دنباله $\sqrt[n]{|c_n|}$ کراندار نباشد، در آن صورت، بنابه تعریف، به ازای هر K مفروض داریم

$$\sqrt[n]{|c_n|} > K \quad n \text{ نامتناهی}$$

با انتخاب $K = 1/|z-a|$ ، که در آن $z \neq a$ ، می بینیم که نامساوی به صورت

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1, \quad \text{یا} \quad \sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|z-a|}$$

درمی آید و همگرایی از قضیه ۶ بخش ۵.۱۵ نتیجه می شود و بدین ترتیب اثبات قضیه ۲ کامل می شود. ▲

حال اعمال جمع و ضرب در مورد سریهای توانی را بررسی می کنیم. دوسری توانی را می توان برای هر z ی که به ازای آن هر دوسری همگرا باشند جمله به جمله جمع نمود. این نتیجه از قضیه ۱ بخش ۶.۱۵ گرفته می شود. ضرب جمله به جمله دوسری توانی زیر را در نظر می گیریم

$$(9) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_0 + c_1 z + \dots \quad \text{و} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \dots$$

هرگاه هر جمله از سری اول را در هر جمله سری دوم ضرب کنیم و حاصل ضربها را با هم جمع کرده بر حسب z مرتب کنیم، به دست می آوریم

$$(10) \quad a_0 c_0 + (a_0 c_1 + a_1 c_0)z + (a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0)z^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + \dots + a_n c_0) z^n$$

این سری را حاصل ضرب کشی سریهای (۹) می نامند.

قضیه ۳ (حاصل ضرب کوشی سریهای توانی)

حاصل ضرب کوشی دوسری توانی (۹) به ازای هر z که داخل دایره‌های همگرایی هر دوسری (۹) باشد به طور مطلق همگراست. اگر مجموع سریها به ترتیب $g(z)$ و $h(z)$ باشد مجموع حاصل ضرب کوشی آنها برابر است با

$$(11) \quad s(z) = g(z)h(z)$$

اثبات. جمله عمومی سری حاصل ضرب (۱۰) عبارت است از

$$p_n = (a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + \dots + a_n c_0) z^n$$

حال بنا به تعمیم نامساوی مثلث (۱۱) بخش ۲۰۱۲ به دست می آوریم

$$|p_0| + |p_1| = |a_0 c_0| + |(a_0 c_1 + a_1 c_0)z| \leq (|a_0| + |a_1 z|)(|c_0| + |c_1 z|),$$

$$|p_0| + |p_1| + |p_2| \leq (|a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2|)(|c_0| + |c_1 z| + |c_2 z^2|),$$

و این را می توان با انجام دادن عمل ضرب در سمت راست تحقیق کرد، در حالت کلی داریم

$$|p_0| + |p_1| + \dots + |p_n| \leq (|a_0| + |a_1 z| + \dots + |a_n z^n|)(|c_0| + |c_1 z| + \dots + |c_n z^n|).$$

هرگاه z در داخل دایره‌های همگرایی سریهای (۹) قرار داشته باشد، دنباله عبارتهای سمت راست کراندار است و همینطور است دنباله مجموعهای جزئی سری $|p_0| + |p_1| + \dots$ چون $|p_n| \geq 0$ ، این دنباله صعودی یکنوا نیز هست و بنابراین همگراست. (ر. ک. بخش ۴۰۱۵ قضیه ۱). از این رو سری اخیر همگراست و سری حاصل-ضرب (۱۰) به طور مطلق همگراست.

حال رابطه (۱۱) را ثابت می کنیم. از این واقعیت که هر بازآرایش (۱۰) دقیقاً به ازای همان z هایی که به ازایشان (۱۰) به طور مطلق همگرا بود به طور مطلق همگراست و همان مجموع (۱۰) را دارد. (ر. ک. بخش ۶۰۱۵ قضیه ۳). بازآرایش خاص $p_0^* + p_1^* + \dots$ را در نظر می گیریم که در آن p_n^* برابر است با (شکل ۳۲۵)

$$\begin{array}{ccc} p_0^* & p_1^* & p_2^* \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_0 c_0 & a_0 c_1 z & a_0 c_2 z^2 \\ & \downarrow & \downarrow \\ a_1 c_0 z & a_1 c_1 z^2 & a_1 c_2 z^3 \\ & \downarrow & \downarrow \\ a_2 c_0 z^2 & a_2 c_1 z^3 & a_2 c_2 z^4 \end{array}$$

شکل ۳۲۵. اثبات قضیه ۳

$$(a_n c_0 + a_0 c_n) z^n + (a_n c_1 + a_1 c_n) z^{n+1} + \dots + (a_n c_{n-1} + a_{n-1} c_n) z^{2n-1} + a_n c_n z^{2n}$$

بدیهی است که

$$a_0 c_0 = p_0^*, (a_0 + a_1 z)(c_0 + c_1 z) = p_0^* + p_1^*$$

و در حالت کلی

$$(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n)(c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n) = p_0^* + p_1^* + \dots + p_n^*.$$

وقتی n به سمت بینهایت میل می کند (۱۱) به دست می آید و بدین ترتیب قضیه ۳ ثابت می شود. ▲

مثال ۵. حاصل ضرب کشی

مجموع سری هندسی $1 + z + z^2 + \dots$ وقتی $|z| < 1$ ، برابر $1/(1-z)$ است. (ر. ک. بخش ۵.۱۵) بنابراین از قضیه ۳ به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} z^m = (1+z+z^2+\dots)(1+z+z^2+\dots) \\ &= 1 + 2z + 3z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

مسائل بخش ۱.۱۶

۱. نشان دهید که هرگاه دنباله $|c_{n+1}/c_n|$ ، $n=1, 2, \dots$ همگرا بوده حد آن L باشد، در آن صورت شعاع همگرایی R سری توانی (۱) برابر است با $R=1/L$ وقتی که $L > 0$ و $R=\infty$ وقتی که $L=0$.

۲. نشان دهید که اگر شعاع همگرایی (۲) برابر R (که متناهی فرض می شود) باشد در این صورت شعاع همگرایی $\sum c_n z^{2n}$ برابر است با $\sqrt{R}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{z}{3}\right)^n \quad ۵. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^n} \quad ۴. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (z-2i)^n \quad ۳.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad ۸. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \quad ۷. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} \quad ۶.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n \quad ۱۰. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \quad ۹.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad .13 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n} \quad .12 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n \quad .11$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 z^n \quad .16 \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^n (z-i)^n \quad .15 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad .14$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n z^n \quad .18 \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n} z^n \quad .17$$

۱۹. هرگاه $\sum c_n z^n$ به ازای تمام مقادیر متناهی z همگرا باشد، نشان دهید $\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow 0$ وقتی که $n \rightarrow \infty$. مثال بنویسید.

۲۰. در نقاطی که روی دایره همگرایی قرار دارند سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد. این موضوع را در مورد سری هندسی و سریهای که در مسائل ۸ و ۱۴ مطرح شد به ازای $z=1$ و $z=-1$ تشریح کنید.

۲.۱۶ توابعی که با سری توانی نمایش داده می شوند

در این بخش هدف اصلی ما نشان دادن این مطلب است که سریهای توانی توابع تحلیلی را نمایش می دهند (قضیه ۵، همین بخش). این واقعیت را که، بر عکس، هر تابع تحلیلی را می توان با یک سری توانی (به نام سری تیلور) نمایش داد در بخش بعد ثابت می کنیم. این هردو نشان دهنده اهمیت سری توانی در آنالیز مختلط هستند.

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ یک سری توانی دلخواه باشعاع همگرایی غیر صفر R باشد. آنگاه مجموع این سری تابعی مانند $f(z)$ از z است و می نویسیم

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (|z| < R)$$

پس می گوئیم که $f(z)$ با سری توانی نمایش داده شده و یا به سری توانی بسط داده شده است. مثلا سری هندسی $f(z) = 1/(1-z)$ را در داخل دایره یکه $|z|=1$ نمایش می دهد. (ر. ک. بخش ۵.۱۵ قضیه ۰۲)

قضیه ۱ (پیوستگی)

تابع $f(z)$ که با (۱) معرفی شد به ازای $R > 0$ در $z=0$ پیوسته است.

اثبات. باید نشان دهیم که

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0) = c_0$$

عدد مثبت دلخواه $R < r$ را انتخاب می‌کنیم چون سری موجود در (۱) در قرص $|z| < R$ به طور مطلق همگراست نتیجه می‌شود که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n \quad (0 < r < R)$$

همگراست. فرض کنید مجموع سری K باشد، در این صورت به دست می‌آوریم

$$|f(z) - c_0| = \left| z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} \right| \leq |z| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |z|^{n-1} \leq |z| K \quad (0 < |z| \leq r).$$

اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد به ازای تمام z هایی که در شرط $|z| < \delta$ صدق می‌کنند (δ عدد حقیقی مثبتی است کوچکتر از r و ε/K) داریم $|f(z) - c_0| < \varepsilon$. از تعریف حد نتیجه می‌شود که (۲) برقرار است. ▲

در مرحله بعد مسئلهٔ یکتایی را بررسی کرده نشان می‌دهیم که یک تابع $f(z)$ نمی‌توان با دوسری توانی متفاوت که مرکزشان یکی است نمایش داد. اگر بشود $f(z)$ را به یک سری توانی با مرکز a بسط داد این بسط یکتاست. این قضیه مهم غالباً در آنالیز حقیقی و مختلط به کار می‌رود و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد (با فرض $a = 0$ ، البته بدون از دست دادن عمومیت مسئله).

قضیه ۲ (قضیه همانی سریهای توانی)

سریهای توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید به ازای $|z| < R$ ، که R مثبت است، همگرا بوده به ازای همهٔ مقادیر z ($|z| < R$) مجموعه‌های برابر داشته باشند. در این صورت سریهای مزبور یکسانند، یعنی

$$a_n = b_n \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{به ازای} \quad (۳)$$

اثبات. روش استقرا را به کار می‌بریم: بنا به فرض

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots \quad (|z| < R). \quad (۴)$$

وقتی z به سمت صفر میل می‌کند، بنا به قضیه ۱ داریم $a_0 = b_0$. فرض می‌کنیم که به ازای $n = 0, 1, \dots, m$ داشته باشیم $a_n = b_n$. در این صورت با حذف اولین $m+1$ جمله از هر دو طرف (۴) و تقسیم (۴) بر $z^{m+1} (\neq 0)$ به دست می‌آوریم

$$a_{m+1} z + a_{m+2} z^2 + a_{m+3} z^3 + \dots = b_{m+1} + b_{m+2} z + b_{m+3} z^2 + \dots$$

بنابه قضیه ۱ هر يك از این سریهای توانی تابعی را نمایش می‌دهد که در $z = 0$ پیوسته است. از این رو $a_{n+1} = b_{n+1}$ و اثبات به پایان می‌رسد. ▲

حال مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از سری توانی را بررسی می‌کنیم. با مشتقگیری از سری $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ ، سری زیر به دست می‌آید:

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \dots$$

این سری را سری مشتق سری توانی داده شده می‌گویند.

قضیه ۳ (مشتقگیری جمله به جمله)

شعاع همگرایی سری مشتق يك سری توانی همان شعاع همگرایی سری اصلی است.

اثبات. فرض کنید $nc_n = c_n^*$. در این صورت $\sqrt[n]{|c_n^*|} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|c_n|}$. از اینکه وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ نتیجه می‌شود دنباله‌های $\sqrt[n]{|c_n^*|}$ و $\sqrt[n]{|c_n|}$ یا هر دو همگرایند و حدشان یکی است، یا هر دو واگرا هستند. هرگاه دنباله‌های مزبور واگرا باشند، یا هر دو بی‌کران هستند یا هر دو کراندار، و در صورتی که کراندار باشند، بزرگترین نقطه حدی آنها یکی است. از اینجا و از قضیه ۲ بخش ۱۰۱۶ حکم قضیه فوق نتیجه می‌شود.

مثال ۱

شعاع همگرایی سری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n$$

$R = 1$ است. این نتیجه از مشتقگیری سری هندسی و به کار بردن قضیه ۳ به دست می‌آید.

قضیه ۴ (انتگرالگیری جمله به جمله)

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} = c_0 z + \frac{c_1}{2} z^2 + \frac{c_2}{3} z^3 + \dots$$

که از انتگرالگیری جمله به جمله $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ به دست می‌آید دارای همان شعاع همگرایی سری اصلی است.

اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیه ۳ است.

سریهای توانی توابع تحلیلی را نمایش می‌دهند و سریهای مشتق (که از مشتقگیری

جمله به جمله به دست می‌آید) مشتقهای آن توابع را نمایش می‌دهند. به طور دقیقتر:

قضیه ۵ (توابع تحلیلی. مشتقات توابع تحلیلی)

هر سری توانی با شعاع همگرایی غیر صفر R در داخل دایره همگرایی خود تابعی تحلیلی را نمایش می‌دهد. مشتقات این تابع با مشتقگیری جمله به جمله از سری اصلی به دست می‌آید، بنا بر این تمام سریهایی که بدین ترتیب به دست می‌آیند دارای همان شعاع همگرایی سری اصلی هستند.

اثبات. نخست ثابت می‌کنیم که به ازای هر عدد صحیح $n \geq 2$,

$$(۶ الف) \quad \frac{b^n - a^n}{b - a} - na^{n-1} = (b - a)A_n$$

که در آن

$$(۶ ب) \quad A_n = b^{n-2} + 2ab^{n-3} + 3a^2b^{n-4} + \dots + (n-1)a^{n-2}.$$

روش استقرار را به کار می‌بریم. یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که (۶) به ازای $n=2$ صادق است. به فرض اینکه (۶) به ازای $n=k$ صادق است نشان می‌دهیم که به ازای $n=k+1$ نیز صادق است. داریم

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} = \frac{b^{k+1} - ba^k + ba^k - a^{k+1}}{b - a} = b \frac{b^k - a^k}{b - a} + a^k.$$

بناباه فرض استقرار، سمت راست رابطه برابر است با

$$b[(b - a)A_k + ka^{k-1}] + a^k.$$

محاسبه نشان می‌دهد که این رابطه برابر است با

$$(b - a)\{bA_k + ka^{k-1}\} + ka^k + a^k.$$

با فرض $n=k$ از (۶ ب) نتیجه می‌گیریم که عبارت داخل آکولاد برابر است با

$$b^{k-1} + 2ab^{k-2} + \dots + (k-1)ba^{k-2} + ka^{k-1} = A_{k+1}.$$

از این رو نتیجه عبارت است از

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} = (b - a)A_{k+1} + (k+1)a^k,$$

که همان (۶) است با $n=k+1$. بنا بر این (۶) به ازای هر $n \geq 2$ ثابت می‌شود. برای اثبات حکمهای قضیه ۵ قرار می‌دهیم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

بافرض آنکه شعاع همگرایی R صفر نباشد، و ثابت می کنیم که به ازای هر z مشخص که $|z| < R$ و $\Delta z \rightarrow 0$ خارج قسمت تفاضلی $[f(z+\Delta z)-f(z)]/\Delta z$ به سمت تابعی که با سری مشتق (Δ) نمایش داده شده است و آن را با $f_1(z)$ نشان می دهیم میل می کند. نخست باجمع جمله به جمله داریم

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}-nz^{n-1} \right]$$

بافرض $a=z$ ، $b=z+\Delta z$ و $b-a=\Delta z$ از (۶) نتیجه می گیریم که سری سمت راست را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta z \sum_{n=1}^{\infty} c_n [(z+\Delta z)^{n-1}+z(z+\Delta z)^{n-2}+\dots+(n-1)z^{n-2}],$$

و به ازای $|z| \leq R_0$ و $|z+\Delta z| \leq R_0$ ، $R_0 < R$ ، قدر مطلق این عبارت نمی تواند بیشتر از

$$(\gamma) \quad |\Delta z| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n(n-1) R_0^{n-2}$$

باشد، در این رابطه $n-1$ بزرگترین ضریب در بین ضرایب $1, 2, \dots, n-1$ است و n تعداد جملات است. سری (۷) با سری مشتق دوم سری مورد بحث که در R_0 محاسبه شده است ارتباط نزدیکی دارد. در واقع سری مشتق دارای ضرایب $|c_n|$ به جای $|c_n|$ در (۷) است و بنابه قضیه ۳ این بخش و قضیه ۱ بخش قبل در $(R_0 < R)$ به طور مطلق همگراست. این امر ایجاب می کند که سری موجود (۷) در R_0 همگرا باشد، مقدار سری را $K(R_0)$ می گیریم. در این صورت می توان نتیجه را به صورت زیر نوشت:

$$\left| \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f_1(z) \right| \leq |\Delta z| K(R_0)$$

باقرار دادن $\Delta z \rightarrow 0$ و با توجه به اینکه $R_0 < R$ ، دلخواه است، نتیجه می گیریم که $f(z)$ در هر نقطه ای واقع در داخل دایره همگرایی تحلیلی است و مشتق آن با سری مشتق نشان داده می شود. همین حکم در مورد مشتقات بالاتر به روش استقرا ثابت می شود. ▲

از قضیه ۵ نتیجه می گیریم که $f^{(m)}(z)$ مشتق m ام تابع $f(z)$ که با (۱) نمایش داده شده، عبارت است از

$$(۸) \quad f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \dots (n-m+1) c_n z^{n-m} \quad (|z| < R).$$

در بخش بعد خواهیم دید که هر تابع تحلیلی را می توان با سری توانی نمایش داد.

مسائل بخش ۲۰۱۶

۱. هرگاه در $(1) f(z)$ زوج باشد، نشان دهید که به ازای همه n های فرد داریم $C_n = 0$ (از قضیه ۲ استفاده کنید).

۲. هرگاه در $(1) f(z)$ فرد باشد، نشان دهید که به ازای همه n های زوج داریم $C_n = 0$ (مثال بنویسید).

۳. با به کار بردن قضیه ۲ در مورد $(1+z)^p(1+z)^q = (1+z)^{p+q}$ (با q و p اعداد صحیح مثبت هستند) نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^r \binom{p}{n} \binom{q}{r-n} = \binom{p+q}{r}$$

۴. صحت قضایای ۳ و ۴ را در مورد سری هندسی و سریهای که در مثال ۲ بخش ۱۰۱۶ آمده اند تحقیق کنید.

با به کار بردن قضایای ۳ و ۴ را در مورد سری هندسی، شعاع همگرایی سریهای زیر را پیدا کنید

$$۵. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} (z-i)^n \quad ۶. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n} \quad ۷. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} (z+2i)^n$$

$$۸. \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad ۹. \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{n} \right]^{-1} z^{n+k} \quad ۱۰. \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{n} \right]^{-1} \left(\frac{z}{3}\right)^n$$

۳۰۱۶ سری تیلور

در حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی سری معروف تیلور ابزار مؤثری است. حال خواهیم دید که در آنالیز مختلط بسط تیلوری وجود دارد که تعمیمی از سری تیلور حقیقی است و اهمیت آن حتی بیشتر است.

تابعی مانند $f(z)$ را در نظر بگیرید که در یک همسایگی نقطه $z=a$ تحلیلی است. فرض کنید C دایره‌ای باشد که در این همسایگی قرار دارد و مرکزش a است. در این صورت می‌توانیم فرمول انتگرال کوشی (۱)، بخش ۵۰۱۴، را به کار ببریم؛ و با قرار دادن z^* به جای z و z به دست آوریم

$$(۱) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^*$$

در اینجا z نقطه مشخص دلخواهی است در داخل C ، و z^* متغیر مختلط انتگرالگیری است (د. ک. شکل ۳۲۶). حال می‌توانیم در رابطه (۱) عبارت $1/(z^* - z)$ را بر حسب

توانهای $z-a$ بسط دهیم. نخست داریم

$$(۲) \quad \frac{1}{z^*-z} = \frac{1}{z^*-a-(z-a)} = \frac{1}{(z^*-a)\left(1-\frac{z-a}{z^*-a}\right)}.$$

برای استفاده‌های بعدی یادآوری می‌کنیم که چون z^* روی C قرار دارد، درحالی که z در داخل C است، داریم

$$(۳) \quad \left| \frac{z-a}{z^*-a} \right| < ۱.$$

با استفاده از تصاعد هندسی

$$۱+q+q^2+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq ۱)$$

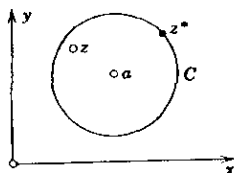
رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+\dots+q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

با قرار دادن $q = (z-a)/(z^*-a)$ می‌یابیم

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-[(z-a)/(z^*-a)]} &= 1 + \frac{z-a}{z^*-a} + \left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^2 + \dots \\ &\quad + \left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^n + \frac{[(z-a)/(z^*-a)]^{n+1}}{(z^*-z)/(z^*-a)}. \end{aligned}$$

این مقدار را در (۲) قرار می‌دهیم و سپس (۲) را در (۱) می‌گذاریم. از آنجا که a و z ثابت هستند می‌توانیم توانهای $z-a$ را از زیر علامت انتگرال خارج کنیم و (۱) را به صورت



شکل ۳۲۶. نمایش (۱)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{z^* - a} dz^* + \frac{z-a}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^2} dz^* + \dots$$

$$+ \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^{n+1}} dz^* + R_n(z)$$

(۴) درآوریم که جمله آخر آن برابر است با

$$(۵) \quad R_n(z) = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^{n+1}(z^* - z)} dz^*.$$

با استفاده از (۱)، بخش ۶.۱۴، می‌توانیم این بسط را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots$$

$$+ \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(z).$$

این نمایش را فرمول تیلور^۱ می‌نامند. $R_n(z)$ باقیمانده نام دارد. چون تابع تحلیلی $f(z)$ مشتق از تمام مراتب دارد می‌توان n را در (۶) به دلخواه بزرگ گرفت. اگر n به سمت بینهایت میل کند از (۶) سری توانی

$$(۷) \quad f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (z-a)^m.$$

به دست می‌آید. این سری را سری تیلوری $f(z)$ با مرکز a می‌نامند. حالت خاصی که در آن $a=0$ ، سری مک لورن^۲ $f(z)$ نامیده می‌شود. بدیهی است سری (۷) همگرا بوده $f(z)$ را نمایش خواهد داد اگر و تنها اگر

$$(۸) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0.$$

برای اثبات (۸) از (۵) استفاده می‌کنیم. چون z^* بر روی C قرار دارد، درحالی که z در داخل C است داریم $|z^* - z| > 0$. چون $f(z)$ در داخل C و روی C تحلیلی است نتیجه می‌شود که قدرمطلق $f(z^*)/(z^* - z)$ کراندار است، مثلاً برای هر z^* روی C داریم

۱. بروک تیلور Brook Taylor (۱۶۸۵ - ۱۷۳۱)، ریاضیدان انگلیسی که فرمول بالا را برای توابع بایک متغیر حقیقی به کار برد.

۲. کالین مک لورن Colin Maclaurin (۱۶۹۸ - ۱۷۴۶)، ریاضیدان اسکاتلندی.

$$\left| \frac{f(z^*)}{z^* - z} \right| < \tilde{M}$$

فرض کنید r شعاع C باشد. در این صورت برای هر z^* که روی C باشد داریم $|z^* - a| = r$ و طول C برابر $2\pi r$ است. به این ترتیب با به کار بردن (۴) بخش ۲.۱۴ در مورد (۵) از این بخش به دست می آوریم

$$\begin{aligned} |R_n| &= \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)} dz^* \right| \\ &< \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi} \tilde{M} \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r = \tilde{M} r \left| \frac{z-a}{r} \right|^{n+1} \end{aligned}$$

اگر n به سمت بینهایت میل کند، از (۳) نتیجه می شود که عبارت طرف راست به سمت صفر میل می کند. بدین ترتیب برای هر z که داخل C باشد که رابطه (۸) ثابت می شود. چون، بنا به قضیه ۲ از بخش قبل، نمایش $f(z)$ به صورت (۷) یکتاست به این معنی که (۷) تنها سری توانی به مرکز a است که تابع مقروض $f(z)$ را نمایش می دهد، می توانیم نتیجه را به صورت زیر جمع بندی کنیم:

قضیه تیلور

فرض کنید $f(z)$ در یک حوزه D تحلیلی باشد و $z=a$ را نقطه ای در D فرض کنید. در این صورت دقیقاً یک سری توانی به مرکز a وجود دارد که $f(z)$ را نمایش می دهد؛ این سری به صورت

$$(9) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

است که در آن

$$b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \quad n=0, 1, \dots;$$

این نمایش در بزرگترین قرص بازی که مرکز آن a است و در D واقع است اعتبار دارد. $R_n(z)$ ها، باقیمانده های (۹)، را می توان به صورت (۵) نمایش داد. ضرایب (۹) در نامساوی

$$(10) \quad |b_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

صدق می کند که در آن M بیشترین مقدار $|f(z)|$ روی دایره $|z-a|=r$ است. رابطه (۱۰) از نامساوی کشی (۴)، بخش ۶.۱۴، نتیجه می شود.

عملاً معنی (۸) آن است که به ازای همه z هایی که (۹) به ازای آنها همگرا باشد n امین مجموع جزئی (۹)، $f(z)$ را با هر دقت دلخواهی تقریب خواهد زد؛ تنها کاری که ما باید بکنیم این است که n را به اندازه کافی بزرگ بگیریم.

با توجه به قضیهٔ تیلور ملاحظه می‌کنیم که شعاع همگرایی (۹) حداقل برابر کوتاهترین فاصلهٔ بین a و کرانهٔ D است. این شعاع می‌تواند بزرگتر هم باشد اما در این صورت سری ممکن است دیگر $f(z)$ را در تمام نقاط D که در داخل دایرهٔ همگرایی قرار دارد نمایش ندهد.

يك خاصیت جالب توابع تحلیلی مختلط این است که دارای مشتق از هر مرتبه‌ای هستند و در اینجا خاصیت جالب دیگری کشف کردیم، که این توابع را همیشه می‌توان به صورت سری توانی (۹) نمایش داد. در حالت کلی توابع حقیقی این خاصیت را ندارند؛ توابعی حقیقی وجود دارند که دارای مشتق از هر مرتبه‌ای هستند اما نمی‌توان آنها را با سری توانی نمایش داد (مثال: $f(x) = \exp(-1/x^2)$ وقتی که $x \neq 0$ و $f(0) = 0$). برای توضیحات بیشتر مرجع [A۲، صفحه ۱۲۸] ضمیمهٔ ۱ را ببینید.)
قضیهٔ زیر ارتباطی بین این بحث و بحث بخش قبل که دربارهٔ سری توانی بود برقرار می‌سازد.

قضیهٔ ۲

هر سری توانی که شعاع همگرایی آن غیر صفر باشد سری تیلور تابعی است که با آن سری توانی نمایش داده می‌شود.

اثبات. فرض کنید سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

دارای شعاع همگرایی غیر صفر R باشد. در این صورت این سری تابعی تحلیلی مساند $f(z)$ را در قرص $|z-a| < R$ نمایش می‌دهد، یعنی

$$f(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots$$

از قضیهٔ ۵، بخش ۲.۱۶، نتیجه می‌شود که

$$f'(z) = b_1 + 2b_2(z-a) + \dots$$

و کلیتر

$$f^{(n)}(z) = n! b_n + (n+1)n \dots 3 \times 2 b_{n+1}(z-a) + \dots ;$$

تمام این سریها در قرص $|z-a| < R$ همگرا هستند و توابع تحلیلی را نمایش می‌دهند. از این رو این توابع در $z=a$ پیوسته‌اند. با قراردادن $z=a$ به دست می‌آوریم

$$f(a) = b_0, f'(a) = b_1, \dots, f^{(n)}(a) = n! b_n, \dots$$

چون این فرمولها همانند فرمولهای قضیه تیلورند، اثبات کامل است. Δ

نقطه‌ای که در آن $f(z)$ خاصیت تحلیلی بودن خود را از دست می‌دهد نقطه تکین $f(z)$ نامیده می‌شود؛ همچنین می‌گوییم $f(z)$ در چنین نقطه‌ای تکین دارد. به عبارت دقیقتر: نقطه $z = z_0$ را نقطه تکین $f(z)$ نامند، اگر $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر نباشد اما هر همسایگی z_0 شامل نقاطی باشد که $f(z)$ در آنها مشتق‌پذیر است.

با استفاده از این مفهوم می‌توان گفت که $f(z)$ حداقل يك نقطه تکین روی دایره همگرایی^۱ بسط (۹) دارد.

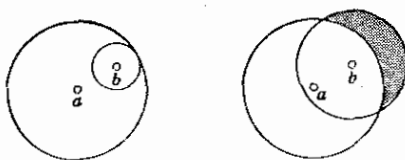
قبل از آنکه مثالها و جنبه‌های عملی سری تیلور را مورد بحث قرار دهیم، مفاهیم بسط حول مراکز مختلف و ادامه تحلیلی را ذکر می‌کنیم. فرض کنید يك سری توانی از توانهای $z - a$ بشاع همگرایی غیر صفر R و مجموع $f(z)$ در اختیار داریم؛ بنابراین

$$(11) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

از قضیه ۵، بخش ۲۰۱۶، می‌دانیم که $f(z)$ در قرص $|z-a| < R$ تحلیلی است. از قضیه ۲۷ همین بخش نتیجه می‌گیریم که سری (۱۱) سری تیلور $f(z)$ با مرکز a است. حال می‌توانیم نقطه دلخواهی مانند b در آن قرص انتخاب کنیم و با استفاده از قضیه تیلور بسط زیر را به دست آوریم:

$$(12) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n;$$

ضرایب این بسط از (۱۱) با مشتق‌گیری و قرار دادن $z=b$ حاصل می‌شوند:



شکل ۳۲۷. بسط حول مراکز مختلف و ادامه تحلیلی

۱. شعاع همگرایی (۹) در حالت کلی برابر است با فاصله a از نزدیکترین نقطه تکین $f(z)$ ، اما ممکن است این شعاع بزرگتر باشد، مثلاً، $\operatorname{Ln} z$ در طول محور حقیقی منفی تکین است، و فاصله $a = -1 + i$ از آن محور برابر ۱ است در حالی که شعاع همگرایی سری تیلور $\operatorname{Ln} z$ با مرکز $a = -1 + i$ برابر $\sqrt{2}$ است.

$$b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(b) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{n}{k} a_k (b-a)^k.$$

این بسط حداقل در قرص $|z-b| < R-|b|$ که در شکل ۳۲۷ الف نشان داده شده صادق است. معذک در موارد بسیاری شعاع همگرایی (۱۲) همچنانکه در شکل ۳۲۷ ب نشان داده شده بزرگتر از $R-|b|$ است، بنابراین (۱۲) به یک «توسعه» یا «ادامه» $f(z)$ به نقاط خارج قرص $|z-a| < R$ (قسمتی که در شکل ۳۲۷ ب سایه زده شده است) منجر می شود. فرآیند توسعه یک تابع تحلیلی که بایک سری توانی در ناحیه همگرایی داده شده است به ناحیه ای خارج از آن ناحیه ادامه تحلیلی نامیده می شود.

۴.۱۶ سری تیلور توابع مقدماتی

مثال ۰۱ سری هندسی

هرگاه داشته باشیم $f(z) = 1/(1-z)$ ، آنگاه داریم $f^{(n)}(z) = n!/(1-z)^{n+1}$ ، عبارت است از سری هندسی $f^{(n)}(0) = n!$ ، از این رو بسط مک لورن $1/(1-z)$ عبارت است از سری هندسی

$$(1) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad (|z| < 1).$$

$f(z)$ در $z=1$ تکین است. این نقطه روی دایره همگرایی قرار دارد.

مثال ۰۲ تابع نمایی

می دانیم که تابع نمایی e^z (بخش ۷.۱۲) به ازای تمام z ها تحلیلی است و $(e^z)' = e^z$ ، بنابراین از (۹)، بخش ۳.۱۶، با قرار دادن $a=0$ سری مک لورن به دست می آید:

$$(2) \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

همچنین می توان سری مزبور را با جایگزین کردن z به جای x در سری مک لورن e^x به دست آورد.

اکنون ببینیم چگونه فرمول ضرب

$$(3) \quad e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

با استفاده از (۲) اثبات می شود. داریم

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}.$$

چون هر دو سری به طور مطلق همگرا هستند می توان آنها را جمله به جمله ضرب کرد

و مجموع حاصل ضربهایی که درمورد آنها داریم $k+m=n$ ، عبارت است از

$$\begin{aligned} & \frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!} \frac{z_2}{1!} + \dots + \frac{z_1}{1!} \frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z_2^n}{n!} \\ &= \frac{1}{n!} \left[z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \binom{n}{2} z_1^{n-2} z_2^2 + \dots + z_2^n \right] = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} \end{aligned}$$

بنابراین حاصل ضرب دوسری را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}$$

و (۳) ثابت می‌شود.

از این گذشته باقراردادن $z = iy$ در (۲) و به‌کاربردن قضیهٔ ۱، بخش ۶.۱۵ به‌دست می‌آوریم

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

از آنجا که سریهای سمت راست بسطهای مک‌لورن توابع حقیقی $\cos y$ و $\sin y$ هستند عبارت بالا بیان دیگری از فرمول اولر

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

است، ر. ک. (۸)، بخش ۷.۱۲ با ضرب کردن عبارت بالا در e^x و با استفاده از (۳)، فرمول (۴)، بخش ۷.۱۲ را که برای تعریف e^z به‌کار برده بودیم به‌دست می‌آوریم. ملاحظات اخیر نشان می‌دهد که می‌توان (۲) را برای تعریف e^z به‌کار برد و از آن تمام فرمولهای بخش ۷.۱۲ را نتیجه گرفت.

مثال ۳. توابع مثلثاتی و هیپر بولیک

باقراردادن (۲) در (۱)، بخش ۸.۱۲، به‌دست می‌آوریم

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

(۵)

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

به‌ازای $z = x$ اینها سریهای مک‌لورن توابع حقیقی $\sin x$ و $\cos x$ هستند، به‌گونه‌ای

مشابه باقراردادن (۲) در (۱۱)، بخش ۸.۱۲، به دست می آوریم

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

(۶)

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

مثال ۴. لگاریتم

از (۹)، بخش ۳.۱۶، نتیجه می شود که

$$\text{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \dots \quad (|z| < 1) \quad (۷)$$

باقراردادن $-z$ به جای z و ضرب کردن دوطرف در -۱ داریم

$$-\text{Ln}(1-z) = \text{Ln} \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \quad (|z| < 1) \quad (۸)$$

باجمع کردن دوسری به دست می آوریم

$$\text{Ln} \frac{1+z}{1-z} = 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right) \quad (|z| < 1)$$

مسائل بخش ۴.۱۶

۱. با استفاده از (۲) ثابت کنید $(e^z)' = e^z$.

۲. (۵) و (۶) را از (۲) نتیجه بگیرید. از قضیه تیلور، (۷) را به دست آورید.

۳. با استفاده از (۵) نشان دهید که $\cos z$ زوج و $\sin z$ فرد است.

۴. با استفاده از (۶) نشان دهید که به ازای هر $z = x$ حقیقی، $\cosh z \neq 0$.

سری تیلور توابع زیر را نسبت به نقطه $z = a$ پیدا کرده و شعاع همگرایی را معین کنید.

$$e^{-z}, a=0 \quad ۷ \quad \sin z^2, a=0 \quad ۶ \quad \cos 2z, a=0 \quad ۵$$

$$\sin z, a=\pi/2 \quad ۱۰ \quad e^z, a=\pi i \quad ۹ \quad e^z, a=1 \quad ۸$$

$$1/z, a=-1 \quad ۱۳ \quad 1/(1-z), a=-1 \quad ۱۲ \quad \cos z, a=-\pi/4 \quad ۱۱$$

$$\sin^2 z, a=0 \quad ۱۶ \quad \cos^2 z, a=0 \quad ۱۵ \quad 1/(1-z), a=i \quad ۱۴$$

سه جمله اول سری مک لورن توابع زیر را پیدا کنید.

$$z \cot z \quad .۱۹ \quad e^z \sin z \quad .۱۸ \quad \tan z \quad .۱۷$$

سریهای مک لورن را با انتگرالگیری جمله به جمله از انتگرال پیدا کنید. $(\operatorname{erf} z)$ را تابع خطا، $\operatorname{Si}(z)$ را انتگرال سینوسی، و $S(z)$ و $C(z)$ را انتگرالهای فرنل می نامند. ر. ک. بخش ۱۵.۱۹، ضمیمه ۳.

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad .۲۲ \quad \int_0^z \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \quad .۲۱ \quad \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt \quad .۲۰$$

$$C(z) = \int_0^z \cos t^2 dt \quad .۲۵ \quad S(z) = \int_0^z \sin t^2 dt \quad .۲۴ \quad \operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt \quad .۲۳$$

۵.۱۶ روشهای عملی برای به دست آوردن سری توانی

در بیشتر مسائل عملی تعیین ضرایب سری تیلور به کمک فرمول قضیه تیلور پیچیده و وقتگیر است. روشهای عملی ساده تری برای تعیین ضرایب سری تیلور وجود دارد که آنها را با مثالهای زیر تشریح می کنیم. یکتایی نمایشهایی که به این ترتیب حاصل می شوند از قضیه ۲، بخش ۲.۱۶، نتیجه می شود.

مثال ۱. جاگذاری

سری مک لورن $f(z) = 1/(1+z^2)$ را بیابید. با قرار دادن $-z^2$ به جای z در (۱)، بخش ۴.۱۶، به دست می آوریم

$$(1) \quad \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \\ = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \quad (|z| < 1).$$

مثال ۲. انتگرالگیری

فرض کنید $f(z) = \tan^{-1} z$. داریم $f'(z) = 1/(1+z^2)$. با انتگرالگیری جمله به جمله از (۱) و با توجه به اینکه $f(0) = 0$ ، پیدا می کنیم

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \quad (|z| < 1);$$

این سری مقدار اصلی $w = u + iv = \tan^{-1} z$ را که به ازای آن داریم $|u| < \pi/2$ ،

نمایش می‌دهد.

مثال ۳. بسط توابع با استفاده از سری هندسی

$1/(c-bz)$ را بر حسب توانهای $z-a$ بسط دهید در صورتی که $c-ab \neq 0$ و $b \neq 0$. بدیهی است که

$$\frac{1}{c-bz} = \frac{1}{c-ab-b(z-a)} = \frac{1}{(c-ab) \left[1 - \frac{b(z-a)}{c-ab} \right]}$$

در مورد عبارت آخر، فرمول (۱) از بخش ۴.۱۶ را که در آن به جای z قرار داده‌ایم $b(z-a)/(c-ab)$ به کار می‌بریم و می‌یابیم

$$\begin{aligned} \frac{1}{c-bz} &= \frac{1}{c-ab} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{b(z-a)}{c-ab} \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{(c-ab)^{n+1}} (z-a)^n \\ &= \frac{1}{c-ab} + \frac{b}{(c-ab)^2} (z-a) + \frac{b^2}{(c-ab)^3} (z-a)^2 + \dots \end{aligned}$$

این سری به ازای

$$\left| \frac{b(z-a)}{c-ab} \right| < 1, \quad \text{یعنی} \quad \left| \frac{c}{b} - a \right| = \left| \frac{c-ab}{a} \right| < |z-a| \quad \text{همگراست.}$$

مثال ۴. سری دو جمله‌ای، تحویل به کسرهای جزئی

سری تیلور تابع

$$f(z) = \frac{2z^2 + 9z + 5}{z^3 + z^2 - 8z - 12}$$

را پیدا کنید؛ مرکز سری را $z=1$ بگیرید.

هر تابع گویای مفروض را می‌توان نخست به صورت مجموع کسرهای جزئی نمایش داد و سپس سری دو جمله‌ای

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+z)^m} &= (1+z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n \\ (2) \quad &= 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!} z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} z^3 + \dots \end{aligned}$$

را به کار برد. چون تابع سمت چپ در $z = -1$ تکین است، سری در قرص $|z| < 1$ همگراست. برای حالت مورد نظر به دست می آوریم

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{2}{z-3} = \frac{1}{[3+(z-1)]^2} - \frac{2}{2-(z-1)}.$$

این را می توان به صورت زیر نوشت :

$$f(z) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{[1 + \frac{1}{3}(z-1)]^2} \right) - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(z-1)}.$$

با استفاده از سری دوجمله ای به دست می آوریم

$$f(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \left(\frac{z-1}{3} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} \left(\frac{z-1}{2} \right)^n.$$

دوسری سمت راست را می توان جمله به جمله جمع کرد. چون ضریب دوجمله ای دوسری اول برابر است با $(-1)^n (n+1)/n! = (-1)^n (n+1)/n!$ ، پیدا می کنیم

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n (n+1)}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^n} \right] (z-1)^n \\ &= -\frac{8}{9} - \frac{31}{54} (z-1) - \frac{23}{108} (z-1)^2 - \dots \end{aligned}$$

چون $z=3$ نزدیکترین نقطه تکین $f(z)$ به مرکز $z=1$ است، سری در قرص $|z-1| < 2$ همگراست.

مثال ۵. استفاده از معادلات دیفرانسیل

سری مک لورن $f(z) = \tan z$ را پیدا کنید. داریم $f'(z) = \sec^2 z$ ، و بنابراین

$$f'(z) = 1 + f^2(z), \quad f'(0) = 1$$

با توجه به اینکه $f(0) = 0$ ، با مشتقگیریهای پی در پی به دست می آوریم

$$\begin{aligned} f'' &= 2ff', & f''(0) &= 0, \\ f''' &= 2f'^2 + 2ff'', & f'''(0) &= 2, \quad f'''(0)/3! = 1/3, \\ f^{(4)} &= 6f'f'' + 2ff''', & f^{(4)}(0) &= 0, \\ f^{(5)} &= 6f''^2 + 8f'f''' + 2ff^{(4)}, & f^{(5)}(0) &= 16, \quad f^{(5)}(0)/5! = 2/15, \end{aligned}$$

و غیره. بنابراین نتیجه می گیریم

$$(۳) \quad \tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \quad (|z| < \frac{\pi}{2}).$$

مثال ۶. ضرایب نامشخص

سری مک لورن $\tan z$ را با استفاده از سربهای مک لورن $\sin z$ و $\cos z$ (بخش ۴۰۱۶) پیدا کنید. چون $\tan z$ فرد است، بسط مطلوب به صورت

$$\tan z = b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \dots$$

خواهد بود. با استفاده از $\sin z = \tan z \cos z$ به دست می آوریم

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = (b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \dots) \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right).$$

چون $\tan z$ درجه سه جا تحلیلی است جز در $z = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$ ، سری مک لورن آن در قرص $|z| < \pi/2$ همگراست، و به ازای این z ها می توانیم دو سری سمت راست را جمله به جمله در هم ضرب کنیم و سری حاصل را بر حسب توانهای z مرتب کنیم (ر. ل. قضیه ۳ بخش ۱۰۱۶). بنا به قضیه ۲ بخش ۲۰۱۶، ضریبهای هر توان z در دو طرف با هم مساویند. بنابراین

$$1 = b_1, \quad -\frac{1}{3!} = -\frac{b_1}{2!} + b_3, \quad \frac{1}{5!} = \frac{b_1}{4!} - \frac{b_3}{2!} + b_5$$

و غیره. پس مانند سابق داریم $b_1 = 1$ ، $b_3 = \frac{1}{3}$ ، $b_5 = \frac{17}{15}$ و غیره.

مسائل بخش ۵۰۱۶

سری مک لورن توابع زیر را پیدا کنید.

۱. $\frac{1}{1+z^2}$	۲. $\frac{1}{1-z^2}$	۳. $\frac{1}{1+z^2}$	۴. $\frac{1}{1-z^2}$
۵. $\frac{1}{(1+z^2)^2}$	۶. $\frac{1}{(z+2)^2(z-2)}$	۷. $\cos z^2$	۸. e^{z^2-z}
۹. e^{z^2}			

چند جمله اول سری مک لورن توابع زیر را پیدا کنید.

$$e^z / \cos z \quad .12 \quad e^z \sin z^2 \quad .11 \quad \frac{\cos z}{1-z^2} \quad .10$$

$$e^{(e^z)} \quad .15 \quad \cos \left(\frac{z}{1-z} \right) \quad .14 \quad e^{1/(1-z)} \quad .13$$

سری تیلور توابع داده شده را حول نقطه $z=a$ پیدا کنید.

$$\frac{1}{2-3z}, a=1+i \quad .17 \quad \frac{1}{2z-i}, a=-1 \quad .16$$

$$\frac{1}{(1+z)^2}, a=-i \quad .19 \quad \frac{2-3z}{2z^2-3z+1}, a=-1 \quad .18$$

$$\tan z, a=\frac{\pi}{4} \quad .21 \quad \frac{1}{(2+3z^2)^2}, a=0 \quad .20$$

۲۲. با بسط $1/\sqrt{1-z^2}$ و انتگرال گیری، نشان دهید که

$$\sin^{-1} z = z + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{z^3}{3} + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right) \frac{z^5}{5} + \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right) \frac{z^7}{7} + \dots (|z| < 1).$$

نشان دهید این سری مقدار اصلی $\sin^{-1} z$ را نمایش می دهد (تعریف مقدار اصلی در مسئله ۳۵ بخش ۹.۱۲ آمده است).

۳۳. (اعداد اولیو) سری مک لورن

$$(4) \quad \sec z = E_0 - \frac{E_2}{2!} z^2 + \frac{E_4}{4!} z^4 - + \dots$$

اعداد اولیو E_n را تعریف می کند. نشان دهید که $E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61$.

۳۴. (اعداد برنولی) سری مک لورن

$$(5) \quad \frac{z}{e^z - 1} = 1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \dots$$

معرف اعداد برنولی B_n است. با استفاده از روش ضرایب نامشخص نشان دهید

۱. جداول مربوطه را می توانید در مرجع زیر پیدا کنید:

J. W. L. Glaisher, *Quarterly Journal Math.* 29. 1898, 1-168.

$$(۶) \quad B_1 = -\frac{1}{4}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

۲۵. با استفاده از (۱)، (۲)، بخش ۸.۱۲ و (۵) نشان دهید که

$$\begin{aligned} (۷) \quad \tan z &= \frac{2i}{e^{2iz} - 1} - \frac{2i}{e^{4iz} - 1} - i \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1}. \end{aligned}$$

۶.۱۶ همگرایی یکنوا

فرض کنید می‌دانیم که یک سری مفروض در ناحیه مشخص R همگراست. سؤالی که باقی می‌ماند این است که آیا همگرایی در سراسر ناحیه به اندازه کافی سریع هست و یا نقاطی یافت می‌شوند که در حوالی آنها همگرایی کم می‌شود. اهمیت عملی این سؤال در رابطه با محاسبات عددی واضح است اما چنانکه خواهیم دید جنبه نظری سؤال حتی بهتر است. موضوع را با ذکر چند مثال تشریح می‌کنیم.

مثال ۱

فرض کنید بخواهیم e^x را در بازه $0 \leq x \leq 1$ ، مثلاً به ازای $0, 0.1, 0.2, \dots$ محاسبه کنیم و بخواهیم که قدر مطلق خطای هر مقدار کمتر از عدد مفروض ε ، مثلاً کمتر از $1/2$ واحد در ششمین رقم اعشاری باشد. می‌توانیم مجموع جزئی مناسب

$$s_n = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

سری مک لورن را به کار ببریم. در این صورت قدر مطلق خطا برابر است با $|R_n| = |s - s_n|$ که در آن $s = e^x$ مجموع سری است، و باید n را طوری انتخاب کنیم که

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon (= 5 \times 10^{-7}).$$

از مسئله ۲۵ بخش ۵.۱۵ نتیجه می‌شود وقتی $x = 1$ ، به ازای $n = 10$ و بنابراین به ازای هر $n > N = 9$ دقت لازم را خواهیم داشت. حال قدر مطلق باقیمانده با کم شدن x ($x \geq 0$) کم می‌شود و بنابراین

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \text{به ازای } n > N(\varepsilon) (= 9) \text{ و هر } x.$$

توجه کنید که، البته، N به ε بستگی دارد و اگر مقادیر دقیقتری بخواهیم طوری که ε

کوچکتر باشد آنگاه N بزرگتر خواهد بود.

مثال ۲

درمورد سری هندسی $1 + z + z^2 + \dots$ باقیمانده عبارت است از

$$R_n(z) = s(z) - s_n(z) = \sum_{m=n+1}^{\infty} z^m = \frac{z^{n+1}}{1-z};$$

این مقدار به ازای $z = x$ ($|x| < 1$) حقیقی که به اندازه کافی به ۱ نزدیک باشد بزرگ خواهد بود. از این رو وقتی خطای ماکزیمم ε از قبل معین شده باشد نمی توانیم عددی مانند N را که فقط به ε بستگی دارد طوری بیابیم که به ازای $n > N$ و کلیه x های متعلق به بازه $0 \leq x < 1$ بتوان نوشت $|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$. (همچنین ر.ک. مسئله ۱۹ آخر بخش ۵.۱۵). این نتیجه چندان هم غیرمنتظره نیست چرا که سری در $z = 1$ واگراست. در مثال بعد یک مورد واقعاً شگفت آور را شرح می دهیم.

مثال ۳

سری زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \dots$$

دانشجو می تواند با استفاده از فرمول مجموع تصاعد هندسی نشان دهد که n امین مجموع جزئی برابر است با

$$s_n(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

(بعضی از این مجموعه ها در شکل ۳۲۸ نشان داده شده اند.) از این رو، اگر $x \neq 0$ ، مجموع سری عبارت است از

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 1 + x^2$$

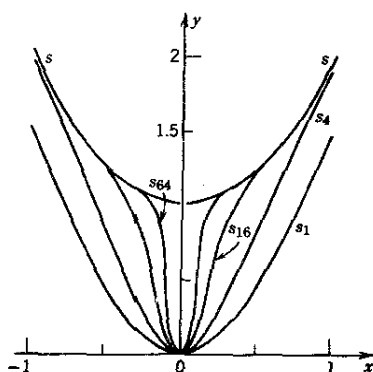
اگر $x = 0$ ، در این صورت به ازای تمام n ها، $s_n = 0$ و بنابراین

$$s(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(0) = 0;$$

پس سری به ازای تمام x ها همگراست (حتی همگرای مطلق است). اما نتیجه تعجب آور این است که هر چند تمام جملات سری توابع پیوسته اند مجموع (در $x = 0$) ناپیوسته است. از این گذشته، وقتی $x \neq 0$ ، قدر مطلق باقیمانده عبارت است از

$$|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

ومی بینیم که به ازای يك $(\epsilon < 1)$ مفروض نمی توانیم N ی پیدا کنیم که فقط به ϵ بستگی داشته و به ازای هر $n > N(\epsilon)$ و هر x متعلق به بازه $0 \leq x \leq 1$ داشته باشیم $|R_n| < \epsilon$.



شکل ۳۲۸. مجموعه‌های جزئی مثال ۳

سریهایی که در مثالهای بالا مورد بحث قرار گرفتند صورت کلی زیر را دارند:

$$(۱) \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots$$

فرض می‌کنیم (۱) به ازای تمام z ها در ناحیه G همگرا باشد. فرض کنید $s(z)$ مجموع و $s_n(z)$ n امین مجموع جزئی (۱) باشد. می‌دانیم همگرایی (۱) در نقطه z بدین معنی است که به ازای هر $\epsilon > 0$ مفروض می‌توان يك $N = N(\epsilon, z)$ پیدا کرد به طوری که

$$|s(z) - s_n(z)| < \epsilon \quad n > N(\epsilon, z) \quad \text{به ازای هر } z$$

N به ϵ بستگی دارد، و در حالت کلی، به نقطه z انتخاب شده نیز بستگی خواهد داشت. حال، به ازای هر $\epsilon > 0$ مفروض، ممکن است بتوانیم عددی مانند $N(\epsilon)$ ، مستقل از z ، طوری پیدا کنیم که

$$|s(z) - s_n(z)| < \epsilon \quad n > N(\epsilon) \quad \text{و تمام } z \text{ های متعلق به } G \text{ داشته باشیم}$$

در این صورت می‌گویند که سری در G همگرای یکنواخت است
بنابراین یکنواخت بودن همگرایی خاصیتی است مربوط به مجموعه‌ای نامتناهی از

مقادیر z ، درحالی که همگرایی سری را می توان به ازای مقادیر خاص مختلفی از z بدون در نظر گرفتن سایر مقادیر بررسی کرد.

سری که در مثال ۱ دیدیم در بازه $0 \leq x \leq 1$ (و در واقع، در هر بازه کراندار) همگرایی یکنواخت است. سری که در مثال ۳ دیدیم در هر بازه ای که شامل نقطه 0 باشد همگرایی یکنواخت نیست. بنا بر این ممکن است يك سری همگرایی مطلق همگرایی یکنواخت نباشد. همین طور، يك سری همگرایی یکنواخت نیز ممکن است همگرایی مطلق نباشد. مثال زیر این مطلب را نشان می دهد.

مثال ۴. سری همگرایی مطلق که همگرایی یکنواخت نیست

سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} - \dots \quad (x \text{ حقیقی است})$$

به ازای تمام x ها همگرایی یکنواخت است اما همگرایی مطلق نیست (ر. ک. مسئله ۱۸). ه.

مثال ۲ يك سری توانی نوعی است، مطالعه چنین سریهایی بسیار ساده است.

قضیه ۱ (سری توانی)

سری توانی

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

که شعاع همگرایی آن صفر نیست در هر قرص دایره ای $|z-a| \leq r$ به شعاع $r < R$ همگرایی یکنواخت است.

اثبات. به ازای $|z-a| \leq r$ داریم

$$(3) \quad |c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots + c_{n+p}(z-a)^{n+p}| \leq |c_{n+1}|r^{n+1} + \dots + |c_{n+p}|r^{n+p}.$$

چون وقتی که $|z-a| = r < R$ در آن صورت (۲) همگرایی مطلق است، از اصل همگرایی کوشی (بخش ۳.۱۵) نتیجه می شود که، به ازای يك $\varepsilon > 0$ مفروض، می توان $N(\varepsilon)$ یافت به طوری که

$$|c_{n+1}|r^{n+1} + \dots + |c_{n+p}|r^{n+p} < \varepsilon \quad p=1,2,\dots \text{ و } n > N(\varepsilon)$$

به ازای $n > N(\varepsilon)$ و $p=1,2,\dots$ به دست می آوریم

$$|c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots + c_{n+p}(z-a)^{n+p}| < \varepsilon$$

که به ازای هر z در قرص $|z-a| \leq r$ و هر $n > N(\varepsilon)$ و هر $p=1,2,\dots$ برقرار

است. چون $N(\varepsilon)$ مستقل از z است همگرایی یکنواخت نتیجه می شود و قضیه به اثبات می رسد. ▲

در حالی که، البته، مجموع مقداری متناهی تابع پیوسته پیوسته است، مثال ۳ نشان می دهد که مجموع یک سری متناهی از توابع پیوسته ممکن است ناپیوسته باشد، حتی اگر همگرایی مطلق باشد. اما اگر سری همگرایی یکنواخت باشد چنین اتفاقی نمی افتد. در واقع قضیه مهم زیر نتیجه می شود

قضیه ۲ (پیوستگی)

فرض کنید سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots$$

در ناحیه G همگرایی یکنواخت بوده و مجموعش $F(z)$ باشد. در این صورت، اگر هر جمله $f_n(z)$ در نقطه ای مانند z_0 از G پیوسته باشد، تابع $F(z)$ در z_0 پیوسته است.

اثبات. n امین مجموع جزئی سری را $s_n(z)$ و باقیمانده مربوط به آن را $R_n(z)$ فرض کنید:

$$s_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n, \quad R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \dots$$

چون سری همگرایی یکنواخت است به ازای یک $\varepsilon > 0$ مفروض می توانیم یک $n = N(\varepsilon)$ پیدا کنیم به طوری که

$$|R_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (G \text{ به ازای تمام } z \text{ های متعلق به } G)$$

از آنجا که $s_N(z)$ مجموع تعدادی متناهی تابع است که همگی در z_0 پیوسته اند، این مجموع در z_0 پیوسته است. بنابراین می توانیم یک $\delta > 0$ پیدا کنیم به طوری که

$$s_N(z) - s_N(z_0) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{در } |z - z_0| < \delta \text{ قرار دارند}$$

بنابراین نامساوی مثلثی (بخش ۲.۱۲) به ازای چنین z هایی به دست می آوریم

$$|F(z) - F(z_0)| = |s_N(z) + R_N(z) - [s_N(z_0) + R_N(z_0)]|$$

$$\leq |s_N(z) - s_N(z_0)| + |R_N(z)| + |R_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

و این بدان معنی است که $F(z)$ در z_0 پیوسته است و قضیه ثابت می شود. ▲

یادآوری می کنیم که در این قضیه همگرایی یکنواخت شرطی کافی است و نه لازم. این مطلب را می توان با مثال زیر تشریح کرد.

مثال ۵

فرض کنید

$$u_m(x) = \frac{mx}{1+m^2x^2}$$

و سری $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(z)$ را در نظر بگیرید که در آن $f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x)$.

n امین مجموع جزئی عبارت است از

$$s_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n.$$

بنابراین مجموع سری عبارت است از

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0,$$

که تابعی پیوسته است. با این همه سری در بازه $0 \leq x \leq a$ که در آن $a > 0$ همگرای یکنوا نیست. در واقع از رابطه

$$|F(x) - s_n(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \varepsilon$$

به دست می آوریم

$$n^2x^2 - \frac{nx}{\varepsilon} + 1 > 0 \quad \text{یا} \quad \frac{nx}{\varepsilon} < 1 + n^2x^2$$

و از روی آن

$$n > \frac{1}{\varepsilon x^2} (1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}).$$

به ازای ε مشخص، وقتی x به صفر میل کند سمت راست رابطه بالا به بینهایت میل می کند و این نشان می دهد که سری در بازه مورد نظر همگرای یکنواخت نیست. ▲

تحت چه شرایطی می توانیم از یک سری جمله به جمله انتگرال بگیریم؟ بحث خود را با مثالی دنبال می کنیم که نشان دهنده این واقعیت مهم است که انتگرال گیری جمله به جمله همیشه مجاز نیست.

مثال ۶. سری که انتگرال گیری جمله ای از آن مجاز نیست

فرض کنید

$$u_m(x) = mx e^{-mx^2}$$

وسری زیر را دربارهٔ $0 \leq x \leq 1$ در نظر بگیرید:

$$f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x) \quad \text{که در آن} \quad \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$$

n امین مجموع جزئی عبارت است از

$$s_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = n_n.$$

بنابراین مجموع سری عبارت است از

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم

$$\int_0^1 F(x) dx = 0.$$

از طرفی، با انتگرالگیری جمله به جمله داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f_m(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \int_0^1 f_m(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 s_n(x) dx.$$

اما $s_n = u_n$ و عبارت سمت راست برابر می‌شود با

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n x e^{-n x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-n}) = \frac{1}{2},$$

و نه صفر. بنابراین از سری فوق نمی‌توان از $x=0$ تا $x=1$ جمله به جمله انتگرال گرفت. ▲

سری که در مثال آوردیم دربارهٔ یاد شده همگرای یکنواخت نیست و اکنون ثابت می‌کنیم که از یک سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته می‌توانیم جمله به جمله انتگرال بگیریم.

قضیه ۳ (انتگرالگیری جمله‌ای)

فرض کنید

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots$$

یک سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته در ناحیهٔ G باشد. C را مسیری در G بگیرد. در این صورت سری

$$(۴) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C f_0(z) dz + \int_C f_1(z) dz + \dots$$

همگرا است و مجموعش برابر است با $\int_C F(z) dz$

اثبات. از قضیه ۲ نتیجه می شود که $F(z)$ پیوسته است. فرض کنید $s_n(z)$ ، n امین مجموع جزئی سری داده شده و $R_n(z)$ باقیمانده آن باشد. در این صورت $F = s_n + R_n$ و

$$\int_C F(z) dz = \int_C s_n(z) dz + \int_C R_n(z) dz.$$

طول C را l فرض کنید. چون سری داده شده همگرای یکنواخت است، به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض می توانیم عددی مانند N پیدا کنیم طوری که

$$|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{l} \quad \text{به ازای هر } n > N \text{ و هر } z \text{ متعلق به } G$$

با استفاده از (۴)، بخش ۲۰۱۴، به دست می آوریم

$$\left| \int_C R_n(z) dz \right| < \frac{\varepsilon}{l} l = \varepsilon \quad \text{به ازای هر } n < N$$

چون $R_n = F - s_n$ ، بنا براین

$$\left| \int_C F(z) dz - \int_C s_n(z) dz \right| < \varepsilon \quad \text{به ازای هر } n > N$$

از این رو، سری (۴) همگراست و مجموعی برابر آنچه در قضیه گفته شد دارد. ▲

قضایای ۲ و ۳ مشخص کننده دو تا از مهمترین خاصیت های سری های همگرای یکنواخت هستند.

البته، چون مشتق گیری و انتگرال گیری فرایندهایی معکوس یکدیگرند، از قضیه ۳ به سادگی نتیجه می شود که از یک سری همگرا می توان جمله به جمله مشتق گیری کرد به شرط آنکه جملات سری داده شده مشتقات پیوسته داشته باشند و سری حاصل همگرای یکنواخت باشد، به طور دقیق تر، قضیه زیر صادق است.

قضیه ۴ (مشتق گیری جمله ای)

فرض کنید سری $f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots$ در ناحیه G همگرا بوده و $F(z)$ مجموع آن باشد. فرض کنید که سری $f_0'(z) + f_1'(z) + f_2'(z) + \dots$ در G همگرای یکنواخت بوده و جملات آن $f_0'(z), f_1'(z), \dots$ در G پیوسته باشند. در این صورت

به ازای هر z در G $F'(z) = f'_0(z) + f'_1(z) + f'_2(z) + \dots$

اثبات قضیه ساده است و به خواننده واگذار می شود (مسئله ۱۰)
معمولاً همگرایی یکنواخت را از آزمون مقایسه، که آزمون M وایرستراس، نامیده می شود نتیجه می گیرند.

قضیه ۵ (آزمون M وایرستراس)

هرگاه در داخل ناحیه G به ازای تمام مقادیر z قدرمطلقهای جملات سری مفروضی که به صورت (۱) است، به ترتیب، کمتر از یا مساوی با جملات متناظر سری همگرای با جملات ثابت

$$(5) \quad M_0 + M_1 + M_2 + \dots,$$

باشد، آنگاه سری (۱) در G همگرای یکنواخت است.
اثبات قضیه ساده است و به دانشجویان واگذار می شود (مسئله ۱۱).

مثال ۷. آزمون M وایرستراس

سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{m^n} \quad (x \text{ حقیقی})$$

در هر بازه ای همگرای یکنواخت است. این از آزمون وایرستراس نتیجه می شود زیرا به ازای x های حقیقی

$$\left| \frac{\sin nx}{m^n} \right| \leq \frac{1}{m^n}$$

و $\sum m^{-n}$ همگراست (ر. ل. (۵) بخش ۵.۱۵).

مسائل بخش ۶.۱۶

ثابت کنید که سریهای زیر در نواحی داده شده همگرای یکنواخت هستند.

$$1. \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| \leq 0.99 \quad 2. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| \leq 1000$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n, \quad |z| \leq 3.9 \quad 4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}, \quad |z| \leq 1$$

$$5. \quad \text{تمام } z \text{ ها} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n|z|}{n^n}, \quad 6. \quad \text{تمام } x \text{ های حقیقی} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n x}{n(n+1)}$$

$$۷. \text{تمام } z \text{ ها} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n |z|}{n^2}, \quad ۸. \text{تمام } z \text{ ها} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z| + n^2},$$

۹. هرگاه سری (۱) در ناحیه G همگرایی یکنواخت باشد، ثابت کنید که در هر قسمتی از G همگرایی یکنواخت است.

۱۰. قضیه ۴ را به کمک قضیه ۳ ثابت کنید.

۱۱. آزمون M وایرستراس (قضیه ۵) را ثابت کنید.

۱۲. کوچکترین عدد صحیح n را تعیین کنید که به ازای آن در مثال ۲، وقتی

$$z = x = ۰.۵, ۰.۶, ۰.۷, ۰.۸, ۰.۹$$

داشته باشیم $|R_n| < ۰.۰۱$. از نقطه نظر محاسبه $1/(1-x)$ به کمک سری هندسی با خطای مطلق کمتر از ۰.۰۱ این نتیجه چه معنایی دارد؟

۱۳. سری را که n امین مجموع جزئی آن $s_n(x) = nx/(nx+1)$ است پیدا کنید و نمودار s_1, s_2, s_3, s_4 و $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ را به ازای $x \geq 0$ رسم کنید.

۱۴. ثابت کنید که سری مثال ۳ در هیچ بازه‌ای که شامل نقطه $x=0$ باشد همگرایی یکنواخت نیست.

۱۵. نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty} (1+x^2)^{-n}$ برابر يك است وقتی که $x \neq 0$ ، و برابر صفر است وقتی که $x=0$. سپس نموداری مشابه با شکل ۳۲۸ از مجموعهای جزئی رسم کنید.

۱۶. ناحیه همگرایی سری مثال ۳ را وقتی که جای x متغیر مختلط z قرار گیرد به طور دقیق پیدا کنید.

۱۷. نشان دهید که $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ در بازه $0 \leq x \leq 1$ همگرایی یکنواخت نیست. مجموعهای جزئی s_1, s_2, s_3, s_4 را رسم کنید.

۱۸. حکم مثال ۴ را ثابت کنید.

معادله گرما. نشان دهید که (۱۰)، بخش ۵.۱۱، با ضرایب (۱۱)، به ازای $t > 0$ جواب معادله گرما است، فرض کنید $f(x)$ در بازه $0 \leq x \leq l$ پیوسته بوده و در تمام نقاط داخلی آن بازه از يك طرف مشتق داشته باشد. به ترتیب زیر عمل کنید.

۱۹. نشان دهید که $|B_n|$ کراندار است یعنی به ازای تمام n ها، $|B_n| < K$. نتیجه

بگیرید که

$$t \geq t_0 > 0 \text{ وقتی } |u_n| < Ke^{-\lambda_n^2 t_0}$$

و به کمک آزمون وایرستراس، ثابت کنید سری (۱۰) نسبت به x و t وقتی که $0 \leq x \leq 1$ و $t \geq t_0$ همگرای یکنواخت است. با استفاده از قضیه ۲ نشان دهید که $u(x, t)$ وقتی $t \geq t_0$ پیوسته است و بنابراین وقتی $t \geq t_0$ ، در شرایط مرزی (۲) صدق می‌کند.

۲۰. نشان دهید وقتی که $t \geq t_0$ داریم $|\partial u_n / \partial t| < \lambda_n^2 Ke^{-\lambda_n^2 t_0}$ و سری عبارات سمت راست، بنا به آزمون نسبت، همگراست. با استفاده از این موضوع، وایرستراس و قضیه ۴ نتیجه بگیرید که از سری (۱۰) می‌توان جمله به جمله نسبت به t مشتق گرفت و مجموع سری حاصل برابر $\partial u / \partial t$ است. نشان دهید که از (۱۰) می‌توان دومرتبه نسبت به x مشتق گرفت و مجموع سری حاصل برابر است با $\partial^2 u / \partial x^2$. با استفاده از این موضوع و نتیجه مسئله ۱۹ نشان دهید که (۱۰) به ازای هر $t \geq t_0$ جوابی برای معادله گرما است. (اثبات این را که (۱۰) در شرط اولیه داده شده صدق می‌کند می‌توان در مرجع [D۲] یافت.)

۷.۱۶ سری لوران

در کاربردهای مختلف لازم می‌شود که تابع $f(z)$ حول نقاطی که تابع در آنها تکین است بسط داده شود. قضیه تیلور را در چنین مواردی نمی‌توان به کار برد، به این منظور از سری جدیدی به نام سری لوران استفاده می‌کنیم. نمایش به وسیله سری لوران در طوقی محصور به دو دایره متحدالمرکز C_1 و C_2 که $f(z)$ در تمام نقاط درونی و مرزی آن تحلیلی است اعتبار دارد (شکل ۳۲۹). همانند حالت مربوط به سری تیلور، $f(z)$ ممکن است در نقاطی واقع در خارج C_1 تکین باشد، و ضرورتاً به عنوان خاصیتی جدید، ممکن است در نقاطی واقع در داخل C_2 نیز تکین باشد.

قضیه لوران ۱

هرگاه $f(z)$ در دو دایره متحدالمرکز C_1 و C_2 به مرکز a و در طوق بین آنها تحلیلی باشد، در این صورت $f(z)$ را می‌توان با سری لوران نمایش داد:

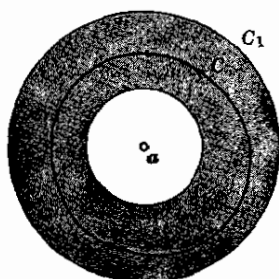
$$(۱) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}$$

$$= b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots$$

که در آن^۱

$$(۲) \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^{n+1}} dz^*, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C (z^* - a)^{n-1} f(z^*) dz^*,$$

هریک از این انتگرالها روی مسیر بسته ساده‌ای مانند C که در طوق قرار دارد و دایره داخلی را در میان می‌گیرد در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته می‌شود. (شکل ۳۲۹).
این سری همگراست و $f(z)$ را در طوقی باز نمایش می‌دهد که از طوق داده شده به دست می‌آید اگر دایره C_1 را آنقدر بزرگ کنیم و دایره C_2 را آنقدر کوچک کنیم که هر یک از دو دایره به نقطه‌ای که در آن $f(z)$ تکین است برسند.



شکل ۳۲۹. قضیه لوران

تبصره. بدیهی است که به جای (۱) و (۲) به سادگی می‌توانیم بنویسیم

$$(۱') \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - a)^n$$

که در آن

$$(۲') \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^{n+1}} dz^*.$$

اثبات قضیه لوران. فرض کنید z نقطه‌ای در طوق داده شده باشد. در این صورت از فرمول انتگرال کوشی [ر. ک. (۳) بخش ۵۰۱۴] نتیجه می‌شود

$$(۳) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^*.$$

۱. متغیر انتگرالگیری را با z^* نشان می‌دهیم چرا که z در $f(z)$ به کار برده ایم.

۲. پیر آلفونس لوران Pierre Alphonse Laurent (۱۸۱۳ - ۱۸۵۴)، ریاضیدان فرانسوی.

که جهت انتگرالگیری عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. حال این انتگرالها را به روشی شبیه آنچه در بخش ۳.۱۶ دیدیم تبدیل می‌کنیم. چون z در داخل C_1 قرار می‌گیرد انتگرال اول دقیقاً از همان نوع انتگرال (۱)، بخش ۳.۱۶ است. با بسط دادن این انتگرال و تخمین زدن باقیمانده آن به روشی که در بخش ۳.۱۶ داشتیم به دست می‌آوریم

$$(۲) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

که ضرایب آن از فرمول

$$(۵) \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^{n+1}} dz^*$$

تعیین می‌شوند و انتگرالگیری در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انجام می‌شود. چون نقطه a متعلق به طوق نیست، توابع $f(z^*)/(z^* - a)^{n+1}$ در طوق تحلیلی هستند، از این رو به جای مسیر C (ر.ک. قضیه) می‌توانیم روی مسیر C_1 انتگرال بگیریم بدون آنکه لازم باشد مقدار b_n را تغییر دهیم. بدینسان (۲) به ازای هر $n \geq 0$ ثابت می‌شود.

در مورد انتگرال آخر (۳) وضعیت متفاوت است، چرا که z در خارج C_1 قرار دارد. به جای (۳)، بخش ۳.۱۶، داریم

$$(۶) \quad \left| \frac{z^* - a}{z - a} \right| < 1$$

یعنی، حالا باید $1/(z^* - z)$ را بر حسب توانهای $(z^* - a)/(z - a)$ بسط دهیم تا سری حاصل همگرا باشد. به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - a - (z - a)} = \frac{-1}{(z - a) \left(1 - \frac{z^* - a}{z - a} \right)}$$

با استفاده از فرمول مجموع تصاعد هندسی متناهی در مورد این عبارت به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^* - z} = & -\frac{1}{z - a} \left\{ 1 + \frac{z^* - a}{z - a} + \left(\frac{z^* - a}{z - a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z^* - a}{z - a} \right)^n \right\} \\ & - \frac{1}{z - z^*} \left(\frac{z^* - a}{z - a} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

برای آنکه آخرین انتگرال (۳) به دست آید این بسط را در $(-1/2\pi i)f(z^*)$ ضرب می‌کنیم و روی C_1 از آن انتگرال می‌گیریم. به سادگی به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* \\
 & = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{z-a} \int_{C_r} f(z^*) dz^* + \frac{1}{(z-a)^2} \int_{C_r} (z^* - a) f(z^*) dz^* + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \int_{C_r} (z^* - a)^n f(z^*) dz^* \right\} + R_n^*(z);
 \end{aligned}$$

در این رابطه جمله آخر به صورت زیر است:

$$(v) \quad R_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i (z-a)^{n+1}} \int_{C_r} \frac{(z^* - a)^{n+1}}{z - z^*} f(z^*) dz^*.$$

در انتگرالهای داخل آکولاد می توان به جای دایره C_r مسیر C را که قبلاً شرح داده شد گذاشت بدون آنکه مقادیرشان تغییر کند. بدین طریق قضیه لوران ثابت می شود مشروط بر آنکه

$$(A) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n^*(z) = 0$$

حال (A) را ثابت می کنیم. چون $z - z^* \neq 0$ و $f(z)$ در طوق و روی C_r تحلیلی است قدر مطلق عبارت $f(z^*)/(z - z^*)$ در (v) کراندار است، مثلاً

$$\left| \frac{f(z^*)}{z - z^*} \right| < \widetilde{M} \quad \text{به ازای هر } z^* \text{ روی } C_r$$

با استفاده از (۴) بخش ۲۰۱۴ در (v) و نمایش دادن طول C_r با l به دست می آوریم

$$|R_n^*(z)| < \frac{1}{2\pi |z-a|^{n+1}} |z^* - a|^{n+1} \widetilde{M} l = \frac{2\pi |z^* - a|^{n+1}}{l |z-a|^{n+1}}.$$

از (۶) نتیجه می گیریم که عبارت سمت راست وقتی n به سمت بینهایت میل کند به سمت صفر میل می کند. بدین ترتیب (A) ثابت می شود. پس نمایش (۱) با ضرایب (۷) در طوق داده شده صادق است.

سرانجام همگرایی (۱) را در طوق بازی که در آخر قضیه مشخص شده است ثابت می کنیم.

مجموع دوسری موجود در (۱) را به ترتیب با $g(z)$ و $h(z)$ ، و شعاعهای C_r و C_ρ را به ترتیب با r_1 و r_2 نشان می دهیم، در این صورت $f = g + h$. سری اول یک سری توانی است. از آنجا که این سری در طوق همگراست، باید در سراسر قرص محصور به C_ρ همگرا بوده و g در آن قرص تحلیلی باشد.

با قرار دادن $Z = 1/(z-a)$ ، سری آخر به يك سری توانی بر حسب Z تبدیل می‌شود. در این صورت طوق $r_1 < |z-a| < r_2$ با طوق $1/r_1 < |Z| < 1/r_2$ متناظر شده سری جدید در این طوق همگرا می‌شود، و بنابراین، دسراسر قرص $|Z| < 1/r_2$ نیز همگرا می‌شود. چون این قرص با $|z-a| > r_1$ ، خارج C_1 ، متناظر است، سری داده شده به ازای تمام z های خارج C_1 همگراست و h به ازای تمام این z ها تحلیلی است.

چون $f = g + h$ ، بنابراین در تمام نقاط خارج C_1 که f در آنها تکین است g باید تکین باشد و در تمام نقاط داخل C_1 که f در آنها تکین است h باید تکین باشد. در نتیجه اولین سری به ازای تمام z های درون دایره‌ای به مرکز a که شعاعش برابر است با فاصله نزدیکترین تکینی f به a در خارج از C_1 ، همگراست. به گونه‌ای مشابه سری دوم به ازای تمام z های خارج از دایره‌ای به مرکز a که شعاعش برابر است با بزرگترین فاصله تکینی f در داخل C_1 ، همگراست. ناحیه مشترک این دو ناحیه همگرایی طوق بازی است که در آخر قضیه مشخص شده است. ▲

نتیجه می‌شود که هر گاه $f(z)$ در داخل C_1 تحلیلی باشد سری لوران به سری تیلور $f(z)$ که مرکزش a است تحویل می‌شود. در واقع با به کار بردن قضیه انتگرال کشی (۲) می‌بینیم که در این حالت تمام ضرایب توانهای منفی (۱) صفرند. از این گذشته، اگر $z = a$ تنها نقطه تکین $f(z)$ در C_1 باشد، در این صورت بسط لوران (۱) به ازای تمام z های C_1 جز $z = a$ همگراست. این حالت به کرات اتفاق می‌افتد، و بنابراین، از اهمیت خاصی برخوردار است. ما بعداً به تفصیل در این باره بحث خواهیم کرد.

سری لوران تابع تحلیلی مفروض $f(z)$ در طوق همگراییش یکتاست (ر.ک. مسئله ۱ همین بخش). هر چند $f(z)$ ممکن است در دو طوق هم مرکز سریهای لوران مختلف داشته باشد (ر.ک. مثال ۲ی همین بخش).

یکتایی مهم است، زیرا معمولاً سری لوران، با استفاده از (۲) برای تعیین ضرایب، به دست نمی‌آید بلکه از روشهای متعدد دیگری نتیجه می‌شود. بعضی از این روشها در مثالهای زیر تشریح شده‌اند. سری لورانی که با چنین فرآیندی به دست می‌آید باید سری لوران تابع داده شده در طوق مفروضی باشد.

مثال ۱

سری لوران $z^2 e^{1/z}$ به مرکز ۰ را می‌توان از (۲)ی بخش ۴۰۱۶ به دست آورد. با قرار دادن $1/z$ به جای z در آن سری داریم

$$z^2 e^{1/z} = z^2 \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots \right)$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots \quad (|z| > 0).$$

مثال ۲. بسط لوران در طوقه‌های مختلف

تمام سریهای لوران به مرکز $z=1$ تابع $f(z) = 1/(1-z^2)$ را بیابید. داریم

$$1-z^2 = -(z-1)(z+1)$$

با استفاده از سری هندسی

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad (|q| < 1).$$

خواهیم داشت

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \left(-\frac{z-1}{2} \right)} \right]$$

(الف)

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n / 2^{n+1}$$

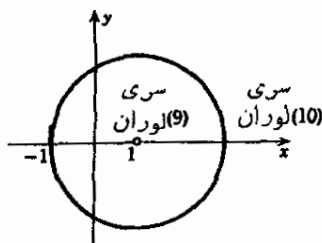
این سری در قرص $|z-1| < 2$ همگراست، یعنی $|z-1| < 2$. ر. ک. شکل ۳۳۰. به همین ترتیب

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{(z-1)} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{z-1} \right)}$$

(ب)

$$= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z-1} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}$$

این سری به ازای $|2/(z-1)| < 1$ همگراست، یعنی $|z-1| > 2$. ر. ک. شکل ۳۳۰. بنابراین از (الف) بدست می‌آوریم



شکل ۳۳۰. مثال ۲

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-1)^{n-1} \quad (9)$$

$$= \frac{-1/2}{z-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{16}(z-1)^2 - + \dots;$$

این سری در ناحیه $0 < |z-1| < 2$ همگراست. همین طور از (ب) به دست می آوریم

$$(10) \quad f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}} = - \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$+ \frac{2}{(z-1)^3} - \frac{4}{(z-1)^4} + \dots + \dots.$$

این سری به ازای $|z-1| > 2$ همگراست.

مثال ۳. $\cot z$

از مسئله ۱۹ آخر بخش ۴.۱۶ می توان به آسانی سری لوران زیر را به دست آورد:

$$\Delta \quad \cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \dots \quad (0 < |z| < \pi).$$

هر گاه $z=a$ تنها نقطه تکین $f(z)$ در C_r باشد (ر. ک. شکل ۳۲۹)، سری لوران (۱) در ناحیه ای مانند

$$(11) \quad 0 < |z-a| < R$$

همگراست. تکینی $f(z)$ در $z=a$ قطب یا تکینی ضروری نامیده می شود بسته به آنکه تعداد توانهای منفی این سری لوران (سری که در یک همسایگی $z=a$ ، و جز در $z=a$ ، همگراست) متناهی باشد یا نامتناهی، تابعی تحلیلی که تکینهایش در صفحه متناهی قطبها هستند تابع برخه ریخت نامیده می شود.

به عنوان مثال، برای تعیین نوع تکینی $1/(1-z^2)$ در $z=1$ (ر. ک. مثال ۲) باید (۹) را به کار ببریم و نه (۱۰) را، زیرا این (۹) است که در ناحیه ای به صورت (۱۱)، با $a=1$ ، همگراست. چون (۹) یک توان منفی دارد تکینی آن قطب است و نه تکینی ضروری [این نتیجه را می شد از (۱۰) هم گرفت ولی این کار درست نبود].

بحث مشروح و مثالهای بیشتر در بخش بعد خواهد آمد.

مسائل بخش ۲.۱۶

توابع زیر را به سربهای لورانی که به ازای $0 < |z| < R$ همگرا هستند بسط دهید و ناحیه دقیق همگرایی را معین کنید.

۱. $\frac{e^{-z}}{z^2}$ ۲. $\frac{e^{1/z^2}}{z^6}$ ۳. $\frac{\cos 2z}{z^2}$
۴. $\frac{1}{z^2(1+z)}$ ۵. $\frac{1}{z^2(1-z^2)}$ ۶. $\frac{1}{z^2(z-3)}$
۷. $\frac{\sinh 2z}{z^3}$ ۸. $\frac{1}{z^4+z^2}$ ۹. $\frac{1}{z^2(1+z)^2}$

۱۰. ثابت کنید بسط لوران يك تابع تحلیلی مفروض در طوقی مفروض یکناست.

۱۱. آیا $\tan(1/z)$ سری لورانی دارد که در ناحیه $0 < |z| < R$ همگرا باشد؟

تمام سریهای تیلور و لوران به مرکز $z=a$ را بیابید و نواحی دقیق همگرایی را معین کنید.

۱۲. $\frac{1}{z^2+1}, a=-i$ ۱۳. $\frac{1}{z^4}, a=1$ ۱۴. $\frac{1}{z^3}, a=i$
۱۵. $\frac{1}{z^2+1}, a=i$ ۱۶. $\frac{1}{1-z^4}, a=-1$ ۱۷. $\frac{2z-1}{z^4-1}, a=0$
۱۸. $\frac{\sin z}{(z-\frac{1}{\pi})^2}, a=\frac{\pi}{4}$ ۱۹. $\frac{e^z}{(z-1)^2}, a=1$ ۲۰. $\frac{2z^2+2z-4}{z^3-4z}, a=2$

۸.۱۶ تحلیلی بودن در بینهایت. صفرها و تکیניה

در این بخش صفرها و تکیניהهای توابع تحلیلی را بررسی می‌کنیم. خواهیم دید که انواع مختلفی از تکیניה وجود دارند که با سری لوران مشخص می‌شوند.

ما این بررسی را در صفحه مختلط توسعه یافته انجام می‌دهیم، زیرا می‌خواهیم رفتار توابع $f(z)$ را وقتی $|z| \rightarrow \infty$ نیز مطالعه کنیم. بنابراین نخست از بخش ۳.۱۳ یادآوری می‌کنیم که صفحه مختلط توسعه یافته با ضمیمه کردن نقطه ناسره ∞ (نقطه در بینهایت) به صفحه مختلط به دست می‌آید. برای تمیز این دو صفحه از هم صفحه اخیر را صفحه مختلط متناهی می‌نامند. در بخش ۳.۱۳ این فرایند را از تبدیل $w=1/z$ به دست آوردیم؛ در آنجا $z=\infty$ دارای نقش $w=0$ بود (و $w=\infty$ نقش معکوس $z=0$ را داشت).

هرگاه بخواهیم تابع داده شده $f(z)$ را به ازای $|z|$ های بزرگ، بررسی کنیم، می‌توانیم قرار دهیم $z=1/w$ و $f(z)=f(1/w)\equiv g(w)$ را در یک همسایگی $w=0$ مطالعه کنیم. تعریف می‌کنیم:

$$(۱) \quad g(0) = \lim_{w \rightarrow 0} g(w).$$

همچنین $f(z)$ را تحلیلی یا تکین درینهایت تعریف می‌کنیم، بسته به اینکه $g(w)$ در $w=0$ به ترتیب تحلیلی یا تکین باشد. (مفهوم تکینی را دربخش ۳۰۱۶ ببینید.)

مثال ۱. توابع تحلیلی یا تکین درینهایت

تابع $f(z) = 1/z^2$ درینهایت تحلیلی است زیرا $g(w) = f(1/w) = w^2$ در $w=0$ تحلیلی است. تابع $f(z) = z^2$ درینهایت تکین است زیرا $g(w) = f(1/w) = 1/w^2$ در $w=0$ تکین است. تابع نمایی e^z درینهایت تکین است چرا که $e^{1/w}$ در $w=0$ تکین است. به همین ترتیب، توابع مثلثاتی $\sin z$ و $\cos z$ ینهایت تکینند.

اگر تابع $f(z)$ درینهایت تحلیلی باشد، می‌توان سری لوران متناظرش را به روش ساده زیر به دست آورد. فرض کنید $f(z)$ درحوزه $|z-a| > R$ (خارج دایره‌ای به شعاع R و به مرکز a) و درینهایت تحلیلی باشد. قرار می‌دهیم

$$z-a = \frac{1}{w} \quad \text{دراین صورت} \quad z = \frac{1}{w} + a$$

و تابع $h(w)$ که عبارت است از

$$h(w) = f\left(\frac{1}{w} + a\right) = f(z)$$

درقرص $|z-a| = |1/w| > R$ تحلیلی است، یعنی $|w| < 1/R$. ازاین رو $h(w)$ دارای یک سری مک‌لورن است، مثلاً

$$h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n = c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \dots \quad \left(|w| < \frac{1}{R}\right)$$

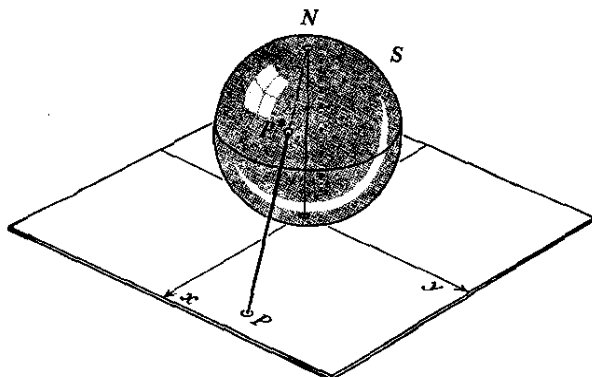
دراین صورت باقراردادن $w = 1/(z-a)$ ، سری لوران زیر را به دست می‌آوریم:

$$(۲) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} = c_0 + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots \quad (|z-a| > R).$$

کره عددی ریمان

نمایش معمول اعداد مختلط z درصفحه مختلط تا وقتی که قدرمطلق اعداد خیلی بزرگ نباشند به سادگی امکان پذیراست. برای $|z|$ های بزرگ این نمایش مناسب نیست و ما دراین حالت ترجیح می‌دهیم که اعداد مختلط را روی کره‌ای نمایش دهیم که به وسیله ریمان توصیه شد و به ترتیب زیر به دست می‌آید (شکل ۳۳۱ را ببینید).

فرض کنید S کره‌ای به قطر ۱ باشد که درمبدأ برصفحه مختلط z مماس است (شکل



شکل ۳۳۱. کره عددی ریمان

۳۳۱). N را «قطب شمال» S (این نقطه تماس بین کره و صفحه قرار دارد) بگیرید. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحه مختلط متناهی باشد. در این صورت پاره خط مستقیمی که دو سرش P و N هستند S را در نقطه P^* قطع می‌کند. فرض می‌کنیم P و P^* متناظر هم باشند. بدین ترتیب تناظری بین نقاط صفحه مختلط متناهی و نقاط S به دست می‌آوریم که P^* نقطه نقش P نسبت به این نگاشت است. اعداد مختلط را که قبلاً در صفحه نمایش داده می‌شدند حالا با نقاط روی S نمایش می‌دهیم. به هر z ، نقطه‌ای روی S متناظر می‌شود. برعکس، هر نقطه‌ای روی S عدد مختلطی مانند z را نمایش می‌دهد جز نقطه N که متناظر با هیچ نقطه‌ای از صفحه مختلط نیست. اما اگر نقطه ناسره $z = \infty$ را معرفی کرده آن را متناظر با N در نظر بگیریم نگاشتی یک به یک از صفحه مختلط توسعه یافته بر روی S خواهیم داشت. کره S کره عددی ریمان نام دارد. نگاشتی را که ما به کار بردیم افکنش کُنجگاری می‌نامند.

بدیهی است که دایره یکه روی «استوا»ی S نگاشته می‌شود. درون دایره یکه با «نیمکره جنوبی» متناظر است و بیرون آن با «نیمکره شمالی». اعداد z که قدرمطلقشان بزرگ است نزدیک به قطب شمال N قرار می‌گیرند. محورهای x و y (و به طور کلی تمام خطوط مستقیمی که از مبدأ می‌گذرند) روی «نصف النهار»ها نگاشته می‌شوند، در حالی که دایره‌ای که مرکزشان در مبدأ است روی «مدار»ها نگاشته می‌شوند. می‌توان نشان داد که هر دایره یا خط مستقیمی در صفحه z روی دایره‌ای بر S نگاشت می‌شود و به علاوه، این نگاشت کُنجگاری، همدیسی است.

صفرها

اگر تابع $f(z)$ در حوزه D تحلیلی بوده و در نقطه $z=a$ در D صفر باشد، گفته می‌شود که $f(z)$ یک صفر در نقطه $z=a$ دارد. اگر نه فقط f بلکه مشتقات $f', \dots, f^{(n-1)}$ آن نیز همگی در $z=a$ صفر باشند و $f^{(n)}(a) \neq 0$ ، در آن صورت می‌گویند $f(z)$ صفری از مرتبه n در نقطه $z=a$ دارد.

گفته می‌شود $f(z)$ صفری از مرتبه n در پینهایت دارد اگر $f(1/z)$ چنین صفری در $z=0$ داشته باشد.

مثلاً، هرگاه $f(a)=0$ ، $f'(a) \neq 0$ ، در این صورت f صفری از مرتبه اول یا يك صفر ساده در $z=a$ دارد. اگر $f(a)=f'(a)=0$ و $f''(a) \neq 0$ ، آنگاه صفر f در $z=a$ از مرتبه دو است، و غیره.

مثال ۲. صفرها

$\sin z$ تابع صفرهای ساده‌ای در $z=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ دارد. تابع $(z-a)^3$ صفری از مرتبه سه در $z=a$ دارد. تابع $1-\cos z$ صفرهایی مرتبه دوم در $z=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ دارد. تابع $1/(1-z)$ صفری ساده در پینهایت دارد. ▲

واضح است که هرگاه $f(z)$ در يك همسایگی نقطه $z=a$ تحلیلی بوده و صفری از مرتبه n در a داشته باشد، از قضیه تیلور، بخش ۳.۱۶، نتیجه می‌شود که ضرایب $b_0, \dots, b_{n-1}$ سری تیلور چنین تابعی به مرکز $z=a$ صفرند و سری به صورت زیر است:

$$f(z) = b_n(z-a)^n + b_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots \quad (b_n \neq 0). \quad (3)$$

$$= (z-a)^n [b_n + b_{n+1}(z-a) + b_{n+2}(z-a)^2 + \dots]$$

نقطه‌ای از مجموعه نقاط S را نقطه تنهای S نامند هرگاه آن نقطه همسایگی داشته باشد که نقطه دیگری از S را در برنگیرد. نقطه b را نقطه انباشتگی S (یا نقطه حدی S) نامند اگر هر همسایگی b (صرف نظر از کوچکیش) شامل حداقل يك نقطه (جز b) از S باشد (و بنابراین پینهایت نقطه از S را در برگیرد). توجه داشته باشید b ممکن است، اما الزامی نیست، که نقطه‌ای از S باشد.

مثال ۳. نقاط تنها و غیر تنها. نقاط انباشتگی

مجموعه نقاط $z=n$ ، ($n=1, 2, \dots$)، صرفاً از نقاط تنها تشکیل شده و در صفحه متاهی نقطه انباشتگی ندارد.

مجموعه نقاط $z=i/n$ ، ($n=1, 2, \dots$)، روی محور موهومی صرفاً از نقاط تنها تشکیل شده و در يك نقطه انباشتگی دارد، یعنی $z=0$ ، این نقطه به مجموعه تعلق ندارد.

مجموعه تمام اعداد مختلط z که به ازای آنها $|z| < 1$ نقطه تنها ندارد. تمام نقاط مجموعه و نیز نقاط روی دایره $|z|=1$ (که به مجموعه تعلق ندارد) نقاط انباشتگی مجموعه اند.

قضیه ۱ (صفرها)

صفرهای تابع تحلیلی $f(z) (\neq 0)$ تنها هستند.

اثبات. (۳) را در نظر می گیریم. فرض کنید $g(z)$ تابع تحلیلی باشد که با سری درون کروسه نشان داده شده است. چون $b_n \neq 0$ داریم $g(a) \neq 0$. در نتیجه، چون $g(z)$ پیوسته است، در یکی از همسایگیهای $z=a$ ، صفر نیست. بنابراین $f(z)$ در آن همسایگی، صفر نیست. (مگر در $z=a$)، یعنی $z=a$ تنها صفر $f(z)$ در آن همسایگی است، و بنابراین تنها است. ▲

تکینها

تکینهای توابع تحلیلی ممکن است از چند نوع مختلف باشند. نخست یادآوری می کنیم که نقطه تکین يك تابع تحلیلی $f(z)$ نقطه ای است که در آن تحلیلی بودن $f(z)$ از میان می رود (ر. ک. بخش ۳۰۱۶). همچنین می گوییم که $f(z)$ در آن نقطه تکین است، یا يك تکینی دارد. تابع $f(z)$ را تکین در بینهایت نامند، هر گاه $f(1/z)$ در $z=0$ تکین باشد.

اگر $f(z)$ در نقطه ای مانند $z=a$ تکینی تنهایی داشته باشد، می توانیم آن را با سری لوران (بخش ۷۰۱۶)

$$(۴) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}$$

که در سرتاسر يك همسایگی $z=a$ (جز در خود $z=a$) اعتبار دارد نمایش داد. سری دوم (۴) را بخش اصلی $f(z)$ در نزدیکی $z=a$ می نامند. ممکن است از n به بعد تمام ضرایب c_n صفر باشند، مثلاً داشته باشیم $c_m \neq 0$ و $c_n = 0$ به ازی هر $n > m$. در این صورت (۴) به صورت زیر در می آید:

$$(۵) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \frac{c_1}{z-a} + \dots + \frac{c_m}{(z-a)^m} \quad (c_m \neq 0).$$

در این حالت که بخش اصلی از تعدادی متناهی جمله تشکیل شده است، تکینی f در $z=a$ را قطب و m را مرتبه قطب می نامند. قطبهای مرتبه اول را قطبهای ساده نیز می نامند. هر گاه تابع تحلیلی f (که در صفحه مختلط تك مقداری است) تکینی غیر از قطب داشته باشد، این تکینی را تکینی ضروری f می نامند.

بنا به تعریف، قطبها تکینهای تنها هستند. تمام تکینهایی که تنها نیستند (مثلاً، تکینی $\tan(1/z)$ در $z=0$) تکینهای ضروریند. تکینی ضروری ممکن است تنها باشد یا نباشد.

۱. یادآوری می کنیم که بنا به تعریف، تابع رابطه ای تك مقداری است (ر. ک. بخش ۴۰۱۲).

اگر (۴) بینهایت c_n غیر صفر داشته باشد، در این صورت تکین $f(z)$ در $z=a$ قطب نیست بلکه تکین ضروری تنهاست.

مثال ۴. قطبها، تکینهای ضروری تابع

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2}$$

قطب ساده‌ای در $z=0$ و قطبی مرتبه پنج در $z=2$ دارد. توابع

$$(۶) \quad e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

و

$$(۷) \quad \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots$$

يك تکین ضروری تنها در $z=0$ دارند.

تابع $\tan(1/z)$ قطبهایی در

$$z = \pm \frac{2}{\pi}, \pm \frac{2}{3\pi}, \dots \quad \text{یا} \quad \frac{1}{z} = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$$

دارد. بنابراین نقطه حلی این نقاط، $z=0$ ، تکین ضروری غیرتهای $\tan(1/z)$ است.

مثال ۵. تکین در بینهایت

چند جمله‌ای $f(z) = 2z + 6z^3$ قطبی مرتبه سه در بینهایت دارد، زیرا

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{z} + \frac{6}{z^3}$$

در $z=0$ چنین قطبی دارد. به‌طور کلی، هر چند جمله‌ای درجه n ، قطبی از مرتبه n در بینهایت دارد.

تابعهای e^z ، $\sin z$ ، $\cos z$ هر کدام يك تکین ضروری تنها در بینهایت دارند، زیرا $e^{1/z}$ ، $\sin(1/z)$ و $\cos(1/z)$ هر کدام يك تکین ضروری تنها در $z=0$ دارند. ▲

می‌گویند تابع $f(z)$ در نقطه $z=a$ تکین برداشتی دارد اگر این تابع در $z=a$ تحلیلی نباشد ولی بتوان بانسبت دادن مقداری مشخص به آن در این نقطه تحلیلش کرد. این تکینها مورد توجه نیستند زیرا قابل برداشتنند.

تابعی را که سرتاسر صفحه متناهی تحلیلی باشد تابع تام می‌خوانند.

هر گاه چنین تابعی در بینهایت نیز تحلیلی باشد، به ازای تمام z ها کراندار است و از قضیه لیوویل (ر. ک. بخش ۶.۱۴) نتیجه می شود که باید يك مقدار ثابت باشد. بنابراین هر تابع تحلیلی غیر ثابت باید در بینهایت تکین باشد، مثلاً چند جمله ایهای (حداقل درجه اول)، e^z ، $\sin z$ ، و $\cos z$ توابع تام هستند و در بینهایت تکینند. هر تابع تحلیلی که تنها تکینیهایش در صفحه متناهی قطبها باشند، تابع برخه ریخت نامیده می شود.

مثال ۶. توابع برخه ریخت

توابع گویایی که مخرج آنها صفر نیست و $\tan z$ ، $\cot z$ ، $\sec z$ و $\csc z$ توابع برخه ریخت هستند.

تقسیم بندی تکینها به قطب و تکینی ضروری صرفاً کاری صوری نیست، زیرا رفتار يك تابع تحلیلی در همسایگی يك تکینی ضروری کاملاً با رفتار آن در همسایگی يك قطب متفاوت است.

مثال ۷. رفتار در نزدیکی قطب

تابع $f(z) = 1/z^2$ قطبی در $z=0$ دارد و $|f(z)| \rightarrow \infty$ هر گاه z از هر طریقی به صفر میل کند.

این مثال نشان می دهد

قضیه ۲ (قطبها)

هر گاه $f(z)$ تحلیلی بوده قطبی در $z=a$ داشته باشد، در آن صورت هر گاه $z \rightarrow a$ خواهیم داشت $|f(z)| \rightarrow \infty$ (ر. ک. مسئله ۳۰).

مثال ۸. رفتار در نزدیکی تکینی ضروری

تابع $f(z) = e^{1/z}$ تکینی ضروری در $z=0$ دارد. این تسایع محدودیتی حول محور موهومی ندارد؛ وقتی z از طریق مقادیر حقیقی مثبت به صفر میل می کند بینهایت می شود، اما وقتی از طریق مقادیر حقیقی منفی $z=0$ ، به سمت صفر میل می کند. این تابع در يك همسایگی به دلخواه کوچک $z \rightarrow 0$ هر مقدار مقروضی مانند $c = c_0 e^{i\alpha} \neq 0$ را به خود می گیرد. در واقع، پس از قراردادن $z = r e^{i\theta}$ ، باید معادله

$$e^{1/z} = e^{(\cos \theta - i \sin \theta)/r} = c_0 e^{i\alpha}$$

را بر حسب r و θ حل کنیم. با مساوی قرار دادن قدر مطلقها و آوندها داریم $e^{(\cos \theta)/r} = c_0$ یا

$$\sin \theta = -\alpha r \quad \text{و} \quad \cos \theta = r \ln c_0$$

از این دو معادله و $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ به دست می آوریم

$$\tan \theta = -\frac{\alpha}{\ln c_0} \text{ و } r^2 = \frac{1}{(\ln c_0)^2 + \alpha^2}$$

از این رو r را می توان با اضافه کردن مضارب 2π به α کوچک کرد، بدون آنکه c تغییر کند.

از این مثال می توان به قضیه مشهور زیر رسید.

قضیه بیکار

هرگاه $f(z)$ تحلیلی بوده و در نقطه a تکین ضروری تنهایی داشته باشد، می تواند در هر همسایگی به دلخواه کوچک a هر مقداری، به جز حداکثر یک مقدار استثنایی را احراز کند.

در مثال ۸، این مقدار استثنایی $z = 0$ است. اثبات قضیه بیکار نسبتاً پیچیده است؛ در مرجع [F11] می توان این اثبات را یافت.

مسائل بخش ۸.۱۶

آیا توابع زیر درینهایت تحلیلبند؟

۱. $z^2 + z^{-2}$ ۲. $z^{-2} + z^{-1}$ ۳. e^z, e^{z^2}, e^{-z}

۴. $e^{1/z}, e^{1/z^2}$ ۵. $\cos z, \sin z$ ۶. $\cosh z, \sinh z$

۷. $\tan z, \cot z$ ۸. $(z^2 + 1)/(z^2 - 1)$ ۹. $z^{-1} \sin z, \csc z$

نقشهای نواحی زیر بر کمره عددی ریمان را توصیف و رسم کنید.

۱۰. $\operatorname{Im} z > 0$ ۱۱. $|z| \geq 5$ ۱۲. $|z| \leq 2$

۱۳. $1/2 \leq |z| \leq 2$ ۱۴. $|z| < 3, |\arg z| < \frac{\pi}{4}$ ۱۵. $-\pi \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$

۱۶. $|\arg z| \leq 3\pi/4$ ۱۷. $|z| > 1, |\arg z| < \frac{\pi}{4}$ ۱۸. $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$

۱۹. موقعیت نسبی z ، $z - z$ ، $\bar{z}$ ، $-\bar{z}$ را در صفحه مختلط و روی کره ریمان توصیف کنید.

۲۰. با استفاده از روشی که در ارتباط با (۲) شرح داده شد، $1/z^4$ را به یک سری لوران از توانهای منفی $1 - z$ بسط دهید.

کمان وصفیهای توابع زیر را تعیین کنید.

۲۱.	$z^2 - 1$	۲۲.	z^2	۲۳.	$(z+i)^2$
۲۴.	$\cos^2 z$	۲۵.	$\sin^2 \pi z$	۲۶.	$(\sin z - 1)^2$
۲۷.	$\cosh^2 z$	۲۸.	$z^2 e^z$	۲۹.	$e^z - e^{z^2}$

۳۰. قضیه ۲ را برای $f(z) = z^{-2} + z^{-1}$ تحقیق کنید. این قضیه را ثابت کنید.

۳۱. فرض کنید $f(z)$ دارای صفری با مرتبه n در $z=a$ باشد. نشان دهید که در این صورت، $f^{(n)}(z)$ دارای صفری از مرتبه $2n$ است، مشتق $f'(z)$ صفری از مرتبه $n-1$ (به شرط $n > 1$) دارد و $1/f(z)$ دارای قطبی از مرتبه n در آن نقطه است. مثالهایی در این مورد بیاورید.

کمان و نوع تکیه‌های توابع زیر را تعیین کنید.

۳۲.	$z + z^{-1}$	۳۳.	$1/(z+a)^2$	۳۴.	$\cosh z$
۳۵.	$e^z + e^{1/z}$	۳۶.	$\tan \pi z$	۳۷.	e^z/z^5
۳۸.	$(\cos z - \sin z)^{-1}$	۳۹.	$\sin(1/z^2)$	۴۰.	$e^{1/z}/(z-1)$

انتگرالگیری به روش مانده‌ها

از آنجا که برای تعیین ضرایب سری لوران (۱)، بخش ۷.۱۶، بدون استفاده از فرمولهای انتگرال (۲)، بخش ۷.۱۶، روشهای گوناگونی موجود است، از فرمول c_n می‌توان برای محاسبه انتگرالهای مختلط به‌نحو بسیار ساده و ظریفی استفاده کرد. c_n را هانده $f(z)$ در $z=a$ می‌نامند. همچنین از این روش کارآمد می‌توان برای محاسبه انتگرالهای حقیقی معین، همان‌طور که در بخشهای ۳.۱۷ و ۴.۱۷ خواهیم دید، استفاده کرد.

پیشنیازهای این فصل: فصول ۱۲، ۱۴، ۱۶.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت F.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱.۱۷ مانده‌ها

هر گاه $f(z)$ در یک همسایگی نقطه $z=a$ تحلیلی باشد، آنگاه، با توجه به قضیه انتگرال کشی برای هرمرزی که در این همسایگی دارد می‌توان نوشت

$$(۱) \quad \int_C f(z) dz = 0$$

اگر $f(z)$ دارای تکیه تنها در $z=a$ بوده و a در داخل C قرار داشته باشد، آنگاه، در حالت کلی، انتگرال (۱) مخالف صفر خواهد بود. در این حالت $f(z)$ را می‌توان به صورت سری لوران زیر نمایش داد:

$$(۲) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots$$

این سری در حوزۀ $R < |z-a| < \infty$ ، که R فاصلۀ a از نزدیکترین نقطۀ تکین $f(z)$ است، همگراست. از (۲) بخش ۷۰۱۶ نتیجه می‌گیریم که ضریب c_1 جملۀ $1/(z-a)$ این بسط عبارت است از

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz.$$

در نتیجه

$$(۳) \quad \int_C f(z) dz = 2\pi i c_1,$$

انتگرالگیری در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی مسیری بسته ساده C که در حوزۀ $R < |z-a| < \infty$ قرار دارد و نقطۀ $z=a$ نقطۀ داخلی آن است صورت می‌گیرد. ضریب c_1 در بسط (۲) تابع $f(z)$ مانند $f(z)$ در $z=a$ نامیده می‌شود، و در مورد آن از نماد

$$(۴) \quad c_1 = \operatorname{Res}_{z=a} f(z)$$

استفاده می‌کنیم.

چنانچه دیدیم بسط لوران را می‌توان به روشهای گوناگون به دست آورد بدون آنکه لازم باشد برای تعیین ضرایب آن از فرمولهای انتگرال استفاده کرد. در نتیجه می‌توان مانده را به یکی از این روشها تعیین کرد و سپس از فرمول (۳) برای محاسبۀ انتگرالهای مرزی استفاده کرد.

مثال ۱. محاسبۀ انتگرال به کمک مانده

از تابع $f(z) = z^{-3} \sin z$ روی دایرۀ یکۀ C ، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، انتگرال بگیرد.

از (۵) بخش ۷۰۱۶ سری لوران

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$$

را به دست می‌آوریم. مشاهده می‌کنیم که $f(z)$ در $z=0$ دارای یک قطب مرتبۀ سوم است، مانده نظیر عبارت است از $c_1 = -1/3!$ ، و از (۳) نتیجه می‌شود که

$$\triangle \quad \int_C \frac{\sin z}{z^3} dz = 2\pi i c_1 = -\frac{\pi i}{3}.$$

قبل از اینکه در محاسبه انتگرالها جلوتر بسرویم روش متعارف ساده‌ای برای تعیین مانده درحالتی که يك قطب داریم ارائه می‌دهیم.
اگر $f(z)$ دارای يك قطب ساده در نقطه $z=a$ باشد، سری لوران نظیر به‌صورت زیر است [ر. ک. (۳) بخش قبل]:

$$f(z) = \frac{c_1}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots \quad (0 < |z-a| < R)$$

که در آن $c_1 \neq 0$. طرفین رابطه را در $(z-a)$ ضرب می‌کنیم:

$$(5) \quad (z-a)f(z) = c_1 + (z-a)[b_0 + b_1(z-a) + \dots].$$

وقتی z به سمت a میل کند، طرف راست به سمت c_1 میل می‌کند، و به‌دست می‌آوریم

$$(6) \quad \operatorname{Res} f(z) = c_1 = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

این اولین نتیجه‌است، فرمولی برای مانده درحالتی که يك قطب ساده داریم.
درمورد يك قطب ساده، فرمول مفید دیگری به‌شرح زیر به‌دست می‌آید. هرگاه $f(z)$ دارای قطبی ساده در $z=a$ باشد، می‌توان نوشت

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

که در آن $p(z)$ و $q(z)$ در $z=a$ تحلیلی هستند و $p(a) \neq 0$ و $q(z)$ دارای يك صفر ساده در $z=a$ است. در نتیجه، $q(z)$ را می‌توان به يك سری تیلور به‌صورت

$$q(z) = (z-a)q'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}q''(a) + \dots$$

بسط داد. ازاین‌رو، بنا به (۶)،

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)p(z)}{(z-a)[q'(a) + (z-a)q''(a)/2 + \dots]};$$

یعنی، درمورد قطب ساده همچنین داریم

$$(7) \quad \operatorname{Res} f(z) = \operatorname{Res}_{z=a} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

مثال ۲. مانده در قطبهای ساده

تابع $f(z) = (4-3z)/(z^2-z)$ در $z=0$ و $z=1$ دارای دو قطب ساده است. از (۷)

به دست می آوریم

$$\triangle \operatorname{Res} f(z) = \left[\frac{4-3z}{2z-1} \right]_{z=0} = -4, \quad \operatorname{Res} f(z) = \left[\frac{4-3z}{2z-1} \right]_{z=1} = 1$$

اکنون به بررسی قطبهای از مرتبه بالا می پردازیم. هرگاه $f(z)$ در نقطه $z=a$ دارای قطبی از مرتبه $m > 1$ باشد، بسط لوران نظیر عبارت است از

$$f(z) = \frac{c_m}{(z-a)^m} + \frac{c_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \frac{c_1}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + \dots$$

که در آن $c_m \neq 0$ و سری در یک همسایگی از $z=a$ ، جز در خود نقطه a ، همگراست. با ضرب طرفین در $(z-a)^m$ به دست می آوریم

$$(z-a)^m f(z) = c_m + c_{m-1}(z-a) + \dots + c_2(z-a)^{m-2} + c_1(z-a)^{m-1} + b_0(z-a)^m + b_1(z-a)^{m+1} + \dots$$

این نشان می دهد که c_1 ، مسانده $f(z)$ در $z=a$ ، اکنون ضریب جمله $(z-a)^{m-1}$ در بسط تیلور تابع $g(z) = (z-a)^m f(z)$ بمرکز $z=a$ است. از این رو، بنا به قضیه تیلور (بخش ۳.۱۶)،

$$c_1 = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

در نتیجه هرگاه $f(z)$ دارای یک قطب مرتبه m در $z=a$ باشد، مانده عبارت است از

$$(A) \quad \operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \right\}.$$

مثال ۳. مانده در یک قطب از مرتبه بالا

تابع

$$f(z) = \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2}$$

دارای یک قطب مرتبه دوم در $z=1$ است، از (A) مانده مربوطه را به دست می آوریم

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{2z}{z+4} \right) = \frac{2}{25}.$$

البته، اگر $f(z)$ تابعی گویا باشد، مانده را از نمایش $f(z)$ بر حسب کسرهایی جزئی نیز می توان به دست آورد.

$$f(z) = \frac{7z^4 - 12z^3 + z^2 + 2z - 1}{(z^2 + z^2)(z-1)^2} = \frac{3}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z+1} - \frac{1}{(z-1)^2}$$

مشاهده می‌کنیم که

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$$

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = 2$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 3$$

مسائل بخش ۱۰۱۲

مطلوب است ماندهٔ هر یک از توابع زیر در نقاط تکیه‌ای آنها.

$$1. \quad \frac{1}{1-z} \quad 2. \quad \frac{z+3}{z+1} \quad 3. \quad \frac{1}{z^2}$$

$$4. \quad \frac{z}{1+z^2} \quad 5. \quad \frac{1}{z^2-1} \quad 6. \quad \frac{1}{(z^2-1)^2}$$

$$7. \quad \frac{z}{z^4-1} \quad 8. \quad \frac{1}{z^4-1} \quad 9. \quad \frac{1}{1-e^z}$$

$$10. \quad \sec z \quad 11. \quad \cot z \quad 12. \quad \tan z$$

در هر یک از مسائل زیر مانده را در نقاط تکیه‌ای که درون دایرهٔ $|z|=1$ قرار دارند پیدا کنید.

$$13. \quad \frac{3z^2}{1-z^4} \quad 14. \quad \frac{z-\frac{1}{z}}{z^2+3z+2} \quad 15. \quad \frac{6-2z}{z^3+3z^2}$$

$$16. \quad \frac{1}{(z^4-1)^2} \quad 17. \quad \frac{z+2}{(z+1)(z^2+16)} \quad 18. \quad \frac{4-3z}{z^3-3z^2+2z}$$

انتگرالهای زیر را با این فرض که C دایرهٔ یکه است (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت) محاسبه کنید.

$$19. \quad \int_C e^{1/z} dz \quad 20. \quad \int_C ze^{1/z} dz \quad 21. \quad \int_C \cot z dz$$

$$22. \quad \int_C \tan z dz \quad 23. \quad \int_C \frac{dz}{\sin z} \quad 24. \quad \int_C \frac{z}{yz+i} dz$$

$$25. \quad \int_C \frac{dz}{\cosh z} \quad 26. \quad \int_C \frac{z^2-4}{(z-2)^4} dz \quad 27. \quad \int_C \frac{z^2+1}{z^2-2z} dz$$

$$\int_C \frac{(z^2+1)}{e^z \sin z} dz \quad .۳۰ \quad \int_C \frac{dz}{1-e^z} \quad .۲۹ \quad \int_C \frac{\sin \pi z}{z^4} dz \quad .۲۸$$

۲.۱۷ قضیه مانده

تا اینجا می‌توانیم آن دسته از انتگرالهای مرزی را که انتگرال آنها فقط دارای يك نقطة تكین تنها در داخل مرز انتگرالگیری است محاسبه کنیم. اکنون خواهیم دید که روش ساده‌ی مزبور را به سادگی می‌توان به حالتی که انتگرال دارای چند نقطة تکین تنها در داخل مرز است تعمیم داد.

قضیه مانده

فرض می‌کنیم $f(z)$ تابعی است که در داخل مسیر بسته ساده C و روی آن، جز به ازای تعدادی متناهی از نقاط منفرد $a_1, a_2, \dots, a_m$ واقع در داخل C ، تحلیلی است. آنگاه

$$(۱) \quad \int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Res} f(z),$$

انتگرال روی C ، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، گرفته می‌شود.

اثبات. هر يك از نقاط تکین a_j را درون دایره‌ای مانند C_j قرار می‌دهیم؛ شعاع این دایره‌ها را آنقدر کوچک اختیار می‌کنیم که تمام m دایره و C از هم مجزا باشند (شکل ۳۳۲). آنگاه $f(z)$ در حوزه همبند چندگانسه D که با C و $C_1, \dots, C_m$ محدود می‌شود و روی تمامی کرانه D تحلیلی است. با توجه به قضیه انتگرال کشی داریم

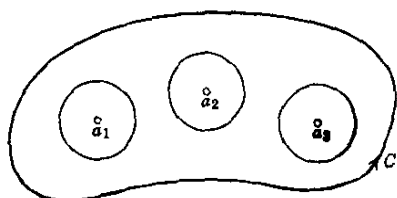
$$(۲) \quad \int_C f(z) dz + \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_m} f(z) dz = 0,$$

انتگرال روی C در جهت عکس عقربه‌های ساعت و سایر انتگرالها در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفته می‌شود (ر. ک. بخش ۳.۱۴). اکنون جهت انتگرالگیری روی $C_1, \dots, C_m$ را عوض می‌کنیم. در نتیجه علامت مقادیر این انتگرالها عوض می‌شود و از (۲) به دست می‌آوریم

$$(۳) \quad \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_m} f(z) dz$$

حالاً کلیه انتگرالها در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته می‌شوند. چون، بنابر (۳) از بخش قبل

$$\int_{C_j} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z)$$



شکل ۳۳۲. قضیه مانده

▲ فرمول (۱) از (۳) نتیجه می‌شود و قضیه به اثبات می‌رسد.

این قضیه مهم در ارتباط با انتگرالهای موهومی و حقیقی کاربردهای گوناگونی دارد. نخست به بررسی چند انتگرال مختلط می‌پردازیم.

مثال ۱. انتگرالگیری به کمک قضیه مانده

تابع $(z^2 - z)/(z^2 - 3z + 2)$ ، جز در نقاط ۰ و ۱ که در این دو نقطه دارای قطب ساده است، تحلیلی است؛ مانده‌ها به ترتیب برابرند با ۴- و ۱ (ر. ک. مثال ۲، بخش قبل). بنابراین

$$\int_C \frac{z^2 - 3z}{z^2 - z} dz = 2\pi i(-4 + 1) = -6\pi i$$

برای هر مسیر بسته ساده C که نقاط $z = 1$ و $z = 0$ را دربر گرفته باشد و

$$\int_C \frac{z^2 - 3z}{z^2 - z} dz = 2\pi i(-4) = -8\pi i$$

برای هر مسیر بسته ساده C که $z = 0$ داخل آن و $z = 1$ خارج آن باشد، انتگرالها در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده‌اند.

مثال ۲. انتگرالی که دارای قطبهای از مرتبه بالا است

از $1/(z^3 - 1)^2$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره $|z - 1| = 1$ انتگرال بگیریم. تابع در $z = 1$ ، $z = e^{2\pi i/3}$ ، و $z = e^{-2\pi i/3}$ دارای قطب مرتبه دوم است. تنها قطب $z = 1$ درون C قرار دارد. با استفاده از (۸)، بخش ۱۰.۱۷، به دست می‌آوریم

$$\int_C \frac{dz}{(z^3 - 1)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} \frac{1}{(z^3 - 1)^2} = 2\pi i \left(-\frac{2}{9} \right) = -\frac{4\pi i}{9}$$

مثال ۳. تأیید نتیجه‌ای که قبلاً به دست آمده است

از $1/(z - a)^m$ (m عدد صحیح مثبت) در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی مسیر بسته ساده دلخواه C که نقطه $z = a$ را دربر دارد انتگرال بگیریم. داریم

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{1}{z-a} = 1, \quad \operatorname{Res}_{z=a} \frac{1}{(z-a)^m} = 0 \quad (m = 2, 3, \dots)$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^m} = \begin{cases} 2\pi i & (m=1) \\ 0 & (m=2, 3, \dots), \end{cases}$$

که با نتیجه مثال ۳، بخش ۱.۱۴ مطابقت دارد.

مسائل بخش ۲.۱۷

از $\frac{3z^2 + 2z - 4}{z^2 - 2z}$ روی مسیرهای C ، که در زیر داده شده‌اند، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیرید.

۱. $|z| = 1$ ۲. $|z| = 3$ ۳. $|z - 4| = 1$

از $\frac{z+1}{z(z-1)(z-2)}$ روی هریک از مسیرهای زیر در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیرید.

۴. $|z - 2| = \frac{1}{4}$ ۵. $|z| = \frac{3}{2}$ ۶. $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$

هریک از انتگرالهای زیر را در حالتی که C دایره یکه است (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت) محاسبه کنید.

۷. $\int_C \frac{3z}{3z-1} dz$ ۸. $\int_C \frac{z}{2z^2-1} dz$ ۹. $\int_C \frac{dz}{z^2-2z}$

۱۰. $\int_C \frac{dz}{z^2+2}$ ۱۱. $\int_C \frac{z+1}{2z^2-z} dz$ ۱۲. $\int_C \frac{z^2-3z^2+1}{(2z+1)(z^2+2)} dz$

۱۳. $\int_C \frac{z}{1+9z^2} dz$ ۱۴. $\int_C \frac{z+1}{z^2-2z^2} dz$ ۱۵. $\int_C \frac{(z+2)^2}{z^2+5z^2+6z^2} dz$

۱۶. $\int_C \tan z dz$ ۱۷. $\int_C \tan \pi z dz$ ۱۸. $\int_C \frac{6z^2-2z+1}{(z-2)(1+2z^2)} dz$

۱۹. $\int_C \tan^2 \pi z dz$ ۲۰. $\int_C \frac{\tan \pi z}{z^2} dz$ ۲۱. $\int_C \frac{e^z}{z^2-5z} dz$

$$\begin{aligned}
 & \int_c \frac{e^z}{\cos \pi z} dz \quad .24 \quad \int_c \frac{e^z}{\cos z} dz \quad .23 \quad \int_c \frac{e^z}{\sin z} dz \quad .22 \\
 & \int_c \frac{\sinh z}{z^2 - i} dz \quad .27 \quad \int_c \coth z dz \quad .26 \quad \int_c \frac{\cosh z}{z^2 - 3iz} dz \quad .25 \\
 & \int_c \frac{e^{z^2}}{\cos \pi z} dz \quad .30 \quad \int_c \frac{\cot z}{z} dz \quad .29 \quad \int_c \cot z dz \quad .28
 \end{aligned}$$

۳.۱۷ محاسبه انتگرالهای حقیقی

قضیه مانده روشی ساده و بسیار ظریف برای محاسبه دسته‌های معینی از انتگرالهای حقیقی پیچیده عرضه می‌کند، و چنانچه خواهیم دید در بسیاری موارد این روش انتگرالگیری را می‌توان به‌کاری سرراست تبدیل کرد.

انتگرال توابعی گویا از $\cos \theta$ و $\sin \theta$

نخست انتگرالهایی از نوع

$$(1) \quad I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

را که در آن $R(\cos \theta, \sin \theta)$ یک تابع گویای حقیقی از $\cos \theta$ و $\sin \theta$ و برفاصله $0 \leq \theta \leq 2\pi$ متناهی است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. با قرار دادن $z = e^{i\theta}$ ، به دست می‌آوریم

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

و مشاهده می‌کنیم که انتگرال تابعی گویا، مثل $f(z)$ ، از z است. وقتی θ از 0 تا 2π تغییر می‌کند، متغیر z یک بار دایره‌ایکه $|z| = 1$ را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دور می‌زند. نظر به اینکه $dz/d\theta = ie^{i\theta}$ ، داریم $d\theta = dz/iz$ و انتگرال مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$(2) \quad I = \int_c f(z) \frac{dz}{iz}$$

انتگرالگیری روی دایره‌ایکه در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت صورت می‌گیرد.

مثال ۱. انتگرالی از نوع (۱)

فرض می‌کنیم p عدد حقیقی ثابتی در فاصله $0 < p < 1$ باشد. انتگرال

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} &= \int_C \frac{dz/iz}{1 - 2p \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z}\right) + p^2} \\ &= \int_C \frac{dz}{i(1 - pz)(z - p)} \end{aligned}$$

را در نظر می‌گیریم. انتگران دارای دو قطب ساده در $z = p < 1$ و $z = 1/p > 1$ است. تنها قطب دوم درون دایره C قرار دارد، و مانده برابر است با

$$\text{Res}_{z=p} \frac{1}{i(1 - pz)(z - p)} = \left[\frac{1}{i(1 - pz)} \right]_{z=p} = \frac{1}{i(1 - p^2)}$$

از قضیه مانده نتیجه می‌شود

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} = 2\pi i \frac{1}{i(1 - p^2)} = \frac{2\pi}{1 - p^2} \quad (0 < p < 1).$$

انتگرالهای ناسره توابع گویا

اکنون به بررسی انتگرالهای حقیقی از نوع

$$(۲) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

می‌پردازیم. چنین انتگرالی، که فاصله انتگرالگیری در آن متناهی نیست. انتگرال ناسره نامیده می‌شود و به معنی زیر است:

$$(۲') \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

هرگاه هر دو حد موجود باشند، آنگاه می‌توان میل به $-\infty$ و ∞ را درهم ادغام کرده چنین نوشت.^۱

۱. عبارت طرف راست (۴) را مقدار اصلی کشی انتگرال می‌نامند؛ این مقدار ممکن است حتی در صورت عدم وجود حدودی که در (۴') آمده‌اند موجود باشد. برای نمونه

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x dx = \infty \quad \text{ولی} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r x dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) = 0$$

$$(۲) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx.$$

فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ که در (۳) آمده يك تابع گویای حقیقی باشد که مخرج آن به‌ازای هر مقدار حقیقی x مخالف صفر است و درجه آن لااقل دو درجه بیشتر از درجه صورت است. در این صورت حدودهایی که در (۴) آمده‌اند وجود دارند، و می‌توان انتگرالگیری را از (۲) شروع کرد. انتگرال مرزی متناظر، یعنی

$$(۴^*) \quad \int_C f(z) dz$$

روی مسیر C ، مطابق شکل ۳۳۳، را در نظر می‌گیریم. نظر به اینکه $f(x)$ گویا است، $f(z)$ دارای تعدادی متناهی قطب در نیم صفحه فوقانی است، و اگر r را به قدر کافی بزرگ اختیار کنیم، C همه این قطبها را در برمی‌گیرد. آنگاه بنا به قضیه مانده به دست می‌آوریم

$$\int_C f(z) dz = \int_S f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z)$$

مجموع بالا تمام مانده‌های $f(z)$ را در نقاطی از نیم صفحه فوقانی که در آنها $f(z)$ دارای قطب است در برمی‌گیرد. از اینجا نتیجه می‌گیریم

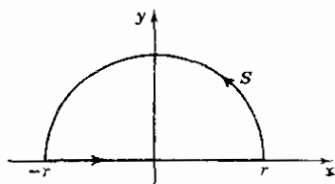
$$(۵) \quad \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res } f(z) - \int_S f(z) dz.$$

ثابت می‌کنیم که اگر $r \rightarrow \infty$ ، مقدار انتگرال روی نیمدایره S به سمت صفر میل می‌کند. هرگاه قرار دهیم $z = re^{i\theta}$ ، آنگاه S با ثابت r نمایش داده می‌شود، و هنگامی که z روی S حرکت می‌کند متغیر θ از ۰ تا π تغییر می‌کند. چون درجه مخرج $f(z)$ لااقل دو واحد از درجه صورت بیشتر است، به‌ازای مقادیر ثابت و بزرگ k و r_0 داریم

$$|f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \quad (|z| = r > r_0).$$

با استفاده از (۴) بخش ۲.۱۴ به دست می‌آوریم

$$\left| \int_S f(z) dz \right| < \frac{k}{r^2} \pi r = \frac{k\pi}{r} \quad (r > r_0).$$



شکل ۳۳۳. مسیر انتگرال مرزی در (۴*)

در نتیجه، وقتی r به سمت بینهایت میل می کند، مقدار انتگرال روی S به سمت صفر میل می کند، و (۴) و (۵) نتیجه می دهند

$$(۶) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi i \sum \text{Res } f(z),$$

مجموع بالا روی همه مانده های $f(z)$ که با قطبهای $f(z)$ در نیم صفحه فوقانی متناظرند محاسبه می شود.

مثال ۲. يك انتگرال ناسره از ۰ تا ∞

با استفاده از (۶)، ثابت می کنیم

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

در حقیقت $f(z) = 1/(1+z^4)$ دارای چهار قطب در نقاط

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad z_3 = e^{\frac{5\pi i}{4}}, \quad z_4 = e^{\frac{7\pi i}{4}}$$

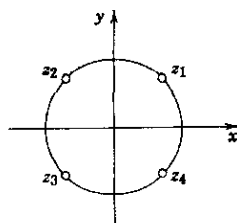
است. دو قطب اول در نیم صفحه فوقانی قرار دارند (شکل ۳۳۴). با توجه به (۷) از ۱۰۱۷ می یابیم

$$\text{Res } f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'} \right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=z_1} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}} = -\frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

$$\text{Res } f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'} \right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=z_2} = \frac{1}{4} e^{-\frac{9\pi i}{4}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

بنا به (۱) از بخش ۸.۱۲ و (۶) از این بخش

$$(۷) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi i}{4} \left(-e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{-\frac{\pi i}{4}} \right) = \pi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$



شکل ۳۳۴. مثال ۲

چون $1/(1+x^4)$ تابعی زوج است،

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

از اینجا و (۷) می‌توان نتیجه مورد نظر را به دست آورد.

مسائل بخش ۳.۱۷

انتگرالهای زیر را که شامل کسینوس و سینوس هستند محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \frac{1}{3} \cos \theta} \quad .2 \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} \quad .1$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{25 - 24 \cos \theta} \quad .4 \qquad \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{k + \cos \theta} \quad (k > 1) \quad .3$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{17 - 8 \cos \theta} d\theta \quad .6 \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 3 \cos \theta} d\theta \quad .5$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{13 - 12 \cos 2\theta} d\theta \quad .8 \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{3 + \sin \theta} d\theta \quad .7$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta \quad .10 \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5/4 - \sin \theta} \quad .9$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} d\theta \quad .12 \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{26 - 10 \cos 2\theta} d\theta \quad .11$$

انتگرالهای ناسره زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad .15 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad .14 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad .13$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(4+x^2)^2} dx \quad .18 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad .17 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 16} \quad .16$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx \quad .20 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx \quad .19$$

$$۲۱. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \quad ۲۲. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$$

$$۲۳. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{-2x+2} dx \quad ۲۴. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

۲۵. مسئله ۱۳ را به کمک روشهای مقدماتی حل کنید. جوابهای مسائل ۱۸ و ۱۹ را بدون محاسبه به دست آورید.

۴۰۱۷ چند نوع دیگر از انتگرالهای حقیقی

دسته‌های دیگری از انتگرالهای حقیقی وجود دارند که با اعمال قضیه مانده در مورد انتگرالهای مختلط مناسب می‌توان آنها را محاسبه کرد. در عمل چنین انتگرالهایی در رابطه با تبدیلات انتگرالی یا نمایش توابع خاص پدیدار می‌شوند. در این بخش دودسته از این انتگرالها را بررسی خواهیم کرد. یکی از این دودسته در مسائلی که شامل نمایش انتگرال فوریه هستند، پیش می‌آید (بخش ۹۰۱۰). دسته دیگر از انتگرالهای حقیقی تشکیل شده است که انتگرال آنها در نقطه‌ای از فاصله انتگرالگیری بینهایت است.

انتگرالهای فوریه

انتگرالهای حقیقی که به شکل

$$(۱) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx \, dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx \, dx$$

هستند در ارتباط با انتگرال فوریه پیش می‌آیند.

اگر $f(x)$ تابعی گویا باشد که در مفروضاتی که در رابطه با (۳) بخش ۳۰۱۷ ذکر شده است صدق کند، آنگاه می‌توان انتگرالهای (۱) را با روشی شبیه به روش محاسبه انتگرالهای (۳) بخش قبل حساب کرد. در واقع، می‌توان انتگرال متناظر، یعنی

$$(s \text{ حقیقی و مثبت}) \quad \int_C f(z) e^{isz} \, dz$$

را بر مرز C از شکل ۳۳۳ در نظر گرفت و به جای (۴)، بخش ۳۰۱۷، نتیجه گرفت

$$(۲) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} \, dx = 2\pi i \sum \text{Res} [f(z) e^{isz}], \quad (s > 0)$$

در اینجا جمع روی مانده‌های $f(z) e^{isz}$ در قطبهای آن در نیم صفحه فوقانی بسته شده است. با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی در طرفین (۲) به دست می‌آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx \, dx = -\pi \sum \text{Im Res} [f(z)e^{isz}],$$

(۳) ($s > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx \, dx = \pi \sum \text{Re Res} [f(z)e^{isz}].$$

یادآوری می‌کنیم که (۶) از ۳.۱۷ با اثبات اینکه مقدار انتگرال بر روی نیم‌دایره S شکل ۳۳۳ وقتی $r \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می‌کند، به دست آمده است. حال برای به دست آوردن (۲) باید همان مطلب را در مورد انتگرال مرزی حاضر اثبات کنیم. این کار را می‌توان به شرح زیر انجام داد. چون S در نیم صفحه فوقانی $y \geq 0$ قرار داد و $s > 0$ ، نتیجه می‌گیریم

$$|e^{isz}| = |e^{isy}| |e^{-sy}| = e^{-sy} \leq 1 \quad (s > 0, y \geq 0).$$

از اینجا نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$|f(z)e^{isz}| = |f(z)| |e^{isz}| \leq |f(z)| \quad (s > 0, y \geq 0).$$

که مسئله حاضر را به همان مسئله بخش قبل تبدیل می‌کند و به همان نحو مشاهده می‌کنیم که مقدار انتگرال مورد نظر وقتی که r به سمت بینهایت میل می‌کند به سمت صفر می‌گراید، و (۲) به اثبات می‌رسد.

مثال ۱. کاربردی از (۳)

می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^2 + x^2} \, dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{k} e^{-ks} \quad (s > 0, k > 0).$$

در حقیقت $e^{isz}/(k^2 + z^2)$ تنها یک قطب، در نیم صفحه فوقانی دارد، و نقطه $z = ik$ یک قطب ساده آن است؛ از (۷) بخش ۱۰.۱۷ به دست می‌آوریم

$$\text{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} = \left[\frac{e^{isz}}{2z} \right]_{z=ik} = \frac{e^{-ks}}{2ik}.$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isz}}{k^2 + x^2} \, dx = 2\pi i \frac{e^{-ks}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-ks}$$

از اینجا حکم ثابت می‌شود [(۱۴) بخش ۹.۱۰ را نیز ببینید].

انواع دیگری از انتگرالهای ناسره حقیقی

نوع دیگری از انتگرال ناسره انتگرال معین

$$(۴) \quad \int_A^B f(x) dx$$

است که انتگران آن در نقطه‌ای مانند a از فاصله انتگرالگیری بینهایت می‌شود، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$$

آنگاه انتگرال (۴) بدین معنی است که

$$(۵) \quad \int_A^B f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A^{a-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^B f(x) dx$$

در اینجا هم ε و هم η به طور مستقل و با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می‌کنند. امکان دارد وقتی که ε و η مستقلاً به سمت صفر میل می‌کنند، هیچ‌یک از این انتگرالها موجود نباشد ولی

$$(۶) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_A^{a-\varepsilon} f(x) dx + \int_{a+\varepsilon}^B f(x) dx \right]$$

وجود داشته باشد؛ این حد مقدار اصلی کُشی انتگرال نامیده می‌شود و اغلب اوقات چنین نوشته می‌شود:

$$\text{pr.v.} \int_A^B f(x) dx$$

مثلاً

$$\text{pr.v.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} \right] = 0 ;$$

مقدار اصلی وجود دارد، اگرچه خود انتگرال بی‌معنی است. کل مطلب کاملاً شبیه موضوعاتی است که در قسمت دوم بخش قبل مورد بحث قرار گرفته است.

برای محاسبه انتگرالهای ناسره‌ای که انتگران آنها قطبهایی روی محور حقیقی دارد، از مسیری استفاده می‌کنیم که بانیمدایه‌های کوچکی به مرکز نقاط تکین تکیه‌ها را دور می‌زند؛ این موضوع در مثال زیر تشریح شده است.

مثال ۲. انتگرانی که يك قطب روی محور حقیقی دارد. انتگرال سینوسی
نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

این حد انتگرال سینوسی $\text{Si}(x)$ است وقتی که $x \rightarrow \infty$ د.ک. بخش ۰.۹۰۱۰) تابع $(\sin z)/z$ را مورد بررسی قرار نمی‌دهیم زیرا این تابع رفتار مناسبی در بینهایت ندارد. بدین جهت e^{iz}/z را، که قطب ساده‌ای در $z=0$ دارد بررسی می‌کنیم، و از آن روی مرزی که در شکل ۳۳۵ نشان داده شده است انتگرال می‌گیریم. چون e^{iz}/z در داخل و روی دایره C تحلیلی است، از قضیه انتگرال کشی نتیجه می‌شود

$$(۷) \quad \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

نشان می‌دهیم که وقتی R به سمت بینهایت میل کند، مقدار انتگرال بر روی نیم‌دایره بزرگ C_1 به سمت صفر میل می‌کند. اگر بنویسیم $z = Re^{i\theta}$ خواهیم داشت $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ و بنابراین $dz/z = i d\theta$

$$\left| \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{iz} i d\theta \right| \leq \int_0^\pi |e^{iz}| d\theta \quad (z = Re^{i\theta}).$$

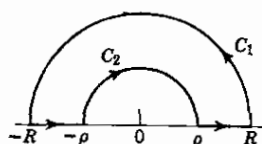
انتگران طرف راست را می‌توان چنین نوشت:

$$|e^{iz}| = |e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)}| = |e^{iR \cos \theta}| |e^{-R \sin \theta}| = e^{-R \sin \theta}$$

از اینجا و با استفاده از $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |e^{iz}| d\theta &= \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \\ &= 2 \left[\int_0^\epsilon e^{-R \sin \theta} d\theta + \int_\epsilon^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \right] \end{aligned}$$

در اینجا ϵ مقدار دلخواهی بین ۰ و $\pi/2$ است. حداکثر قدر مطلق انتگران در انتگرالهای اول و دوم طرف راست به ترتیب برابر ۱ و $e^{-R \sin \epsilon}$ است، چرا که در فاصله انتگرالگیری انتگران یک تابع نزولی یکنوا از θ است. در نتیجه تمامی عبارت طرف راست کوچکتر است از



شکل ۳۳۵. مثال ۲

$$\begin{aligned} & 2 \left[\int_0^\varepsilon d\theta + e^{-R \sin \varepsilon} \int_\varepsilon^{\pi/2} d\theta \right] \\ &= 2 \left[\varepsilon + e^{-R \sin \varepsilon} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right] < 2\varepsilon + \pi e^{-R \sin \varepsilon} \end{aligned}$$

و در مجموع

$$\left| \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| < 2\varepsilon + \pi e^{-R \sin \varepsilon}$$

نخست ε را به اندازه دلخواه کوچک می گیریم. آنگاه، می توانیم، درحالی که ε را ثابت نگه داشته ایم، با انتخاب R ی که به قدر کافی بزرگ است جمله آخر را به اندازه دلخواه کوچک کنیم. به این ترتیب، وقتی که R به سمت بینهایت میل می کند مقدار انتگرال روی C_1 به سمت صفر میل می کند.

در مورد انتگرال بر روی نیمدایره کوچک C_2 در شکل ۳۳۵ داریم

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_2} \frac{dz}{z} + \int_{C_2} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz.$$

مقدار انتگرال اول طرف راست $-\pi i$ است. انتگران انتگرال دوم در $z=0$ تحلیلی است، و بنابراین وقتی که $\rho \rightarrow 0$ قدر مطلق آن کراندار می ماند، از اینجا واز (۴) بخش ۲.۱۴ نتیجه می گیریم که وقتی $\rho \rightarrow 0$ مقدار انتگرال به صفر میل می کند. با توجه به (۷) به دست می آوریم

$$\text{pr. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = +\pi i$$

قسمتهای موهومی در دو طرف با هم مساویند:

$$(A) \quad \text{pr. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

انتگران (A) در $x=0$ تکین نیست. به علاوه چون به ازای x های مثبت تابع $1/x$ نزولی است، مساحت زیر منحنی انتگران بین دو صفر مثبت متوالی به طریقی یکنوا نزول می کند، یعنی قدر مطلقهای انتگرالهای

$$I_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad n=0, 1, \dots$$

تشکیل دنباله نزولی یکنوای $|I_1|, |I_2|, \dots$ را می دهد وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $I_n \rightarrow 0$ چون این انتگرالها یک درمیان مثبت و منفی هستند، از مبحث لایبنیتس بخش ۴.۱۵ نتیجه

می‌شود که سری نامتناهی $I_0 + I_1 + I_2 + \dots$ همگراست. بدیهی است که مجموع سری برابر انتگرال زیر است:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx$$

و بنابراین وجود دارد. به همین نحو می‌توان نشان داد که انتگرال از ۰ تا $-\infty$ موجود است. از این رو لازم نیست که در (۸) مقدار اصلی را در نظر بگیریم و

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

چون انتگران تابعی زوج است، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. ▲

مسائل بخش ۴.۱۷

۱. (۳) را از (۲) به دست آورید.

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx \quad ۳.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2} dx \quad ۲.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx \quad ۵.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{1+x^4} dx \quad ۴.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1} dx \quad ۷.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1} dx \quad ۶.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad ۸.$$

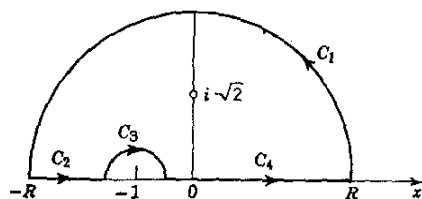
۹. با انتگرالگیری از e^{-z^2} روی کرانه مستطیلی که رأسهای آن a ، $-a$ ، $a+ib$ ، $-a+ib$ است، وقتی $a \rightarrow \infty$ و با استفاده از

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \quad \text{که نشان دهید،} \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

۱۰. با انتگرالگیری روی مرزی که در شکل زیر دیده می‌شود

$$\text{pr. v.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$$

را بیابید.



مسئله ۱۰

توابع تحلیلی مختلط و نظریه پتانسیل

معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ یکی از مهمترین معادلات با مشتق جزئی در ریاضیات مهندسی است، چرا که این معادله در مباحث مربوط به میدانهای گرانشی (بخش ۸.۸)، میدانهای الکترواستاتیک (بخش ۱۱.۱۱)، هدایت گرما در حالت پابرجا (بخش ۵.۱۳)، جریان سیال تراکم ناپذیر، و غیره ظاهر می شود. نظریه جوابهای این معادله نظریه پتانسیل نامیده می شود.

در «حالت دوبعدی» وقتی که u فقط به دو مختص دکارتی x و y بستگی دارد، معادله لاپلاس چنین می شود:

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

چنانکه می دانیم جوابهای این معادله رابطه نزدیکی با توابع تحلیلی دارند (ر. ک. بخش ۵.۱۲). حال این رابطه و نتایج آن را با تفصیل بیشتر مورد بررسی قرار می دهیم و با مثالهای عملی مأخوذ از هیدرودینامیک و الکترواستاتیک موضوع را تشریح می کنیم. در بخش ۳.۱۸ مشاهده خواهیم کرد از نتایجی که در قسمت توابع تحلیلی به دست آمده است می توان برای تحلیل خواص عمومی مختلف توابع همساز استفاده کرد. در پایان، فرمول کلی مهمی (فرمول انتگرال پواسن) برای حل مسائل با مقدار کرانه ای که شامل معادله لاپلاس هستند در یک قرص مستدیر به دست خواهیم آورد.

پیشنیاز این فصل: فصول ۱۲ تا ۱۵.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت F .

۱. در حالت سه بعدی چنین رابطه نزدیکی وجود ندارد.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۰۱۸ میدانهای الکترواستاتیک

نیروی الکتریکی جاذبه یا دافعه بین ذرات باردار از قانون کولن پیروی می کند. این نیرو برابر گرادیان تابعی مانند u ، موسوم به پتانسیل الکترواستاتیک است، و در نقاطی که بار وجود ندارد، u جواب معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = 0$$

است. ر. ک. بخش ۱۱.۱۱. سطوح ثابت u را سطوح هم پتانسیل می نامند. در هر نقطه P ، گرادیان u به سطح ثابت u که از آن نقطه می گذرد عمود است، یعنی، نیروی الکتریکی امتدادی دارد که بر سطح هم پتانسیل عمود است.

مثال ۱. پتانسیل بین دو صفحه موازی

پتانسیل میدان بین دو صفحه هادی موازی نامتناهی (شکل ۳۳۶) را که به ترتیب در پتانسیلهای U_1 و U_2 قرار گرفته اند پیدا کنید. از شکل صفحات نتیجه می شود که u تنها به x بستگی دارد و معادله لاپلاس به صورت $u'' = 0$ درمی آید. با دو بار انتگرال گیری به دست می آوریم $u = ax + b$ که در آن ثابتهای a و b به کمک مقادیر کرانه ای u در روی صفحات مشخص می شوند. مثلاً، هرگاه صفحات با $x = -1$ و $x = 1$ متناظر باشد، جواب عبارت است از

$$u(x) = \frac{1}{4}(U_2 - U_1)x + \frac{1}{4}(U_2 + U_1).$$

سطوح هم پتانسیل صفحات موازی هستند.

مثال ۲. پتانسیل استوانه های هم محور

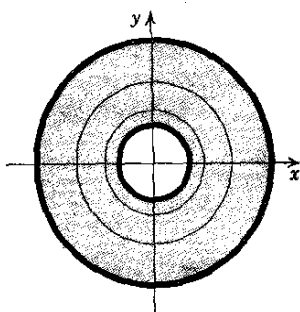
مطلوب است پتانسیل بین دو استوانه هادی هم محور که از دوطرف تائینهایت ادامه دارد (شکل ۳۳۷) و پتانسیلهای آنها به ترتیب U_1 و U_2 است. در اینجا به دلیل تقارن، u فقط به $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ بستگی دارد و معادله لاپلاس چنین می شود:

$$ru'' + u' = 0 \quad [\text{ر. ک. (۴) بخش ۹.۱۱}]$$

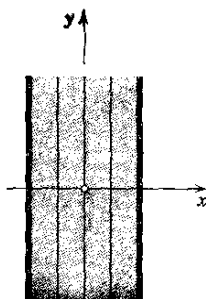
با تفکیک متغیرها و انتگرال گیری به دست می آوریم

$$u = a \ln r + b, u' = \frac{a}{r}, \ln u' = -\ln r + \tilde{a}, \frac{u''}{u'} = -\frac{1}{r}$$

a و b با مقادیر u بر روی استوانه ها مشخص می شوند. اگرچه هادی نامتناهی وجود ندارد،



شکل ۳۳۷. پتانسیل مربوط به مثال ۲



شکل ۳۳۶. پتانسیل مربوط به مثال ۱

ولی میدان حاصل از يك هادی ایده آل که در اینجا مورد بحث قرار گرفت به طور تقریبی میدان حاصل از يك هادی متناهی طولانی را در نقاطی که از دوانتهای استوانه بسیار دور است به دست می دهد.

هر گاه پتانسیل u فقط به مختصات دکارتی x و y بستگی داشته باشد، آنگاه معادله لاپلاس چنین می شود:

$$(۱) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

سطوح هم پتانسیل ثابت u به صورت خطوط هم پتانسیل در صفحه xy ظاهر می شوند. فرض می کنیم که $u(x, y)$ همساز است، یعنی مشتقات جزئی مرتبه دوم آن پیوسته هستند. در این صورت اگر $v(x, y)$ تابع همساز مزدوج $u(x, y)$ باشد (ر. ک. بخش ۵.۱۲)، تابع

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

تابعی تحلیلی از $z = x + iy$ خواهد بود. این تابع را پتانسیل مختلط نظیر پتانسیل حقیقی u می نامند. یادآوری می کنیم که مزدوج هر تابع مفروض u ، صرف نظر از يك مقدار ثابت به طور یکتا مشخص می شود.

چون خطوط ثابت v خطوط هم پتانسیل ثابت u را تحت زاویه قائمه قطع می کنند [جز در نقاطی که $F'(z)$ در آنها صفر است]، بامیدان الکتریکی هم جهت هستند و، بنابراین، خطوط نیرو نامیده می شوند.

مثال ۳. پتانسیل مختلط

در مثال ۱، $v = ay$ يك مزدوج مختلط u است. در نتیجه پتانسیل مختلط عبارت است از

$$F(z) = az + b = ax + by + iay,$$

و خطوط نیرو و خطهای مستقیمی هستند که بامحور x موازیند.

مثال ۴. پتانسیل مختلط

در مثال ۲ داریم

$$u = a \ln r + b = a \ln |z| + b$$

که دارای مزدوج $v = a \arg z$ است. پتانسیل مختلط عبارت است از $F(z) = a \ln z + b$ و خطوط نیرو و خطهای مستقیمی هستند که از مبدأ می گذرند. همچنین می توان $F(z)$ را به پتانسیل مختلط يك خط منبع که نقطه برخورد آن با صفحه xy مبدأ است تعبیر کرد. ▲
اغلب اوقات می توان پتانسیلهای پیچیده تری را از ترکیب پتانسیلها به دست آورد. این موضوع در مثال زیر تشریح شده است.

مثال ۵. پتانسیل مختلط يك جفت خط منبع

پتانسیل مختلط يك جفت خط منبع هم قوه را که بارشان با هم مخالف است و در نقاط $z = x_1$ و $z = x_2$ قرار دارند معین کنید. از مثالهای ۲ و ۴ نتیجه می شود که پتانسیل خطهای منبع به ترتیب عبارت است از

$$u_2 = c \ln |z - x_2| \quad \text{و} \quad u_1 = -c \ln |z - x_1|$$

اینها قسمتهای حقیقی پتانسیلهای مختلط

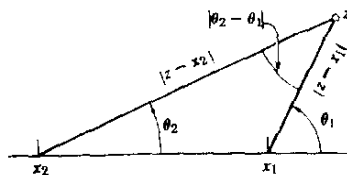
$$F_2(z) = c \ln(z - x_2) \quad \text{و} \quad F_1(z) = -c \ln(z - x_1)$$

هستند. در نتیجه، پتانسیل مختلط حاصل از ترکیب دو خط منبع عبارت است از

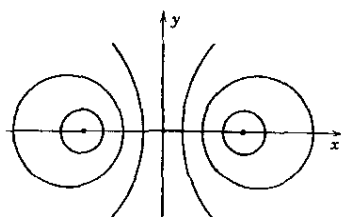
$$(۲) \quad F(z) = F_1(z) + F_2(z) = c \ln \frac{z - x_2}{z - x_1}$$

خطوط هم پتانسیل منحنيهای

$$u = \operatorname{Re} F(z) = c \ln \frac{|z - x_2|}{|z - x_1|} = \text{ثابت}$$



شکل ۳۳۸. مثال ۵



شکل ۳۳۹. میدان پتانسیل دوخط متبوع هم قوه که بار آنها باهم مخالف است

هستند که خواننده با يك محاسبه مستقیم می تواند نشان دهد این خطوط دایره هستند. خطوط نیرو

$$v = \operatorname{Im} F(z) = c \arg \frac{z - x_2}{z - x_1} = c [\arg (z - x_2) - \arg (z - x_1)] = \text{ثابت} ,$$

یعنی

$$v = c(\theta_2 - \theta_1) = \text{ثابت}$$

(ر. ک. شکل ۳۳۸). اکنون، $|\theta_2 - \theta_1|$ زاویه بین خطوطی است که z را به x_1 و x_2 وصل می کنند. بنابراین، خطوط نیرو منحنیهایی هستند که در طول هر يك از آنها قطعه خط $x_1 x_2$ با زاویه ثابت دیده می شود، این منحنیها، همان طور که در هندسه مقدماتی آموختیم تمام قوسهای مستدیری هستند که بر روی $x_1 x_2$ ساخته می شوند. تابع (۲) را می توان به پتانسیل مختلط خازنی مرکب از دو استوانه مستدیر که دارای محورهای موازی ولی مختلف هستند نیز تعبیر کرد (شکل ۳۳۹).

مسائل بخش ۱۰۱۸

مطلوب است پتانسیل u بین دو استوانه هم محور ناسمتاهی که شعاعهای آنها r_1 و r_2 ($r_2 > r_1$) است و به ترتیب در پتانسیلهای U_1 و U_2 قرار گرفته اند؛ در حالیکه

$$U_2 = 100V, U_1 = 0, r_2 = 5, r_1 = 1 \quad ۱.$$

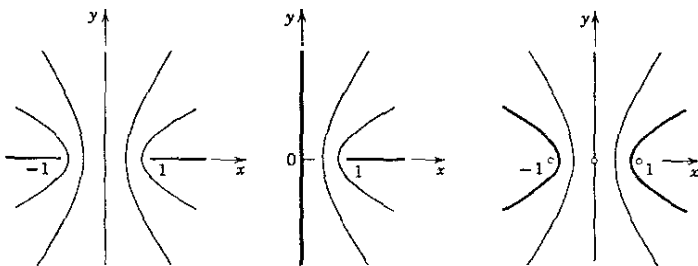
$$U_2 = 110V, U_1 = -110V, r_2 = 2, r_1 = 0.5 \quad ۲.$$

$$U_2 = 200V, U_1 = 100V, r_2 = 20, r_1 = 2 \quad ۳.$$

$$U_2 = 50V, U_1 = 100V, r_2 = 6, r_1 = 3 \quad ۴.$$

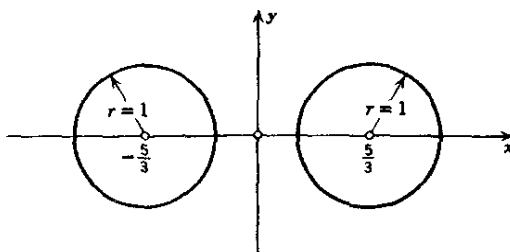
۵. خطوط هم پتانسیل مختلط $F(z) = 1/z$ را بیابید و نمودار این خطوط را رسم کنید.

۶. پتانسیل دوخط منبع را، که بار آنها باهم مخالف است، و در نقاط $z = a$ و $z = -a$ قرار دارند بیابید. نمودار خطوط هم پتانسیل را رسم کنید.
۷. مطلوب است پتانسیل دوخط منبع $z = a$ و $z = -a$ که بارشان یکسان است.
۸. نشان دهید که $F(z) = \cos^{-1} z$ را می توان به پتانسیل مختلط مربوط به هریک از شکلهای زیر تعبیر کرد.



مسئله ۸

۹. نشان دهید که $F(z) = \cosh^{-1} z$ را می توان به پتانسیل مختلط بین دو استوانه بیضوی هم کانون تعبیر کرد.
۱۰. پتانسیل بین استوانه های نامتناهی شکل زیر، u ، را طوری بیابید که روی استوانه سمت چپ $u = -1$ و روی استوانه سمت راست $u = 1$ باشد. راهنمایی. از پتانسیلی که در مسئله ۶ داشتیم استفاده کنید.



مسئله ۱۰

۲۰۱۸ جریان سیال دوبعدی

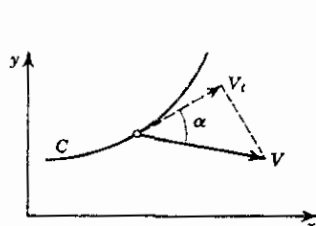
توابع همساز در هیدرودینامیک نقش مهمی دارند. برای تشریح این موضوع به بررسی حرکت پابرجای دوبعدی يك سیال غیرچسبنده می پردازیم. در اینجا منظور از «دوبعدی»

این است که حرکت سیال در تمام صفحات موازی با صفحهٔ xy یکسان است، سرعت موازی صفحه است. در نتیجه کافی است حرکت سیال در صفحهٔ xy را بررسی کنیم. «پابرجا» بدین معنی است که سرعت مستقل از زمان است.

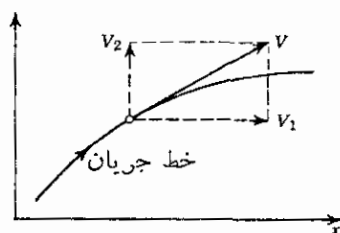
در هر نقطهٔ (x, y) جریان دارای سرعتی معین است که با اندازه و امتدادش مشخص می‌شود و بنا براین یک بردار است. چون در صفحهٔ مختلط هر عدد a یک بردار (بردار ی که مبدأ را به نقطهٔ نظیر a وصل می‌کند) را نمایش می‌دهد، می‌توان سرعت جریان را بایک متغیر مختلط، مثل

$$(۱) \quad V = V_1 + iV_2$$

نمایش داد. آنگاه V_1 و V_2 مؤلفه‌های سرعت در امتداد محورهای x و y هستند، و V مماس بر مسیر حرکت ذرات سیال است. چنین مسیری خط جریان حرکت نامیده می‌شود. ر. ک. شکل ۳۴۰.



شکل ۳۴۱. مؤلفهٔ مماسی سرعت نسبت به منحنی C



شکل ۳۴۰. سرعت

اکنون منحنی هموار دلخواه C را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم متغیر حقیقی V_1 مؤلفهٔ سرعت V در امتداد مماس بر C باشد (شکل ۳۴۱). اگر طول قوس C را با s نشان دهیم آنگاه مقدار انتگرال روی خط

$$(۲) \quad \int_C V_1 ds,$$

که در طول C و در جهت افزایش مقادیر s محاسبه می‌شود، گردش سیال در طول C نامیده می‌شود. از تقسیم گردش بر طول C ، سرعت میانگین^۱ جریان در طول منحنی C به

۱. تعاریف،

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \text{مقدار میانگین } f \text{ در فاصله } a \leq x \leq b$$

$$\frac{1}{l} \int_C f(s) ds = \text{مقدار میانگین } f \text{ روی } C \text{ (طول } l=C \text{)}$$

$$\frac{1}{A} \iint_D f(x, y) dx dy = \text{مقدار میانگین } f \text{ روی } D \text{ (مساحت } A=D \text{)}$$

دست می‌آید. اکنون

$$V_t = |V| \cos \alpha \quad (\text{ر. ک. شکل } ۳۴۱)$$

در نتیجه V_t برابر حاصل ضرب عددی (بخش ۵.۶) V و بردار یک‌ه مماس بر C ، یعنی (ر. ک. بخش ۲.۱۳)

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds}$$

است. در اینجا $z(s) = x(s) + iy(s)$ نمایشی از C است. بنابراین، حاصل ضرب $V_t ds$ را می‌توان چنین نوشت:

$$V_t ds = V \cdot dz = V_x dx + V_y dy \quad (dz = dx + i dy)$$

(توجه کنید که این ضرب نقطه‌ای دو بردار است، نه ضرب مختلط.)

اکنون فرض می‌کنیم C یک منحنی بسته باشد، در واقع فرض می‌کنیم C منحنی کرانه یک حوزۀ همبند ساده D باشد. در این صورت، اگر V در حوزۀ D که شامل C و D است دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد، از قضیۀ گرین (بخش ۴.۹) نتیجه می‌شود که گردش در طول C را می‌توان با انتگرال دوگانه

$$(۳) \quad \int_C (V_x dx + V_y dy) = \iint_D \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy$$

نمایش داد. تابع زیر علامت انتگرال طرف راست دارای تعبیر فیزیکی ساده‌ای به شرح زیر است. فرض کنید C دایره‌ای به شعاع r باشد. حاصل تقسیم گردش بر $2\pi r$ سرعت میانگین سیال در طول C را نمایش می‌دهد، و سرعت زاویه‌ای میانگین ω سیال نسبت به محور دایره از تقسیم سرعت میانگین بر شعاع r به دست می‌آید؛ بنابراین

$$\omega = \frac{1}{\pi r^2} \iint_D \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

عبارت طرف راست مقدار میانگین^۱ تابع

$$(۴) \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

روی قرص D ، قرصی که با دایره C محصور شده، است. تابع ω را دوران و 2ω را چرخش حرکت می‌نامند. هر گاه $r \rightarrow 0$ ، حد عبارت بالا برابر مقدار ω در مرکز C است.

۱. ر. ک. پانوش قبل.

در نتیجه، $\omega(x, y)$ برابر سرعت زاویه‌ای حدی يك جزء دایره‌ای سیال است وقتی که دایره منقبض شده به نقطه (x, y) بدل می‌شود. به زبان عادی، اگر يك جزء کروی از سیال ناگهان منجمد شود و همزمان سیالی که آن را احاطه کرده از بین برود، آنگاه جزء کروی با سرعت زاویه‌ای ω دوران خواهد کرد (به بخش ۱۱.۸ نیز رجوع کنید).
ما فقط جریانهای بی‌تساو را بررسی می‌کنیم، یعنی جریانهایی را که ω ی آنها سرتاسر ناحیه D ، از جریان، صفر است، در این حالت

$$(۵) \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0,$$

وجود وپیموستگی مشتقها را فرض گرفته‌ایم.
به علاوه فرض می‌کنیم که سیال تراکم ناپذیر است. آنگاه در هر ناحیه‌ای که شامل چشمه یا چاهك، یعنی نقاطی که از آن نقاط سیال وارد یا خارج می‌شود، نباشد داریم

$$(۶) \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad [ر.ك. (۹)، بخش ۱۰.۸]$$

هر گاه D يك حوزه همبند ساده بوده، در ضمن جریان بی‌تاو باشد، از قضیه ۳ بخش ۱۲.۹ نتیجه می‌شود که انتگرال روی خط

$$(۷) \quad \int_c (V_x dx + V_y dy)$$

در D مستقل از مسیر است. هر گاه از نقطه ثابت (a, b) واقع در D تا نقطه (x, y) از D انتگرال بگیریم، انتگرال تابعی مانند $\Phi(x, y)$ از نقطه (x, y) خواهد شد:

$$(۸) \quad \Phi(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} (V_x dx + V_y dy)$$

تابع $\Phi(x, y)$ پتانسیل سرعت^۱ حرکت نامیده می‌شود. چون انتگرال مستقل از مسیر است، $V_x dx + V_y dy$ دیفرانسیل کامل است (بخش ۱۲.۹)، در واقع دیفرانسیل تابع $\Phi(x, y)$ است، یعنی

$$(۹) \quad V_x dx + V_y dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

از اینجا نتیجه می‌شود

$$(۱۰) \quad V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

۱. بعضی مؤلفین (به جای Φ) از $-\Phi$ برای نشان دادن پتانسیل سرعت استفاده می‌کنند.

و همانطور که ملاحظه می شود بردار سرعت برابر گرادیان $\Phi(x, y)$ است:

$$(۱۱) \quad V = V_x + iV_y = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (\text{بخش ۸.۸})$$

منحنیهای ثابت $\Phi(x, y) = \text{ثابت}$ را خطوط هم پتانسیل می نامند. چون V گرادیان Φ است، در هر نقطه V برخط هم پتانسیلی که از آن نقطه می گذرد عمود است (مشروط بر اینکه $V \neq 0$).

به علاوه با درج (۱۰) در (۶) مشاهده می کنیم که Φ در معادله لاپلاس صدق می کند:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

فرض می کنیم $\Psi(x, y)$ يك تابع همساز مزدوج $\Phi(x, y)$ باشد. آنگاه در هر نقطه منحنیهای

$$\Psi(x, y) = \text{ثابت}$$

به خطوط هم پتانسیل ثابت $\Phi(x, y) = \text{ثابت}$ عمود هستند، و در نتیجه مماسهایشان هم راستا با سرعت سیال است. از این رو، منحنیهای، ثابت $\Psi(x, y)$ ، خطوط جریان سیال هستند. تابع $\Psi(x, y)$ را تابع جریان این جریان می نامند.

فرض می کنیم که Φ و Ψ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند. آنگاه تابع مختلط

$$(۱۲) \quad F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

در ناحیه جریان تحلیلی است. این تابع پتانسیل مختلط جریان نامیده می شود. کار کردن با پتانسیل مختلط آسانتر از کار کردن با Φ و Ψ به طور جداگانه است.

سرعت جریان را می توان با مشتقگیری از (۱۲) و استفاده از معادلات کشی - ریمان به دست آورد؛ به این ترتیب خواهیم داشت

$$F'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_x - iV_y.$$

از اینجا نتیجه می شود

$$(۱۳) \quad V = V_x + iV_y = \overline{F'(z)}.$$

بدین طریق جریانهایی پابرجای بی تاو و دوعدی سیالهای تراکم ناپذیر را می توان بر حسب توابع تحلیلی بیان کرد، و روشهای آنالیز مختلط، مانند نگاشت همبندی، را در

مورد آنها به کار گرفت.

تابع جریان Ψ در ارتباط با مسائل مقدار کرانه‌ای از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا کرانه‌ای که سیال نتواند از آن عبور کند يك خط جریان است. تحت نگاهش همدیسی، يك خط جریان به خط جریانی در صفحه نقش تبدیل می‌شود. امکان دیگر برای به دست آوردن و بررسی جریانه‌های پیچیده ترکیب جریانه‌های ساده است. پتانسیل $F = F_1 + F_2$ که مجموع پتانسیلهای مختلط F_1 و F_2 مربوط به دو جریان است پتانسیل مختلط جریانی است که از جمع برداری بردارهای سرعت دو جریان حاصل می‌شود. بدیهی است که چون معادله لاپلاس خطی و همگن است، مجموع دو تابع همساز تابعی همساز است.

توجه کنید در حالیکه کرانه‌های داده شده در الکترواستاتیک (صفحات هادی) خطوط هم پتانسیل هستند، در هیدرودینامیک کرانه‌ها خطوط جریان هستند و بنابراین بر خطوط هم پتانسیل عمودند.

اکنون يك نمونه را مورد بحث قرار می‌دهیم. کاربردهای بیشتر مطلب بالا در مجموعه مسائل آمده‌اند.

مثال ۱. جریان در نزدیکی گوشه

پتانسیل مختلط

$$(۱۴) \quad F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

جریانی را نشان می‌دهد که خطوط هم پتانسیل آن هذلولیه‌ای

$$\Phi = x^2 - y^2 = \text{ثابت}$$

و خطوط جریانش هذلولیه‌ای

$$\Psi = 2xy = \text{ثابت}$$

هستند. از (۱۳) بردار سرعت را به دست می‌آوریم

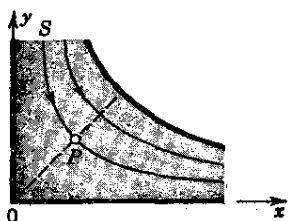
$$V = 2\bar{z} = 2(x - iy), \quad V_1 = 2x, \quad V_2 = -2y.$$

تندی (اندازه سرعت) عبارت است از

$$|V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

این جریان را می‌توان به جریان در کانالی که به محوره‌های مختصات مثبت و يك هذلولی، مثلا، هذلولی $xy = 1$ (شکل ۳۴۲) محدود شده تعبیر کرد. توجه کنید که در طول خط

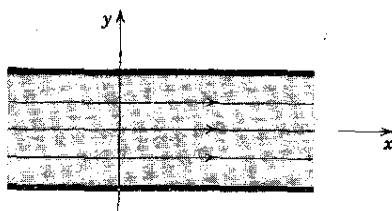
جریان S تندی در نقطه P که در آن مقطع کانال بزرگ است دارای مقدار مینیمم است.



شکل ۳۴۲. جریان در نزدیکی گوشه

مسائل بخش ۲۰۱۸

۱. (جریان موازی) ثابت کنید $F(z) = Kz$ (K حقیقی و مثبت) بیانگر جریانی یکنواخت به طرف راست است، که می تواند به جریان یکنواختی بین دو خط موازی (بین دو صفحه موازی در فضای سه بعدی) تعبیر شود، به شکل رجوع کنید. مطلوب است بردار سرعت، خطوط جریان، و خطوط هم پتانسیل.



مسئله ۰۱. جریان موازی

۲. نشان دهید $F(z) = iz^2$ بیانگر جریانی در نزدیکی گوشه است. خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل را پیدا کرده و آنها را رسم کنید. بردار سرعت V را بیابید.

۳. جریان در مثال ۱ را به کمک مسئله ۱ از طریق نگاشت همبستگی از ربع اول بر روی نیم صفحه فوقانی به دست آورید.

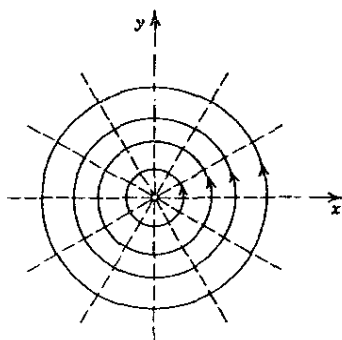
۴. خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل جریانی بسا پتانسیل مختلط $F(z) = z^2$ را رسم کنید. بردار سرعت V را بیابید و تمام نقاطی که در آنها بردار سرعت موازی محور x است معین کنید.

جریان متناظر با پتانسیل مختلط مفروض $F(z)$ را در نظر می گیریم. خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل را رسم کنید. بردار سرعت را بیابید، و همه نقاطی را که در آنها بردار سرعت

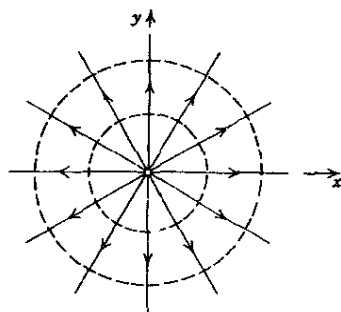
موازی بامحور x است تعیین کنید. (k را در مسئله ۶ عددی حقیقی بگیرید).

$$۵. \quad iz \quad ۶. \quad -ikz \quad ۷. \quad (1+i)z \quad ۸. \quad z^2+z \quad ۹. \quad iz^2$$

۱۰. (چشمه و چاهک) پتانسیل مختلط $F(z) = (c/2\pi) \ln z$ را که در آن c عدد حقیقی مثبتی است در نظر می گیریم. نشان دهید $V = (c/2\pi r^2)(x+iy)$ ، در اینجا r برابر $\sqrt{x^2+y^2}$ است، از این رابطه چنین برمی آید که جریان شعاعی، و جهت آن به طرف خارج است (شکل را ببینید)، چنانکه این پتانسیل متناظر است بایک چشمه نقطه‌ای در $z=0$ (یعنی بایک خط چشمه $x=0$ ، $y=0$ در فضا). (ثابت c قدرت یا تخلیه چشمه نامیده می شود. هرگاه c حقیقی منفی باشد، گویند جریان در $z=0$ دارای یک چاهک است، این جریان شعاعی و به طرف داخل می باشد و سیال در نقطه تکین $z=0$ از پتانسیل مختلط ناپدید می شود.)



مسئله ۱۱. جریان گردابی



مسئله ۱۰. چشمه نقطه‌ای

۱۱. (خط گردابی) نشان دهید که $F(z) = -(iK/2\pi) \ln z$ ، که در آن K عدد حقیقی مثبتی است، بیانگر جریانی است که مبدأ را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره‌هایی دور می‌زند؛ به شکل قبل مراجعه کنید. (نقطه $z=0$ را نقطه گردابی می‌نامند؛ به ازای هر بار گردش به دور نقطه گردابی پتانسیل به اندازه K افزایش می‌یابد.)

۱۲. مطلوب است پتانسیل مختلط جریانی که در $z = -a$ یک چشمه نقطه‌ای به قدرت ۱ دارد.

۱۳. مطلوب است پتانسیل مختلط جریانی که در $z = a$ یک چاهک نقطه‌ای به قدرت ۱ دارد.

۱۴. نشان دهید که جمع برداری بردارهای سرعت دو جریان منجر به جریانی می‌شود که

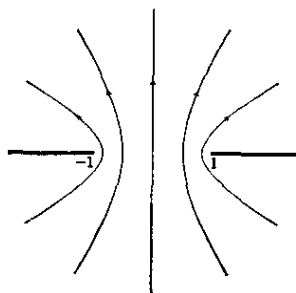
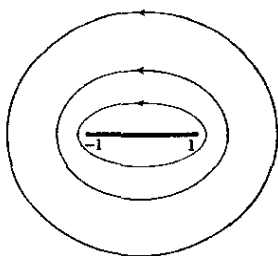
پتانسیل مختلط آن از جمع پتانسیل مختلط مربوط به دو جریان حاصل می‌شود.

۱۵. پتانسیل‌های مذکور در مسائل ۱۲ و ۱۳ را جمع و خطوط جریان پتانسیل حاصل را رسم کنید.

۱۶. مطلوب است خطوط جریان متناظر با جریان $F(z) = 1/z$. نشان دهید که به ازای مقادیر کوچک $|a|$ خطوط جریان مسئله ۱۵ شبیه خطوط جریان این مسئله به نظر می‌آیند.

۱۷. نشان دهید که $F(z) = \cosh^{-1} z$ با جریانی که خطوط جریان آن هذلولی‌های هم کانون با کانون‌های $z = \pm 1$ هستند متناظر است، و جریان را می‌توان به جریانی تعبیر کرد که از یک شکاف می‌گذرد (به شکل مراجعه کنید).

۱۸. نشان دهید که $F(z) = \cos^{-1} z$ را می‌توان به پتانسیل مختلط جریانی که یک استوانه بیضوی یا یک بشقاب (خط راستی که از $z = -1$ تا $z = 1$ کشیده شده است) را دور می‌زند تعبیر کرد. ثابت کنید خطوط جریان بیضی‌های هم‌کانونی هستند که کانون‌های آنها در $z = \pm 1$ است. (ر. لک. شکل.)



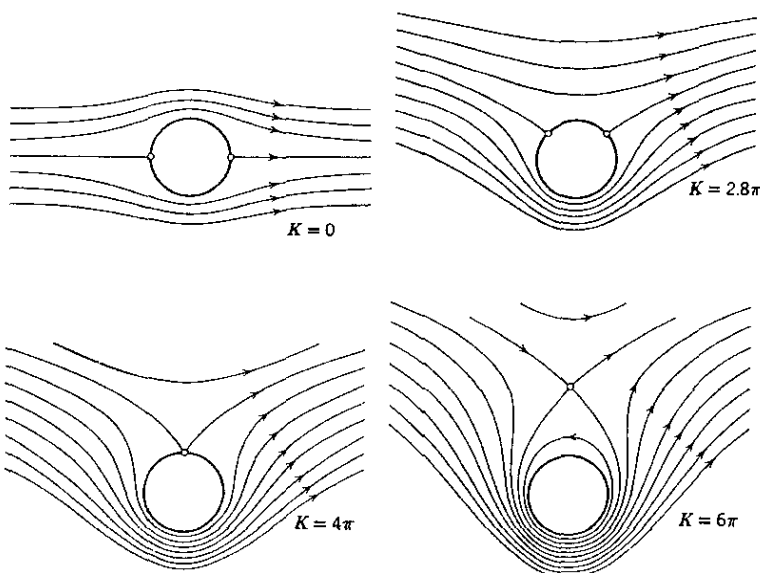
مسئله ۱۷. جریانی که از یک شکاف می‌گذرد مسئله ۱۸. جریان دور یک بشقاب

۱۹. (جریان دور یک استوانه) $F(z) = z + z^{-1}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $z = re^{i\theta}$ و نشان دهید که خطوط جریان خط‌های ثابت $\sin \theta = (r - r^{-1})$ هستند، خط جریان $\sin \theta = 0$ مرکب است از محور x و دایره یک، و به ازای مقادیر بزرگ $|z|$ جریان تقریباً یکنواخت و موازی است، طوری که می‌توان آن را به جریان در حول استوانه مستدیر درازی که شعاعش یک است تعبیر کرد (شکل سمت چپ بالایی را ببینید). مطلوب است نقاط رکود جریان (نقاطی که سرعت در آنها صفر است).

۳۰. (جریان دوراستوانه با گردش). نشان دهید که از جمع پتانسیلهای مسائل ۱۱ و ۱۹ جریانی حاصل می شود که بدنه استوانه $|z|=1$ خط جریانی از آن است. تندی را بیابید و نشان دهید که نقاط رکود عبارتند از

$$z = \frac{iK}{\varphi\pi} \pm \sqrt{\frac{-K^2}{16\pi^2} + 1};$$

وقتی K برابر صفر است این نقاط عبارتند از ± 1 ، با افزایش K این نقاط روی دایره یک حرکت می کنند تا آنکه در $z=i$ برهم منطبق می شوند ($K=\varphi\pi$)، شکل را ببینید)، وقتی K بزرگتر از $\varphi\pi$ باشد نقاط رکود روی محور موهومی قرار می گیرند (یکی از نقاط در میدان جریان قرار می گیرد و نقطه دیگر که درون استوانه واقع می شود فاقد معنی فیزیکی است).



مسائل ۱۹ و ۲۰. جریان دوراستوانه بدون گردش ($K=0$) و با گردش

۳۰.۱۸ خواص عمومی توابع همساز

در این بخش نشان می دهیم که چگونه می توان از قضایای مربوط به توابع تحلیلی مختلط برای به دست آوردن خواص عمومی توابع همساز استفاده کرد.

فرض می‌کنیم $u(x, y)$ تابعی باشد که در یک حوزه همبند ساده D همساز است. آنگاه می‌توان $v(x, y)$ ، تابع همساز مزدوجی از $u(x, y)$ را به کمک معادلات کشی-ریمان معین کرد، و بنابراین $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تابعی تحلیلی در D خواهد بود. (ر. ک. بخش ۵.۱۲؛ و ر. ک. پانوش ۲، بخش ۲.۱۳). این رابطه‌ای است که می‌تواند برای به دست آوردن خواص توابع همساز از خواص توابع تحلیلی مورد استفاده قرار گیرد. ابتدا، نظر به اینکه توابع تحلیلی دارای مشتق از هر مرتبه‌ای هستند، به راحتی می‌توان ثابت کرد که

قضیه ۱ (مشتق‌های جزئی)

تابع $u(x, y)$ که در حوزه همبند ساده D همساز است در D دارای مشتقات جزئی از تمام مرتبه‌ها است.

به علاوه اگر $f(z)$ در حوزه همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه بنا به فرمول انتگرال کشی (بخش ۵.۱۴) داریم

$$(۱^*) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

که C یک مسیر بسته ساده در D و z_0 نقطه‌ای در داخل C است. اگر C را دایره انتخاب کنیم، در D خواهیم داشت

$$z = z_0 + re^{i\phi}$$

بنابراین

$$dz = ire^{i\phi} d\phi, \quad z - z_0 = re^{i\phi}$$

و فرمول انتگرال چنین می‌شود:

$$(۱) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\phi}) d\phi,$$

طرف راست برابر مقدار میانگین f بر روی دایره است (= مقدار انتگرال تقسیم بر طول بازه انتگرالگیری). بدین ترتیب قضیه زیر به اثبات می‌رسد.

قضیه ۲ (خاصیت مقدار میانگین توابع تحلیلی)

فرض می‌کنیم $f(z)$ در یک حوزه همبند ساده D تحلیلی باشد. آنگاه مقدار $f(z)$ در نقطه z_0 از D برابر است با مقدار میانگین $f(z)$ بر روی هر دایره‌ای که در D قرار دارد و مرکز آن z_0 است.

خاصیت مهم دیگر توابع تحلیلی در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۳ (قضیه قدر مطلق ماکزیمم در مورد توابع تحلیلی)

فرض می‌کنیم D ناحیه‌ای محدود باشد و فرض می‌کنیم $f(z)$ در D و بر کرانه D تحلیلی و

غیر ثابت باشد. در این صورت قدر مطلق $|f(z)|$ نمی تواند در یک نقطه داخلی D ماکزیمم داشته باشد. در نتیجه، ماکزیمم $|f(z)|$ به ازای نقطه ای واقع بر کرانه D به دست می آید، هرگاه در D $f(z) \neq 0$ ، آنگاه این ادعا در مورد مینیمم $|f(z)|$ نیز صحیح است.

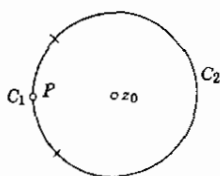
اثبات. فرض می کنیم $|f(z)|$ در یک نقطه داخلی z_0 از D دارای ماکزیمم باشد و نشان می دهیم که این فرض منجر به تناقض می شود. فرض می کنیم $|f(z_0)| = M$ مقدار ماکزیمم باشد. چون $f(z)$ ثابت نیست، $|f(z)|$ نیز ثابت نیست. در نتیجه، می توان دایره ای مانند C به شعاع r و مرکز z_0 یافت به طوری که داخل C در D باشد و $|f(z)|$ در نقطه ای از C مانند P ، از M کوچکتر باشد. چون $|f(z)|$ پیوسته است، روی قوسی مانند C_1 از C که شامل P است کوچکتر خواهد بود، مثلاً به ازای هر z روی C_1 داریم $|f(z)| \leq M - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). (شکل ۳۴۳). اگر طول C_1 برابر l_1 باشد، طول C_2 ، قوس مکمل C_1 برابر $2\pi r - l_1$ خواهد بود. بابه کاربردن (۴)، بخش ۲.۱۴ در مورد (۱*) از این بخش، وبا توجه به آنکه $|z - z_0| = r$ ، به دست می آوریم

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} (M - \varepsilon) \frac{1}{r} l_1 + \frac{1}{2\pi} M \frac{1}{r} (2\pi r - l_1) = M - \frac{\varepsilon l_1}{2\pi r} < M,$$

یعنی $M < M$ ، که غیر ممکن است. بنابراین، فرض ما باطل است و حکم اول قضیه به اثبات می رسد.

حال به اثبات حکم آخر قضیه می پردازیم. هرگاه در D $f(z) \neq 0$ ، آنگاه $1/f(z)$ در D تحلیلی است. از آنچه هم اکنون ثابت شد نتیجه می شود که ماکزیمم $1/|f(z)|$ بر کرانه D قرار دارد. ولی این ماکزیمم با مینیمم $|f(z)|$ مطابق است، و اثبات کامل می شود.



شکل ۳۴۳. اثبات قضیه ۳

اکنون نتایج متناظر با این قضایا را در مورد توابع همساز می نویسیم.

قضیه ۴ (توابع همساز)

فرض می کنیم D یک حوزه محدود همبند ساده و C منحنی کرانه ای آن باشد. آنگاه اگر $u(x, y)$ در حوزه ای که شامل D و C است همساز باشد، دارای خواص زیر است.

I. مقدار $u(x, y)$ در نقطه‌ای مانند (x_0, y_0) از D با مقدار میانگین $u(x, y)$ روی هردایره دایره D که مرکز آن (x_0, y_0) باشد برابر است.

II. مقدار $u(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) از D با مقدار میانگین $u(x, y)$ در هر قرص مستدیری که در D قرار گرفته و مرکز آن (x_0, y_0) است برابر است. [دک. پانوش ۱، ص ۹۸۹ بخش ۲۰.۱۸]

III. (اصل ماکزیمم) هرگاه $u(x, y)$ غیر ثابت باشد، ماکزیمم و مینیمم در D ندارد. در نتیجه، ماکزیمم و مینیمم بر روی کرانه D است.

IV. هرگاه $u(x, y)$ بر C ثابت باشد، آنگاه $u(x, y)$ ثابت است.

V. هرگاه $h(x, y)$ در D و C همساز باشد و اگر $h(x, y) = u(x, y)$ ، آنگاه در تمام نقاط D ، $h(x, y) = u(x, y)$.

اثبات. حکم I از مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی طرفین (۱) نتیجه می‌شود، یعنی

$$u(x_0, y_0) = \operatorname{Re} f(x_0 + iy_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \phi, y_0 + r \sin \phi) d\phi.$$

اگر طرفین را در r ضرب کنیم و نسبت به r از ۰ تا r_0 (که شعاع قرص مستدیری در D با مرکز (x_0, y_0) است) انتگرال بگیریم، آنگاه در طرف چپ خواهیم داشت $r_0^2 u(x_0, y_0) / 2$ و بنا بر این

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \phi, y_0 + r \sin \phi) r d\phi dr.$$

به این ترتیب حکم دوم به اثبات می‌رسد.

حکم III را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $v(x, y)$ یک تابع همساز مزدوج $u(x, y)$ در D باشد. آنگاه $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ و

$$F(z) = e^{f(z)}$$

در D تحلیلی هستند. قدر مطلق $F(z)$ عبارت است از

$$|F(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} = e^{u(x, y)}$$

از قضیه ۳ نتیجه می‌شود که $|F(z)|$ نمی‌تواند دارای ماکزیمم در یک نقطه داخلی D باشد. چون e^u تابعی صعودی یکنوا از متغیر حقیقی u است، III در مورد ماکزیمم u ثابت می‌شود. با توجه به این حکم مربوط به مینیمم از جایگزین کردن $-u$ با u نتیجه می‌شود. هرگاه u روی C ثابت باشد، مثلاً $u = k$ ، آنگاه بنا به III ماکزیمم و مینیمم u برابرند. از اینجا، حکم IV نتیجه می‌شود.

هرگاه h و u در داخل D و بر روی C همساز باشند، آنگاه $h - u$ نیز در داخل D و بر روی C همساز است، و بنا به فرض، در تمام نقاط C ، $h - u = 0$. از این رو، بنا به

IV، در تمام نقاط D داریم $h - u = 0$ ، و حکم V به اثبات می‌رسد. به این ترتیب قضیه ۴ کامل می‌شود.

حکم آخر قضیه ۴ بسیار مهم است. بنا به این حکم هر تابع همساز به کمک مقادیرش بر کرانه D به طور یکتا معین می‌شود. معمولاً، لازم است که $u(x, y)$ در D همساز و بر کرانه D پیوسته باشد. تحت این شرایط، هنوز هم می‌توان اصل ماگزیم (قضیه ۴، III) را به کار برد. مسئله تعیین $u(x, y)$ وقتی که مقادیر کرانه‌ای $u(x, y)$ داده شده باشند، مسئله دیریکله در مورد معادله لاپلاس دو متغیری نامیده می‌شود. از قضیه ۴، V داریم

قضیه ۵ (مسئله دیریکله)

هرگاه به ازای حوزه مفروض و مقادیر کرانه‌ای داده شده‌ای مسئله دیریکله در مورد معادله لاپلاس دو متغیری دارای جواب باشد، این جواب یکتا است.

مسائل بخش ۳.۱۸

۱. درستی قضیه ۲ را در مورد $f(z) = (z+2)^2$ ، $z_0 = 1$ و دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز z_0 تحقیق کنید.

۲. درستی قضیه ۳ را در مورد $f(z) = z^2$ و مستطیل $-2 < x < 2$ ، $-1 < y < 1$ تحقیق کنید.

۳. درستی قضیه ۳ را در مورد $f(z) = e^z$ و یک حوزه محدود دلخواه تحقیق کنید.

۴. تابع $f(x) = \cos x$ در $x = 0$ ماگزیم است. با استفاده از قضیه ۳، نتیجه بگیرید که سطح قدر مطلق $f(z) = \cos z$ (ر. ک. بخش ۸.۱۲) نمی‌تواند در $z = 0$ دارای نقطه اوج باشد.

۵. هرگاه $f(z)$ در حوزه همبند ساده D تحلیلی (غیر ثابت) باشد، و اگر $|f(z)| = c$ (عدد ثابت دلخواه) در D واقع بوده و بسته باشد، نشان دهید که در نقطه‌ای داخلی از منحنی $f(z) = 0$ ، مثالهایی ارائه دهید.

۴.۱۸ فرمول انتگرال پواسن

مسئله دیریکله در مورد قرص مستدیر را می‌توان با استفاده از فرمولی موسوم به فرمول پواسن^۲

۱. یعنی $u(x_0, y_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y)$ ، که در آن (x_0, y_0) بر کرانه و (x, y) در D واقعند.

۲. سیمئون دونی پواسن (Siméon Denis Poisson ۱۷۸۱ - ۱۸۴۰)، ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی.

که تابع همساز را بر حسب مقادیر آن بر روی دایره کرانه‌ای قرص نمایش می‌دهد حل کرد. برای به دست آوردن این فرمول از فرمول انتگرال کشی شروع می‌کنیم:

$$(۱) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* ;$$

در اینجا C دایره‌ای است که با

$$z^* = Re^{i\phi} \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

نمایش داده می‌شود و فرض می‌شود که تابع

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta) \quad (z = re^{i\theta})$$

در ناحیه همبند ساده‌ای که C درون آن قرار دارد تحلیلی است.

چون $dz^* = iRe^{i\phi} d\phi = iz^* d\phi$ از (۱) به دست می‌آوریم

$$(۲) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z^*) \frac{z^*}{z^* - z} d\phi \quad (z^* = Re^{i\phi}, z = re^{i\theta})$$

از طرف دیگر، هرگاه نقطه Z را خارج C ، مثلاً نقطه $Z = z^* \bar{z}^* / \bar{z}$ (که قدرمطلق آن $R^2/r > R$ است)، را در نظر بگیریم، آنگاه انتگران (۱) در قرص $|z| \leq R$ تحلیلی است و انتگرال برابر صفر است:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{z^* - Z} dz^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z^*) \frac{z^*}{z^* - Z} d\phi.$$

اگر قرار دهیم $Z = z^* \bar{z}^* / \bar{z}$ و کسر را ساده کنیم خواهیم داشت

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z^*) \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^*} d\phi.$$

با کم کردن این رابطه از (۲) و استفاده از

$$(۳) \quad \frac{z^*}{z^* - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^*} = \frac{z^* \bar{z}^* - z \bar{z}}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})}$$

به دست می‌آوریم

$$(۴) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z^*) \frac{z^* \bar{z}^* - z \bar{z}}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})} d\phi.$$

با توجه به نمایش قطبی z و z^* درمی‌یابیم که خارج قسمت موجود در انتگران برابر است با

$$\frac{R^2 - r^2}{(Re^{i\phi} - re^{i\theta})(Re^{-i\phi} - re^{-i\theta})} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2}$$

در نتیجه، بامساوی قراردادن قسمت‌های حقیقی دوطرف فرمول (۲) فرمول انتگرال پواسن

$$(۵) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \phi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi$$

را به دست می‌آوریم، که نمایش تابع همساز u در قرص $|z| \leq R$ بر حسب مقادیر $u(R, \phi)$ بر روی دایره‌ای است که قرص را محدود می‌کند.

از نظر عملی توجه به این نکته جالب است که در (۵) می‌توان به جای $u(R, \phi)$ از هر تابعی که بر فاصله انتگرالگیری پیوسته تکه‌ای باشد استفاده کرد. در این صورت فرمول (۵) تابعی مانند $u(r, \theta)$ تعریف می‌کند که در قرص باز $|z| < R$ همساز و بردایره $|z| = R$ پیوسته است. برای دایره، جز در نقاطی که $u(R, \phi)$ در آن‌ها ناپیوسته است، تابع مذکور برابر $u(R, \phi)$ است. اثبات این موضوع را می‌توان در مرجع [F۱] یافت.

از (۵) می‌توان بسط مهمی از u به یک سری بر حسب توان‌های همساز ساده به دست آورد. یادآوری می‌کنیم که خارج قسمت موجود در انتگران (۵) از (۳) حاصل شده است و به راحتی می‌توان دید که طرف راست (۳) برابر قسمت حقیقی $(z^* + z)/(z^* - z)$ است. با استفاده از سری هندسی به دست می‌آوریم

$$(۶) \quad \frac{z^* + z}{z^* - z} = \frac{1 + (z/z^*)}{1 - (z/z^*)} = \left(1 + \frac{z}{z^*}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z^*}\right)^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z^*}\right)^n.$$

چون $z^* = Re^{i\phi}$ و $z = re^{i\theta}$ داریم

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z}{z^*} \right)^n = \operatorname{Re} \left[\frac{r^n}{R^n} e^{in\theta} e^{-in\phi} \right] = \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos(n\theta - n\phi)$$

(۷)

$$= \left(\frac{r}{R} \right)^n (\cos n\theta \cos n\phi + \sin n\theta \sin n\phi).$$

از (۶) و (۷) به دست می‌آوریم

$$\operatorname{Re} \frac{z^* + z}{z^* - z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} (\cos n\theta \cos n\phi + \sin n\theta \sin n\phi).$$

این عبارت، همان طور که قبلاً متذکر شدیم، برابر خارج قسمت موجود در (۵) است، و با قراردادن این سری در (۵) و انتگرالگیری جمله به جمله خواهیم داشت

$$(۸) \quad u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

که در آن ضرایب عبارتند از ضرایب فوریه $u(R, \phi)$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \phi) d\phi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \phi) \cos n\phi d\phi,$$

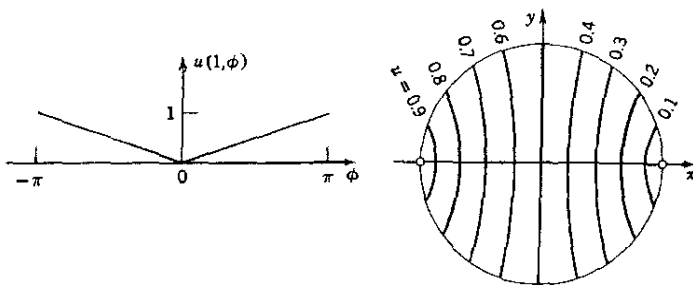
(۹)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \phi) \sin n\phi d\phi, \quad n = 1, 2, \dots$$

توجه کنید که به ازای $r = R$ سری (۸) به سری فوریه $u(R, \phi)$ تبدیل می‌شود، و بنابراین نمایش (۸) وقتی که بتوان $u(R, \phi)$ را با سری فوریه نمایش داد معتبر است.

مثال ۱. مسئله دیریکله در مورد قرص یک

پتانسیل $u(r, \theta)$ را در قرص یک $r < 1$ بیابید در صورتی که مقادیر مرزی آن عبارت باشد از (شکل ۳۴۴)



شکل ۳۴۴. پتانسیل مثال ۱

$$u(1, \phi) = \begin{cases} -\frac{\phi}{\pi} & -\pi < \phi < 0 \\ \frac{\phi}{\pi} & 0 < \phi < \pi \end{cases}$$

نظر به اینکه $u(1, \phi)$ زوج است، $b_n = 0$ ، و از (۹) بدست می‌آوریم $a_0 = 1/2$ و

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 \frac{\phi}{\pi} \cos n\phi d\phi + \int_0^{\pi} \frac{\phi}{\pi} \cos n\phi d\phi \right] = \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1).$$

در نتیجه وقتی که n فرد باشد $a_n = -4/n^2 \pi^2$ ، و وقتی که $n = 2, 4, \dots$ ، $a_n = 0$ ، و پتانسیل عبارت است از

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} - \frac{r^2}{\pi^2} \left[r \cos \theta + \frac{r^2}{3^2} \cos 3\theta + \frac{r^5}{5^2} \cos 5\theta + \dots \right].$$

مسائل بخش ۴۰۱۸

۱. برقراری (۳) را تحقیق کنید.

۲. نشان دهید که هر جمله (۸) در قرص $R^2 < r^2$ تابعی همساز است.

با استفاده از (۸)، پتانسیل $u(r, \theta)$ در داخل قرص یک $r < 1$ را طوری بیابید که دارای مقادیر کرانه‌ای مفروض $u(1, \theta)$ باشد، با استفاده از چند جمله اول سری، بعضی مقادیر u را محاسبه کنید و نمودار خطوط هم پتانسیل را رسم کنید

$$u(1, \theta) = \sin \theta \quad ۳. \quad u(1, \theta) = 1 - \cos \theta \quad ۴.$$

$$u(1, \theta) = \sin 3\theta \quad ۵. \quad u(1, \theta) = \cos 2\theta - \cos 4\theta \quad ۶.$$

$$u(1, \theta) = 2 \sin^2 \theta \quad ۷. \quad u(1, \theta) = \theta \quad ۸.$$

۹. هرگاه $0 < \theta < \pi$ ، $u(1, \theta) = 1$ و در غیر آن صورت $u(1, \theta) = 0$.

۱۰. هرگاه $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ، $u(1, \theta) = \theta$ و هرگاه $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ ، $u(1, \theta) = \pi - \theta$.

۱۱. هرگاه $-\pi < \theta < -\pi/2$ ، $u(1, \theta) = -\pi/2$ ، $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ، $u(1, \theta) = \pi/2$ و هرگاه $\pi/2 < \theta < \pi$ ، $u(1, \theta) = \theta$.

۱۲. هرگاه $0 < \theta < \pi/2$ ، $u(1, \theta) = 1$ ، $\pi/2 < \theta < \pi$ ، $u(1, \theta) = -1$ و در غیر آن صورت $u(1, \theta) = 0$.

۱۳. با استفاده از (۹) بخش ۴۰۱۶، نشان دهید که نتیجه مسئله ۱۲ را می‌توان چنین نوشت:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{Ln} \frac{(1+iz)(1+z^2)}{(1-iz)(1-z^2)}.$$

۱۴. نشان دهید که پتانسیل مسئله ۸ را می‌توان چنین نوشت:

$$u(r, \theta) = 2 \operatorname{Im} \operatorname{Ln} (1+z)$$

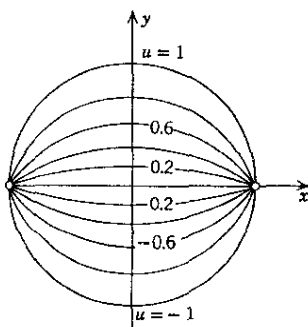
۱۵. با استفاده از (۸) نشان دهید که پتانسیل $u(r, \theta)$ در داخل قرص یک $r < 1$ با مقادیر کرانه‌ای

$$u(1, \theta) = \begin{cases} -1 & -\pi < \theta < 0 \\ 1 & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

از سری زیر به دست می آید:

$$u(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \left(r \sin \theta + \frac{r^3}{3} \sin 3\theta + \frac{r^5}{5} \sin 5\theta + \dots \right).$$

بعضی از مقادیر u را با استفاده از چند جمله اول این سری به دست آورید و چند خط هم پتانسیل را رسم کنید. نتیجه را با شکل مقایسه کنید. نمودار خطوط نیرو (مسیرهای متعامد) را رسم کنید.



مسئله ۱۵

۱۶. با استفاده از (۹)، بخش ۴.۱۶، نشان دهید که در مسئله ۱۵

$$u(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{\pi} [\arg(1+z) - \arg(1-z)].$$

۱۷. با به کار بردن قضیه معروفی از هندسه مقدماتی در مورد نتیجه مسئله ۱۶ نشان دهید که منحنیهای ثابت u در مسئله ۱۵ قوسهای مستدیر هستند.

۱۸. نشان دهید که

$$H = 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{Ln} \frac{w+1}{w-1} \quad (w = u + iv)$$

در نیم صفحه فوقانی $v > 0$ همساز است و مقدار آن به ازای $-1 < u < 1$ برابر ۱- و روی بقیه قسمت‌های محور u برابر ۱+ است.

۱۹. نشان دهید که تبدیل کسری خطی ای که $w_1 = -1$ ، $w_2 = 0$ ، $w_3 = 1$ را به ترتیب، بر $z_1 = -1$ ، $z_2 = -i$ ، $z_3 = 1$ می نگارد عبارت است از

$$z = \frac{w-i}{-iw+1}$$

تبدیل معکوس $w = w(z)$ را یافته، و باقراردادن آن در H ، مسئله ۱۸، نشان دهید که تابع همساز حاصل همان است که در مسئله ۱۶ دیدیم.

۲۰. قضیه ۴، I بخش ۳۰۱۸ را از (۵) نتیجه بگیرید.

آنالیز عددی

ریاضیات مهندسی مآلاً به نتایج عددی منجر می‌شود و بنا بر این دانشجوی مهندسی باید بعضی روشهای عددی اساسی، یعنی روشهای به دست آوردن نتایج عددی از داده‌های مفروض را به عنوان قسمتی از ابزار ریاضی خود تاحدودی بداند. شاخه‌ای از ریاضیات را که در مورد این روشها بحث می‌کند آنالیز عددی می‌نامند.

نیاز به چنین فرآیندهایی در به دست آوردن جوابهای عملی برای مسائل مفروض بدیهی است زیرا در بسیاری از موارد ممکن است جوابهایی که از نظریه به دست می‌آیند برای مقاصد عددی بی فایده باشند. مثالهای نوعی عبارتند از فرمول انتگرال برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول (بخش ۷.۱) و قاعده کرامر برای حل دستگاههای معادلات خطی جبری بر حسب دترمینان (بخشهای ۱۱.۷ و ۹.۷). در سایر موارد ممکن است نظریه صرفاً وجود جواب را تضمین کند بدون آنکه چگونگی به دست آوردن آن را نشان دهد. نحوه رشد آنالیز عددی به شدت تحت تأثیر ظهور کامپیوترهای خودکار و کاربرد آنها که امروزه در کارهای ریاضی مهندسیین اجتناب ناپذیر است قرار گرفته و حتی می‌توان گفت کامپیوترهای خودکار مسیر این رشد را معین کرده‌اند. پیشرفتهای آنالیز عددی مشتمل است بر ابداع روشهای نوین، اصلاح روشهای موجود به قسمی که در محاسبات خودکار بیشتر مؤثر باشند و تحلیل نظری و عملی الگوریتمها برای فرآیندهای محاسباتی استاندارد و به دست آوردن الگوریتمهایی که برای موارد مختلف مناسب باشند. تحلیل خطا قسمتی از وظیفه یک دست‌اندر کار آنالیز عددی است؛ او باید دامهای محاسباتی را که بر سر راه هر محاسبه‌کننده بی‌احتیاطی است مشخص کرده و آنها را حذف کند.

پیشیاد این فصل: حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی؛ به اضافه اصول معادلات دیفرانسیل برای بخشهای ۷.۱۹ و ۸.۱۹، و اصول جبر ماتریسی برای برخی عناوین بخشهای ۹.۱۹ تا ۱۴.۱۹.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت G.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۰.۱۹ خطاها و اشتباهات کامپیوترهای خودکار

چون در محاسبات عددی با تعدادی متناهی عدد کار می‌کنیم و تعداد مراحل کار نیز متناهی است روشهای آنالیز عددی يك سلسله فرآیندهای متناهی هستند، و جز در موارد نادری که جواب دقیق عددگویای نسبتاً ساده‌ای است و با استفاده از روش عددی می‌توان آن را به دست آورد، نتیجه عددی عموماً مقدار تقریبی از نتیجه دقیق (نامعلوم) را به دست می‌دهد. اگر a^* مقدار تقریبی کمیتی باشد که مقدار دقیق آن a است آنگاه تفاضل $\varepsilon = a^* - a$ را خطای مطلق a^* یا، به اختصار، خطای a^* نامند. بنا بر این

$$\text{خطا} + \text{مقدار واقعی} = \text{تقریب} \quad a^* = a + \varepsilon$$

خطای نسبی a^* که آن را با ε_r نمایش می‌دهیم با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{a^* - a}{a} = \frac{\text{خطا}}{\text{مقدار واقعی}} \quad (a \neq 0).$$

بدیهی است وقتی $|\varepsilon|$ خیلی کوچکتر از $|a^*|$ باشد خواهیم داشت $\varepsilon/a^* \approx \varepsilon_r$. همچنین می‌توان کمیت $\varepsilon = a - a^* = -\gamma$ را که تصحیح نامیده می‌شود به کار برد. بنا بر این^۱

$$a = a^* + \gamma \quad \text{تصحیح} + \text{تقریب} = \text{مقدار واقعی}$$

وبالآخره کران خطای a^* عددی مانند β است، به طوری که

$$|a^* - a| \leq \beta \quad \text{و} \quad |\varepsilon| \leq \beta$$

خطاها را می‌توان، بر حسب منشأ، به خطای آزمایشی، خطای قطع و خطای گرد کردن تقسیم کرد. خطای آزمایشی خطای موجود در داده‌هاست (که احتمالاً ناشی از اندازه‌گیری است). خطای قطع خطای ناشی از قطع نابهنگام دنباله (متناهی یا نامتناهی) مراحل محاسباتی است که برای رسیدن به نتیجه دقیق لازمند. این خطا به روش محاسباتی

۱. بعضی اوقات $\varepsilon = -\gamma$ را خطا می‌نامند؛ با آنکه این تمایز تاحدی خارج از بحث است باید به آن توجه داشت.

بستگی دارد و در مورد هر روش به طور مجزا تشریح می شود. خطای گرد کردن خطایی است که در اثر گرد کردن اعداد در حین محاسبه به وجود می آید و ما اکنون درباره این خطا بحث می کنیم.

در نماد اعشاری هر عدد حقیقی را با دنباله ای متناهی یا نامتناهی از ارقام اعشاری نمایش می دهند. در محاسبات ماشینی باید به جای عدد مورد نظر عددی بسا ارقام متناهی قرار داد. در کامپیوترهای رقمی خودکار دو روش برای ضبط اعداد به کار می رود. این دو روش را شرح می دهیم. در دستگاه ممیز ثابت اعداد را با تعداد ثابتی از رقم اعشاری نمایش می دهند، مانند ۶۲۳۵۸ ، ۰۵۰۱۳ ، ۰۰۰۰۰ . در دستگاه ممیز شناور اعداد را با تعداد ثابتی رقم معنی دار نمایش می دهند. مثلاً ۱۰۵×۰۰۶۲۳۶ ، $۱۰^{-۳} \times ۰۰۱۷۱۴$ ، ۰۰۱×۰۰۲۰۰۰ . رقم معنی دار عدد c هر رقم از c است غیر از صفرهایی که امکان دارد برای تثبیت محل صفر سمت چپ اولین رقم غیر صفر گذاشته شوند. (بنابراین بقیه صفرها رقم معنی دار هستند.) مثلاً هر یک از اعداد ۰۱۳۶۰ ، ۰۱۳۶۰ ، ۰۰۰۱۳۶۰ چهار رقم معنی دار دارند.

حال می توان قاعده گرد کردن عددی تا k اعشاری را بیان کرد. (قاعده گرد کردن تا k رقم معنی دار نیز همین است، و کافی است «اعشار» را با «رقم معنی دار» جایگزین کنند.)

(۱) $(k+1)$ امین رقم اعشاری و تمام ارقام بعد از آن را حذف کنید. اگر عددی که به این ترتیب حذف شده کمتر از نصف واحد رقم k ام باشد k امین رقم اعشاری را تغییر ندهید («گرد کردن نقصانی»). هرگاه عدد حذف شده بیش از نصف واحد رقم k ام باشد به رقم k ام یکی اضافه کنید («گرد کردن اضافی»). اگر عدد حذف شده درست نصف واحد باشد، عدد اصلی را به نزدیکترین عدد اعشاری زوج تبدیل کنید. (مثال: گرد شده اعداد ۳۴۵ و ۳۴۵ «تایک اعشار» به ترتیب عبارتند از ۳۴۴ و ۳۴۶ .)

قسمت آخر قاعده برای اطمینان از این امر است که هنگام صرف نظر کردن از نصف واحد، گرد کردن اضافی و گرد کردن نقصانی با احتمال یکسان اتفاق افتد.

با گرد کردن عدد ۱۲۵۳۵ تا ۳ ، ۲ ، ۱ اعشار به ترتیب خواهیم داشت ۱۲۵۴ ، ۱۲۵ ، ۱۲۳ اما اگر ۱۲۵ را تا ۱ اعشار گرد کنیم بدون اینکه از عدد اصلی اطلاعی داشته باشیم به عدد ۱۲۲ می رسیم.

۱. در جدولهایی که در آنها توابعی با k رقم معنی دار نشان داده شده اند، قرارداد می شود که مقدار داده شده a^* از مقدار دقیق متناظرش a ، حداکثر به اندازه ± ۰.۵ واحد آخرین رقم سمت راست اختلاف دارد، مگر آنکه خلاف این قرارداد صریحاً ذکر شده باشد؛ مثلاً، اگر $a = ۱۹۹۶$ ، آنگاه جدولی با رقم معنی دار باید $a^* = ۱۲۰۰$ را نشان دهد. همچنین اگر عدد ۱۲۰۰۰ تنها تا سه رقم، درست باشد بهتر است آن را با ۱۰۵×۱۲۰ نشان دهیم و به همین ترتیب. علامت اختصاری برای «اعشار» D و برای «رقم معنی دار» S است. مثلاً $۵D$ به معنی ۵ رقم اعشار و $۸S$ به معنی ۸ رقم معنی دار است.

خطاهای گرد کردن ممکن است محاسبات را کاملاً ضایع کنند. در حالت کلی باز یاد شدن تعداد مراحل محاسباتی خطر این نوع خطا بیشتر می شود. بنا بر این اهمیت دارد که برنامه های محاسباتی را به منظور پیش بینی این نوع خطاها تحلیل کرده تریبی در محاسبات اتخاذ کنیم که اثر خطای گرد کردن حتی الامکان ناچیز باشد.

ارقام محافظ ارقام اضافی هستند (يك، دو یا بیشتر) که در مراحل میانی محاسبات دستی به قصد حذف خطاهای ناشی از قطع به کار می روند. با نسبت دادن مقیاس به متغیرها می توان تعداد رقمهای بعد از ممیز را در محاسبات کاهش داد. به عنوان مثال $0.000000222 = 900 \div 4000$ و در این مورد برای آنکه ۴ رقم معنی دار داشته باشیم به ۹ «مکان اعشار» نیاز داریم، اما اگر بتوانیم متغیرها را طوری مقیاس گذاری کنیم که محاسبه به $0.222 = 9 - 4$ بینجامد، تنها ۴ اعشار لازم داریم.

تأکید می کنیم که اهمیت انتخاب مؤثرترین روش ممکن برای محاسبات خود کار کمتر از اهمیت آن در محاسبه با حسابگرهای رومیزی نیست و این صرفاً به خاطر صرفه جویی در وقت و هزینه نیست بلکه برای آن است که خطا را نیز به حداقل برسانیم. حتی برای مسائل ساده هم ممکن است راههای متعددی با کارآییهای مختلف وجود داشته باشد. این مطلب را با ذکر مثالی روشن می کنیم.

مثال ۱. معادله درجه دوم

ریشه های هر يك از معادلات

$$(الف) \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad و \quad (ب) \quad x^2 - 40x + 2 = 0 \quad (۱)$$

را با به کار بردن ۴ رقم معنی دار در محاسبات بیابید.

ریشه های x_1 و x_2 ی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ عبارتند از

$$(۲) \quad x_1 = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}), \quad x_2 = \frac{1}{2a}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})$$

و چون $c/a = x_1 x_2$ ، اگر x_1 را از فرمول بالا بیابیم می توانیم بنویسیم

$$(۳) \quad x_2 = \frac{c}{ax_1}$$

از فرمولهای (۲) در مورد (الف) خواهیم داشت $x = 2 \pm \sqrt{2} = 2000 \pm 1414$ ، اما $x_2 = 0.586$ ، $x_1 = 3414$ نتیجه می دهد

$$x_2 = 2000 / 3414 = 0.5858, \quad x_1 = 3414$$

با خطایی کمتر از ۱ واحد در آخرین رقم معنی دار (ر. ك. مسئله ۶). در مورد (ب) از فرمولهای (۲) نتیجه می شود $x = 20 \pm \sqrt{398} = 2000 \pm 1995$ ، $x_2 = 3995$ ، $x_1 = 3995$

$x_4 = 0.05$ ، که نتیجه ضعیفی است در حالی که (۳) می دهد

$$x_4 = 2000 / 39995 = 0.05006, x_1 = 39995$$

با خطایی کمتر از ۱ واحد در آخرین رقم معنی دار (ر. ک. مسئله ۷).

در محاسبات دستی ممکن است در نتایج میانی تعداد ارقام اعشاری را تغییر دهیم تا جواب را با دقت لازم ولی با حداقل کار به دست آوریم. در محاسبات خودکار می توان از بیشترین تعداد ارقام ممکن (که خود به نوع و طرح ماشین بستگی دارد) استفاده کرد و نیازی به کوشش برای رسیدن به جوابی که دقت آن از پیش تعیین شده نیست.

ممکن است محاسبات، علاوه بر خطاها، با اشتباهاتی نیز همراه باشند که از کار بر نامه نویس، اپراتور دستگاه یا استفاده کننده از حسابگر رومیزی و یا وسایل مکانیکی و الکترونیکی مورد استفاده در محاسبه ناشی می شوند؛ از این اشتباهات علی الاصول می توان جلوگیری کرد در حالی که خطا اجتناب ناپذیر است. کنترل نتایج عددی بسیار مهم است و در هر روش عددی باید بازبینی نتایج نهایی (و میانی) را در نظر داشت.

برای احتراز از اشتباه در محاسبات دستی باید محاسبه را به صورت منظم جدولی انجام داد. نباید از کاغذهای باطله استفاده کرد بلکه نتایج به دست آمده در حین محاسبه را باید در اوراق مخصوصی (ورقه های خط کشی شده) ثبت کرد و اعداد را مرتب و تمیز نوشت. از پرداختن به مراحل مختلف در آن واحد نباید پرهیز کرد. برای تصحیح اشتباه باید روی عدد غلط خط کشیده و مقدار تصحیح شده را بالای آن نوشت. هر کدام از صفحات مزبور باید شامل توضیحاتی باشد که روش محاسبه را در مراجعات آتی قابل فهم کند.

در محاسبات خودکار وضع اجمالاً به قرار زیر است. کامپیوتر خودکار قادر است عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را انجام دهد؛ مراحل لازم برای حل مسئله باید با جزئیات به کامپیوتر گفته شود. این کار را می توان با خوراندن برنامه ای، که روی کارتهایی منگنه شده، به دستگاه انجام داد؛ کارتها که کارت منگنه نام دارند حاوی داده های لازم و دنباله ای از دستورالعملها هستند که باید با ترتیب معین توسط کامپیوتر انجام شوند. کامپیوتر نیز پس از دریافت برنامه و اجرای مراحل محاسباتی جواب را روی صفحه کاغذی چاپ می کند. اجرای اصلی کامپیوتر به قرار زیرند:

(I) ورودی برای دریافت کارتهای منگنه شده و انتقال اطلاعات روی کارتها به حافظه؛

(II) حافظه یا مخزن برای ذخیره کردن دستورات و داده ها؛ به هر یک از دستورالعملها بعد از ضبط در حافظه آدرس (موقعیت در حافظه) نسبت داده می شود و در صورت نیاز به کمک آدرس از مخزن فراخوانده می شود؛

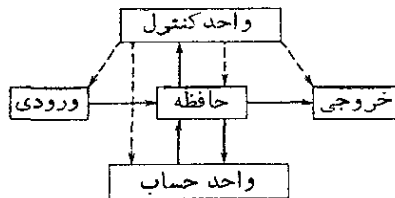
(III) واحد کنترل برای سازمان دادن به محاسبات، یعنی نظم و ترتیب دادن به امر

دریافت اطلاعات، اجرای عملیات حسابی به ترتیبی که در برنامه مشخص شده است و بالاخره بیرون دادن اطلاعات؛
(IV) واحد حساب برای انجام دادن چهار عمل اصلی؛ و

(V) خروجی برای انتقال اطلاعات از حافظه بر روی کاغذهای دستگاه چاپ.

شکل ۳۴۵ کارهایی را که دستگاه می تواند انجام دهد به صورت يك نمودار كننده ای نشان می دهد.

نخست محاسبه ای را با تمام جزئیاتش طر حریزی می کنیم. سپس آن را با يك «زبان مسئله ای» نظیر فرترن (FORmula TRANslation) یا آلگول (ALGO rithmic Language) بیان می کنیم و بعد آن را روی کاترتها برده به کامپیوتر می خورانیم. کامپیوتر با استفاده از همگردان برنامه ما را با اجرای ترجمه خودکار به يك برنامه به زبان دستگاه تبدیل کرده و آن را به مرحله اجرا درمی آورد و به این ترتیب محاسبات طرح شده انجام می شوند. (معمولاً برنامه تبدیل شده به زبان دستگاه در اختیار ما قرار ندارد مگر اینکه بخواهیم مجدداً آن را مورد استفاده قرار دهیم که در این صورت کامپیوتر آن را روی دسته کارتی منگنه کرده و به ما تحویل می دهد.)



شکل ۳۴۵. اجزای يك کامپیوتر و کلهای اصلی که دستگاه می تواند انجام دهد. پیکانهای کامل نمایش دهنده جریان داده ها یا دستورالعملها و پیکانهای خط چین نشان دهنده جریان علامین کنترلند.

تجربه نشان می دهد نمی توان از اشتباهاتی که در حین برنامه نویسی روی می دهد صرف نظر کرد. فرآیند ترجمه معمولاً جستجو برای یافتن اشتباهات نوشتاری را نیز در بر می گیرد؛ این اشتباهات به وسیله کامپیوتر مشخص و تصحیح می شود و برنامه تصحیح شده مجدداً به کامپیوتر داده می شود. با این همه، حتی الامکان باید برنامه ها را قبل از شروع کار کامپیوتر با منتهای دقت آماده و کنترل کرد. پیدا کردن اشتباهات در این مرحله مقدماتی ساده تر از یافتن آن توسط خود دستگاه است. به علاوه، نباید تصور کرد که يك برنامه صرفاً به دلیل قابلیت ترجمه و اجرای آن صحیح است، بلکه همیشه باید برنامه جدید را برای

تکرار محاسبات برنامه راهنمایی که قبلاً به دقت کنترل شده است به کار برد.

مسائل بخش ۱.۱۹

۱. (ممیز شناور) نمایش ممیز شناور به صورت $x \times 10^e$ است. در عمل، برای احتراز از نمای منفی می توان عدد ۵۰ را به نما اضافه کرد، یعنی، مثلاً $10^{-8} \times 13r$ را به صورت $10^{42} \times 13r$ نوشت. $381r79206$ را با به کار بردن رقم معنی دار به صورت فوق بنویسید.

۲. هرگاه β_1 کسران خطای a_1^* و β_2 کسران خطای a_2^* باشد، نشان دهید که $\beta = \beta_1 + \beta_2$ کسران خطای مجموع $s^* = a_1^* + a_2^*$ است.

۳. نشان دهید که در مسئله ۲، β کسران خطایی برای تفاضل $d^* = a_1^* - a_2^*$ است، و با مثالی روشن کنید که به جای β نمی توان عدد کوچکتری قرارداد.

۴. نشان دهید که در مورد خطاهای نسبی کوچک، خطای نسبی خارج قسمت تقریباً برابر است با مجموع خطاهای نسبی عوامل. مثال عددی ساده ای بزنید.

۵. نشان دهید که در مورد خطاهای نسبی کوچک، خطای نسبی خارج قسمت تقریباً برابر است با تفاضل خطاهای نسبی عوامل.

۶. با استفاده از مسئله ۵، نشان دهید که در مثال ۱، قدر مطلق خطای

$$x_2 = 22000 / 3414 = 0.58858$$

کمتر از ۰.۰۰۰۰۱ است.

۷. با استفاده از مسئله ۵، نشان دهید که در مثال ۱، قدر مطلق خطای

$$x_2 = 22000 / 3995 = 0.055006$$

کمتر از ۰.۰۰۰۰۱ است.

۸. مثال ساده ای برای تشریح ارقام محافظ بزنید.

۹. جدولی دواشاری^۱ برای $f(x) = x/16$ ، $x = 0(1)20$ محاسبه کنید و چگونگی توزیع خطای گرد کردن را بیابید.

۱۰. جدولی سه اعشاری برای $f(x) = x/3$ ، $x = 0(1)100$ محاسبه کنید و نحوه توزیع خطای گرد کردن را بیابید.

۱۱. دسواریهایی به دست آوردن جدول چهار-مکانی، با گرد کردن (الف) در جدول پنج-مکانی، (ب) در جدول شش-مکانی، را تشریح کنید.

۱. معنی $x = a(h)b$ آن است که مقادیر تابع به ازای $b, a+2h, a+h, a, x$ داده شده است.

۱۲. با مثالی نشان دهید در محاسباتی که با تعداد ثابتی ارقام معنی دار انجام می گیرند، حاصل جمع اعداد به ترتیب جمع کردن آنها بستگی ندارد.

۱۳. فرض کنید ۲۳۱۸۲ و ۵۴۴۳ درست گرد شده باشند. مشخص کنید کوچکترین فاصله‌ای را که $s = ۲۳۱۸۲ + ۵۴۴۳$ در آن قرار می گیرد، وقتی به جای مقادیر گرد شده از مقادیر واقعی کمیتها استفاده شود.

۱۴. عدد $a_1, \dots, a_n$ که a_j به طور صحیح به D_j اعشار گرد شده است مفروضند. در محاسبه مجموع $a_1 + \dots + a_n$ ، با در نظر گرفتن $D = \min_j D_j$ اعشار، آیا لازم است که نخست جمع کنیم و سپس نتیجه را گرد کنیم یا اینکه نخست هر عدد را به D اعشار گرد کرده و سپس جمع کنیم؟

۱۵. فرض کنید a و b به طور صحیح و به ترتیب به $2D$ و D اعشار گرد شده‌اند، و فرض کنید $1 < |b| < |a|$. اگر بخواهیم a/b را به عنوان يك خارج قسمت D اعشاری محاسبه کنیم، نشان دهید بهتر است نخست تقسیم و سپس گرد کنیم. مثالی بزنید.

۲.۱۹ حل معادلات با تکرار

بسیار اتفاق می افتد که در ریاضیات مهندسی به پیدا کردن جوابهای معادلاتی به صورت

$$(۱) \quad f(x) = 0,$$

نیاز داشته باشیم، یعنی لازم باشد مقادیر X_0 را بیابیم به طوری که $f(X_0)$ برابر صفر باشد؛ در اینجا f تابع داده شده‌ای است. می توان $x^2 - 3x + 2 = 0$ ، $x^2 + x = 1$ ، $\cosh x \cos x = -1$ ، $\cosh x = \sec x$ ، $\tan x = x$ ، $\sin x = 0.5x$ را مثال آورد که همگی قابل تبدیل به صورت (۱) هستند. دومعادله اول معادلات جبری هستند زیرا f متناظر به آنها چند جمله‌ای است و در این مورد جوابها را ریشه‌های معادله می نامند. سایر معادلات معادلات غیر جبری هستند زیرا شامل توابع غیر جبری هستند. فرمولهایی که مقادیر عددی دقیق جوابها را بدهند فقط در موارد بسیار ساده وجود دارند. در اغلب موارد مجبوریم روشهای تقریبی، به ویژه، روشهای تکراری را به کار ببریم.

روش تکرار عددی روشی است که در آن x_0 دلخواهی انتخاب کرده و دنباله $x_0, x_1, x_2, \dots$ را از رابطه

$$(۲) \quad x_{n+1} = g(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

به طور بازگشتی محاسبه می کنیم؛ g در فاصله‌ای شامل x_0 تعریف شده است و دامنه g در آن فاصله قرار دارد. بنابراین باید متوالیاً $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1)$ ، $x_3 = g(x_2)$ ، $\dots$ را محاسبه کرد.

در این بخش، هم دامنه و هم برد $g(x)$ روی خط حقیقی قراردادارند. در مسائل کلیتر x یا g یا هر دو ممکن است متغیر برداری باشند. خاطر نشان می‌کنیم که روش تکرار در مسائل مختلف آنالیز عددی از اهمیت زیادی برخوردار است.

چندین راه برای به دست آوردن روشهای تکرار برای حل (۱) وجود دارد، و ما سه روش را که اهمیت ویژه‌ای دارند مورد بحث قرار خواهیم داد.

تبدیلات جبری. می‌توان (۱) را به طریق جبری به صورت زیر تبدیل کرد:

$$(۳) \quad x = g(x)$$

در این صورت روش تکرار همان است که در (۲) بیان کردیم. هر جواب (۳) را يك نقطه ثابت g می‌نامند. ممکن است به ازای يك معادله مفروض (۱)، چندین معادله (۳) وجود داشته باشد و رفتار دنباله‌های تکرار $x_0, x_1, x_2, \dots$ متفاوت باشند (وبه x_0 وابسته). این مطلب را با مثال ساده‌ای روشن می‌کنیم.

مثال ۱. يك فرآیند تکرار

فرآیندی تکراری برای معادله $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$ ترتیب دهید. چون می‌دانیم که جوابها عبارتند از

$$x = 1.25 \pm \sqrt{1.25} \quad \text{یعنی} \quad 2.2618034 \quad \text{و} \quad 0.381966$$

می‌توان رفتار خطا را وقتی که فرآیند تکرار پیش می‌رود مشاهده کرد. معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1) \quad \text{و بنا بر این} \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 1) \quad (۴ \text{ الف})$$

اگر $x_0 = 1$ انتخاب کنیم، دنباله زیر به دست می‌آید (ر. ک. شکل ۳۴۶ الف):

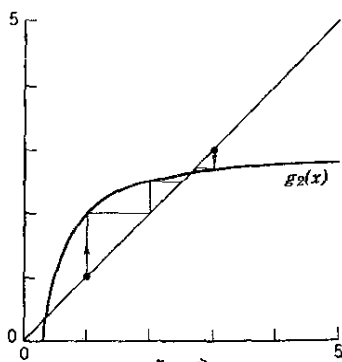
$$x_0 = 1.0000, \quad x_1 = 0.6667, \quad x_2 = 0.4811, \quad x_3 = 0.4111, \quad x_4 = 0.3900, \dots$$

که به نظر می‌رسد به ریشه کوچکتر میل می‌کند. اگر فرض کنیم $x_0 = 2$ ، وضع مشابهی خواهیم داشت. اگر $x_0 = 3$ بگیریم دنباله زیر به دست می‌آید (ر. ک. شکل ۳۴۶ الف):

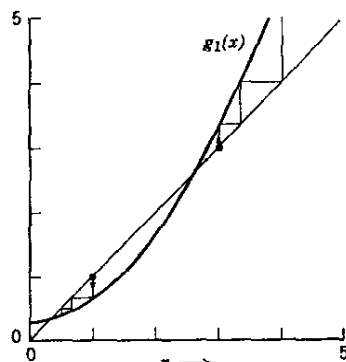
$$x_0 = 3.0000, \quad x_1 = 3.2333, \quad x_2 = 4.037, \quad x_3 = 5.7666, \quad x_4 = 11.414, \dots$$

که به نظر می‌رسد واگرا باشد. معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۴ ب) \quad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \quad \text{پس} \quad x = g_2(x) = 3 - \frac{1}{x}$$



(ب)



(الف)

شکل ۳۴۶. مثال ۱، تکرارهای (الف) و (ب)

و اگر فرض کنیم $x_0 = 1$ ، دنباله زیر به دست می آید (ر.ک. شکل ۳۴۶ ب):

$$x_0 = 10000, x_1 = 20000, x_2 = 20500, x_3 = 20600, x_4 = 20615, \dots$$

که ظاهراً به جواب بزرگتر میل می کند. همین طور اگر فرض کنیم $x_0 = 3$ ، دنباله زیر به دست می آید (ر.ک. شکل ۳۴۶ ب):

$$x_0 = 30000, x_1 = 20667, x_2 = 20625, x_3 = 20619, x_4 = 20618, \dots$$

شکل ۳۴۶ نشان می دهد که همگرایی ظاهراً به این امر بستگی دارد که در همسایگی يك جواب شیب منحنی $g(x)$ کمتر از شیب خط مستقیم $y = x$ باشد و خواهیم دید که این شرط $|g'(x)| < 1$ (که شیب $y = x$ است) برای همگرایی کافی است. ▲

فرآیندی تکراری مانند (۲) را به ازای x_0 همگرا نامند اگر دنباله متناظرش $x_0, x_1, \dots$ همگرا باشد.

قضیه زیر که کاربردهای عملی متنوعی دارد، شرط کافی همگرایی را بیان می کند.

قضیه ۱ (همگرایی)

فرض کنید $s = x$ یکی از جوابهای $x = g(x)$ بوده و g در يك فاصله ای مانند J که شامل s است مشتق پیوسته داشته باشد. در این صورت اگر در J داشته باشیم $|g'(x)| \leq \alpha < 1$ ، فرآیند تکراری که با (۲) تعریف شده است به ازای x_0 در J همگراست.

اثبات. بنا به قضیه مقدار میانگین از حساب دیفرانسیل يك ξ بین x و s وجود دارد به طوری که

$$g(x) - g(s) = g'(\xi)(x - s) \quad (J \text{ در } x).$$

چون $g(s) = s$ و $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $\dots$ خواهیم داشت:

$$|x_n - s| = |g(x_{n-1}) - g(s)| = |g'(\xi)| |x_{n-1} - s| \leq \alpha |x_{n-1} - s|$$

$$\leq \alpha^2 |x_{n-2} - s| \leq \dots \leq \alpha^n |x_0 - s|$$

و چون $\alpha < 1$ ، داریم $\alpha^n \rightarrow 0$ و $|x_n - s| \rightarrow 0$ هر گاه $n \rightarrow \infty$ و اثبات کامل است. ▲

مثال ۲. يك فرآیند تكرار. تشریح قضیه ۱

با روش تكرار جوابی برای $f(x) = x^2 + x - 1 = 0$ بیايید. رسم يك نمودار تقریبی نشان می‌دهد كه يك جواب حقیقی در نزدیکی $x = 1$ قرار دارد. می‌توانیم معادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n^2} \quad \text{و بنابراین} \quad x = g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

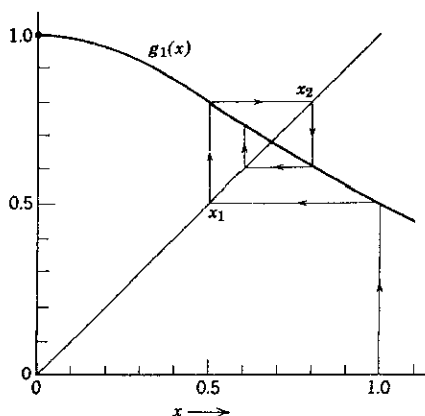
پس به ازای همه x ها، $|g_1'(x)| = 2|x|/(1+x^2)^2 < 1$ و بنابراین به ازای هر x_0 همگرایی داریم. با انتخاب $x_0 = 1$ به دست می‌آوریم (ر.ك. شكل ۳۴۷)

$$x_1 = 0.5000, \quad x_2 = 0.3800, \quad x_3 = 0.2610, \quad x_4 = 0.1729, \quad x_5 = 0.0653,$$

$$x_6 = 0.0701, \dots$$

جواب دقیق تا $D6$ عبارت است از $s = 0.682328$. همچنین معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|g_2'(x)| = 3x^2 \quad \text{در این صورت} \quad x = g_2(x) = 1 - x^2$$



شكل ۳۴۷. تكرار در مثال ۲

و این مقدار در نزدیکی ریشه از ۱ بزرگتر است، پس نمی‌توانیم انتظار همگرایی داشته باشیم. خواننده می‌تواند $x_0 = 1$ ، $x_0 = 0.5$ ، $x_0 = 2$ را امتحان کند و ببیند چه اتفاق می‌افتد. ▲

روش نیوتن (که روش نیوتن - دفسون نیز نامیده می‌شود) روش تکرارد دیگری برای حل معادلات $f(x) = 0$ ، با f مشتق پذیر، است. در این روش نمودار f را با مماسهای مناسب تقریب می‌زنیم. با استفاده از مقدار x_0 که از روی نمودار f به دست آمده است، x_1 را نقطه تلاقی محور x ها و مماس بر منحنی f در x_0 می‌گیریم (ر. ک. شکل ۳۴۸). در این صورت

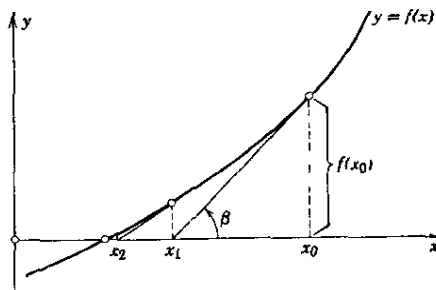
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{و} \quad \tan \beta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

در مرحله بعد، x_2 را حساب می‌کنیم (ر. ک. شکل ۳۴۸):

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم؛ فرمول کلی چنین است:

$$(5) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, \dots).$$



شکل ۳۴۸. روش نیوتن

مثال ۳. ریشه دوم

تکرار نیوتنی برای محاسبه x ، ریشه دوم عدد مثبت c ، بسازید و آن را برای $c = 2$ به کار ببرید. داریم $x = \sqrt{c}$ ، از این رو $f(x) = x^2 - c = 0$ و $f'(x) = 2x$ و (۵) به صورت زیر درمی‌آید:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right).$$

درمورد $c=2$ اگر فرض کنیم $x_0=1$ ، به دست می آوریم.

$$x_1 = 1.500000, x_2 = 1.416667, x_3 = 1.414216,$$

$$x_4 = 1.414214, \dots$$

x_4 تا $6D$ دقیق است.

مثال ۴. تکرار درمورد معادله غیر جبری

جواب مثبت $x = 2 \sin x$ را بیابید. با انتخاب $f(x) = x - 2 \sin x$ ، خواهیم داشت $f'(x) = 1 - 2 \cos x$ و (۵) نتیجه زیر را می دهد

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2 \sin x_n}{1 - 2 \cos x_n} = \frac{2(\sin x_n - x_n \cos x_n)}{1 - 2 \cos x_n} = \frac{N_n}{D_n}.$$

با توجه به نمودار f درمی یابیم که جواب در نزدیکی $x_0=2$ است. با استفاده از جدول توابع سینوسی و کسینوسی حساب می کنیم:

n	x_n	N_n	D_n	x_{n+1}
۰	۲.۰۰۰	۳.۴۸۳	۱.۸۳۲	۱.۹۰۱
۱	۱.۹۰۱	۳.۱۲۵	۱.۶۴۸	۱.۸۹۶
۲	۱.۸۹۶	۳.۱۰۷	۱.۶۳۹	۱.۸۹۶

(جواب تا $4D$ ، عبارت است از ۱.۸۹۵۵).

مثال ۵. روش نیوتن درمورد معادله جبری

روش نیوتن را درمورد معادله $0 = x^3 + x - 1 = f(x)$ به کار ببرید. از (۵) داریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}.$$

از $x_0=1$ شروع می کنیم و به دست می آوریم

$$x_1 = 0.750000, x_2 = 0.686047, x_3 = 0.682340, x_4 = 0.682328, \dots$$

در اینجا x_4 تا $6D$ دقیق است. مقایسه با مثال ۲ نشان می دهد که این همگرایی بسیار

سریرتر است. این مطلب ما را به مفهوم مرتبه فرآیند تکرار که به شرح آن می‌پردازیم راهنمایی می‌کند.

فرض کنید $x_{n+1} = g(x_n)$ معرف يك روش تکرار باشد و فرض کنید x_n جوابی مانند s از $x = g(x)$ را تقریب بزند. در این صورت خواهیم داشت $x_n = s + \varepsilon_n$ ، که در آن ε_n خطای x_n است. فرض کنید که g چند مرتبه مشتق پذیر باشد به طوری که بنا به فرمول تیلور بتوان نوشت:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g(x_n) = g(s) + g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(s)(x_n - s)^2 + \dots \\ &= g(s) + g'(s)\varepsilon_n + \frac{1}{2}g''(s)\varepsilon_n^2 + \dots \end{aligned}$$

درجه ε_n در اولین جمله غیر صفر، مرتبه فرآیند تکرار تعریف شده با g نامیده می‌شود. چون $x_{n+1} - g(s) = x_{n+1} - s = \varepsilon_{n+1}$ ، خطای x_{n+1} است، و درحالتی که همگرایی داریم، ε_n به ازای n بزرگ کوچک است، مرتبه معیاری است برای سرعت همگرایی. تکرار نیوتن از مرتبه دوم است. درحقیقت داریم:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

و $g'(s) = 0$ زیرا $f(s) = 0$ ؛ از این رو فرآیند حداقل از مرتبه دوم است. مشتق گیری بعدی نشان می‌دهد که $g''(s) = f''(s)/f'(s)$ ، که درحالت کلی صفر نیست. در مثال ۲ فرآیندی که به صورت $g_1(x)$ داده شده از مرتبه اول است زیرا

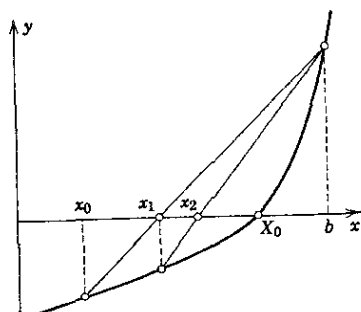
$$g_1'(x) = -2x/(1+x^2)^2 \quad \text{و} \quad g_1(x) = 1/(1+x^2)$$

اگر در نزدیکی جوابی از $f(x) = 0$ داشته باشیم $f'(x) = 0$ ، آنگاه روش نیوتن دشواریهایی را باعث می‌شود، اما این دشواریها را اغلب می‌توان با رسم منحنی $f(x)$ به ازای مقادیری از x که نزدیک جواب مورد نظر است و با استفاده از تعبیر هندسی روش نیوتن برطرف کرد. اگر $f'(x)$ در نزدیکی جواب مورد نظر $f(x) = 0$ کوچک باشد ممکن است محاسبه $f(x)$ و $f'(x)$ با دقت زیاد برای به دست آوردن تقریب خوبی از x_{n+1} لازم باشد. این نشان می‌دهد که معادله بد حالت است. این مفهوم به ترتیب زیر تعریف شده است.

معادله $f(x) = 0$ بد طرح است هرگاه بتوان مقدار کوچکی مانند

$$R(s^*) = f(s^*)$$

را از مقادیر s^* ی به دست آورد که با جواب دقیق s متفاوت باشند، یا اگر تغییر کوچکی



شکل ۳۴۹. روش نابجایی (Regula falsi)

در ثابتهای f باعث ایجاد تغییرات بزرگی در جوابها شود. $R(s^*) = f(s^*)$ را پس ماند معادله در s^* می‌نامند. کوچکی پس‌مانده نشانه‌ای از دقت s^* است، اما فهم این مطلب مهم است که کوچک بودن $R(s^*)$ الزاماً به معنی کوچک بودن خطای s^* نیست. روش تکرار سوم برای حل معادله $f(x) = 0$ روش نابجایی (regula falsi) است. در این روش منحنی $f(x)$ را با وترى از آن، چنانکه در شکل ۳۴۹ نشان داده شده‌است، تقریب می‌زنیم. این وتر محور x را در نقطه

$$(ع الف) \quad x_1 = \frac{x_0 f(b) - b f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$

قطع می‌کند و این تقریبی از جواب X_0 معادله $f(x) = 0$ است. در مرحله بعد، تقریب زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$(ع ب) \quad x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

و به همین ترتیب. همگرایی به X_0 را می‌توان با نزدیک‌تر کردن b به X_0 سریع‌تر کنیم. این را معمولاً با آزمایش حدس انجام می‌دهیم.

مثال ۶. روش نابجایی

مقدار تقریبی ریشه معادله $f(x) = x^2 + x - 1 = 0$ را در نزدیکی $x = 1$ معین کنید (ر. ک. مثال ۲). چون $f(0.5) = -0.375$ و $f(1) = 1$ ، می‌توانیم فرض کنیم $x_0 = 0.5$ و $b = 1$. در این صورت فرمول (ع الف) منجر به

$$x_1 = \frac{0.5 \times 1 - 1 \times (-0.375)}{1 - (-0.375)} = 0.64$$

می‌شود. از (۶ ب) تقریب بهتر $x_4 = 0.672$ و غیره به دست می‌آید.

مسائل بخش ۲۰۱۹

یکی از ریشه‌های معادلات زیر را تعیین کنید؛ با x_0 مفروض شروع کرده و سه مرحله روش نیوتن را طی کنید.

$$x^3 - 39x^2 + 479x - 1881 = 0, \quad x_0 = 1 \quad ۱.$$

$$x^3 - 12x^2 + 2x - 24 = 0, \quad x_0 = 2 \quad ۲.$$

۳. ریشه‌های معادله مربوط به مسئله ۱ عبارتند از ۰.۵۹، ۱.۱۱ و ۱.۰۹. گرچه $x_0 = 1$ در نزدیکی ۰.۵۹ قرار دارد، باروش نیوتن نمی‌توان یکی از این دو ریشه را به دست آورد. چرا؟ x_0 دیگری انتخاب کنید، به طوری که این روش ما را به ریشه ۱.۰۹ نزدیک کند.

تمام ریشه‌های حقیقی معادلات زیر را باروش نیوتن بیابید.

$$\cos x = x \quad ۴. \quad x + \ln x = 2 \quad ۵. \quad 2x + \ln x = 1 \quad ۶.$$

$$x^4 - 0.1x^3 - 0.82x^2 - 0.1x - 1.82 = 0 \quad ۷.$$

۸. نشان دهید که در مثال ۲، $|g'(x)|$ در $x = \pm 1/\sqrt{3}$ ماکزیمم است و مقدار این ماکزیمم برابر است با $3\sqrt{3}/8 = 0.65$.

۹. چرا در مثال ۱، دنباله‌ای یکنوا به دست می‌آید، ولی در مثال ۲ چنین نیست؟

۱۰. تکرارهایی را که در انتهای مثال ۲ بدان اشاره شد انجام دهید. شکلی مانند شکل ۳۴۷ رسم کنید.

۱۱. ریشه $x^5 = x + 0.2$ را در نزدیکی $x = 0$ با تبدیل جبری معادله به صورت (۲)، و با شروع از $x_0 = 0$ ، بیابید.

۱۲. معادله‌ای که در مسئله ۱۱ دیدیم ریشه‌ای در نزدیکی $x = 1$ دارد. این ریشه را با نوشتن معادله به صورت $x = \sqrt[5]{x + 0.2}$ و تکرار، با شروع از $x_0 = 1$ ، بیابید.

۱۳. هرگاه در مسئله ۱۲، معادله را به صورت $x^5 = x - 0.2$ بنویسیم و از $x_0 = 1$ شروع کنیم چه اتفاق می‌افتد؟

۱۴. با استفاده از تکرار نشان دهید که کوچکترین ریشه مثبت معادله $x = \tan x$ تقریباً برابر است با ۴.۴۹. راهنمایی. از نمودارهای x و $\tan x$ نتیجه بگیرید که

ریشه‌ای بسیار نزدیک به $x_0 = 3\pi/2$ وجود دارد؛ معادله را به صورت $x = \pi + \arctan x$ بنویسید. (چرا؟)

۱۵. $\sqrt{5}$ را با تکراری که در مثال ۳ دیدیم و با شروع از $x_0 = 2$ و محاسبه $x_1, \dots, x_3$ محاسبه کنید. با استفاده از $\sqrt{5} = 2.236068$ خطا را محاسبه کنید.

۱۶. نشان دهید که در مثال ۳ داریم

$$x_{n+1}^2 - c = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{c}{x_n} \right)^2$$

و این کمیت معیاری برای سنجیدن دقت است. نشان دهید که تقریباً

$$|x_n - \sqrt{c}| \approx \frac{1}{4} \left| x_n - \frac{c}{x_n} \right|$$

و از آن در مسئله ۱۵ استفاده کنید.

۱۷. فاصله‌ای بر روی محور x مثبت پیدا کنید که در آن فرآیند تکرار ذکر شده در مثال ۳، با $c = 2$ ، در شرایط قضیه ۱ صدق کند.

۱۸. تکرار نیوتنی برای ریشه سوم طرح کنید. $\sqrt[3]{7}$ را، با شروع از $x_0 = 2$ و اجرای سه مرحله، محاسبه کنید.

۱۹. تکرار نیوتنی برای محاسبه ریشه k ام عدد مثبت c طرح کنید.

ریشه‌های حقیقی معادلات زیر را با روش نابجایی بیابید.

۲۲. $2 \sin x = 2x$

۲۱. $x^4 = 2x$

۲۰. $x^4 = 2$

۲۳. در مسئله ۲۰ مقادیر تقریبی ریشه مثبت همیشه کوچکتر از مقدار دقیق ریشه است. چرا؟

۲۴. در روش نیوتن نیاز به محاسبه $f'(x)$ است. در کاربردها ممکن است این کار با اشکالاتی همراه باشد. یک راه احتراز از $f'(x_n)$ ، این است که به جای آن خارج قسمت تفاضلی $(f(x_n) - f(x_{n-1})) / (x_n - x_{n-1})$ را قرار دهیم. رابطه بین فرمول حاصل و regula falsi را بیان کنید.

۲۵. نشان دهید که اگر g در یک فاصله بسته I پیوسته بوده و برد آن در I قرار داشته باشد؛ در آن صورت $x = g(x)$ حداقل یک جواب در آن فاصله دارد. نشان دهید که ممکن است بیش از یک جواب وجود داشته باشد.

۳.۱۹ تفاضلهای متناهی

تفاضلهای متناهی در شاخه‌های متعددی از آنالیز عددی نظیر درون یابی، جداول مقابله، تقریب، مشتگیری و حل معادلات دیفرانسیل اهمیت اساسی دارند. فرض می‌کنیم جدولی از مقادیر عددی $f(x_j) = f_j$ تابع f در نقاط زیر

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h, \dots \quad (h > 0) \quad \text{نات}$$

که فاصله‌شان از هم ثابت است داشته باشیم؛ $f(x_j)$ ممکن است از یک فرمول نتیجه شود و یا به‌طور تجربی از آزمایش به دست آید. حال می‌توانیم اولین تفاضلهای را با تقریب هر مقدار تابع $f(x)$ از مقدار آن به ازای x بعدی موجود در جدول تشکیل دهیم. در جدول ۱.۱۹ مثالی نشان داده شده است که در آن $f(x) = x^3$ ، $x = -3(1)3$ با به کار بردن همان فرآیند تقریب در مورد تفاضلهای اول، تفاضلهای دوم f را به دست می‌آوریم و به همین ترتیب. در این جدول تفاضل هر تفاضل در ستون مناسب، وسط دو عنصری از ستون قبل که از آنها به دست آمده است قرار می‌گیرد. ممیزها و صفرهای سمت چپ تفاضلهای را می‌توان حذف کرد (ر. ک. جدول ۲.۱۹).

جدول ۱.۱۹

جدول تفاضل $f(x) = x^3$, $x = -3(1)3$

x	$f(x) = x^3$	تفاضل اول	تفاضل دوم	تفاضل سوم	تفاضل چهارم
-۳	-۲۷	۱۹			
-۲	-۸	۷	-۱۲	۶	
-۱	-۱	۱	-۶	۶	۰
۰	۰		۰		۰
		۱		۶	
۱	۱	۷	۶		۰
۲	۸	۱۹	۱۲	۶	
۳	۲۷				

۱. معنی $x = a(h)b$ آن است که مقادیر تابع به ازای $x = a, a+h, a+2h, \dots$ داده شده است.

سه نوع مختلف نمادگذاری برای تفاضلهای درجدا اول تفاضل رایج است. برای جلوگیری از اشتباه، در آغاز باید بگوییم که وقتی صرفاً کار عددی می‌کنیم، صرف نظر از اینکه کدام نمادگذاری را به کار ببریم اعداد یکسان در محلهای یکسان به دست خواهیم آورد. اولین (و شاید مهمترین) نمادگذاری، همان است که برای تفاضلهای مرکزی به کار می‌رود:

$$x_{-2} \quad f_{-2}$$

$$\delta f_{-3/2}$$

$$x_{-1} \quad f_{-1}$$

$$\delta^2 f_{-1}$$

$$\delta f_{-1/2}$$

$$\delta^2 f_{-1/2}$$

$$x_0 \quad f_0$$

$$\delta^2 f_0$$

$$\delta f_{1/2}$$

$$\delta^2 f_{1/2}$$

$$x_1 \quad f_1$$

$$\delta^2 f_1$$

$$\delta f_{3/2}$$

$$x_2 \quad f_2$$

جدول ۲-۱۹

مقادیر و تفاضلهای $f(x) = 1/x$

$$x = 1(0.2)2, 4D$$

x	$f(x) = 1/x$	تفاضل اول	تفاضل دوم	تفاضل سوم
۱.۰	۱.۰۰۰۰۰	-۱۶۶۷		
۱.۲	۰.۸۳۳۳		۴۷۷	
		-۱۱۹۰		-۱۸۰
۱.۴	۰.۷۱۴۳		۲۹۷	
		-۸۹۳		-۹۸
۱.۶	۰.۶۲۵۰		۱۹۹	
		-۶۹۴		-۶۱
۱.۸	۰.۵۵۵۶		۱۳۸	
		-۵۵۶		
۲.۰	۰.۵۰۰۰			

بنابراین $\delta f_{-1/2} = f_0 - f_{-1}$ ، $\delta f_{-3/2} = f_{-1} - f_{-2}$ و در حالت کلی

$$(1) \quad \delta f_{m+1/2} = f_{m+1} - f_m$$

شاخص زیر سمت چپ میانگین شاخصهای زیر سمت راست است. همچنین

$$\delta^2 f_m = \delta f_{m+1/2} - \delta f_{m-1/2},$$

و به همین ترتیب. تفاضلهایی که دارای شاخص زیر یکسان هستند روی یک خط افقی واقعند.

(توجه داشته باشید که لزومی ندارد x_0 کوچکترین x جدول باشد. مثلاً در جدول ۲۰۱۹

می توان نوشت $x_0 = ۱۶$ ، در این صورت $f_0 = ۰۰۶۲۵۰$ ، $f_{-1} = -۰۰۵۶۹۴$ ، $\delta f_{1/2} = ۰۰۱۹۹۹$ و به همین ترتیب.)

نمادگذاری دوم برای تفاضلهای پیش رونده به کار می رود:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{-2} & & f_{-2} & & & & \\ & & \Delta f_{-2} & & & & \\ x_{-1} & & f_{-1} & & \Delta^2 f_{-2} & & \\ & & \Delta f_{-1} & & \Delta^2 f_{-1} & & \\ x_0 & & f_0 & & \Delta^2 f_0 & & \\ & & \Delta f_0 & & \Delta^2 f_{-1} & & \\ x_1 & & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\ & & \Delta f_1 & & & & \\ x_2 & & f_2 & & & & \end{array}$$

از این رو $\Delta f_{-2} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1}$ ، $\Delta f_0 = f_1 - f_0$ و در حالت کلی

$$(2) \quad \Delta f_m = f_{m+1} - f_m.$$

به گونه ای مشابه داریم

$$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m.$$

و به همین ترتیب. مثلاً، در جدول ۲۰۱۹ اگر فرض کنیم $x_0 = ۱۶$ ، در این صورت

$f_0 = ۰۰۶۲۵۰$ ، $f_{-1} = -۰۰۵۶۹۴$ ، $\Delta f_0 = ۰۰۱۳۸$ ، $\Delta^2 f_0 = ۰۰۰۰۰۰$. تفاضلهایی که شاخص

زیر یکسان دارند بر روی خط شیب داری که شیب آن به طرف پایین یا بالاست قرار دارند.

سومین نمادگذاری مربوط به تفاضلهای پس رونده است:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{-2} & f_{-2} & & & & & \\
 & & \nabla f_{-1} & & & & \\
 x_{-1} & f_{-1} & & \nabla^2 f_0 & & & \\
 & & \nabla f_0 & & \nabla^3 f_1 & & \\
 x_0 & f_0 & & \nabla^2 f_1 & & & \\
 & & \nabla f_1 & & \nabla^3 f_2 & & \\
 x_1 & f_1 & & \nabla^2 f_2 & & & \\
 & & \nabla f_2 & & & & \\
 x_2 & f_2 & & & & &
 \end{array}$$

بنابرین $\nabla f_{-1} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$ ، $\nabla f_1 = f_1 - f_0$ و در حالت کلی

$$(3) \quad \nabla f_m = f_m - f_{m-1}.$$

به گونه ای مشابه داریم

$$\nabla^2 f_m = \nabla f_m - \nabla f_{m-1},$$

و به همین ترتیب. تفاضلهایی که شاخص زیر یکسان دارند، در جدول، روی خطوطی که شیبان به طرف بالا یا به سمت عقب است قرار می گیرند. نماد گذاری تفاضلهای پس رونده معمولاً برای محاسبات مربوط به نزدیکی انتهای حوزه جدول سازی مناسب است.

هر تفاضل مشخص موجود در جدول را می توان با سه علامت مختلف نمایش داد.

مثلاً در جدول ۲۰۱۹، اگر قرار دهیم $x_0 = ۱۶$ ، در این صورت به دست می آوریم

$$-0.0893 = \delta f_{-1/2} = \Delta f_{-1} = \nabla f_0.$$

در حالت کلی داریم

$$\delta^n f_m = \Delta^n f_{m-n/2} = \nabla^n f_{m+n/2}.$$

از تفاضلهای می توان برای آشکارسازی خطا در جدول استفاده کرد. خطای ϵ که در مقدار تابع وجود دارد، همان طور که در جدول ۳۰۱۹ نشان داده شده است، در تفاضلهای بخش می شود. نتیجه می شود که تغییرات زیاد در تفاضلهای دال بر امکان وجود خطا در مقادیر تابع است. بدیهی است که تغییرات کم می تواند ناشی از گرد کردن باشد.

از تفاضلهای برای تقریب زدن توابع با چند جمله ایها نیز استفاده می شود. در مورد چند جمله ای درجه n ام $p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ، تفاضلهای n ام موجود در جدول با فاصله h ثابتند (برابرند با $n! h^n a_0$) و تمام تفاضلهای بالاتر صفرند، زیرا

$$p_n(x+h) - p_n(x) = a_0 [(x+h)^n - x^n] + \dots = a_0 n h x^{n-1} + \dots$$

جدول ۳.۱۹

بخش خطای يك مقدار تابع در جدول تفاضل

$$f(x) = \sqrt{x}, x = ۲۰(۰۱)۲۶, ۴D [f(۲۳)]$$

x	$\sqrt{x}$	تفاضلها	$\sqrt{x}$	تفاضلها	بخش خطای ε
۲۰	۱۰۴۱۴۲		۱۰۴۱۴۲		
	۳۴۹		۳۴۹		
۲۱	۱۰۴۴۹۱	-۸	۱۰۴۴۹۱	-۸	
	۳۴۱	۱	۳۴۱	۱۱	ε
۲۲	۱۰۴۸۳۲	-۷	۱۰۴۸۳۲	۳	ε
	۳۳۴	-۱	۳۳۴	-۳۱	ε -۳ ε
۲۳	۱۰۵۱۶۶	-۸	۱۰۵۱۶۶	-۲۸	ε -۲ ε
	۳۲۶	۱	۳۱۶	۳۱	- ε ۳ ε
۲۴	۱۰۵۴۹۲	-۷	۱۰۵۴۹۲	۳	ε
	۳۱۹	۲	۳۱۹	-۸	- ε
۲۵	۱۰۵۸۱۱	-۵	۱۰۵۸۱۱	-۵	
	۳۱۲		۳۱۲		
۲۶	۱۰۶۱۲۵		۱۰۶۱۲۵		

يك چندجمله‌ای درجه $n-1$ است؛ به گونه‌ای مشابه، تفاضلهای دوم با يك چندجمله‌ای درجه $n-2$ كه ضریب پیشروی آن $h^2(n-1)a_n$ است نشان داده می‌شوند و به همین ترتیب. نتیجه اینکه هرگاه تفاضلهای n ام موجود در جدولی از تابع f در يك حوزه مفروض تقریباً ثابت باشند در این صورت مقادیر این جدول را می‌توان در این حوزه به تقریب با چندجمله‌ای درجه n ام p_n نمایش داد. حال روشی را برای پیدا کردن p_n ، وقتی كه f داده شده است، تشریح می‌کنیم.

مثال ۱. تقریب

در جدول ۴.۱۹، تفاضلهای دوم تقریباً ثابت هستند (و برابر ۷-). از این رو می‌توان يك چندجمله‌ای تقریب زن درجه دوم p_2 پیدا کرد. نخست با این فرض كه تفاضلهای دوم دقیقاً ۷- هستند و با انتخاب مقدار تابع و تفاضل اولی در وسط برد، مثلاً ۱۵۱۶۶ و ۳۳۴، جدول تفاضلی می‌سازیم. در نتیجه جدول ۴.۱۹ به دست می‌آید. a_0 ، ضریب

جدول ۴.۱۹

تقریب زدن $f(x) = \sqrt{x}$ با دوجمله‌ای p_2

x	تفاضلها	$p_2(x)$
۲۰	۱۴۱۴۳	
	۳۴۸	
۲۱	۱۴۴۹۱	۷-
	۳۴۱	
۲۲	۱۴۸۳۲	۷-
	۳۳۴	
۲۳	۱۵۱۶۶	۷-
	۳۲۷	
۲۴	۱۵۴۹۳	۷-
	۳۲۰	
۲۵	۱۵۸۱۳	۷-
	۳۱۳	
۲۶	۱۶۱۲۶	

پیشروی p_2 ، از رابطه $a_0 2! h^2 = a_0 \times 2 \times 0.1^2 = -0.00007$ به دست می آید (که برابر تفاضل دوم است)؛ از این رو $a_0 = -0.00007 / 0.002 = -0.0035$ بنابراین $p_1(x) = p_2(x) + 0.0035x^2$ محاسبه نشان داد که تفاضلهای اول ثابت هستند (0.004915) و می دانیم که باید برابر $a_1 h$ باشند. بنابراین

$$a_1 = 0.004915 / 0.1 = 0.04915$$

و بالاخره $0.05713 = a_2 = 0.04915x - p_1(x)$ ، بنا بر این داریم

$$p_2(x) = -0.0035x^2 + 0.04915x + 0.05713.$$

این مثال نشان می دهد که چگونه می توانیم از تفاضلهای برای بررسی کیفیت یک تقریب استفاده کنیم، بدون آنکه واقعاً یک چندجمله ای معین کنیم. برای نیل به این منظور روشهای متعددی وجود دارد که بعضی از آنها را در بخش بعد تشریح می کنیم.

مسائل بخش ۳.۱۹

۱. در جدول ۲.۱۹، با فرض $x_0 = 1.2$ ، تمام اعداد را بر حسب نمادگذاری (الف) تفاضلهای مرکزی، (ب) تفاضلهای پیش رونده، (ج) تفاضلهای پس رونده بنویسید.

۲. با انجام محاسبات لازم، جدول تفاضلی برای $f(x) = x^3$ ، به ازای $x = 0(1)5$ ، بنویسید. با فرض $x_0 = 2$ تمام اعداد را بر حسب نمادگذاری (الف) تفاضلهای مرکزی، (ب) تفاضلهای پیش رونده، (ج) تفاضلهای پس رونده بنویسید.

۳. نشان دهید که

$$\delta^2 f_m = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}, \delta^3 f_{m+1/2} = f_{m+2} - 3f_{m+1} + 3f_m - f_{m-1}.$$

۴. مطلوب است محاسبه $f(5) = 1/(x+1)$ ، $x = 0(0.2)1$ تا (الف) $2D$ ، (ب) $3D$ ، (ج) $4D$ و مقایسه اثر خطاهای گرد کردن در جدول تفاضل متناظر.

۵. جدول تفاضلی برای $f(x) = x^2$ ، به ازای $x = 0(1)10$ بسازید. همین کار را وقتی که به جای $f(5) = 25$ عدد ۲۶ قرار گیرد انجام داده تفاضلهای اول، دوم، سوم و چهارم را پیدا کنید. به پخش خطا توجه کنید.

۶. با استفاده از تفاضلهای جدول زیر را کنترل کنید

x	۴۲۰	۴۲۱	۴۲۲	۴۲۳	۴۲۴	۴۲۵
$f(x)$	۰.۰۲۵۰	۰.۰۲۴۴	۰.۰۲۴۲	۰.۰۲۳۳	۰.۰۲۲۷	۰.۰۲۲۲

۷. محاسبات مربوط به مثال ۱ را انجام دهید.

۴.۱۹ درونیابی

اغلب با داشتن جدولی از مقادیر تابعی مانند $f(x)$ ، لازم می‌شود که مقادیر $f(x)$ را به ازای مقادیری از x که بین مقادیر داده شده x در جدول قرار دارند حساب کنیم. مسئله به دست آوردن چنین مقداری برای f از روی مقادیر جدولی داده شده را **درونیابی** می‌نامند. مقادیر جدولی $f(x)$ را که در این فرآیند به کار می‌روند **مقادیر لولایی** می‌نامند. روشهای معمول درونیابی برای این فرض استوارند که در همسایگی x مورد نظر، f را می‌توان بایک چند جمله‌ای p که مقدارش در آن x تقریبی از f در آنجا گرفته می‌شود تقریب زد.

ساده‌ترین این روشها **درونیابی خطی** است که در آن منحنی f بین دو مقدار جدولی نزدیک به هم x_0 و x_1 را با وتر بین این دو مقدار x تقریب می‌زنیم (ر.ک. شکل ۳۵۰). بنا بر این به عنوان مقدار تقریبی f در $x = x_0 + rh$ خواهیم داشت

$$(۱) \quad f(x) \approx p_1(x) = f_0 + r(f_1 - f_0) = f_0 + r\Delta f.$$

$$\left(r = \frac{x - x_0}{h}, 0 \leq r \leq 1\right)$$

این رابطه را در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی در ارتباط با جداول لگاریتم یا توابع مثلثاتی دیده‌ایم. مثلاً، برای به دست آوردن $\ln 92$ ، از جدولی که نشان می‌دهد

$$\ln 90 = 2.197 \quad \text{و} \quad \ln 95 = 2.251$$

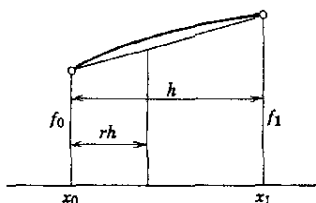
می‌توانیم نخست بنویسیم $r = 0.4 = 0.5 - 0.1$ و سپس

$$\ln 92 = \ln 90 + 0.4(\ln 95 - \ln 90) = 2.219$$

نتایج درونیابی خطی رضایت بخش است تا وقتی که مقادیر x جدول آنقدر به هم نزدیک باشند که اختلاف وتر با منحنی $f(x)$ ناچیز باشد، مثلاً تا وقتی که این اختلاف کمتر از $1/2$ واحد آخرین رقم ثبت شده در جدول برای مقادیر x بین x_0 و x_1 باشد. در **درونیابی درجه دوم** منحنی تابع f بین x_0 و $x_2 = x_0 + 2h$ را با سهمی درجه دومی که از نقاط (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) می‌گذرد تقریب می‌زنیم و فرمول دقیقتر زیر را به دست می‌آوریم:

$$(۲) \quad f(x) \approx p_2(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0.$$

$$\left(r = \frac{x - x_0}{h}, 0 \leq r \leq 2\right)$$



شکل ۳۵۰. درون یابی خطی

که در آن $x = x_0 + rh$ به ازای $x = x_0$ ($r = 0$) طرف راست رابطه برابر می شود با f_0 ، و به ازای $x = x_1$ ($r = 1$) برابر می شود با $f_1 = f_0 + \Delta f_0$ ، و به ازای $x = x_2$ ($r = 2$) برابر است با

$$f_0 + 2(f_1 - f_0) + [(f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)] = f_2.$$

مثال ۱. درون یابی خطی و درجه دوم

هرگاه $\ln 90 = 2.1972$ و $\ln 95 = 2.2513$ داده شوند، در این صورت بنا به (۱) داریم $\ln 92 = 2.2188$ که دقت آن تنها تا $3D$ است، درحالی که (۲) با فرض $\ln 100 = 2.3026$ نتیجه می دهد:

$$\ln 92 = 2.1972 + 0.4 \times 0.0541 + \frac{0.4 \times (-0.6)}{2} (-0.0028) = 2.2192$$

که دقت آن تا $4D$ است. ▲

با به کار بردن چندجمله ایهای درجه بالاتر تقریبهای دقیقتری به دست می آید. چند جمله ای $p_n(x)$ را که درجه n است می توان با مقادیرش به ازای $n+1$ مقدار متمایز x به طور یکتا معین کرد. درمورد حاضر به یک چندجمله ای p_n نیاز داریم، به طوری که $f_0 = f(x_0)$ ، $\dots$ ، $f_n = f(x_n)$ ؛ در اینجا $p_n(x_0) = f_0$ ، $\dots$ ، $p_n(x_n) = f_n$ مقادیر f جدول هستند. این چندجمله ای با فرمول درون یابی تفاضل پیش رونده نیوتن (یا گریگوری - نیوتن) * داده می شود:

$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0.$$

$$\left(x = x_0 + rh, r = \frac{x - x_0}{h}, 0 \leq r \leq n\right),$$

(۱) و (۲) حالت‌های خاص این فرمول هستند ($n=1, n=2$). باید ثابت کنیم که $p_n(x_k) = f_k$ ($k=0, 1, \dots, n$) سمت راست (۳) نشان می‌دهد که فرمول از رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$(۴) \quad f_k = \binom{k}{0} f_0 + \binom{k}{1} \Delta f_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{k}{k} \Delta^k f_0.$$

در اینجا ضرایب دو جمله‌ای چنین تعریف شده‌اند:

$$(۵) \quad \binom{k}{0} = 1, \quad \binom{k}{s} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-s+1)}{s!} \quad (s \geq 0, \text{ عدد صحیح})$$

و $s! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times s$ در واقع اگر در (۳) قرار دهیم $r=k$ ، در آن صورت سمت راست (۳) با سمت راست (۴) برابر می‌شود. فرمول (۴) را می‌توان با استقرا ثابت کرد. به ازای $k=0$ این فرمول صادق است. فرض کنید به ازای $k=q$ فرمول صادق باشد. در این صورت با استفاده از (۴)، به ازای $k=q$ ، و فرمول حاصل از آن، با به کار بردن Δ ، داریم

$$\begin{aligned} f_{q+1} &= f_q + \Delta f_q \\ &= \binom{q}{0} f_0 + \binom{q}{1} \Delta f_0 + \binom{q}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{q}{q} \Delta^q f_0 \\ &\quad + \binom{q}{0} \Delta f_0 + \binom{q}{1} \Delta^2 f_0 + \binom{q}{2} \Delta^3 f_0 + \dots + \binom{q}{q} \Delta^{q+1} f_0. \end{aligned}$$

در این فرمول ضریب $\Delta^q f_0$ [ر. ک. (۵)] برابر است با

$$\binom{q}{s} + \binom{q}{s-1} = \binom{q+1}{s}$$

که به ازای $k=q+1$ فرمول (۴) به دست می‌آید و بدین وسیله اثبات با روش استقرا کامل می‌شود. ▲

فرمولی که شبیه (۳) است اما تفاضل‌های پس‌رونده را در برمی‌گیرد فرمول درون-یابی تفاضل پس‌رونده نیوتن (یا گریگودی - نیوتن) است:

$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r \nabla f_0 + \frac{r(r+1)}{2!} \nabla^2 f_0 + \dots$$

$$(۶) \quad + \frac{r(r+1) \dots (r+n-1)}{n!} \nabla^n f_0$$

که در آن همانند (۳) داریم $0 \leq r \leq n$ ، $x = x_0 + rh$ ، $r = (x - x_0)/h$ ، با استفاده از تفاضل متناهی نوشته‌های فراوانی درمورد روشها و فرمولهای درون‌یابی با استفاده از تفاضل متناهی نوشته‌های فراوانی وجود دارد. مثلاً فرمولهایی وجود دارند که فقط شامل تفاضلهای مرتبه زوج هستند. فرمولی از این نوع که به‌ویژه مفید است، ساده‌ترین فرمول اورت* است

$$f(x) \approx (1-r)f_0 + rf_1 + \frac{(2-r)(1-r)(-r)}{3!} \delta^2 f_0$$

(۷)

$$+ \frac{(r+1)r(r-1)}{3!} \delta^2 f_1$$

که در آن $0 \leq r \leq 1$ ، $r = (x - x_0)/h$ ، برای تسهیل در کاربرد، در اغلب جدولهای تابعی تفاضلهای دوم مورد نیاز در (۷) آورده می‌شود.

مثال ۲. کاربردی از فرمول اورت (۷)

^{۱۲۴} را با استفاده از (۷) و جدول زیر بیابید:

x	e^x	δ^2
۱٫۲	۳٫۳۲۰۱	۳۳۳
۱٫۳	۳٫۶۶۹۳	۳۶۷

داریم $r = 0.04 / 0.1 = 0.4$ ، و (۷) می‌دهد

$$e^{1.24} = 0.06 \times 3.3201 + 0.4 \times 3.6693 + \frac{1.6 \times 0.06 \times (-0.04)}{6}$$

$$+ \frac{1.4 \times 0.4 \times (-0.06)}{6} \times 0.00367$$

$$= 3.4598 - 0.0021 - 0.0021 = 3.4556$$

که دقت آن تا ۴D است.

توجه کنید که با درون یابی خطی داریم ۳۴۵۹۸ که دقت آن تنها تا $۲D$ است. خواننده می تواند از $۳۴۵۹۸ = e^{۱۰۴}$ و $۳۴۵۹۸ = e^{۱۰۴}$ برای کنترل تفاضلهای دوم استفاده کند. ▲

یادآوری می کنیم که فرمول اورت در حالت کلی عبارت است از

$$f(x) = qf_0 + rf_1 + \binom{q+1}{3} \delta^2 f_0 + \binom{r+1}{3} \delta^2 f_1 + \binom{q+2}{5} \delta^3 f_0 + \binom{r+2}{5} \delta^3 f_1 + \dots \quad (۸)$$

که در آن مانند قبل $0 \leq r \leq 1$ ، $r = (x - x_0)/h$ ، $q = 1 - r$ و در این فرمول نسبت ضرایب $\delta^2 f_0$ و $\delta^2 f_1$ برابر است با

$$\binom{q+2}{5} \binom{q+1}{3} = \frac{q^2 - 4}{20}$$

و، به گونه ای مشابه، نسبت ضرایب $\delta^4 f_0$ و $\delta^4 f_1$ برابر است با $(r^2 - 4)/20$. هر دو نسبت در فاصله 0 و 1 تغییر می کنند ولی تغییرات آنها کم است. بنابراین اگر میانگین عددی مناسب μ را برای آنها انتخاب کنیم، می توانیم با استفاده از (۷)، با تفاضلهای دوم اصلاح شده اثر تفاضل چهارم را نیز بدانیم:

$$\delta_{\mu}^2 f = \delta^2 f + \mu \delta^4 f, \quad \mu = -0.18393 \quad (۹)$$

مقدار μ بی که در اینجا آورده ایم از بین مقادیری که در نوشته های مختلف پیشنهاد شده انتخاب شده است. این روش استفاده از تفاضلهای اصلاح شده را عقب گرد می نامند. اگر تفاضل چهارم کمتر از 1000 واحد (از آخرین رقم معنی دار) باشد و تفاضل پنجم کمتر از 70 باشد در این صورت خطای واقعی از نصف واحد کمتر است.

بدون اثبات متذکر می شویم که هرگاه $x_0, x_1, \dots, x_n$ به طور دلخواه پخش شده باشند، چندجمله ای درجه n مربوط به $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ ، که در آن $f_j = f(x_j)$ ، از طرف راست فرمول درون یابی تفاضل تقسیم شده فیوتن به دست می آید:

$$f(x) \approx f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n] \quad (۱۰ \text{ الف})$$

این فرمول شامل تفاضلهای تقسیم شده است که با روابط زیر تعریف می شوند:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}, \dots$$

(۱۵ ب)

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

اگر $x_k = x_0 + kh$ (فاصله نقاط از هم مساوی باشد)، در این صورت

$$f[x_0, \dots, x_k] = \Delta^k f_0 / k! h^k$$

و (۱۵ الف) به صورت (۳) درمی آید.

در درون یابی باروهای تفاضل باید تفاضلهای محاسبه کنیم؛ از این تفاضلهای توان برای کنترل جدولهای جدید یا مشکوک استفاده کرد. مع ذلك، در بیشتر جدولها به این سؤال که چه مرتبه ای از درون یابی باید به کار رود پاسخی داده نمی شود. درون یابی لاگرانژی بر اساس فرمول درون یابی لاگرانژ بنا شده است:

$$(۱۱ الف) \quad f(x) \approx L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} f_k$$

که در آن $x_0, \dots, x_n$ الزاماً هم فاصله نیستند و

$$l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$(۱۱ ب) \quad l_k(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n), \quad 0 \leq k \leq n$$

$$l_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

فرمول (۱۱ الف) را فرمول $n+1$ نقطه ای لاگرانژ می نامند. به سادگی می بینیم که $L_n(x_k) = f_k$ زیرا بردی (۱۱ ب) نشان می دهد که $l_k(x_j) = 0$ وقتی که $j \neq k$ و $(l_k(x)/l_k(x_k))f_k = f_k$ وقتی که $x = x_k$. مزیت این روش آن است که نیازی به محاسبه تفاضلهای نیست و اثر f_k های مختلف ساده تر مشاهده می شود، اما محاسبات آن ممکن است پر زحمت تر باشد و استفاده از این روش باید منحصر به جدولهای مطمئن شود. جدولهای ضرایب لاگرانژی $l_k(x)/l_k(x_k)$ به ازای مقادیر هم فاصله چاپ و منتشر شده است؛ ر. ک. مرجع [۱۲]، ضمیمه ۱.

مثال ۳. کاربردی از فرمول درون یابی لاگرانژ

با استفاده از (۱۱)، با $n=3$ ، و با استفاده از مقادیر زیر، $\ln 9.2$ را حساب کنید.

x	۹۰۰	۹۰۵	۱۰۰۰	۱۱۰۰
$\ln x$	۲۰۱۹۷۲۲	۲۰۲۵۱۲۹	۲۰۳۰۲۵۹	۲۰۳۹۷۹۰

داریم

$$l_1(x) = (x-9)(x-10)(x-11), \quad l_0(x) = (x-9.5)(x-10)(x-11)$$

و غیره، و حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \ln 9.2 = & \frac{-0.43200}{-1.000000} \times 2019722 + \frac{0.28800}{0.375000} \times 2025129 \\ & + \frac{0.10800}{-0.500000} \times 2030259 + \frac{0.04800}{3.000000} \times 2039790 \end{aligned}$$

$$\triangleq = 2021920 \quad (\text{با دقت } 5D)$$

مسئله پیدا کردن x به ازای $f(x)$ داده شده را درون یابی معکوس می‌نامند. اگر f مشتق پذیر بوده و df/dx در نزدیکی نقطه‌ای که درون یابی معکوس، باید اثر داده شود صفر نباشد، $x = F(y)$ معکوس $y = f(x)$ بدین‌طور موضعی در نزدیکی مقدار داده شده f وجود دارد و گاه ممکن است بتوان F را در آن حدود با یک چندجمله‌ای از درجه نسبتاً پایین تقریب زد. در این صورت با قرار دادن F به صورت تابعی از y در جدول و به کار بردن روشهای درون یابی مستقیم F می‌توانیم درون یابی معکوس را اثر دهیم. اگر در نزدیکی نقطه مورد نظر و یا در خود آن $df/dx = 0$ ، ممکن است حل $p(x) = \tilde{f}$ با روش تکرار مفید واقع شود؛ در اینجا $p(x)$ چندجمله‌ای است که $f(x)$ را تقریب می‌زند و $\tilde{f}$ مقدار داده شده است.

مسائل بخش ۴.۱۹

۱. تحقیق کنید که سهمی (۲) از (x_0, f_0) , (x_1, f_1) , (x_2, f_2) می‌گذرد.

۲. با استفاده از مقادیر مندرج در جدول $\sin 0.26$ را به کمک (۱)، یعنی با درون یابی خطی، پیدا کنید. نشان دهید که دو اعشار اول دقیقند ($\sin 0.26 = 0.25708$).

x	$\sin x$	فاصل اول	فاصل دوم
۰.۰	۰.۰۰۰۰۰۰		
		۱۹۸۶۷	
۰.۲	۰.۱۹۸۶۷		-۷۹۲
		۱۹۰۷۵	
۰.۴	۰.۳۸۹۴۲		-۱۵۵۳
		۱۷۵۲۲	
۰.۶	۰.۵۶۴۶۴		-۲۲۵۰
		۱۵۲۷۲	
۰.۸	۰.۷۱۷۳۶		-۲۸۶۱
		۱۲۴۱۱	
۱.۰	۰.۸۴۱۴۷		

مسائل ۷ تا ۲

۳. $\sin 0.26$ را با استفاده از (۲)، یعنی با درون یابی درجه دوم، پیدا کنید. نشان دهید که سه اعشار اول دقیقند.

۴. جدول داده شده را بسط دهید تا شامل تفاضلهای سوم و چهارم هم بشود. سپس $\sin 0.26$ را با استفاده از (۳) حساب کنید (الف) با $n=3$ ، (ب) با $n=4$. به کم کم مقایسه با مقدار $5D = 0.25708$ $\sin 0.26$ ، نتیجه بگیرید که (الف) سه اعشار اول، (ب) تمام ۵ اعشار دقیقند.

۵. فرمول درون یابی تفاضل پس رونده (۶) را (الف) با $n=1$ ، (ب) با $n=2$ ، برای به دست آوردن $\sin 0.26$ به کار ببرید و نشان دهید که در هر دو مورد دو اعشار اول دقیقند. بنابراین نتیجه ای که از (ب) به دست می آید از نتیجه مسئله ۳ ضعیفتر است. چرا؟

۶. برای محاسبه $\sin 0.26$ ، جدول داده شده را طوری بسط دهید که بتوانید (۶) را با (الف) $n=3$ ، (ب) $n=4$ ، (پ) $n=5$ به کار ببرید؛ نشان دهید که به $\sin x$ به ازای مقادیر $0.26, 0.24, 0.22, 0.20, 0.18, 0.16, 0.14, 0.12, 0.10, 0.08, 0.06, 0.04, 0.02, 0$ به ازای مقادیر $x = -0.06, -0.04, -0.02, 0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.20, 0.22, 0.24, 0.26$ به ازای مقادیر x به تفاضلهای نیاز دارید. کدام خاصیت تابع سینوس این بسط را بسیار ساده می کند؟ سپس (۶) را به کار ببرید و پیدا کنید (الف) 0.25709 ، (ب) 0.25705 ، (پ) 0.25708 را (مقدار $5D$ دقیق). چرا نتایج ضعیفتر از نتیجه مسئله ۴ هستند؟

۷. نشان دهید که فرمول اورت (۷) با کار نسبتاً کمی می دهد $\sin 0.26 = 0.25707$.

۸. محاسبات مثال ۲ را تحقیق کنید.

۹. $f(x) = \sqrt{x}$ را با استفاده از $f(20) = 4.472135955$ ، $f(23) = 4.795831523$ ، $f(26) = 5.099019514$ درون یابی درجه دوم کنید. نتیجه را با (۴)، بخش ۳.۱۹، مقایسه کنید.

۱۰. نشان دهید که

$$\Delta^k f_n = \binom{k}{0} f_{n+k} - \binom{k}{1} f_{n+k-1} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} f_n.$$

۱۱. $f(3)$ را با استفاده از فرمول لاگرانژ (۱۱) و $f(1) = 2$ ، $f(2) = 11$ ، $f(4) = 77$ پیدا کنید.

۱۲. $\ln 9.2$ را با استفاده از $\ln 8.5 = 2.14007$ و $\ln 9.0$ و $\ln 10$ ی که در مثال ۳ داده شده اند محاسبه کنید (الف) با استفاده از (۳) با $n=3$ (و $x_0 = 8.5$)، (ب) با استفاده از (۶) با $n=3$ (و $x_0 = 10$).

۱۳. $\ln 9.2$ را با استفاده از $\ln 8.5 = 2.14007$ و $\ln 9$ و $\ln 10$ و $\ln 11$ ی که در

مثال ۳ داده شده‌اند و با به‌کاربردن (۱۱) با $n=3$ محاسبه کنید و نتیجه را با نتیجه مثال ۳ مقایسه کنید.

۱۴. $\ln 92$ را با استفاده از داده‌های مسئله ۱۲ محاسبه کنید (الف) به‌وسیله (۷)، (ب) به‌وسیله (۱۱) با $n=3$.

۱۵. با فرض $x_3 = x_0 + 3h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، $x_1 = x_0 + h$ و با استفاده از $r = (x - x_0)/h$ ، نشان دهید که (۱۱) با $n=3$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x) \approx -\binom{r-1}{3} f_0 + \frac{r(r-2)(r-3)}{2} f_1 - \frac{r(r-1)(r-3)}{2} f_2 + \binom{r}{3} f_3.$$

۱۶. با به‌کاربردن فرمول مسئله (۱۵)، نتیجه مسئله ۱۴ را کنترل کنید.

۱۷. (کنترل تفاضلهای) نشان دهید که مجموع تفاضلهای هرستون برابر است با تفاضل بین اولین و آخرین نظریه ستون قبل از آن. این کنترل جزئی را در مورد جدول ۲۰۱۹ ی بخش ۳۰۱۹ اعمال کنید.

۵.۱۹ اسپلاین

تقریب اسپلاین تقریب چندجمله‌ای تکه‌ای است، بدین معنی که تابعی مانند $f(x)$ در فاصله $a \leq x \leq b$ داده شده و ما می‌خواهیم $f(x)$ را در آن فاصله با تابع $g(x)$ که به ترتیب زیر به دست می‌آید تقریب بزنیم. $a \leq x \leq b$ را پادش می‌کنیم، یعنی آن را به زیر فاصله‌های با نقاط انتهایی مشترك (به نام گره‌ها) تقسیم می‌کنیم:

$$(۱) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

حالا لازم است که در این فاصله‌ها $g(x)$ به صورت چندجمله‌ای داده شده باشد؛ یعنی به ازای هر زیر فاصله يك چندجمله‌ای متطور شود، به طوری که در نقاط انتهایی، $g(x)$ چندبار مشتق پذیر باشد. از این رو به جای تقریب زدن $f(x)$ با يك چندجمله‌ای در تمام فاصله $a \leq x \leq b$ ، آن را با n چندجمله‌ای تقریب می‌زنیم. با این روش توابع تقریب زن $g(x)$ را به دست می‌آوریم که برای بسیاری از مسائل تقریب و درون‌یابی مناسب هستند. مثلا، ممکن است نوسان این توابع بین گره‌ها کمتر از يك چندجمله‌ای بر روی $a \leq x \leq b$ باشد. توابع $g(x)$ را که بدین طریق به دست می‌آیند اسپلاین

می نامند. این اسم از میله نازکی به نام اسپلین که مهندسین به منظور برآزاندن منحنی به نقاط داده شده‌ای به کار می‌برند گرفته شده است. چون اسپلینها از اهمیت عملی روبه تزایدی برخوردارند، در اینجا برای آشنایی با آنها بحثی داریم.

ساده‌ترین تقریب چند جمله‌ای تکه‌ای پیوسته مربوط به توابع خطی تکه‌ای است. اما چنین توابعی در نقاط انتهایی مشتق پذیر نیستند و به همین دلیل بهتر است توابعی به کار بریم که در همه جای فاصله $a \leq x \leq b$ تعداد معینی مشتق داشته باشند.

ما اسپلینهای مکعبی را بررسی می‌کنیم که شاید از نقطه نظر عملی مهمترین نوع باشند. بنا به تعریف، اسپلین مکعبی $g(x)$ بر روی $a \leq x \leq b$ ، و متناظر با پارش (۱)، تابع پیوسته $g(x)$ است که در همه جای فاصله مورد نظر و هر زیرفاصله پارش، مشتق مرتبه اول و دوم داشته باشد و با چندجمله‌ای که درجه آن نابزرگتر از سه است نمایش داده شود. از این رو $g(x)$ تشکیل شده از چند جمله‌ایهای درجه سومی که هر کدام در یک زیرفاصله قرار دارند.

اگر $f(x)$ روی $a \leq x \leq b$ داده شده باشد و پارش (۱) انتخاب شود، اسپلین مکعبی $g(x)$ را طوری به دست می‌آوریم که $f(x)$ را تقریب بزنند و در ضمن داشته باشیم

$$(2) \quad g(x_0) = f(x_0), \quad g(x_1) = f(x_1), \quad \dots, \quad g(x_n) = f(x_n)$$

و این چیزی است که در مسئله درونیابی کلاسیک بخش قبل دیدیم. ادعا می‌کنیم که اسپلینی مکعبی مانند $g(x)$ وجود دارد که در شرایط (۲) صدق کند. همچنین اگر بخواهیم که

$$(3) \quad g'(x_0) = k_0, \quad g'(x_n) = k_n$$

(k_0 و k_n اعداد داده شده‌اند)، در این صورت اسپلینی مکعبی داریم که به طور یکتا معین شده است. این موضوع محتوای قضیه وجود و یکتایی زیر است.

قضیه ۱ (اسپلین مکعبی)

فرض کنید $f(x)$ روی فاصله $a \leq x \leq b$ تعریف شده باشد، و فرض کنید که پارشی به صورت (۱) از آن فاصله داشته باشیم و k_0 و k_n دو عدد مفروض دلخواه باشند. در این صورت یک و تنها یک اسپلین مکعبی $g(x)$ متناظر با (۱) وجود دارد که در (۲) و (۳) صدق می‌کند.

اثبات. بنا به تعریف روی هر زیرفاصله I_j که با $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ داده می‌شود، اسپلین $g(x)$ باید با چندجمله‌ای مکعبی $p_j(x)$ منطبق باشد به طوری که $p_j(x)$ دارای خواص زیر باشد:

$$(4) \quad p_j(x_j) = f(x_j), \quad p_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$$

می‌نویسیم $c_j = 1/(x_{j+1} - x_j)$ و

$$(5) \quad p_j'(x_j) = k_j, \quad p_j'(x_{j+1}) = k_{j+1},$$

که در آن k_0 و k_n داده شده‌اند، و $k_1, \dots, k_{n-1}$ را بعداً تعیین می‌کنیم. (۵) و (۴) چهار شرط برای $p_j(x)$ هستند. با محاسبه مستقیم می‌توانیم تحقیق کنیم که چند جمله‌ای مکعبی یکتای $p_j(x)$ که در (۴) و (۵) صدق کند عبارت است از

$$\begin{aligned} p_j(x) = & f(x_j) c_j^2 (x - x_{j+1})^2 [1 + 2c_j(x - x_j)] \\ & + f(x_{j+1}) c_j^2 (x - x_j)^2 [1 - 2c_j(x - x_{j+1})] \\ & + k_j c_j^2 (x - x_j)(x - x_{j+1})^2 \\ & + k_{j+1} c_j^2 (x - x_j)^2 (x - x_{j+1}) \end{aligned}$$

(۶)

با دو بار مشتق‌گیری به دست می‌آوریم

$$(7) \quad p_j''(x_j) = -6c_j^2 f(x_j) + 6c_j^2 f(x_{j+1}) - 4c_j k_j - 2c_j k_{j+1}$$

$$(8) \quad p_j''(x_{j+1}) = 6c_j^2 f(x_j) - 6c_j^2 f(x_{j+1}) + 2c_j k_j + 4c_j k_{j+1}.$$

بنابه تعریف، $g(x)$ مشتق دوم پیوسته دارد. از اینجا شرایط زیر به دست می‌آید:

$$p_{j-1}''(x_j) = p_j''(x_j) \quad j = 1, \dots, n-1$$

با استفاده از (۸)، وقتی که در آن به جای j قرار گیرد $j-1$ ، و با استفاده از (۷)، می‌بینیم که این $n-1$ معادله به صورت

$$(9) \quad c_{j-1} k_{j-1} + 2(c_{j-1} + c_j) k_j + c_j k_{j+1} = 3[c_{j-1}^2 \nabla f_j + c_j^2 \nabla f_{j+1}]$$

درمی‌آید که در آن $\nabla f_j = f(x_j) - f(x_{j-1})$ و $\nabla f_{j+1} = f(x_{j+1}) - f(x_j)$ و مثل سابق $j = 1, \dots, n-1$. این دستگاه $n-1$ معادله خطی دارای جواب یکتای $k_1, \dots, k_{n-1}$ است، زیرا تمام ضرایب دستگاه غیرمنفی هستند، و هر عنصر واقع بر قطر اصلی بزرگتر از مجموع عناصر دیگری است که در ردیف متناظر با آن قرار دارند؛ بنابراین دترمینان ضرایب نمی‌تواند صفر باشد. از این رو می‌توان مقادیر یکتای $k_1, \dots, k_{n-1}$ مشتق اول $g(x)$ در گره‌ها را معین کرد. ▲

قضیه را با ذکر مثال ساده‌ای روشن می‌کنیم.

مثال ۱. تقریب اسپلین

$f(x) = x^4$ را در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ با اسپلین مکعبی $g(x)$ ، متناظر با پارش $g'(-1) = f'(-1)$ ، $g'(1) = f'(1)$ و (۲) که در $x_4 = 1$ ، $x_3 = 0$ ، $x_2 = -1$ صدق کند تقریب بزنید.

حل. باید ضرایب

$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (-1 \leq x \leq 0)$$

$$p_1(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

را معین کنیم. از $p_0(0) = p_1(0) = f(0) = 0$ داریم $a_0 = b_0 = 0$. از $p_0'(0) = p_1'(0)$ به دست می آوریم $a_1 = b_1$. به طور کلی، $a_2 = b_2$

$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$

$$p_1(x) = b_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$

اکنون می توانیم چهارضریب باقیمانده را از چهار شرط باقیمانده به دست آوریم:

$$p_0(-1) = -a_3 + a_2 - a_1 = f(-1) = 1$$

$$p_1(1) = b_3 + a_2 + a_1 = f(1) = 1$$

(۱۰)

$$p_0'(-1) = 3a_3 - 2a_2 + a_1 = f'(-1) = -2$$

$$p_1'(1) = 3b_3 + 2a_2 + a_1 = f'(1) = 4.$$

جوابها عبارتند از $a_1 = 0$ ، $a_2 = -1$ ، $a_3 = -2$ ، $b_3 = 2$. بدین ترتیب اسپلاین را به دست می آوریم (شکل ۳۵۱)

$$(11) \quad g(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x^3 - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

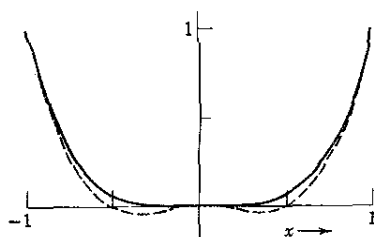
اسپلاینها خاصیت می نیمم جالبی دارند که ما اکنون آن را به دست می آوریم. فرض کنید، در قضیه ۱، $f(x)$ پیوسته بوده و در فاصله $a \leq x \leq b$ مشتقات اول و دوم پیوسته داشته باشد. فرض کنید که (۳) به صورت

$$(12) \quad g'(a) = f'(a), \quad g'(b) = f'(b)$$

باشد (مانند مثال ۱). در این صورت $f' - g'$ در a و b صفر است. با انتگرال گیری جزء به جزء به دست می آوریم

$$\int_a^b g''(x)[f''(x) - g''(x)]dx = - \int_a^b g'''(x)[f'(x) - g'(x)]dx.$$

چون $g'''(x)$ در هر زیر فاصله پارش ثابت است، با محاسبه انتگرال سمت راست، روی



شکل ۳۵۱. تابع $f(x) = x^4$ و اسپلاین مکعبی $g(x)$ (نقطه چین)، مثال ۱

یک زیرفاصله، به دست می آوریم $[f(x) - g(x)] \times$ (ثابت)، که مربوط به نقاط دوسر زیرفاصله است و بنا به (۲) صفر است. از این رو انتگرال سمت راست صفر است. این ثابت می کند که

$$\int_a^b f''(x)g''(x) dx = \int_a^b g''(x)^2 dx.$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \int_a^b [f''(x) - g''(x)]^2 dx &= \int_a^b f''(x)^2 dx - 2 \int_a^b f''(x)g''(x) dx \\ &+ \int_a^b g''(x)^2 dx = \int_a^b f''(x)^2 dx - \int_a^b g''(x)^2 dx. \end{aligned}$$

انتگران سمت چپ غیر منفی است و انتگرال نیز چنین است. از این رو به نامساوی زیر می رسیم:

$$(۱۳) \quad \int_a^b f''(x)^2 dx \geq \int_a^b g''(x)^2 dx.$$

نتیجه را می توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۲ (خاصیت مینیمم اسپلاین مکعبی)

فرض کنید $f(x)$ پیوسته بوده و در فاصله $a \leq x \leq b$ مشتقات اول و دوم پیوسته داشته باشد. فرض کنید $g(x)$ اسپلاین مکعبی متناظر با پارشی مانند (۱) از آن فاصله بوده و د (۲) و (۱۲) صدق کند. در این صورت $f(x)$ و $g(x)$ در (۱۳) صدق می کنند، و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $f(x)$ همان اسپلاین مکعبی $g(x)$ باشد.

همچنان که قبلاً متذکر شدیم، مهندسین از میله های نازکی به نام اسپلاین برای برآوردن منحنی به نقاط داده شده استفاده می کنند و انرژی کششی که با این اسپلاینها به حداقل می رسد تقریباً متناسب است با انتگرال مربع مشتق دوم اسپلاین. بنا بر این نامساوی (۱۳) استفاده

از اصطلاح اسپلاین درمورد توابع $g(x)$ را که در این بخش مورد بحث قرار گرفتند توجیه می‌کند.

مسائل بخش ۵.۱۹

۱. تحقیق کنید $p_j(x)$ ی که در شماره (۶) داده شده در (۴) و (۵) صدق می‌کند.
۲. (۷) و (۸) را از (۶) نتیجه بگیرید.
۳. مثال ۱ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تحت شرایط بیان شده در مثال، فرمول (۶) می‌دهد

$$p_0(x) = -2x^3 - x^2 + k_1 x(x+1)^2$$

$$p_1(x) = 2x^3 - x^2 + k_1 x(x-1)^2$$

و (۹) می‌دهد $k_1 = 0$ ، و بنا بر این (۱۱) به دست می‌آید.

۴. اسپلاین $g(x)$ ، مثال ۱، را با چند جمله‌ای درون‌یابی درجه دوم $p(x)$ در تمام فاصله مقایسه کنید. ماکزیمم انحراف $g(x)$ و $p(x)$ از $f(x)$ چقدر است؟ تفسیر کنید.

۵. مراحل مختلف به دست آوردن (۱۰) را به تفصیل شرح دهید.

۶. نشان دهید اسپلاین مکعبی متناظر با پارش داده شده يك فاصله مفروض تشکیل فضای برداری می‌دهد (ر. ک. بخش ۴.۶).

۷. نشان دهید به ازای پارش داده شده‌ای که به صورت (۱) است، $n+1$ اسپلاین مکعبی یکنای $g_0(x), \dots, g_n(x)$ وجود دارد به طوری که $g_j'(a) = g_j'(b) = 0$ و

$$g_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

۸. هرگاه يك اسپلاین مکعبی سه بار مشتق پذیر، با مشتقات پیوسته، باشد (یعنی دارای مشتقات اول، دوم و سوم پیوسته باشد)، نشان دهید که اسپلاین مکعبی باید يك چند جمله‌ای باشد.

۹. بعضی اوقات يك اسپلاین در زیر فاصله‌های مجاور $a \leq x \leq b$ با يك چند جمله‌ای نمایش داده می‌شود. برای روشن شدن این موضوع، اسپلاین مکعبی $g(x)$ را برای $f(x) = \sin x$ با پارش $x_0 = -\pi/2$ ، $x_1 = 0$ ، $x_2 = \pi/2$ در فاصله $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ پیدا کنید به طوری که در $g'(-\pi/2) = f'(-\pi/2)$ ،

$$g'(\pi/2) = f'(\pi/2) \text{ صدق کند.}$$

۱۵. يك تعبير هندسی ممكن برای (۱۳) این است كه تابع اسپلاین مكعبی، انتگرال مربع انحنا را، مینیمم می كند یا لا اقل تقریباً مینیمم می كند توضیح دهید.

۶.۱۹ انتگرالگیری و مشتق گیری عددی

مسئله انتگرالگیری عددی محاسبه عددی انتگرال معین

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

است كه a و b داده شده اند و f تابعی است كه یا به طور تحلیلی بایك فرمول و یا به طور تجربی با جدولی از اعداد مشخص شده است.

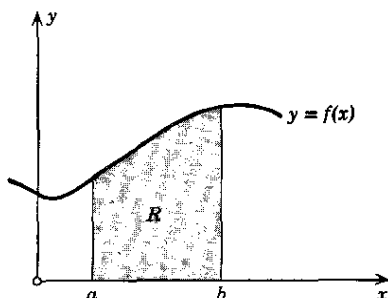
همان طور كه می دانیم، اگر f طوری باشد كه بتوانیم تابع مشتق پذیری مانند F پیدا كنیم كه مشتق آن f باشد، در این صورت با به كار بردن فرمول آشنای

$$J = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad [F'(x) = f(x)],$$

می توانیم J را حساب كنیم؛ جدولهای انتگرالی نظیر آنچه در مرجع [۳]، ضمیمه ۱، آمده ممكن است برای یافتن انتگرال مورد نظر مفید واقع شوند.

با وجود این، دركاربردهای مهندسی غالباً به انتگرالهایی برمی خوریم كه انتگرالشان تابعی است تجربی كه با يك جدول داده شده یا طوری است كه انتگرال را نمی توان بر حسب تعدادی متناهی تابع مقدماتی نمایش داد (مثالهای ضمیمه ۳) و یا شكل صریح F پیچیده بوده و زیاد مفید نیست. در این صورت می توان از يك روش عددی انتگرالگیری تقریبی استفاده كرد.

از آنجا كه J برابر است با مساحت ناحیه R كه زیر منحنی $f(x)$ بین a و b واقع است (ر. ك. شكل ۳۵۲)، مقدار تقریبی J را می توان با بریدن مقوایی به شكل R ، تعیین



شكل ۳۵۲. تعبير هندسی انتگرال معین

وزن آن و تقسیم این وزن بر وزن واحد مساحت مربع به دست آورد. روش ساده دیگر رسم R بر روی کاغذ میلیمتری و شمردن مربهاست. بسا استفاده از مساحت سنج، که اصول و کاربردهای آن در مرجع [G ۲۵]، ضمیمه ۱، تشریح شده است، می توان نتایج دقیقتری به دست آورد.

روشهای انتگرالگیری عددی را می توان با تقریب زدن انتگران f توسط چند جمله ایها به دست آورد. برای رسیدن به ساده ترین فرمول، فاصله انتگرالگیری را به n زیر فاصله مساوی به طول $h = (b-a)/n$ تقسیم کرده و f را در هر يك از این فاصله ها با تابع ثابت $f(x_j^*)$ ، که x_j^* نقطه میانی فاصله است، تقریب می زنیم (ر. ک. شکل ۳۵۳). در این صورت f بایک تابع پله ای (تابع ثابت تکه ای) تقریب زده می شود، n مستطیل شکل ۳۵۳ دارای مساحت های $f(x_1^*)h, \dots, f(x_n^*)h$ هستند، و قاعده مستطیلی زیر را به دست می آوریم:

$$(۱) \quad J = \int_a^b f(x) dx \approx h[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)] \left(h = \frac{b-a}{n} \right).$$

اگر f را بایک تابع خطی تکه ای (چند ضلعی حاصل از وترهای منحنی f ، ر. ک. شکل ۳۵۴) تقریب بزیم، قاعده ذوزنقه ای زیر به دست می آید:

$$(۲) \quad J = \int_a^b f(x) dx \approx h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right],$$

که در آن $h = (b-a)/n$ ، و $x_0 (=a)$ ، x_1 ، x_2 ، $\dots$ ، x_{n-1} ، $x_n (=b)$ انتهای فاصله های موجود در (۱) هستند؛ از این رو $x_j = x_0 + jh$. در واقع، n ذوزنقه شکل ۳۵۴ دارای مساحت های

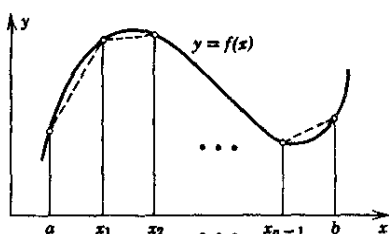
$$\frac{1}{2} [f(a) + f(x_1)]h, \frac{1}{2} [f(x_1) + f(x_2)]h, \dots, \frac{1}{2} [f(x_{n-1}) + f(b)]h$$

هستند و مجموع J^* آنها برابر سمت راست (۲) است.

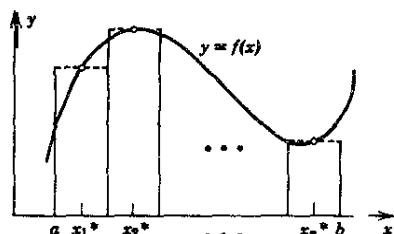
خطای ε مربوط به J^* (ر. ک. بخش ۱۰۱۹) برابر است با

$$\varepsilon = J^* - J.$$

اگر $f(x)$ تابعی خطی باشد، آنگاه $\varepsilon = 0$. در این حالت f' ثابت بوده و f'' به ازای تمام x ها صفر است و موجه به نظر می رسد که بتوانیم برای تابع کلی f (که مشتق دوم پیوسته دارد) **کرنهای خطایی** (کرنهایی برای ε) به دست آوریم که شامل f'' باشند. برای نیل به این منظور، b را با متغیر t جایگزین می کنیم و (۲) را، بسا $n=1$ ، به کار



شکل ۳۵۴. قاعده ذوزنقه‌ای



شکل ۳۵۳. قاعده مستطیلی

می‌بریم. در این صورت خطای متناظر برابر است با

$$\varepsilon(t) = \frac{t-a}{\gamma} [f(a) + f(t)] - \int_a^t f(x) dx.$$

یادآوری می‌کنیم $\varepsilon(a) = 0$ ، که بدیهی است. با مشتق‌گیری داریم

$$\varepsilon'(t) = \frac{1}{\gamma} [f(a) + f(t)] + \frac{t-a}{\gamma} f'(t) - f(t).$$

می‌بینیم که $\varepsilon'(a) = 0$. مشتق‌گیری مجدد نشان می‌دهد که

$$\varepsilon''(t) = \frac{1}{\gamma} (t-a) f''(t)$$

و کسرانه‌های ε'' را با جایگزین کردن کوچکترین و بزرگترین مقدار f'' در فاصله $a \leq t \leq b$ به جای f'' به دست می‌آوریم. اگر این مقادیر را به ترتیب با M_γ^* و M_γ نشان دهیم و توجه داشته باشیم که $t-a \geq 0$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\gamma} (t-a) M_\gamma^* \leq \varepsilon''(t) \leq \frac{1}{\gamma} (t-a) M_\gamma$$

که به ازای تمام t های واقع در فاصله مورد نظر صادق است. با انتگرال‌گیری از a تا t داریم

$$\frac{1}{\gamma} (t-a)^2 M_\gamma^* \leq \varepsilon'(t) - \varepsilon'(a) \leq \frac{1}{\gamma} (t-a)^2 M_\gamma$$

با استفاده از $\varepsilon(a) = 0$ ، $\varepsilon'(a) = 0$ ، انتگرال‌گیری مجدد، و با قراردادن $t = a+h$ می‌بینیم که

$$\frac{1}{12} h^3 M_\gamma^* \leq \varepsilon(a+h) \leq \frac{1}{12} h^3 M_\gamma$$

به ازای خطاهای متناظر با $n-1$ زیرفاصله باقی مانده، $n-1$ نامساوی مشابه به دست می آوریم، و مجموع n نامساوی، نامساوی مربوط به خطای ϵ را که با انتگرالگیری از a تا b متناظر است نتیجه می دهد؛ چون $h = (b-a)/n$ ، به دست می آوریم

$$(3) \quad K = \frac{(b-a)^2}{12n^2} \quad \text{که در آن} \quad KM_p^* \leq \epsilon \leq KM_p$$

و M_p^* و M_p کوچکترین و بزرگترین مقدار مشتق دوم f در فاصله انتگرالگیری هستند.

مثال ۱. قاعده ذوزنقه ای، بر آورد خطا

$J = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ را با استفاده از (۲)، با $n=10$ ، محاسبه و خطا را بر آورد کنید. از جدول ۵.۱۹ می بینیم که

$$J \approx 0.746211 (0.05 \times 1.367879 + 6.778167) = 0.746211$$

چون $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ داریم $M_p^* = f''(0) = -2$ $M_p = f''(1) = 0.7435759$ از این گذشته $K = 1/1200$ و (۳) می دهد

$$-0.0001667 \leq \epsilon \leq 0.000614$$

بنابراین مقدار واقعی J باید بین دو مقدار زیر باشد:

$$0.746211 - 0.000614 = 0.745597$$

و

$$0.746211 + 0.0001667 = 0.7463778$$

(در واقع $J = 0.746824$ ، با دقت ۰.۶D) ▲

تقریب ثابت تکه ای f به قاعده مستطیلی (۱) و تقریب خطی تکه ای به قاعده ذوزنقه ای (۲) منجر می شوند و تقریب درجه دوم تکه ای به قاعده سیمپسون که در عمل از اهمیت زیادی برخوردار است زیرا علاوه بر اینکه در مورد بیشتر مسائل دقت کافی دارد نسبتاً ساده است. برای به دست آوردن این فرمول، فاصله انتگرالگیری $a \leq x \leq b$ را به تعداد زوجی زیرفاصله مساوی، مثلاً $2n$ زیرفاصله به طول $h = (b-a)/2n$ ، بسا نقطه انتهایی $x_0 (=a)$ ، x_1 ، $\dots$ ، x_{2n-1} ، $x_{2n} (=b)$ تقسیم می کنیم. دو زیر فاصله اول را در نظر می گیریم و $f(x)$ را درباره $x_0 + 2h$ تا $x_4 = x_0 + 2h$ با چند جمله ای لاگرانژ $p_2(x)$ تقریب می زنیم به طوری که چند جمله ای از (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) بگذرد، $f_j = f(x_j)$ از (۱۱ الف)، بخش ۴.۱۹، به دست می آوریم

j	x_j	x_j^2	e^{-x_j}	
۰	۰	۰	۱٫۰۰۰۰۰۰۰	
۱	۰٫۱	۰٫۰۱		۰٫۹۹۰۰۵۵۰
۲	۰٫۲	۰٫۰۴		۰٫۹۶۰۷۸۹
۳	۰٫۳	۰٫۰۹		۰٫۹۱۳۹۳۱
۴	۰٫۴	۰٫۱۶		۰٫۸۵۲۱۴۴
۵	۰٫۵	۰٫۲۵		۰٫۷۷۸۸۰۱
۶	۰٫۶	۰٫۳۶		۰٫۶۹۷۶۷۶
۷	۰٫۷	۰٫۴۹		۰٫۶۱۲۶۲۶
۸	۰٫۸	۰٫۶۴		۰٫۵۲۷۲۹۲
۹	۰٫۹	۰٫۸۱		۰٫۴۴۴۸۵۸
۱۰	۱٫۰	۱٫۰۰	۰٫۳۶۷۸۷۹	
مجموعها			۱٫۳۶۷۸۷۹	۶٫۷۷۸۱۶۷

$$\begin{aligned}
 p_2(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 \\
 & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2.
 \end{aligned}$$

(۴*)

مخرج کسر را به ترتیب عبارتند از $2h^2$ ، $-h^2$ ، و $2h^2$. با قراردادن $s = (x - x_1)/h$ داریم $x - x_2 = (s - 1)h$ ، $x - x_1 = sh$ ، $x - x_0 = (s + 1)h$ و

$$p_2(x) = \frac{1}{3}s(s-1)f_0 - (s+1)(s-1)f_1 + \frac{1}{3}(s+1)s f_2.$$

حال نسبت به x از x_0 تا x_4 انتگرال می گیریم. این کار متناظر است با انتگرالگیری نسبت به s از -1 تا $+1$. چون $dx = h ds$ ، نتیجه این انتگرالگیری ساده عبارت است از

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_4} p_2(x) dx = h \left(\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2 \right)$$

درمورد دوزیرفاصله بعدی از x_4 تا x_6 فرمول مشابهی صادق است و به همین ترتیب. با جمع کردن تمام این n فرمول قاعده سیمپسون را به دست می آوریم

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}), \quad (4)$$

که در آن $h = (b-a)/2n$ و $f_j = f(x_j)$. کرانه های خطای ϵ_s ، در (۴)، رامی توان با روشی مشابه قاعده دوزنقه ای (۲)، با فرض اینکه مشتق چهارم f وجود داشته و درفاصله انتگرالگیری پیوسته است، به دست آورد. نتیجه عبارت است از

$$C = \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \quad \text{که در آن} \quad CM_f^* \leq \epsilon_s \leq CM_f \quad (5)$$

و M_f^* و M_f کوچکترین و بزرگترین مقدار مشتق چهارم f در فاصله انتگرالگیری هستند. بدیهی است که درمورد چندجمله ای درجه دوم داریم $\epsilon_s = 0$ ، اما (۵) نشان می دهد که حتی درمورد چندجمله ای درجه سه نیز $\epsilon_s = 0$.

مثال ۲. قاعده سیمپسون. برآورد خطا

$J = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ را با قاعده سیمپسون و $2n = 10$ حساب کرده و خطا را برآورد کنید. چون $h = 0.1$ ، جدول ۶.۱۹ می دهد

$$J \approx \frac{0.1}{3} (1.3678829 + 4 \times 3.7407266 + 2 \times 3.037901) = 0.746825$$

برآورد خطا. مشتق گیری نشان می دهد که $f^{IV}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$. با توجه به مشتق f^{IV} درمی یابیم که کمترین مقدار f^{IV} ، درفاصله انتگرالگیری، در $x = x^* = 2.05 + 0.05\sqrt{10}$ و بزرگترین مقدار آن در $x = 0$ است. محاسبه نتیجه می دهد $M_f^* = f^{IV}(x^*) = -7.359$ و $M_f = f^{IV}(0) = 12$. چون $2n = 10$

$b-a=1$ ، مقدار $C=1/18000000=0.000000056$ را به دست می آوریم.
بنابراین

$$0.00000004 \leq \varepsilon_s \leq 0.00000006 \text{ و } 0.00000004 \leq J \leq 0.00000006$$

دقت تقریب حداقل $4D$ است. در واقع دقت 0.000000056 تا $5D$ است، زیرا $J=0.000000056$ (تا $6D$ دقیق است).
توجه کنید که این نتیجه از نتیجه مثال ۱، که قاعده ذوزنقه ای به دست آمد، خیلی بهتر است در حالی که کار بیشتری نبرده است. ▲

قاعده سیمپسون برای بیشتر کارهای مهندسی به اندازه کافی دقیق است، و در محاسبات

جدول ۶.۱۹

محاسبات مثال ۲

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$
۰	۰	۰	۱.۰۰۰۰۰۰۰
۱	۰.۱	۰.۰۱	۰.۹۹۰۰۵۰
۲	۰.۲	۰.۰۴	۰.۹۶۰۷۸۹
۳	۰.۳	۰.۰۹	۰.۹۱۳۹۳۱
۴	۰.۴	۰.۱۶	۰.۸۵۲۱۴۴
۵	۰.۵	۰.۲۵	۰.۷۷۸۸۰۱
۶	۰.۶	۰.۳۶	۰.۶۹۷۶۷۶
۷	۰.۷	۰.۴۹	۰.۶۱۲۶۲۶
۸	۰.۸	۰.۶۴	۰.۵۲۷۲۹۲
۹	۰.۹	۰.۸۱	۰.۴۴۴۸۵۸
۱۰	۱.۰	۱.۰۰	۰.۳۶۷۸۷۹

مجموعها

۱.۳۶۷۸۷۹ ۳.۷۴۰۲۶۶ ۳.۰۳۷۹۰۱

اتوماتیک این قاعده از بیشتر فرمولهای پیچیده که دقت بالاتری دارند و با استفاده از تقریبهای چندجمله‌ای با درجات بالاتر به دست می‌آیند، ترجیح دارد. در اینجا دو نمونه از فرمولهای با دقت بالاتر را که گاهی مفیدند ذکر می‌کنیم. چندجمله‌ای درجه سه‌ای که از (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) می‌گذرد به قاعده سه - هشت منجر می‌شود:

$$(۶) \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

که در مورد چندجمله‌ایهای درجه سوم دقیق است (همانند قاعده سیمپسون) و این مزیت را دارد که در مورد زیر فاصله‌های با تعداد فرد (بخش پذیر بر ۳) نیز قابل اعمال است. چندجمله‌ای درجه ششی که از نقاط (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) ، (x_3, f_3) ، (x_4, f_4) ، (x_5, f_5) می‌گذرد به فرمولی با ضرایب پیچیده‌تر منجر می‌شود، اما فرمولی از این نوع که به مراتب ساده‌تر است و دقتش کمی کمتر، عبارت است از قاعده ودل*

$$(۷) \quad \int_{x_0}^{x_6} f(x) dx \approx \frac{3h}{10} (f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6)$$

فرمولهای انتگرالگیری مورد بحث مقادیر تابع به ازای مقادیر x متساوی الفاصله را در بر دارند و نتایج دقیق را به ازای چندجمله‌ایهایی می‌دهند که درجه آنها از مقدار مشخصی تجاوز نکند. کلیر می‌توان نوشت

$$(۸) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f_j \quad [f_j = f(x_j)]$$

(با انتخاب $a = -1$ و $b = 1$ ، که با تبدیل خطی مقیاس انجام پذیر است) و $2n$ ثابت $A_1, \dots, A_n, x_1, \dots, x_n$ را طوری تعیین کرد که (۸) در مورد چندجمله‌ایهای درجه sm که هر چه ممکن است درجه‌شان بالا باشد نتایج دقیق دهد. چون تعداد ضرایب یک چندجمله‌ای درجه $2n-1$ است، نتیجه می‌شود که $m \leq 2n-1$. گاوس نشان داده است که دقیق بسودن چندجمله‌ای درجه $2n-1$ برقرار می‌شود اگر و تنها اگر $x_1, \dots, x_n$ عبارت باشند از n صفر چندجمله‌ای لژاندر درجه n (ر. ک. همچنین بخش ۳.۴) زیر:

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n \times 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + \frac{(2n-4)!}{2^n \times 2!(n-2)!(n-4)!} x^{n-4} - \dots$$

یعنی

$$P_0 = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3 - 3x), \dots$$

ضرایب A_j نیز به طور مناسبی انتخاب شده اند. در این صورت (۸) را فرمول انتگرالگیری گاوسی می نامند. مزیت این فرمول دقت زیاد و عیب آن نامنظم بودن فواصل $x_1, \dots, x_n$ است. بنابراین چنین فرمولی وقتی عملی است که از کامپیوترهای اتوماتیک استفاده شود و محاسبه $f(x_j)$ به تعداد اعشار شناسه بستگی نداشته باشد، یا اینکه $f(x_j)$ از آزمایشی به دست آمده باشد که در آن بتوان x_j را یک بار برای همیشه انتخاب کرد. استفاده از این فرمول در مواردی که انتگران در فاصله های مساوی داده شده باشد عملی نیست، زیرا در چنین حالتی برای محاسبه $f(x_j)$ یک سلسله درون یابیهای مقدماتی لازم است و این ممکن است نتایج مربوط به برآوردهای خطای کوچکتر را تحت الشعاع قرار دهد.

چون نقاط، -1 و $+1$ ، نقاط انتهایی فاصله انتگرالگیری (۸)، صفرهای P_n نیستند جزو نقاط $x_1, \dots, x_n$ نخواهند بود و بنابراین فرمول گاوس (۸) را فرمول باز می نامند، در مقابل فرمول بسته که در آن نقاط انتهایی فاصله انتگرالگیری پیش می آیند. [مثلاً، (۲)، (۴)، (۶) و (۷) بسته اند.]

یادآوری می کنیم که همانند مورد درون یابی، روشهای انتگرالگیری عددی وجود دارند که بر اساس تفاضلها قرار گرفته اند. روش بسیار مؤثری هست که در آن از فرمول تفاضل مرکزی گاوس استفاده می شود:

$$(9) \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f_0 + f_1 - \frac{\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1}{12} + \frac{11(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1)}{720} \right).$$

برای توضیحات بیشتر مراجع [G۱۳]، [G۱۶] و [G۱۷] ضمیمه ۱ را ببینید.

مشتق گیری عددی

مسئله مشتق گیری عددی چیزی نیست جز تعیین مقادیر تقریبی مشتق تابع f که با جدولی داده شده است. تا جایی که امکان دارد باید از مشتق گیری عددی اجتناب کرد زیرا دقت مقادیر تقریبی مشتقها در حالت کلی، کمتر از مقادیر توابعی است که از آنها مشتق گرفته ایم. در واقع، مشتق حد خارج قسمت تفاضلها است به این معنی که معمولاً دو عدد بزرگ را از هم کم کرده، تفاضل را به عدد کوچکی تقسیم می کنیم؛ به علاوه اگر یک تابع داده شده f را بایک چند جمله ای p تقریب بزنیم، ممکن است تفاوت مقادیر تابع کوچک باشد اما مشتقها تفاوت زیادی داشته باشند. از این رو مشتق گیری عددی کاری حساس است، درحالی که انتگرالگیری عددی چنین نیست و عدم دقت در مقادیر تابع در آن تأثیر چندانی ندارد زیرا انتگرالگیری ذاتاً فرآیندی هموار است.

نماد گذاری $f'(x_j) = f'_j$ ، $f''(x_j) = f''_j$ ، و غیره، را به کار می بریم و فرمولهایی تقریبی برای مشتقها با توجه به رابطه زیر به دست می آوریم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

در نتیجه داریم

$$(۱۰) \quad f'_{1/2} \approx \frac{\delta f_{1/2}}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

به گونه‌ای مشابه، در مورد مشتق دوم به دست می‌آوریم

$$(۱۱) \quad f''_1 \approx \frac{\delta^2 f_1}{h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

و به همین ترتیب.

تقریبهای دقیقتر بامشتق‌گیری از چند جمله‌ایهای لاگرانژ مناسب به دست می‌آیند. بامشتق‌گیری از (φ^*) و با توجه به اینکه مخرج کسرهاى موجود در (φ^*) عبارتند از $2h^2$ ، $-h^2$ داریم

$$f'(x) \approx p_2'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f_0 - \frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} f_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f_2$$

بامحاسبه این مقدار در x_2 ، x_1 ، x_0 «فرمولهای سه نقطه‌ای» به دست می‌آیند:

$$f'_0 \approx \frac{1}{2h} (-3f_0 + 4f_1 - f_2) \quad (\text{الف})$$

$$(۱۲) \quad f'_1 \approx \frac{1}{2h} (-f_0 + f_2) \quad (\text{ب})$$

$$f'_2 \approx \frac{1}{2h} (f_0 - 4f_1 + 3f_2). \quad (\text{پ})$$

اعمال همین شیوه در مورد فرمول پنج - نقطه‌ای لاگرانژ، فرمولهای مشابهی به دست می‌دهد، به‌ویژه داریم

$$(۱۳) \quad f'_2 \approx \frac{1}{12h} (f_0 - 8f_1 + 8f_2 - f_4).$$

تفصیل مطلب و چند فرمول دیگر را می‌توان در مرجع [۶G]، ضمیمه ۱، یافت.

مسائل بخش ۶.۱۹

بعضی از فرمولها و روشهای انتگرالگیری را با محاسبه انتگرالهای زیر مرور کنید

$$۱. \int \sin^2 x \, dx \quad ۲. \int \cos^2 \omega x \, dx \quad ۳. \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

$$\begin{array}{lll} ۴. \int e^{ax} \cos bx \, dx & ۵. \int \tan kx \, dx & ۶. \int \ln x \, dx \\ ۷. \int \frac{dx}{k^2 + x^2} & ۸. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} & ۹. \int \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)^2} \end{array}$$

۱۰. انتگرال مثال ۱ را با استفاده از (۱)، به ازای $n=5$ ، محاسبه کنید.

۱۱. $\int_0^1 x^2 \, dx$ را با قاعده مستطیلی (۱)، به ازای $n=5$ ، محاسبه کنید. خطا را تعیین کنید.

۱۲. انتگرال ذکر شده در مسئله ۱۱ را با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای (۲)، به ازای $n=5$ محاسبه کنید. چه کرانهای خطایی از (۳) به دست می‌آید؟ خطای واقعی نتیجه چیست؟ چرا این نتیجه از مقدار واقعی بزرگتر است؟

۱۳. مقدار تقریبی $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ را با قاعده سیمپسون و به ازای $n=4$ پیدا کنید. با استفاده از (۵) خطا را برآورد کنید.

۱۴. $\int_0^1 x^5 \, dx$ را با قاعده سیمپسون و به ازای $n=10$ محاسبه کنید. کرانهای خطایی که از (۵) به دست می‌آیند کدامند؟ خطای واقعی نتیجه چقدر است؟

در مسائل زیر با استفاده از مقادیر $\sin x$ که در جدول A1، ضمیمه ۴، داده شده است $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx$ را حساب کنید.

۱۵. با قاعده مستطیلی (۱) به ازای $n=5$.

۱۶. با قاعده ذوزنقه‌ای (۲) به ازای $n=5$.

۱۷. با (۲) و $n=10$.

۱۸. با قاعده سیمپسون و $n=2$ و $n=10$.

۱۹. α و β را طوری تعیین کنید که

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) \, dx \approx h[\alpha f(x_n) + \beta f(x_{n+1})] \quad h = x_{n+1} - x_n$$

به ازای چند جمله‌ایهای درجه اول دقیق باشد. چه فرمولی به دست می‌آورید؟

۲۰. اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای درجه دو باشد، نشان دهید که (۱۰) دقیق است. از نظر هندسی این مسئله چه معنایی دارد؟

۲۱. (۱۲) را، با شرح جزئیات محاسبه، به دست آورید.

۲۲. (۱۳) را، به روشی که در متن گفته شده است، به دست آورید.

۲۳. $f(x) = x^4$ را در $x_0 = 0.02$ ، $x_1 = 0.04$ ، $x_2 = 0.06$ ، $x_3 = 0.08$ ، $x_4 = 0.10$ در نظر بگیرید. f' را از (الف)، (ب)، (۱۲) و (۱۳) محاسبه کنید. خطاها را معین کنید. آنها را مقایسه کنید و توضیح دهید.

۲۴. يك «فرمول چهار نقطه ای» برای مشتق عبارت است از

$$f'_x \approx \frac{1}{6h} (-2f_1 - 3f_2 + 6f_3 - f_4).$$

این فرمول را در مورد $f(x) = x^4$ ، با $x_1, \dots, x_4$ که در مسئله ۲۳ داده شده اند به کار ببرید؛ خطا را تعیین کرده و آن را با خطایی که در مسئله (۱۳) به دست آمد مقایسه کنید.

۲۵. مشتق $f'(x)$ را می توان با تفاضل اول و تفاضلهای بالاتر تقریب زد:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h} (\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 f_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 f_0 + \dots)$$

بامشتق گرفتن از (۳)، بخش ۴.۱۹، نسبت به r یافتن فرمول زیر، رابطه بالا را اثبات کنید:

$$hf'(x) \approx \Delta f_0 + \frac{r-1}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{3r^2-6r+2}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots,$$

در اینجا داریم $x = x_0 + rh$ و قرار می دهیم $r = 0$. فرمول را برای به دست آوردن تقریبهایی برای $f'(0.04)$ در مسئله ۲۳ به کار ببرید، ضمن اینکه از تفاضلهای تا (الف) مرتبه اول، (ب) مرتبه دوم، (ج) مرتبه سوم، (د) مرتبه چهارم و خود این مرتبه ها استفاده می کنید.

۲.۱۹ روشهای عددی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

این بخش از سایر بخشهای فصل ۲۹ مستقل است و می توان آن را بلافاصله بعد از فصل ۱ مطالعه کرد.

از فصل ۱ می دانیم که هر معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $F(x, y, y') = 0$ است و اغلب می توان آن را به صورت صریح $y' = f(x, y)$ نوشت. هر مسئله مقدار اولیه شامل يك معادله دیفرانسیل است و شرطی که جواب باید در آن صدق کند (و در صورتی

که معادله از مرتبه‌های بالاتر باشد، جواب به ازای یک مقدار x باید در چند شرط صدق کند). در این بخش مسائل مقدار اولیه‌ای را بررسی می‌کنیم که به صورت زیرند:

$$(۱) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

فرض می‌کنیم f به گونه‌ای است که مسئله در فاصله‌ای شامل x_0 جوابی یکتا دارد و روشهای محاسبه مقادیر عددی جواب را مورد بحث قرار می‌دهیم.

اگر بتوانیم فرمولی برای جواب به دست آوریم می‌توانیم آن را به طور عددی مستقیماً یا با استفاده از جدول، محاسبه کنیم. از این نقطه نظر کتاب کمک (Kamke): (مرجع [B۱۲]، ضمیمه ۱) و فهرستهای جداول (د. ک. مرجع [A۶]، ضمیمه ۱) مفیدند. هر گاه برای جواب فرمولی نداشته باشیم و یا فرمول خیلی پیچیده باشد، یکی از روشهای بررسی شده در این بخش را می‌توانیم به کار ببریم.

روشهایی که در این بخش بررسی می‌کنیم روشهای گام به گام هستند به این معنی که از $y = y(x_0)$ شروع می‌کنیم و قدم به قدم جلومی‌رویم. در گام اول y_1 ، مقدار تقریبی جواب y از معادله (۱) را در $x = x_1 = x_0 + h$ محاسبه می‌کنیم. در مرحله دوم مقدار تقریبی y_2 این جواب را در $x = x_2 = x_0 + 2h$ حساب می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. در اینجا h عدد ثابتی است مثل 0.2 یا 0.1 یا 0.05 ؛ اصولی را که در انتخاب h باید ملاحظه نظر قرار گیرند بعداً در همین بخش بررسی می‌کنیم. محاسبات تمام مراحل از فرمول یکسانی پیروی می‌کنند، چنین فرمولی از سری تیلور به دست می‌آید:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \dots$$

از (۱) داریم $y' = f$. با مشتق‌گیری $y' = f = \partial f / \partial x + (\partial f / \partial y) y'$ ، و به همین ترتیب، سری تیلور به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۲) \quad y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2} f' + \frac{h^3}{6} f'' + \dots$$

که در آن $f, f', f'', \dots$ در $(x, y(x))$ محاسبه شده‌اند. به ازای مقادیر کوچک h ، توانهای بالای $h^2, h^3, \dots$ در (۲) خیلی کوچک خواهند بود. از اینجا به تقریب خام

$$y(x+h) \approx y(x) + hf,$$

و فرآیند تکرار زیر می‌رسیم. در مرحله اول

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

را محاسبه می کنیم که $y(x_1) = y(x_0 + h)$ را تقریب می زند. در مرحله دوم

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

را محاسبه می کنیم که $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ را تقریب می زند و به همین ترتیب درمورد بقیه مراحل؛ به طور کلی

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (3)$$

این روش را روش اویلر یا روش اویلر-کشی می نامند. از نظر هندسی این روش تقریبی است از منحنی $y(x)$ با چند ضلعی، که اولین ضلعش مماس بر منحنی در x_0 است (ر. ک. شکل ۳۵۵).

این روش يك روش مرتبه اول است، زیرا در (۲) فقط جمله ثابت و جمله ای را که شامل توان اول h است در نظر گرفته ایم. حذف جملات دیگر (۲) خطایی تسوید می کند که آن را خطای قطع این روش می نامند. به ازای h کوچک، توانهای سوم و بالاتر h در مقایسه با h^2 اولین جمله حذف شده کوچکند و بنابراین می گوئیم که خطای قطع در هر گام از مرتبه h^2 است. به علاوه، در این روش و روشهای دیگر خطاهای گرد کردن نیز وجود دارند که با افزایش n در دقت مقادیر $y_1, y_2, \dots$ بیشتر و بیشتر تأثیر می گذارند؛ در این باره مجدداً در بخش بعد صحبت خواهیم کرد.

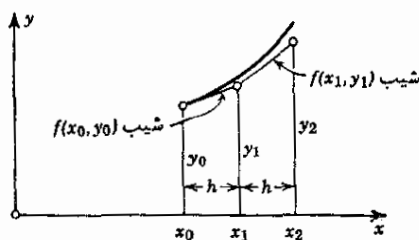
ارزش عملی روش اویلر محدود است؛ اما به دلیل ساده بودنش، ممکن است در فهم ایده اساسی روشهای این بخش مفید باشد.

مثال ۱. روش اویلر

روش اویلر را در مورد مسئله مقدار اولیه

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0 \quad (4)$$

با انتخاب $h = 0.2$ و محاسبه $y_1, \dots, y_5$ به کار برید. در اینجا $f(x, y) = x + y$ و (۳) می شود



شکل ۳۵۵. روش اویلر

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n)$$

جدول ۷.۱۹ محاسبات، مقادیر مربوط به جواب دقیق

$$y(x) = e^x - x - 1$$

که از (۴) بخش ۷.۱ به دست آمده، و خطا را نشان می‌دهد. در عمل جواب دقیق را نمی‌دانیم اما می‌توانیم با اعمال مجدد روش اویلر با گام $2h = 0.4$ و مقایسه تقریبهای متناظر، دقت مقادیر را مشخص کنیم. با يك محاسبه ساده معلوم می‌شود که تفاوتها $(x=0.4)$ و $(x=0.8)$ هستند. چون خطا از مرتبه h^2 است، انتقال از h به $2h$ به معنی ضرب کردن در $4 = 2^2$ است، اما چون تنها به نیمی از مراحل حالت قبل نیاز داریم، خطا فقط در $2 = 4/2$ ضرب می‌شود؛ از این رو تفاوتها اندازه خطا را نشان می‌دهند (ر. ک. جدول ۷.۱۹). ▲

جدول ۷.۱۹

روش اویلر به کار رفته در مورد (۴) و خطا

n	x_n	y_n	$0.2(x_n + y_n)$	مقادیر دقیق	مقدار مطلق خطا
۰	۰.۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰
۱	۰.۲	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۴۰	۰.۰۰۲۱	۰.۰۰۲۱
۲	۰.۴	۰.۰۰۴۰	۰.۰۰۸۸	۰.۰۰۹۲	۰.۰۰۵۲
۳	۰.۶	۰.۰۱۲۸	۰.۰۱۴۶	۰.۰۲۲۲	۰.۰۰۹۴
۴	۰.۸	۰.۰۲۷۴	۰.۰۲۱۵	۰.۰۴۲۶	۰.۰۱۵۲
۵	۱.۰	۰.۰۴۸۹		۰.۰۷۱۸	۰.۰۲۲۹

با در نظر گرفتن جملات بیشتری از (۲)، روشهای عددی را که از مرتبه بالاتری هستند و دقت بیشتری دارند به دست می‌آوریم. فرمولهای متناظر را می‌توان طوری نمایش داد که از محاسبه پیچیده مشتقات $f(x, y)$ بیهیز کرده و به جای آن f را برای يك یا چند مقدار کمکی مناسب از (x, y) محاسبه کرد. در اینجا نمونه از این روشها را که اهمیت عملی دارند بررسی می‌کنیم:

روش اول را روش اصلاح شده اویلر یا روش اصلاح شده اویلر - کشی (و گاهی روش هیون*) می نامند. در هر مرحله از این روش نخست مقدار کمکی زیر را محاسبه می کنیم:

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (\text{الف})$$

و سپس مقدار

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)]. \quad (\text{ب})$$

این روش تعبیر هندسی ساده ای دارد. در واقع می توان گفت در فاصله x_n تا $x_n + 1/2h$ جواب y را با خط مستقیمی که از (x_n, y_n) می گذرد و شیب آن $f(x_n, y_n)$ است تقریب می زنیم، و سپس در امتداد خط مستقیمی که شیب آن $f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)$ است این کار را ادامه می دهیم تا x به x_{n+1} برسد (ر. ک. شکل ۳۵۶، که در آن $n=0$).

روش اصلاح شده اویلر - کشی روشی پیشگو - مصحح است زیرا در هر مرحله نخست از (الف) مقداری را پیشگویی کرده و سپس آن را با استفاده از (ب) تصحیح می کنیم.

مثال ۲. روش اصلاح شده اویلر

روش اصلاح شده اویلر را در مورد مسئله مقدار اولیه (۴)، مثال ۱، به کار برد و مانند سابق h را ۰.۲ در نظر بگیرید. در اینجا (۵) به شکل زیر درمی آید:

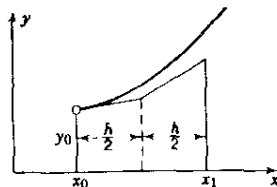
$$y_{n+1}^* = y_n + 0.2(x_n + y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.1[(x_n + y_n) + (x_{n+1} + y_{n+1}^*)]$$

دنبال کردن این کار بسیار ساده است، زیرا باید فرمول اول را در دومی قرار داد. پس از ساده کردن نتیجه به دست می آوریم

$$y_{n+1} = 0.12x_n + 0.1x_{n+1} + 1.22y_n.$$

باتوجه به جدول ۸.۱۹ می بینیم که این نتایج دقیقتر از نتایج مثال ۱ هستند؛ همچنین جدول ۱۰.۱۹ را ببینید.



شکل ۳۵۶. روش اصلاح شده اویلر

روش اصلاح شدهٔ اویلر يك روش مرتبه دوم است، زیرا خطای قطع در هر گام از مرتبه h^3 است.

در واقع، با قرارداد $f_n = f(x_n, y(x_n))$ وبا استفاده از (۲) داریم:

$$(ع الف) \quad y(x_n + h) - y(x_n) = h\tilde{f}_n + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}_n' + \frac{1}{6}h^3\tilde{f}_n'' + \dots$$

جدول ۸۰۱۹

روش اصلاح شدهٔ اویلر به کار رفته در مورد (۴)

n	x_n	y_n	$0.12x_n$	$0.1x_{n+1}$	$1.22y_n$	y_{n+1}
۰	۰.۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۲۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۲۰۰
۱	۰.۲	۰.۰۰۲۰۰	۰.۰۰۲۴۰	۰.۰۰۴۰۰	۰.۰۰۲۴۴	۰.۰۰۸۸۴
۲	۰.۴	۰.۰۰۸۸۴	۰.۰۰۴۸۰	۰.۰۰۶۰۰	۰.۱۰۷۸	۰.۲۱۵۸
۳	۰.۶	۰.۲۱۵۸	۰.۰۰۷۲۰	۰.۰۰۸۰۰	۰.۲۶۳۳	۰.۴۱۵۳
۴	۰.۸	۰.۴۱۵۳	۰.۰۰۹۶۰	۰.۱۰۰۰	۰.۵۰۶۷	۰.۷۰۲۷
۵	۱.۰	۰.۷۰۲۷				

اگر در (۵) عبارت داخل کروشه را با $f_n + f_{n+1}$ تقریب بزنیم و يك بار دیگر از بسط تیلور استفاده کنیم، به دست می آوریم

$$(ع ب) \quad y_{n+1} - y_n \approx \frac{1}{2}h(\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1} + h\tilde{f}_n' + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}_n'' + \dots)$$

با تفریق (ع الف) از (ع ب) خطای قطع در هر گام معلوم می شود

$$\frac{h^3}{2}\tilde{f}_n'' - \frac{h^3}{6}\tilde{f}_n'' + \dots = \frac{h^3}{3}\tilde{f}_n'' + \dots$$

حال دربارهٔ انتخاب گام h بحث می کنیم که مسئله مهمی در کاربرد روش گام به گام است. h نباید خیلی کوچک باشد زیرا در این صورت تعداد گامها و خطاهای گرد کردن بزرگ می شود. از طرف دیگر، h نباید خیلی بزرگ باشد، زیرا بزرگ بودن h ، خطای قطع بزرگی در هر مرحله ایجاد می کند و، به علاوه، خطای دیگری پدید می آید ناشی از اینکه f به جای $(x_n, y(x_n))$ در (x_n, y_n) محاسبه شده است. این خطا در صورتی که f مستقل از y باشد صفر می شود و اینکه f در اثر تغییر y با سرعت بیشتری تغییر کند دارای اهمیت است، یعنی بزرگ بودن قدر مطلق مشتق جزئی $f_y = \partial f / \partial y$ مهم است.

به طور دقیقتر، اگر خطا را با φ_n نمایش دهیم و قضیه مقدار میانگین را به کار ببریم داریم

$$\varphi_n = f(x_n, y_n) - f(x_n, y(x_n)) = f_y(x_n, \tilde{y})\eta_n,$$

که در آن $\eta_n = y_n - y(x_n)$ خطای y_n است و $\tilde{y}$ بین y_n و $y(x_n)$ قرار دارد. بنابراین سهم φ_n در خطای y_{n+1} تقریباً برابر است با $h\varphi_n = hf_y(x_n, \tilde{y})\eta_n$. از این رو می توان کران بالای نزدیکی مانند K از $|f_y|$ را در ناحیه مورد نظر گرفت و h را طوری انتخاب کرد که

$$\kappa = hK$$

خیلی بزرگ نباشد. می بینیم که اگر $|f_y|$ بزرگ باشد (یعنی بستگی f به y قوی باشد)، در آن صورت K بزرگ می شود و h باید کوچک شود که قابل درک است. (در مثالهای ۱ و ۲، $f_y = 1$ ، $K = 1$ ، $hK = 0.2$) اگر f_y خیلی تغییر کند می توان کران بالای نزدیکی مانند K_n از $|f_y(x_n, \tilde{y})|$ را انتخاب کرد و دوبار حتی سه مقدار مختلف h در نواحی مختلف انتخاب کرد به طوری که

$$\kappa_n = hK_n$$

درفاصله معینی (مثلاً $0.1 \leq \kappa_n \leq 0.2$) که بستگی به دقت مورد نظر دارد برقرار باشد؛ واضح است که به دلیل خطای قطع در هر گام نمی توانیم h را از مقدار مشخصی بیشتر بگیریم.

روشی که دقیقتر است روش رونگه - کوتا نام دارد؛ این روش اهمیت زیادی دارد. در هر گام از این روش، نخست چهار مقدار کمکی زیر را محاسبه می کنیم:

$$B_n = hf(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}A_n), \quad A_n = hf(x_n, y_n)$$

(۷ الف)

$$D_n = hf(x_{n+1}, y_n + C_n), \quad C_n = hf(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}B_n)$$

و پس از آن مقدار

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(A_n + 2B_n + 2C_n + D_n) \quad \text{را.} \quad (7 \text{ ب})$$

می توان نشان داد که خطای قطع در هر گام از مرتبه h^5 است (د.ک. مرجع [G۲۰]، ضمیمه ۱) و، در نتیجه این روش، روشی مرتبه چهارم است. توجه کنید که هرگاه f فقط به x بستگی داشته باشد، این روش به قاعده انتگرالگیری سیمپسون (بخش ۶.۱۹) تحویل می شود.

در محاسبات دستی، محاسبه مکرر $f(x, y)$ خسته کننده است. در محاسبات اتوماتیک این مسئله خیلی مهم نیست و روش مزبور مناسب است زیرا در آن به عمل آغازی خاصی نیاز نیست، تعداد دستورالعملها را در انباره کم می کند، به برآورد نیازی ندارد و تنها یک برنامه محاسباتی سراسری را چندین بار تکرار می کند.

مثال ۳. روش رونگه - کوتا

روش رونگه - کوتا را در مورد مسئله مقدار اولیه (۴) ، مثال ۱، به کار برید؛ h را مانند گذشته ۰٫۲ بگیرد و محاسبه را تا ۵ گام ادامه دهید. در اینجا $f(x, y) = x + y$ ، و $(۷الف)$ می شود

$$B_n = 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5A_n), \quad A_n = 0.2(x_n + y_n)$$

$$D_n = 0.2(x_n + 0.2 + y_n + C_n), \quad C_n = 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5B_n)$$

چون این عبارات خیلی ساده هستند می توانیم A_n را در B_n قرار دهیم و به دست بیاوریم $B_n = 0.22(x_n + y_n) + 0.02$ ، این مقدار را در C_n قرار دهیم و پیدا کنیم $C_n = 0.222(x_n + y_n) + 0.022$ و سرانجام C_n را در D_n بگذاریم و بیاوریم $D_n = 0.2444(x_n + y_n) + 0.0444$. اگر این عبارت را به کار ببریم، $(۷ب)$ می شود

$$(۸) \quad y_{n+1} = y_n + 0.2214(x_n + y_n) + 0.0214$$

جدول ۹.۱۹ محاسبات مربوط را نشان می دهد، با توجه به جدول ۱۰.۱۹ می بینیم که مقادیر خیلی دقیقتر از مقادیری است که در مثالهای ۱ و ۲ به دست آوردیم. ▲

جدول ۹.۱۹

روش رونگه - کوتا به کار رفته در مورد (۴) ؛ محاسبات با استفاده از (۸)

n	x_n	y_n	$x_n + y_n$	$0.2214(x_n + y_n)$	$0.2214(x_n + y_n) + 0.0214$
۰	۰٫۰	۰	۰	۰	۰٫۰۲۱۴۰۰
۱	۰٫۲	۰٫۰۲۱۴۰۰	۰٫۲۲۱۴۰۰	۰٫۰۴۹۰۱۸	۰٫۰۷۰۴۱۸
۲	۰٫۴	۰٫۰۹۱۸۱۸	۰٫۴۹۱۸۱۸	۰٫۱۰۸۸۸۹	۰٫۱۳۰۲۸۹
۳	۰٫۶	۰٫۲۲۲۱۰۷	۰٫۸۲۲۱۰۷	۰٫۱۸۲۰۱۴	۰٫۲۰۳۴۱۴
۴	۰٫۸	۰٫۴۲۵۵۲۱	۱٫۲۲۵۵۲۱	۰٫۲۷۱۳۳۰	۰٫۲۹۲۷۳۰
۵	۱٫۰	۰٫۷۱۸۲۵۱			

جدول ۱۰.۱۹

مقایسه دقت سه روش بررسی شده در مورد مسئله مقدار اولیه ای (۴) با $h=0.2$

x	$y = e^x - x - 1$	مقدار مطلق خطا		
		روش اولیای (جدول ۷.۱۹)	روش اصلاح شده اولیای (جدول ۸.۱۹)	روش رونگه-کوتا (جدول ۹.۱۹)
۰.۲	۰.۰۰۲۱۴۰۳	۰.۰۰۲۱	۰.۰۰۰۱۴	۰.۰۰۰۰۰۰۳
۰.۴	۰.۰۰۹۱۸۲۵	۰.۰۰۵۲	۰.۰۰۰۳۴	۰.۰۰۰۰۰۰۷
۰.۶	۰.۰۲۲۲۱۱۹	۰.۰۰۹۴	۰.۰۰۰۶۳	۰.۰۰۰۰۰۱۱
۰.۸	۰.۰۴۲۵۵۴۱	۰.۰۱۵۲	۰.۰۰۱۰۲	۰.۰۰۰۰۰۲۰
۱.۰	۰.۰۷۱۸۲۸۲	۰.۰۲۲۹	۰.۰۰۱۵۶	۰.۰۰۰۰۰۳۱

طول گام h نباید از مقدار معینی مانند H که به دقت بستگی دارد بیشتر باشد و در غیر این صورت باید طوری باشد که

$$\kappa = hK \quad (K \text{ کران بالای کوچکی برای } |\partial f / \partial y| \text{ است})$$

تقریباً بین ۰.۱ و ۰.۲ قرار داشته باشد؛ این شبیه روش اصلاح شده اولیای است که قبلاً بررسی شد. یک امتیاز روش رونگه-کوتا این است که در آن می توان h را به وسیله A_n, B_n, C_n کنترل کرد، زیرا بنا به تعریف f_y داریم

$$\kappa = hK \approx h |f_y| \approx h \left| \frac{f(x, y^*) - f(x, y^{**})}{y^* - y^{**}} \right|,$$

و هر گاه انتخاب کنیم $y^{**} = y_n + A_n/2$ ، $y^* = y_n + B_n/2$ ، $x = x_n + h/2$ داریم $y^* - y^{**} = (B_n - A_n)/2$ و

$$(9) \quad \kappa \approx \kappa_n = 2 \left| \frac{C_n - B_n}{B_n - A_n} \right|.$$

حالا می توانیم شرط کنیم h به ازای $0.2 \leq \kappa_n \leq 0.5$ تغییر نکند و به ازای $0.2 < \kappa_n$ ، h به میزان ۵۰٪ کاهش یابد و در صورتی که κ_n کوچکتر از ۰.۵

باشد، h دوبرابر شود (هرگاه این دوبرابر شدن ایجاب نکند که h از عدد انتخابی مناسب H ، که به دقت مورد نظر بستگی دارد بیشتر شود).
 راه دیگر کنترل h آن است که به طور همزمان محاسبات را با گام $2h$ انجام دهیم.
 دوبرابر کردن طول گام باعث می شود خطای قطع در هر گام $32 = 2^5$ برابر شود، اما چون تعداد گامها کم می شود، این خطا در واقع $16 = 2^4$ برابر می شود. از این رو خطای محاسبه اول (که گام آن h است) تقریباً $1/16$ تفاضل δ ی مقادیر متناظر y است.
 اکنون عددی مانند ϵ انتخاب می کنیم (مثلاً، 1 واحد از آخرین عددی که معنی دار تصور می شود) و h را تغییر نمی دهیم اگر $104 \leq |\delta| \leq 248$ ، آن را 50% کاهش می دهیم اگر $|\delta| > 104$ و دوبرابر می کنیم اگر $248 < |\delta|$ ؛ بدیهی است در حالت اخیر باید دقت کنیم که طول گام از عدد مناسبی مانند H بزرگتر نشود؛ به دلیلی که قبلاً بدان اشاره کردیم.

مسائل بخش ۲.۱۹

روش اوایلر را در مورد معادلات دیفرانسیل زیر بدکار برید (تا ده گام ادامه دهید).

۱. $y' = y, y(0) = 1, h = 0.01$ ۲. $y' = y, y(0) = 1, h = 0.1$

۳. $y' = 2xy + 1, y(0) = 0, h = 0.1$ ۴. $y' = 2xy, y(0) = 1, h = 0.1$

۵. روش اصلاح شده اوایلر را در مورد مسئله مقدار اولیه ای $y' = 2x, y(0) = 0$ با انتخاب $h = 0.1$ ، به کار برید. چرا خطاها صفرند؟

۶. چند مثال بزنید که در آنها روش اصلاح شده اوایلر-کشی به جواب کامل منجر شود.

۷. محاسبات مثال ۱ را با انتخاب $h = 0.1$ (به جای $h = 0.02$) تکرار کنید، و نشان دهید که خطاهای مقادیر حاصل تقریباً 50% خطاهای مثال ۱ (که در جدول ۱۰.۱۹ آمده اند) هستند.

۸. با انتخاب $h = 0.01$ (بیست گام)، نظیر مسئله ۷ عمل کنید. خطای مقدار متناظر با $x = 0.2$ را با همین خطا در مثال ۱ مقایسه کنید.

۹. با انتخاب $h = 0.1$ ، محاسبات مثال ۲ را تکرار کنید، توجه داشته باشید که خطاهای مقادیر حاصل در حدود 25% خطاهای متناظر در مثال ۲ هستند.

۱۰. با انتخاب $h = 0.05$ (هشت گام)، نظیر مسئله ۹ عمل کنید. خطای مقدار متناظر با $x = 0.2$ را با خطاهای مثال ۲ و مسئله ۹ مقایسه کنید.

۱۱. با انتخاب $h = 0.1$ ، روش اوایلر را در مورد مسئله مقدار اولیه ای $y(0) = 0$ ،

۱۲. $y' = 1 + y^2$ اعمال کنید. تا پنج گام محاسبه کنید و نتایج را با مقادیر دقیق مقایسه کنید (ر. ک. جدول A۱، ضمیمه ۴).

۱۳. با انتخاب $h = 0.1$ روش اصلاح شده اوایلر را در مورد مسئله مقدار اولیه ای مسئله ۱۱ به کار برید. تا دو گام محاسبه کنید. و خطاها را با خطاهای مقادیر متناظر در مسئله ۱۱ مقایسه کنید.

۱۴. با انتخاب $h = 0.1$ ، روش رونگه-کوتا را در مورد مسئله مقدار اولیه ای مسئله ۱۱ به کار برید. تا دو گام محاسبه کنید. نتایج را با مقادیر دقیق 0.100334672 و 0.2002710036 مقایسه کنید.

۱۵. $y' = e^x$ را به ازای $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ با استفاده از روش رونگه-کوتا در مورد مسئله مقدار اولیه ای مسئله ۱۱ محاسبه کنید. نشان دهید که پنج رقم اعشاری اول نتیجه صحیح هستند (ر. ک. جدول A۱، ضمیمه ۴).

۱۶. در مسئله ۱۴، A_n را در B_n قرار دهید، سپس B_n را در C_n ، و به همین ترتیب، آنگاه نشان دهید که فرمول $y_{n+1} = 1.05170833y_n$ محاسبات مسئله ۱۴ را با استفاده از این فرمول تکرار کنید.

۱۷. روش اوایلر را با $h = 0.1$ در مورد $y(0) = 1$ ، $y' = -100y$ به کار برید. نشان دهید که $y = (-9)^{100}$ ، این جواب و جواب دقیق را مقایسه کنید؛ توضیح دهید.

۱۸. نشان دهید که روش اوایلر با محاسبه انتگرال (۱) از x_n تا x_{n+1} نیز به دست می آید، اگر انتگرال $[f(t), y(t)]$ را با مقدارش در x_n تقریب بزنیم.

۱۹. در مسئله ۱۷، قاعده ذوزنقه ای را در مورد انتگرال اعمال کنید و به دست آورید

$$y(x_n + h) \approx y(x_n) + \frac{h}{2} \{f[x_n, y(x_n)] + f[x_n + h, y(x_n + h)]\}$$

سپس $y(x_n + h)$ را با روش اوایلر-کشی تقریب بزنید. نشان دهید که نتیجه روش اصلاح شده اوایلر-کشی می باشد.

۲۰. نمونه ای از انواع دیگر روش اوایلر-کشی به صورت

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_{n+1}^*\right)$$

است که در آن $y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n + y_n)/2$. توجیهی هندسی برای این روش ارائه دهید. با انتخاب $h = 0.2$ ، این روش را در مورد (۴) اعمال کنید؛ محاسبات را تا پنج گام ادامه دهید.

۲۱. روش مرتبه سوم کوتا با رابطه زیر تعریف می شود:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(A_n + 4B_n + M_n)$$

که در آن

$$A_n = hf(x_n, y_n), \quad B_n = hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}A_n\right)$$

$$M_n = hf(x_{n+1}, y_n - A_n + 2B_n)$$

روش مزبور را در مورد (۴)، مثال ۱، به کار برید. با انتخاب $h = 0.2$ ، تا پنج گام ادامه دهید. نتیجه را با جدول ۱۰.۱۹ مقایسه کنید.

۱۰.۱۹ روشهای عددی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

این بخش روشهایی عددی، مشابه با روشهای بخش قبل را در برمی گیرد و مستقل از سایر بخشهای این فصل است. به طوری که می توان بلافاصله بعد از فصل ۲ مطالعه آن را شروع کرد.

مسئله مقدار اولیه ای يك معادله دیفرانسیل مرتبه دوم شامل خود معادله و دو شرط (شرایط اولیه) در مورد يك نقطه است. در این بخش دو روش عددی برای حل مسائل مقدار اولیه ای که به صورت

$$(1) \quad y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

هستند عرضه می کنیم؛ بنا به فرض f به گونه ای است که مسئله در فاصله ای مشتمل بر x_0 جوابی یکتا دارد. روش اول ساده (اما غیر دقیق) است و برای تشریح اصول مطلب به کار می آید، در حالی که روش دوم از دقت زیاد و اهمیت عملی برخوردار است.

در هر دو روش مقادیر تقریبی $y(x)$ ، جواب (۱)، را در نقاط هم فاصله $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, y_1, y_2, \dots$ به دست می آوریم؛ این مقادیر را به ترتیب با $y_1, y_2, \dots$ نشان می دهیم. به گونه ای مشابه، مقادیر تقریبی مشتق $y'(x)$ در این نقاط را به ترتیب با $y_1', y_2', \dots$ نشان می دهیم.

روشهایی که در بخش قبل دیدیم، بر مبنای بسط تیلور

$$(2) \quad y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \dots$$

به دست آمده بودند؛ در اینجا نیز به همین منظور از (۲) و بسط مشتق

$$(3) \quad y'(x+h) = y'(x) + hy''(x) + \frac{h^2}{2} y'''(x) + \dots$$

استفاده می کنیم.

تقریبترین روش عددی بسا صرف نظر کردن از جملات در برگیرنده y'''

وجملات بعد از آن در (۲) و (۳) به دست می آید؛ در این روش خواهیم داشت

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x),$$

$$y'(x+h) \approx y'(x) + hy''(x).$$

در اولین گام، با استفاده از (۱):

$$y_0'' = f(x_0, y_0, y_0')$$

را محاسبه می کنیم و سپس

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2} y_0''$$

را که $y(x_1) = y(x_0 + h)$ را تقریب می زند به دست می آوریم. علاوه بر این داریم

$$y_1' = y_0' + hy_0''$$

که در گام بعد مورد نیاز خواهد بود. در گام دوم

$$y_1'' = f(x_1, y_1, y_1')$$

را با استفاده از (۱) محاسبه می کنیم، و بعد

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2} y_1''$$

را که $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ را تقریب می زند. علاوه بر این خواهیم داشت

$$y_2' = y_1' + hy_1''.$$

در $(n+1)$ امین گام، با استفاده از (۱)، مقدار

$$y_n'' = f(x_n, y_n, y_n')$$

را حساب می کنیم و سپس مقدار

$$(۴ \text{ الف}) \quad y_{n+1} = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2} y_n''$$

را که تقریبی برای $y(x_{n+1})$ است و نیز

$$(۴ \text{ ب}) \quad y_{n+1}' = y_n' + hy_n''$$

را که تقریبی برای $y'(x_{n+1})$ است و در گام بعد بدان نیاز داریم.

توجه کنید که از نظر هندسی این روش تقریب زدن منحنی $y(x)$ با تکه‌هایی از سهمیهای مختلف است.

مثال ۱. کاربردی از روش تعریف شده با (۴)

با انتخاب $h = 0.2$ ، رابطه (۴) را در مورد مسئله مقدار اولیه‌ای زیر به کار برید:

$$(5) \quad y'' = \frac{1}{y}(x + y + y' + 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

در این مورد (۴) می‌شود

$$y_{n+1} = y_n + 0.2y'_n + 0.02y''_n$$

$$y'_{n+1} = y'_n + 0.2y''_n$$

که در آنها $y''_n = 1/2(x_n + y_n + y'_n + 2)$ ، محاسبات را در جدول ۱۱.۱۹ آورده‌ایم. دانشجو می‌تواند نشان دهد که جواب دقیق عبارت است از

$$y = e^x - x - 1.$$

جدول ۱۳.۱۹ نشان می‌دهد که در این مورد خطاهای مقادیر تقریبی بزرگ هستند؛ و نوعاً چنین است زیرا این روش برای اکثر موارد عملی غیر دقیق است. ▲

روشی که بسیار دقیقتر است تعمیمی از روش رونگه - کوتا است که روش رونگه - کوتا - نیستروم^۱ نام دارد (روش رونگه - کوتا را در بخش ۷.۱۹ دیدیم). بدون اثبات متذکر می‌شویم که این روش يك روش مرتبه چهارم است، به این معنی که در بسط تیلور y' جملات اول تا جمله شامل h^4 و خود آن جمله به‌طور کامل وارد شده‌اند. در هر گام [گام $(n+1)$ ام] این روش، نخست مقادیر کمکی زیر را حساب می‌کنیم:

$$A_n = \frac{1}{y} h f(x_n, y_n, y'_n)$$

$$B_n = \frac{1}{y} h f(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \beta_n, y'_n + A_n), \quad \beta_n = \frac{1}{y} h (y'_n + \frac{1}{4}A_n)$$

(۶ الف)

$$C_n = \frac{1}{y} h f(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \beta_n, y'_n + B_n),$$

$$D_n = \frac{1}{y} h f(x_n + h, y_n + \delta_n, y'_n + 2C_n), \quad \delta_n = h(y'_n + C_n)$$

و سپس مقدار

۱. نیستروم E.J. Nyström ریاضیدان فنلاندی است. مقاله وی درباره روش مورد بحث در *Acta Soc. Sci. fennicae*, vol. 50(1925) چاپ شده است.

$$(۶) \quad y_{n+1} = y_n + h(y'_n + K_n), \quad K_n = \frac{1}{3}(A_n + B_n + C_n)$$

را که تقریبی است برای $y(x_{n+1})$ ؛ و نیز

$$(۶) \quad y'_{n+1} = y'_n + K_n^*, \quad K_n^* = \frac{1}{3}(A_n + 2B_n + 2C_n + D_n)$$

را که تقریبی است برای $y'(x_{n+1})$ ، و در گام بعدی مورد نیاز است.

جدول ۱۱.۱۹

محاسبات مثال ۱

n	x_n	y_n	y'_n	$2y'_n$	$x_n + y_n + 2y'_n$	$2y''_n$	$2y'_n + 2y''_n$	$2y'_n + 2y''_n$
۰	۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰
۱	۰.۲	۰.۰۰۲۰۰	۰.۰۲۰۰۰	۰.۰۴۰۰۰	۰.۲۴۲۰۰	۰.۲۴۲۰۰	۰.۰۰۲۴۲	۰.۰۰۶۴۲
۲	۰.۴	۰.۰۰۸۴۲	۰.۰۴۴۲۰	۰.۰۸۸۴۰	۰.۲۹۲۶۲	۰.۲۹۲۶۲	۰.۰۰۲۹۳	۰.۰۱۱۷۷
۳	۰.۶	۰.۰۲۰۱۹	۰.۰۷۳۴۶	۰.۱۴۶۹۲	۰.۳۵۳۶۵	۰.۳۵۳۶۷	۰.۰۰۳۵۴	۰.۰۱۸۲۳
۴	۰.۸	۰.۰۳۸۴۲	۰.۱۰۸۸۳	۰.۲۱۷۶۶	۰.۴۲۷۲۵	۰.۴۲۷۲۳	۰.۰۰۴۲۷	۰.۰۲۶۰۴
۵	۱.۰	۰.۰۶۴۴۶						

h را می‌توان به روشی مشابه با آنچه در آخر بخش قبلی بیان شد کنترل کرد، در صورتی که بیشترین مقدار δ^* و δ^{**} بگیریم؛ در اینجا δ^* برابر است با $1/15$ تفاضل مقادیر متناظر y ، و δ^{**} نیز $1/15$ تفاضل مقادیر متناظر y' است.

مثال ۲. روش رونگه - کوتا - نیسترم

با انتخاب $h = 0.2$ روش رونگه - کوتا - نیسترم را در مورد مسئله مقدار اولیه‌ای (۵) به کار برید. در اینجا $f = 0.5(x + y + y' + 2)$ ، و (۶ الف) می‌شود

$$A_n = 0.05(x_n + y_n + y'_n + 2),$$

$$B_n = 0.05(x_n + 0.1 + y_n + \beta_n + y'_n + A_n + 2),$$

$$\beta_n = 0.1(y'_n + \frac{1}{3}A_n),$$

$$C_n = 0.05(x_n + 0.1 + y_n + \beta_n + y'_n + B_n + 2),$$

$$D_n = 0.05(x_n + 0.2 + y_n + \delta_n + y'_n + 2C_n + 2), \delta_n = 0.2(y'_n + C_n).$$

درمورد حاضر، معادله دیفرانسیل و نیز فرمولهای مربوط به D_n, C_n, B_n, A_n ساده‌اند. بنابراین می‌توانیم A_n را در B_n و نیز B_n را در C_n و بالاخره، C_n را در D_n قرار دهیم. نتیجه این محاسبه مقدماتی

$$B_n = 0.05[1.0525(x_n + y_n) + 1.1525y'_n + 2.205],$$

$$C_n = 0.05[1.055125(x_n + y_n) + (1.160125y'_n + 2.21525)],$$

$$D_n = 0.05[1.11606375(x_n + y_n) + 1.32761375y'_n + 2.4436775]$$

می‌باشد. از روی این نتایج می‌توان K_n^* و K_n را معلوم کرد و در (ع) و (عپ) قرار داد؛ در این صورت خواهیم داشت

$$y_{n+1} = y_n + a(x_n + y_n) + b y'_n + c$$

(۷)

$$y'_{n+1} = y'_n + a^*(x_n + y_n) + b^* y'_n + c^*$$

که در آنها

$$a = 0.0103588 \quad b = 0.2110421 \quad c = 0.0214008$$

$$a^* = 0.1055219 \quad b^* = 0.1158811 \quad c^* = 0.2214030$$

محاسبات مربوطه را جدول ۱۲.۱۹ نشان می‌دهد. خطاهای مقادیر تقریبی $y(x)$ بسیار کوچکتر از خطاهای مربوط به مثال ۱ هستند (ر. ک. جدول ۱۳.۱۹). ▲

در هر روش، علاوه بر خطای قطع، خطاهای گرد کردن نیز وارد می‌شوند؛ به‌خواهنده هشدار می‌دهیم که خطاهای گرد کردن ممکن است به‌میزان زیادی نتایج را تحت تأثیر قرار دهند. مثلاً، جواب معادله $y'' = y$ ، $y(0) = 1$ ، $y'(0) = -1$ عبارت است از $y = e^{-x}$ ، اما خطای گرد کردن باعث می‌شود مضرب کوچکی از جواب ناخواسته e^x وارد جواب نهایی شود که سرانجام (بعد از چند گام) در جواب مورد نظر تأثیر خواهد گذاشت. این خطا را خطای building-up نامند. در مثال ساده بالا می‌توان از این خطا احتراز کرد، بدین ترتیب که از مقادیر معلوم e^{-x} و مشتق آن به‌ازای يك x بزرگ شروع کرده و محاسبه را در جهت عکس انجام داد. اما در حالات پیچیده‌تر برای پرهیز از این خطا تجربه زیادی لازم است.

جدول ۱۲-۱۹

روش رانگه - کوتا - نیلستر (با $h=0.2$) به کار برده شده در مسئله مقدار اولیه‌ای (۵)؛ گام با استفاده از (۷) محاسبه شده است.

n	x_n	y_n	y'_n	$a(x_n+y_n)+by'_n+c$	$a^*(x_n+y_n)+b^*y'_n+c^*$
۰	۰.۰	۰.۰۰۰۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰۰۰۰	۰.۰۰۲۱۴۰۰۸	۰.۰۲۲۱۴۰۳۰
۱	۰.۲	۰.۰۰۲۱۴۰۰۸	۰.۰۲۲۱۴۰۳۰	۰.۰۰۷۰۴۱۹۶	۰.۰۲۷۰۴۲۲۰
۲	۰.۴	۰.۰۰۹۱۸۲۰۴	۰.۰۴۹۱۸۲۵۰	۰.۰۱۳۰۲۹۱۳	۰.۰۳۳۰۲۹۴۰
۳	۰.۶	۰.۰۲۲۲۱۱۱۷	۰.۰۸۲۲۱۱۹۰	۰.۰۲۰۳۴۱۸۶	۰.۰۴۰۳۴۲۱۹
۴	۰.۸	۰.۰۴۲۵۵۴۰۳	۰.۱۲۲۵۵۴۰۹	۰.۰۲۹۲۷۳۶۵	۰.۰۴۹۲۷۴۰۳
۵	۱.۰	۰.۰۷۱۸۲۶۶۸	۰.۱۷۱۸۲۸۱۲		

جدول ۱۳-۱۹

مقایسه دقت دو روش مورد بحث در مورد مسئله مقدار اولیه‌ای (۵)، با $h=0.2$

x	$y=e^x-x-1$	مقدار مطلق خطا	
		مثال ۱	جدول ۱۲-۱۹
۰.۲	۰.۰۰۲۱۴۰۲۸	۰.۰۰۰۱۴	۰.۰۰۰۰۰۰۲۰
۰.۴	۰.۰۰۹۱۸۲۴۷	۰.۰۰۰۷۶	۰.۰۰۰۰۰۰۴۳
۰.۶	۰.۰۲۲۲۱۱۸۸	۰.۰۰۲۰۲	۰.۰۰۰۰۰۰۷۱
۰.۸	۰.۰۴۲۵۵۴۰۹	۰.۰۰۴۱۳	۰.۰۰۰۰۰۱۰۶
۱.۰	۰.۰۷۱۸۲۸۱۸	۰.۰۰۷۳۷	۰.۰۰۰۰۰۱۵۰

مسائل بخش ۸.۱۹

(۴) را در مسائل مقدار اولیه‌ای زیر به کار برید (تا ۵ گام ادامه دهید).

$$1. \quad h=0.1, y'(0)=1, y(0)=1, y''=y$$

$$2. \quad h=0.1, y'(0)=-1, y(0)=1, y''=y$$

$$3. \quad h=0.1, y'(0)=0, y(0)=1, y''=-y$$

$$4. \quad h=0.05, y'(0)=0, y(0)=1, y''=-y$$

$$5. \quad h=0.1, y'(0)=1, y(0)=0, y''=-y$$

۶. محاسبات مثال ۱ را با انتخاب $h=0.1$ تکرار کنید؛ و خطاهای مقادیری را که بدین ترتیب به دست می‌آیند با خطاهای مثال ۱ (مندرج در جدول ۱۳.۱۹) مقایسه کنید.

۷. مسئله ۶، را با انتخاب $h=0.05$ حل کنید.

۸. با انتخاب $h=0.2$ ، روش رونگه-کوتا-نیسترم را در مورد مسئله مقدار اولیه‌ای ۵ اعمال کنید؛ تا ۵ گام پیش روید و نتایج را با مقادیر دقیق مقایسه کنید (ر. ک. جدول A۱، ضمیمه ۴).

۹. در مسئله ۸، به جای $h=0.2$ قرار دهید $h=0.1$ ، و تا چهار گام پیش رفته، نتایج را با مقادیر متناظر در مسئله ۸ و نیز با مقادیر دقیق (تا ۹D)

$$0.099833417, 0.198669331, 0.295520207, 0.389418342$$

مقایسه کنید.

۱۰. مسئله مقدار اولیه‌ای $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ، $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$ را در نظر بگیرید. نشان دهید (۴)، با انتخاب $h=0.1$ ، به صورت زیر درمی‌آید:

$$y_{n+1} = y_n + 0.1 y'_n + 0.01 \frac{x_n y''_n - y_n}{1-x_n^2}, y'_{n+1} = y'_n + 0.2 \frac{x_n y'_n - y_n}{1-x_n^2},$$

تا ۵ گام پیش روید و با جایگذاری نشان دهید که جواب دقیق $y=x$ است. با انتخاب $h=0.1$ ، (۴) را در مورد مسائل مقدار اولیه‌ای زیر به کار برید. ۵ گام پیش روید و جواب دقیق داده شده را تحقیق کنید.

$$11. \quad y=x^3-3x, y'(0)=-3, y(0)=0, y''=xy'-3y$$

$$12. \quad y=x^4-6x^2+3, y'(0)=0, y(0)=3, y''=xy'-4y$$

$$۱۳. \quad y'(0)=0, \quad y(0)=-\frac{1}{4}, \quad (1-x^2)y''-2xy'+6y=0 \quad \text{جواب دقیق}$$

$$y=\frac{1}{4}(3x^2-1)$$

۱۴. در اینجا روشهای عددی در مورد مسائل با مقدار مرزی را در حالت کلی مطرح نمی‌کنیم، اما خواننده می‌تواند مسئله زیر را حل کند. برای حل عددی

$$y(b)=k, \quad y(0)=0, \quad y''+f(x)y'+g(x)y=r(x)$$

یکی از روشهای قبلی را اعمال کرده جواب $Y(x)$ معادله را که در شرایط اولیه $Y(0)=0, \quad Y'(0)=1$ صدق می‌کند پیدا کنید. سپس با همان روش جواب $z(x)$ معادله همگنی را که در شرایط اولیه $z(0)=0, \quad z'(0)=1$ صدق می‌کند معلوم کنید. نشان دهید اگر c را درست انتخاب کنیم

$$y(x)=Y(x)+cz(x)$$

در مسئله صدق می‌کند. برای c چه شرطی وجود دارد؟

۱۵. برای حل عددی مسئله با مقدار مرزی

$$y(b)=k_2, \quad y(a)=k_1, \quad y''+f(x)y'+g(x)y=r(x)$$

نشان دهید می‌توان جواب $y_1(x)$ را که در رابطه $y_1(a)=k_1, \quad y_1'(a)=c_1$ صدق می‌کند و نیز جواب $y_2(x)$ را که در $y_2(a)=k_1, \quad y_2'(a)=c_2$ صدق می‌کند معلوم کرد به طوری که $y_1(b) \neq y_2(b)$ و سپس جواب مسئله داده شده را به صورت زیر به دست آورد:

$$y(x)=\frac{1}{y_1(b)-y_2(b)}[(k_2-y_2(b))y_1(x)+(y_1(b)-k_2)y_2(x)].$$

۹.۱۹ دستگاههای معادلات خطی. حذف گاوسی

دستگاه m معادله خطی (یا مجموعه m معادله خطی همزمان) با n مجهول $x_1, \dots, x_n$ مجموعه معادلاتی به صورت زیر است:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

(۱)

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

که در آن ضرایب a_{jk} و b_j اعداد داده شده‌ای هستند. دستگاه را همگن نامند هرگاه تمام b_j ها صفر باشند؛ در غیر این صورت آن را ناهمگن نامند. خوانندگانی که با ضرب ماتریسی (بخش ۴.۷) آشنایی دارند، می‌دانند که (۱) را می‌توان به صورت $Ax=b$ معادله برداری

$$(۲) \quad Ax=b$$

نوشت که در آن ماتریس ضریب $A=(a_{jk})$ ماتریس $(m \times n)$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ و } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ است و } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

بردارهای ستونی هستند. هر جواب (۱) مجموعه‌ای است از اعداد $x_1, \dots, x_n$ که در تمامی m معادله صدق کنند، و هر بردار جواب (۱) برداری است مانند x که مؤلفه‌هایش جواب (۱) باشند.

در مورد دستگاه‌های بزرگ روش حل بادیترمینان (قاعده کرامر، بخش ۱۱.۷) غیر عملی است حتی اگر روشهای مؤثری برای محاسبه دترمینان در دست باشد. یکی از روشهای عملی حل دستگاه معادلات خطی حذف گاوسی است. کافی است این روش را به کمک مثالی بیان کنیم.

مثال ۱. حذف گاوسی

دستگاه زیر را حل کنید.

کنترل مجموع

$$2w + x + 2y + z = 6 \quad 12$$

$$6w - 6x + 6y + 12z = 36 \quad 54$$

$$2w + 3x + 3y - 3z = -1 \quad 6$$

$$2w + 2x - y + z = 10 \quad 14$$

مرحله اول. مضاربی از معادله اول را از سه معادله دیگر طوری کم می‌کنیم که در هر مورد w حذف شود. خواهیم داشت

کنترل مجموع

$$-9x + 9z = 18 \quad 18$$

$$x - y - 5z = -13 \quad -18$$

$$x - 3y = 4 \quad 2$$

مرحله دوم. سه معادله اخیر را در نظر می گیریم و مضارب از اولین معادله را از دو معادله دیگر کم می کنیم به طوری که x حذف شود؛ به دست می آوریم

کنترل مجموع

$$-y - 4z = -11 \quad -16$$

$$-3y + z = 6 \quad 4$$

مرحله سوم. مضربی از اولین معادله این دو معادله را از معادله دیگر کم می کنیم تا y حذف شود:

کنترل مجموع

$$13z = 39 \quad 52$$

مرحله نهایی. با قراردادن مقدار z ، مقادیر y ، x و w را به ترتیب به دست می آوریم:

$$13z = 39 \quad z = 3$$

$$-y - 4 \times 3 = -11 \quad y = -1$$

$$-9x + 9 \times 3 = 18 \quad x = 1$$

$$2w + 1 + 2 \times (-1) + 3 = 6 \quad w = 2$$

مثالی که در آن تعداد معادلات با تعداد مجهولات یکی نیست در بخش ۵.۷ آمده است. ستون اضافی سمت راست برای نوعی کنترل مورد استفاده قرار می گیرد. هر عضو این ستون مجموع ضرایب و جملات معادله سمت راست آن است؛ در هر مرحله عملیاتی را که روی معادلات انجام می دهیم روی مجموعه های مربوط به آنها نیز انجام می دهیم و سپس کنترل می کنیم که معادله حاصل دارای مجموع مورد نظر باشد. عملاً، در هر مرحله معادلات کامل نوشته نمی شود، بلکه فقط ماتریس ضرایب و ستون جملات سمت راست را می نویسیم

در هر مرحله ضریب اولین مجهول معادله اول را ضریب محوری می گویند. اگر ضریب محوری کوچک باشد، باید مضارب بزرگی از معادله متناظر را از بقیه معادلات کم

کنیم؛ به این ترتیب هر گونه عدم یقینی که در ضرایب وجود داشته باشد تشدید خواهد شد و در دقت نتیجه اثر خواهد گذاشت. نتیجتاً در عمل ضرایب محوری را باید طوری انتخاب کنیم که قدر مطلقشان خیلی کوچک نباشد. در صورت لزوم، این کار را می‌توانیم با پس و پیش کردن معادلات و متغیرها انجام دهیم. این فرآیند را **محوریابی** یا **تعیین محل بر حسب اندازه** می‌نامند.

برای احتراز از ضرایب محوری کسوف می‌توان از مقیاس‌گذاری استفاده کرد، یعنی معادلات را در عوامل مناسب ضرب کرد و یا در مورد بعضی متغیرها، تغییر ضرایب محوری متغیر $x_j = c_j x_j^*$ را داد که در آن c_j يك عدد مناسب است. حال **معکوس** ماتریس وارون پذیر A را می‌توان با حل n دستگاه

$$(3) \quad Ax = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

به دست آورد. در اینجا b_j عبارت است از j امین ستون b ماتریس يکۀ n سطری. يك روش تکرار برای تعیین معکوس در بخش بعد آمده است.)

به انحاء مختلفی می‌توان در روش گاوس تغییراتی داد. ما روشی را ذکر می‌کنیم که بر پایه قضیه‌ای از چلسکی* استوار شده است. چلسکی نشان داد که اگر ماتریس مربعی A و تمام زیرماتریسهای مربعی مقدم آن وارون پذیر باشند، A را می‌توان به صورت

$$(4) \quad A = LU$$

نمایش داد که در آن L و U به ترتیب ماتریسهای پایین مثلثی و بالامثلثی هستند. L و U اساساً يکنا هستند، و اگر عناصر قطری L (یا U) را مشخص کنیم، L و U يکنا خواهند بود. نکته این است که L و U را می‌توان بدون حل معادلات همزمان به دست آورد (مثال زیر را ببینید). برای حل دستگاه n معادله n مجهولی $Ax = b$ می‌توانیم از (۴) استفاده کرده بنویسیم

$$LUx = b,$$

و با ضرب کردن L^{-1} از چپ خواهیم داشت

$$(5) \quad Ux = z \quad \text{که در آن } z = L^{-1}b$$

و این صورت مثلثی دستگاه ما است. نخست z را از رابطه (۵) ر. ک (۵)

$$(6) \quad Lz = b,$$

تعیین می‌کنیم و سپس معادله

$$(7) \quad Ux = z$$

را حل می‌کنیم تا x به دست آید.

مثال ۲. روش چلسکی

خواننده می‌تواند تحقیق کند که جواب دستگاه

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$2x + 3y + 4z = 20$$

$$3x + 4y + z = 14$$

عبارت است از $x = 1$ ، $y = 2$ ، $z = 3$ ؛ در اینجا خواهیم دید که چگونه با روش چلسکی می‌توان این نتیجه را به دست آورد. ماتریس ضریب متقارن است. این موضوع ایجاب می‌کند که $L = U^T$ و می‌توانیم عناصر U را با استفاده از تعریف ضرب ماتریسی از معادله زیر، با مساوی قرار دادن اجزای متناظر، معلوم کنیم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

به ترتیب به دست می‌آوریم $a_{11}^2 = 1$ ، یعنی $a_{11} = 1$ ، از این رو $a_{11}a_{12} = a_{12} = 2$ ، $a_{11}a_{13} = a_{13} = 3$ ، $a_{22}^2 = 9 - 4 = 5$ ، یعنی $a_{22} = \sqrt{5}$ ، و با توجه به همه اینها

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} = 6 + ia_{23} = 4, \quad a_{23} = 2i$$

و سرانجام

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 9 - 4 + a_{33}^2 = 1, \quad a_{33} = 2i$$

از این رو (۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8i \\ 6i \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 \\ 3 & 2i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix}$$

حال معادله زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{که در می‌یابیم} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & i & 2i \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8i \\ 6i \end{pmatrix}$$

نوع دیگری از حذف گاوسی تغییر یافته، حذف گاوس - ژدانی* است که ژردان در ۱۹۲۵ آن را ابداع کرد. در این روش محاسبات اضافی که ماتریس را به جای «صورت مثلثی» معمول در حذف گاوسی به «صورت قطری» درمی آورد از جایگزینهای مکرر احترازی می شود. به مسئله ۱۴ همین بخش توجه کنید. به دلیل محاسبات اضافی به نظر می رسد که روش بر آورد در رابطه با وسایل محاسباتی خودکار هیچگونه مزیتی نداشته باشد. روش بر آورد خطا در مورد حذف گاوسی در مرجع [G۹]، ضمیمه ۱، آمده است.

مسائل بخش ۹.۱۹

با استفاده از حذف گاوسی دستگاههای معادلات خطی زیر را حل کنید

$$\begin{array}{lll}
 ۱. & ۵x - ۲y = ۱ & ۲. & ۳x + y = -۵ \\
 ۳. & x - ۲y = -۸ & ۴. & ۶x + ۸y = ۲۲ \\
 ۵. & ۵x + ۳y = -۱ & ۶. & ۲x + ۳y = ۶ \\
 ۷. & ۳x - y + z = -۲ & ۸. & ۷x - y - ۲z = ۰ \\
 ۹. & x + ۲y - ۸z = ۰ & ۱۰. & ۷x - ۴y - ۲z = -۶ \\
 ۱۱. & x + ۵y + ۲z = ۶ & ۱۲. & ۱۶x + ۲y + z = ۳ \\
 ۱۳. & ۲x - ۳y + ۵z = ۰ & ۱۴. & ۲x + ۳y + z = ۰ \\
 ۱۵. & ۲x + ۲y - ۱۲z = ۰ & ۱۶. & ۲x + ۴y - ۷z = ۰ \\
 ۱۷. & ۳x - ۳y - ۷z = -۴ & ۱۸. & ۳w - ۶x - y - z = ۰ \\
 ۱۹. & x - y + ۲z = ۳ & ۱۹. & w - ۲x + ۵y - ۳z = ۰ \\
 ۲۰. & x - ۳y + ۲z = ۲ & ۲۰. & ۲w - ۴x + ۳y - z = ۳ \\
 ۲۱. & ۵x - ۱۵y + ۷z = ۱۰ & ۲۱. & ۴w + ۳x - ۹y + z = ۱۰ \\
 ۲۲. & ۵x - ۱۵y + ۷z = ۱۰ & ۲۲. & -w + ۲x - ۱۳y + ۳z = ۳ \\
 ۲۳. & ۴w + ۳x - ۹y + z = ۱۰ & ۲۳. & ۳w - x + ۸y - ۲z = -۲ \\
 ۲۴. & -w + ۲x - ۱۳y + ۳z = ۳ & &
 \end{array}$$

۱۲. نشان دهید که در مورد n معادله n مجهولی، تعداد ضربها و تقسیمها در حذف گاوسی از مرتبه $n^3/۳$ است. (برای مشخص کردن کارایی یک روش، گاهی قرارداد می شود که فقط ضربها و تقسیمهای آن شمرده شوند، چرا که کامپیوترهای عددی مدرن اولیه جمع و تفریق را بسیار سریعتر از ضرب و تقسیم انجام می دادند. امروزه این قرارداد را زیاد به کار نمی برند، اما اگر تعداد جمعها و تفریقها تقریباً برابر ضربها و تقسیمها باشد، این قرارداد هنوز معنی خواهد داشت.)

۱۳. در محاسبه دستی می توان فقط ضرایب را یادداشت کرده مجموعهها و عملهای انجام شده را کنترل کرد. نشان دهید که در مرحله اول مثال ۱ می توان نوشت

$$\begin{array}{cccccc} \text{سطر ۱} & ۱۲ & ۶ & ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ \text{سطر ۲ منهای ۳ برابر سطر ۱} & ۱۸ & ۱۸ & ۹ & ۰ & -۹ & ۰ \\ \text{سطر ۳ منهای ۲ برابر سطر ۱} & -۱۸ & -۱۳ & -۵ & -۱ & ۱ & ۰ \\ \text{سطر ۴ منهای سطر ۱} & ۲ & ۴ & ۰ & -۳ & ۱ & ۰ \end{array}$$

این کار را برای تمام مراحل مسئله ۵ انجام دهید.

۱۴. (حذف گاوس - ژردانی) در مثال ۱، حذف گاوسی نتیجه می دهد

$$\begin{array}{ll} \text{(الف)} & ۲w + x + ۲y + z = ۶ \\ \text{(ب)} & -۹x + ۹z = ۱۸ \\ \text{(پ)} & -y - ۴z = -۱۱ \\ \text{(ت)} & ۱۳z = ۳۹ \end{array}$$

در حذف گاوس - ژردانی به ترتیب زیر عمل می شود. با استفاده از (ب)، x را از (الف) حذف می کنیم. سپس با به کار بردن (پ)، y را از (ب) (در این مسئله نیازی به حذف y از (ب) نیست) و (الف) حذف می کنیم. پس از آن با استفاده از (ت)، z را از (الف)، (ب) و (پ) حذف می کنیم. نشان دهید نتیجه زیر به دست می آید:

$$\begin{array}{ll} ۲w & = ۴ \\ -۹x & = -۹ \\ -y & = ۱ \\ ۱۳z & = ۳۹ \end{array}$$

سرانجام این معادلات را حل کنید تا $w=۲$ ، $x=۱$ ، $y=-۱$ ، $z=۳$ به دست آید.

۱۵. حذف گاوس - ژردانی را در مورد مسئله ۶ به کار برید.

۱۰.۱۹ دستگاههای معادلات خطی حل از راه تکرار

حذف گاوسی که در بخش قبل ذکر شد از روشهای مستقیم حل دستگاههای معادلات خطی

است؛ در این روشها جواب را بعد از محاسباتی که حجم آن را می توان از قبل مشخص کرد به دست می آوریم. در مقابل، روش غیومستقیم یا تکراری روشی است که در آن از يك تقریب جواب واقعی شروع می کنیم و، در صورتی که روش موفق باشد، تقریبهای بهتر و بهتری به کمک يك چرخه محاسباتی که هر قدر لازم باشد می توان تکرارش کرد با دقت مورد نظر به دست می آوریم؛ پس در این روش حجم محاسبات به دقت مورد نظر بستگی دارد.

روشهای تکرار عمدتاً در مسائلی به کار می روند که سریع بودن همگرایی در آنها بر ما معلوم باشد و بنا بر این، بتوانیم نسبت به روش مستقیم، جواب را با کار کمتری به دست آوریم و همین طور در دستگاههای مرتبه یالایی که بسیاری از ضرایب آنها صفر است، این دستگاهها اصطلاحاً دستگاههای «تنگ» نامیده می شوند و اعمال روشهای حذف در مورد آنها نسبتاً پر زحمت است و به انباشت زیادی نیاز دارد. چنین دستگاههایی در ارتباط با مسائل ارتعاشی، معادلات دیفرانسیل جزئی و سایر کاربردها مطرح می شوند و درباره آنها روز به روز مطالب بیشتری نوشته می شود.

فرآیند تکرار گاوس - سیدل دارای اهمیت عملی است و ما آن را به کمک مثالی شرح می دهیم. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} w - 0.25x - 0.25y &= 0.50 \\ -0.25w + x - 0.25z &= 0.50 \\ -0.25w &+ y - 0.25z = 0.25 \\ -0.25x - 0.25y + z &= 0.25 \end{aligned} \quad (1)$$

(چنین معادلاتی در حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی پیش می آیند.) دستگاه را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} w &= 0.25x + 0.25y + 0.50 \\ x &= 0.25w + 0.25z + 0.50 \\ y &= 0.25w + 0.25z + 0.25 \\ z &= 0.25x + 0.25y + 0.25 \end{aligned} \quad (2)$$

و برای تکرار این معادلات را به کار می بریم؛ یعنی، از تقریبی برای جواب شروع می کنیم، مثلاً، $w_0 = 1$ ، $x_0 = 1$ ، $y_0 = 1$ ، $z_0 = 1$ ، و تقریب بهتری را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= 0.25x_0 + 0.25y_0 + 0.50 = 1.0000 \\
 x_1 &= 0.25w_1 + 0.25z_0 + 0.50 = 1.0000 \\
 (3) \quad y_1 &= 0.25w_1 + 0.25z_0 + 0.25 = 0.7500 \\
 z_1 &= 0.25x_1 + 0.25y_1 + 0.25 = 0.6875
 \end{aligned}$$

می‌بینیم که این معادلات با جایگزین کردن آخرین تقریبه‌ها درست است (۲) به دست می‌آیند. در واقع، عناصر متناظر به محض محاسبه شدن به جای قبلیها قرار می‌گیرند، به طوری که در معادلات دوم و سوم w_1 (ونه w_0) را به کار می‌بریم و در آخرین معادله (۳) x_1 و y_1 (ونه x_0 و y_0) را. مرحله بعدی منجر می‌شود به

$$\begin{aligned}
 w_2 &= 0.25x_1 + 0.25y_1 + 0.50 = 0.9375 \\
 x_2 &= 0.25w_2 + 0.25z_1 + 0.50 = 0.9062 \\
 y_2 &= 0.25w_2 + 0.25z_1 + 0.25 = 0.6562 \\
 z_2 &= 0.25x_2 + 0.25y_2 + 0.25 = 0.6406
 \end{aligned}$$

خواننده می‌تواند نشان دهد که جواب دقیق $w = x = 0.8875$ ، $y = z = 0.625$ است.

بدون اثبات متذکر می‌شویم که تکرار گاوس - سیدل به ازای هر انتخابی برای تقریب اولیه همگراست اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه (بخش ۱۳.۷) «ماتریس تکرار» C [(۵) همین بخش] قدر مطلق کمتر از ۱ داشته باشند، و نرخ همگرایی به شعاع طیفی ($=$ بزرگترین مقدار قدر مطلقها) بستگی دارد. ماتریس C به طریق زیر به دست می‌آید. فرض کنید

$$Ax = b$$

دستگاه n معادله‌ای مفروض باشد، که در آن x برداری ستونی با مؤلفه‌های $x_1, \dots, x_n$ ، یعنی n مجهول دستگاه، است. فرض کنید. $x_{(0)}, x_{(1)}, \dots$ دنباله تکرار متوالی تقریبهای گاوس - سیدل متناظر با تقریب اولیه $x_{(0)}$ باشد. روش را به ازای $x_{(0)}$ همگرا نامند، در صورتی که دنباله تکرار متناظر به جوابی از دستگاه داده شده میل کند.

فرض می‌کنیم به ازای $n, \dots, 1, j$ داشته باشیم $a_{jj} = 1$. (چنین چیزی ممکن است، در صورتی که بتوان معادلات را طوری مرتب کرد که هیچ ضریب قطری صفر نباشد؛ سپس می‌توان هر معادله را به ضریب قطری متناظرش تقسیم کرد.) حال می‌توان نوشت $A = I + \tilde{L} + \tilde{U}$ ، که در آن I ماتریس یکة n سطری است، و $\tilde{L}$ و $\tilde{U}$ به ترتیب ماتریسهای بالا مثلثی و پایین مثلثی هستند که عناصر روی قطر اصلی آنها صفر است. با قرار دادن این صورت A در $Ax = b$ ، داریم $(I + \tilde{L} + \tilde{U})x = b$. معمول است که بنویسند

$$\tilde{U} = -U \text{ و } \tilde{L} = -L \text{ ؛ در این صورت}$$

$$(I-L)x = b + Ux \text{ و } (I-L-U)x = b \text{ آنگاه}$$

از روی این رابطه فرمول گاوس - سیدل را به دست می آوریم:

$$(4) \quad (I-L)x_{(m+1)} = b + Ux_{(m)} \quad (m=0, 1, \dots).$$

در واقع، U بالا مثلثی است و عناصر غیر صفرش متناظر با جاهایی هستند که در آنها باید تقریبهای «قدیمی» را به کار ببریم زیرا تقریبهای «جدید» هنوز در دست نیستند. برعکس، L پایین مثلثی است و عناصر غیر صفرش متناظر با جاهایی هستند که در آنها عناصر تقریب «جدید» در دست هستند. $x_{(m+1)}$ را از (۴) پیدا می کنیم:

$$(5) \quad C = (I-L)^{-1}U \text{ که در آن } x_{(m+1)} = (I-L)^{-1}b + Cx_{(m)}$$

همان ماتریس است که مقادیر ویژه اش برای بررسی همگرایی لازمند.

تکرار گاوس - سیدل یک روش تصحیحات متوالی است، زیرا در این روش تقریبهای جدید را به محض محاسبه جایگزین تقریبهای قدیمتر می کنیم. روشی را روش تصحیحات همزمان می نامند که در آن هیچ عنصری از تقریب $x_{(m+1)}$ را تا زمانی که تمام عناصر $x_{(m+1)}$ محاسبه نشده اند به کار نبریم. روشی از این نوع روش تکرار ذاکوبی است که شبیه روش تکرار گاوس - سیدل است اما در آن تا قبل از کامل شدن هر مرحله مقادیر تصحیح شده به کار برده نمی شوند و سپس برای چرخه بعد $x_{(m+1)}$ را به جای $x_{(m)}$ قرار می دهند. بنا بر این اگر $Ax = b$ را به صورت $x = b + (I-A)x$ بنویسیم تکرار ذاکوبی بسا نماد - گذاری ماتریسی به صورت زیر درمی آید:

$$(6) \quad x_{(m+1)} = b + (I-A)x_{(m)}.$$

این روش از لحاظ نظری اهمیت زیادی دارد. روش ذاکوبی به ازای هر $x_{(0)}$ همگراست اگر و تنها اگر شعاع طیفی $I-A$ کمتر از ۱ باشد؛ در اینجا باز هم فرض می کنیم به ازای $j=1, 2, \dots, n$ ، $a_{jj}=1$.

در مورد دستگاه مفروض $Ax = b$ می توان نوشت

$$r = Ax - b,$$

r را پس مانده می نامند. واضح است که $r=0$ اگر و تنها اگر x جواب باشد. بنا بر این به ازای جوابهای تقریبی خواهیم داشت $r \neq 0$. در تکرار گاوس - سیدل در هر مرحله یک مؤلفه از جواب تقریبی را تغییر داده یسا و امی هلیم به طوری که یک مؤلفه r را به صفر برسانیم. از این رو تکرار گاوس - سیدل به دسته روشهایی تعلق دارد که معمولاً روشهای واهلشی نامیده می شوند.

معکوس ماتریس وارون پذیر A را می توان با روش تکراری که بر فکر اولیه زیر

مبتنی است تعیین کرد. x ، وارون عدد داده شده a در رابطه $xa = 1$ صدق می کند؛ هرگاه بخواهیم بدون انجام دادن عمل تقسیم x را معین کنیم، می توانیم روش نیوتن را در مورد تابع $q - x^{-1} = f(x)$ اعمال کنیم. چون داریم $f'(x) = -1/x^2$ ، تکرار نیوتن عبارت است از

$$x_{m+1} = x_m - (x_m^{-1} - a)(-x_m^2) = x_m(2 - ax_m).$$

این رابطه فرمول تکرار مشابهی را برای تعیین معکوس $X = A^{-1}$ ماتریس A تداعی می کند که عبارت است از

$$(7) \quad X_{(m+1)} = X_{(m)}(2I - AX_{(m)}).$$

این فرآیند همگسراست (وقتی m به سمت ∞ میل می کند A^{-1} را تولید می کند) اگر و تنها اگر $X_{(0)}$ طوری انتخاب شود که قدرمطلق تمام مقادیر ویژه $I - AX_{(0)}$ کمتر از ۱ باشد (ر. ک. مرجع [G۱۷]، مندرج در ضمیمه ۱). این روش برای مواردی مناسب است که ضریبهای موجود در آنها ساده باشند (مثلاً، صفرهای زیادی در A وجود داشته باشد). در عمل انتخاب مناسب $X_{(0)}$ ، اگر غیر ممکن نباشد دشوار است و این روش بیشتر برای تصحیح معکوس غیر دقیقی که از روشهای دیگر به دست آمده است به کار می رود.

مسائل بخش ۱۰.۱۹

۱. درستی جواب (۱) را که در متن درس داده شده است تحقیق کنید. (۱) را با حذف گاوس حل کنید.

۲. دو مرحله دیگر تکرار گاوس - سیدل متن درس را محاسبه کنید.

۳. C [ر. ک. (۵)] را برای دستگاه (۱) بیابید.

۴. تکرار ژاکوبی را در مورد دستگاه (۱) اعمال کنید؛ از $w_0 = 1$ ، $x_0 = 1$ ، $y_0 = 1$ ، $z_0 = 1$ آغاز کنید، دو مرحله پیش بروید و دقت نتیجه را با دقت آنچه در متن درس حساب شده مقایسه کنید.

روش تکرار گاوس - سیدل را در مورد دستگاههای زیر به کار ببرید. سه مرحله پیش بروید، از ۱، ۱، ۱ شروع کنید.

$$5. \quad 10x - y - z = 13 \quad 6. \quad 4x + y = -8$$

$$x + 10y + z = 36 \quad 4y + z = 2$$

$$-x - y + 10z = 35 \quad x + 2z = 2$$

$$۷. \quad ۴x + ۲y + z = ۱۴$$

$$x + ۵y - z = ۱۰$$

$$x + y + ۸z = ۲۰$$

۸. با شروع از $۰, ۰, ۰$ نشان دهید که در مورد دستگاه زیر تکرار گاوس - سیدل همگراست، درحالی که تکرار ژاکوبی واگراست.

$$۲x + y + z = ۴$$

$$x + ۲y + z = ۴$$

$$x + y + ۲z = ۴$$

۹. منطقی به نظر می‌رسد که تکرار گاوس - سیدل را بهتر از تکرار ژاکوبی تصور کنیم. در واقع این دو روش قابل مقایسه نیستند. با نشان دادن اینکه در مورد دستگاه زیر تکرار ژاکوبی همگراست درحالی که تکرار گاوس - سیدل واگراست، قابل مقایسه نبودن دو روش را تشریح کنید.

(داهنمایی. از مقادیر ویژه استفاده کنید.)

$$x + z = ۲$$

$$-x + y = ۰$$

$$x + ۲y - ۳z = ۰$$

۱۰. نشان دهید که به ازای $X_{(m)} = A^{-1}$ فرمول (۷) به $X_{(m+1)} = A^{-1}$ منجر می‌شود.

۱۱. تقریب $X_{(۰)}$ در مورد معکوس ماتریس A را نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ -۱ & ۱ & -۱ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad X_{(۰)} = \begin{pmatrix} ۰.۵ & -۰.۱ & ۰.۴ \\ ۰ & ۰.۲ & ۰ \\ -۰.۴ & ۰.۳ & -۱.۵ \end{pmatrix}$$

به کمک (۷)، $X_{(۰)}$ را محاسبه کنید. A^{-1} را معین کنید و نشان دهید که انحراف هر عنصر $X_{(۰)}$ از عنصر متناظرش در A^{-1} حداکثر ۰.۱ است درحالی که برای $X_{(۰)}$ بیشترین انحراف ۰.۵۳ است.

۱۲. (۷) را با

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{pmatrix} \quad \text{برای} \quad X_{(۰)} = \begin{pmatrix} ۲.۹ & -۰.۹ \\ -۴.۹ & ۱.۹ \end{pmatrix}$$

به کار برید. نشان دهید که شرایط همگرایی صادق است. دومی مرحله پیش بروید و نتایج را با وارون دقیق A مقایسه کنید.

۱۱.۱۹ دستگاههای معادلات خطی بدطرحی

دستگاه معادلات خطی را خوش طرح نامند، اگر وجود خطاهای کوچک در ضرایب یا در فرآیند حل آن تأثیر کمی در جواب داشته باشد. در این صورت به طور نسبی معادلات قویاً مشخص کننده جواب هستند.

دستگاه معادلات خطی را بدطرح نامند هر گاه وجود خطاهای جزئی در ضرایب یا در فرآیند حل اثر زیادی در جواب داشته باشد. در این حالت معادلات جواب را به طور ضعیف مشخص می کنند.

به عنوان مثال، نمایش دو معادله خطی دو مجهولی دو خط راست است. چنین دستگاهی بدطرح است اگر و تنها اگر زاویه γ بین دو خط کوچک باشد، یعنی اگر و تنها اگر دو خط تقریباً موازی باشند. در واقع، در این حالت تغییر کوچکی در یکی از ضرایب ممکن است جابه جایی بزرگی در نقطه تقاطع دو خط را سبب شود (ر. ک. شکل ۳۵۷). در مورد دستگاههای معادلات خطی بزرگتر در اصل همین وضعیت برقرار است، اما دیگر چنین تعبیر هندسی ساده ای ممکن نیست و ما قادر به دنبال کردن جزئیات مسئله نیستیم.

مثال ۱. يك دستگاه بدطرح

می توان تحقیق کرد که جواب دستگاه

$$0.9999x - 1.0001y = 1$$

$$x - y = 1$$

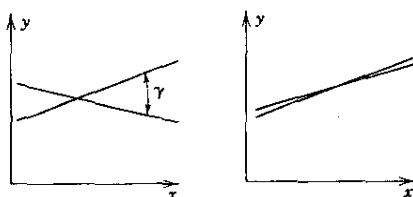
عبارت است از $x = 0.5$ و $y = -0.5$ ، در حالی که دستگاه

$$0.9999x - 1.0001y = 1$$

$$x - y = 1 + \epsilon$$

دارای جواب $x = 0.5 + 50000\epsilon$ و $y = -0.5 + 49999\epsilon$ است. این نشان می دهد که دستگاه بد طرح است زیرا تغییری در ϵ باعث تغییری به اندازه 50000ϵ در جواب می شود. ▲

بدطرحی را می توان رهیافتی به تکنیکی دانست. بدطرحی با کم شدن ارقام معنی دار در حین محاسبه همراه است و این کم شدن ارقام معنی دار طوری است که یافتن معکوس یا



شکل ۳۵۷. دستگاه دومعادله خطی دومجهولی
(الف) خوش طرح و (ب) بدطرح

جواب دقیق معادلات مربوطه را دشوار می کند. چندین محک برای پی بردن به بدطرحی پیشنهاد شده است اما کاربرد عمومی این کلمه هنوز برای بیان يك مفهوم کیفی است. در دستگاههای بدطرح، برای آنکه جواب نهایی تعداد معینی رقم اعشاری داشته باشد باید محاسبات واسطه را با تعداد خیلی بیشتری اعشار انجام دهیم (وقتی که خطای گرد کردن وجود دارد). اگر بتوانیم ضرایب يك دستگاه بدطرح و اعداد سمت راست آن را از فرمولی استخراج کنیم، می توانیم آنها را با مختصر کوششی با دقت دلخواه محاسبه کنیم و بنابراین با وضع دشواری روبرو نخواهیم بود. اشکال جدی مربوط به حالتی است که در آن ضرایب و اعداد یادشده از آزمایش و با دقتی که الزاماً محدود است به دست می آیند. در این صورت این واقعیت را باید بپذیریم که بی دقتیهای موجود در داده ها باعث می شوند که جواب حاصل دارای حدود خطای بزرگی باشد. در این صورت چه بسا ناچار باشیم مسئله اصلی را بر حسب دستگاه معادلات دیگری که به اندازه لازم خوش طرح باشد بیان کنیم.

بعضی از نشانه های بدطرحی به قرار زیرند: $|\det A|$ در مقایسه با اندازه ماکزیمم $|a_{jk}|$ ها و جملات سمت راست دستگاه کوچک است. تقریبهایی ضعیفی که برای جواب به کار می بریم ممکن است باقیمانده های کوچکی تولید کنند (دنباله همین بخش را مطالعه کنید). قدرمطلق عناصر A^{-1} در مقایسه با قدرمطلق عناصر جواب بزرگند. هرگاه قدرمطلق عناصر واقع بر قطر اصلی در مقایسه با قدرمطلق سایر عناصر بزرگ باشد، دستگاه خوش طرح است. هرگاه ماتریسی مربعی که بزرگترین عناصرش بین ۱۰ و ۱۰۰ هستند معکوسی داشته باشد که بزرگترین عناصر آن هم از مرتبه يك باشند، در این صورت دستگاه معادلات خطی وابسته به ماتریس خوش طرح است. هنگامی که دستگاه بدطرح است امکان دارد بخواهیم جواب اصلاح شده

(۱)

$$Ax = b$$

را از جواب تقریبی $x_{(1)}$ به دست آوریم. باقیمانده متناظر با $x_{(1)}$ عبارت است از

$$r_{(1)} = b - Ax_{(1)}$$

داریم

$$Ax_{(1)} = b - r_{(1)}$$

و بنابراین

$$(2) \quad A(x - x_{(1)}) = r_{(1)}$$

و این نشان می‌دهد تصحیحی که باید در $x_{(1)}$ انجام شود برای یافتن جواب (۱)، عبارت است از جواب (۲). جز در موردی که دستگاه خیلی بد طرح باشد مؤلفه‌های $r_{(1)}$ از مؤلفه‌های b کوچکتر خواهند بود. تفصیل همین مطالب را در مورد محاسبه با ماشینهای خود کار می‌توانید در مرجع [G۱۲]، ضمیمه ۱، پیدا کنید.

مسائل بخش ۱۱.۱۹

۱. در مثال ۱، دستگاه را برضربیی که بزرگترین قدر مطلق را دارد تقسیم کرده دترمینان آن را پیدا کنید. بحث کنید. آیا دترمینان يك دستگاه بد طرح می‌تواند مقدار بزرگی داشته باشد؟

۲. در مثال ۱، باقراردادن $\zeta = x + y + 1$ ، $\eta = x - y - 1$ دستگاه بد طرح دیگری به دست آورید.

۳. نشان دهید که γ زاویه بین دو خطی که با معادلات

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

نمایش داده می‌شوند از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tan \gamma = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) / (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}),$$

و سپس نتایج این فرمول را در ارتباط با بد طرحی شرح دهید.

۴. نشان دهید که جواب دستگاه

$$6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 21$$

$$7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24$$

$$8x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 26$$

عبارت است از $x_3 = 1$ ، $x_2 = 1$ ، $x_1 = 1$ و باقیمانده متناظر با $x_3 = 0.7$ ، $x_2 = 2.9$ ، $x_1 = -0.8$ را حساب کنید. بحث کنید.

۵. فرض کنید

$$B = \begin{pmatrix} 111 & -100 \\ -110 & 100 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 1000 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix}$$

نشان دهید که AB تقریباً برابر با ماتریس یکه است، درحالی که BA چنین نیست. بحث کنید.

۶. با به کار بردن حذف گاوس نشان دهید که جواب دستگاه

$$x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}z = 1$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 0$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = 0$$

عبارت است از $x=9$ ، $y=-36$ ، $z=30$. مسئله را دوباره با این فرض بررسی کنید که محاسبات با کامپیوتری که تنها دو رقم معنی دار را در محاسبات به کار می برد انجام می گیرد. جوابها را مقایسه کرده در این باره بحث کنید. (ماتریس ضریب را ماتریس هیلبرت سه سطری می نامند.)

۷. اندازه عناصر معکوس ماتریس هیلبرت $(n \times n)$ با سرعت زیادی بزرگ می شود. برای روشن شدن مطلب تحقیق کنید که معکوس ماتریس هیلبرت (4×4)

$$\begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & -1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix} \quad \text{عبارت است از} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

ماتریس هیلبرت صرفاً یک پدیده صرف علمی نیست، ماتریسهای مشابهی هستند که در رابطه با برآوردن منحنی به کمک حداقل مربعات، چنانچه در بخش بعد خواهیم دید، به کار می روند.

۸. تحقیق کنید که معکوس ماتریس ضریب A ی دستگاه

$$\begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ عبارت است از } \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

و جواب عبارت است از $w=x=y=z=1$. نشان دهید که $w=92$ ، $x=-126$ ، $y=45$ ، $z=-11$ با خطای ± 0.1 در معادلات دستگاه صدق می کند. نتیجه بگیرید که A بد طرح است. روش تکرار گاوس - سیدل را با $x_0=0$ به کار ببرید؛ دو یا سه مرحله پیش بروید و نشان دهید که همگرایی کند است. (اطلاعات بیشتری در مورد این دستگاه در مرجع [G17]، صفحه ۲۴۲ یافت می شود.)

۱۲.۱۹ روش حداقل مربعات

در برازاندن منحنی، n نقطه (جفت عدد) به صورت

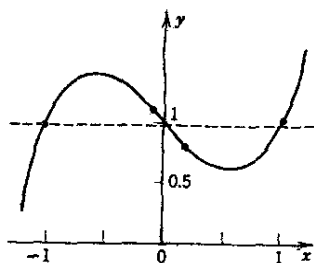
$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

در اختیار داریم و می خواهیم تابع $f(x)$ را طوری تعیین کنیم که $f(x_j) \approx y_j$ ، $j=1, \dots, n$ نوع تابع (مثلاً چندجمله ای، تابع نمایی، تابع سینوسی یا کسینوسی) را می توان بسا توجه به طبیعت مسئله (مثلاً قانون فیزیکی مربوطه) حدس زد؛ در بسیاری از موارد می توان از چندجمله ایها استفاده کرد.

اگر بخواهیم تساوی دقیق $f(x_1)=y_1, \dots, f(x_n)=y_n$ را برقرار کنیم و به این منظور از چندجمله ایهایی که درجه آنها به اندازه کافی بالاست استفاده کنیم، می توانیم یکی از روشهایی را که در بخش ۴.۱۹ در ارتباط با درون یابی مورد بحث قرار گرفت به کار ببریم. معذرت می خواهم و وضعیتهایی وجود دارند که در آنها این جواب، جواب مناسبی برای مسئله واقعی نیست. مثلاً با چهار نقطه

$$(100, 10000), (102, 10808), (101, 10999), (100, 10000)$$

چندجمله ای لاگرانژ $f(x) = x^3 - x + 1$ (شکل ۳۵۸) متناظر می شود، اما اگر این نقاط را رسم کنیم خواهیم دید که تقریباً روی یک خط مستقیم قرار می گیرند. از این رو اگر این مقادیر از آزمایشی به دست آمده باشند و بدین لحاظ دارای یک خطای اندازه گیری باشند، و اگر ماهیت آزمایش رابطه ای خطی اقتضا کند، بهتر آن است که خط مستقیمی را از نقاط بگذرانیم (شکل ۳۵۸). از چنین خطی می توان برای پیش بینی مقادیری که برای سایر مقادیر x انتظار می رود استفاده کرد. در موارد ساده خط مستقیم را می توان به کمک چشم برازاند، اما اگر نقاط پراکنده باشند این روش قابل اطمینان نیست و در این صورت بهتر است از یک اصل ریاضی استفاده کنیم. روشی که برای این مبنا قرار گرفت و کاربرد بسیار زیادی



شکل ۳۵۸. برازاندن تقریبی خط مستقیم

دارد روش حداقل مربعات گاوس است. در حال حاضر این روش را به صورت زیر صورت بندی می کنیم.

روش حداقل مربعات. خط مستقیم

$$y = a + bx$$

باید طوری به نقاط $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ برازنده شود که مجموع مربعات فواصل نقاط مزبور از این خط مستقیم حداقل باشد؛ فاصله ها در امتداد قائم (امتداد y) اندازه گرفته می شوند.

عرض نقطه ای که روی خط مستقیم قرار دارد و طولش x_j است برابر است با $a + bx_j$. بنابراین فاصله آن از نقطه (x_j, y_j) عبارت است از $|y_j - a - bx_j|$ (ر. ک. شکل ۳۵۹) و مجموع مربعات برابر است با

$$q = \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_j)^2.$$

q به a و b بستگی دارد. شرط لازم برای مینیمم بودن q این است که

$$\frac{\partial q}{\partial a} = -2 \sum (y_j - a - bx_j) = 0$$

(۲)

$$\frac{\partial q}{\partial b} = -2 \sum x_j (y_j - a - bx_j) = 0$$

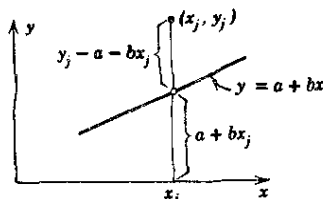
(مجموع را برای j از ۱ تا n حساب می کنیم). بنابراین

$$an + b \sum x_j = \sum y_j$$

(۳)

$$a \sum x_j + b \sum x_j^2 = \sum x_j y_j$$

این معادلات را معادلات نرمال مسئله می نامند.



شکل ۳۵۹. فاصله قائم نقطه (x_j, y_j) از خط مستقیم $y = a + bx$

مثال ۱. خط مستقیم

با استفاده از روش حداقل مربعات خط مستقیمی به چهار نقطه (۱) براز کنید. محاسبه می کنیم

$$n=4, \sum x_j = 0.1, \sum x_j^2 = 0.05, \sum y_j = 39.07, \sum x_j y_j = 0.517$$

از این دو معادلات قائم عبارتند از

$$4a + 0.1b = 39.07$$

$$0.1a + 0.05b = 0.517$$

جواب عبارت است از $a = 0.9773$ ، $b = -0.0224$ ، و خط زیر را به دست می آوریم (شکل ۳۵۸):

$$\blacktriangle \quad y = 0.9773 - 0.0224x$$

برازاندن منحنی را می توان از چند جمله ای $y = a + bx$ به چند جمله ای درجه m

$$p(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

تعمیم داد. در این حالت q به صورت زیر درمی آید:

$$q = \sum_{j=1}^n (y_j - p(x_j))^2$$

که به $m+1$ پارامتر $b_0, \dots, b_m$ بستگی دارد. در این صورت به جای (۲)، $m+1$ شرط

$$\frac{\partial q}{\partial b_0} = 0, \dots, \frac{\partial q}{\partial b_m} = 0,$$

را داریم که دستگاهی است از $m+1$ معادله نرمال. خواننده می تواند نشان دهد که در مورد چند جمله ای درجه دوم

$$(۴) \quad p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

معادلات نرمال عبارتند از (جمعها از ۱ تا n)

$$\begin{aligned}
 b_0 n + b_1 \sum x_j + b_2 \sum x_j^2 &= \sum y_j \\
 b_0 \sum x_j + b_1 \sum x_j^2 + b_2 \sum x_j^3 &= \sum x_j y_j \\
 b_0 \sum x_j^2 + b_1 \sum x_j^3 + b_2 \sum x_j^4 &= \sum x_j^2 y_j
 \end{aligned}
 \quad (5)$$

مسائل بخش ۱۲۰۱۹

در هر مورد نقاط داده شده را در صفحه xy مشخص کنید و خط مستقیمی را: (الف) با چشم، (ب) با روش حداقل مربعات به آنها براز کنید.

۱. تعداد خطاهای تلگرافچیهای که با تلگراف بی سیم کار می کنند به صورت تابعی از دمای $x [^{\circ}\text{C}]$

$$x \quad 26 \quad 28 \quad 31 \quad 33$$

$$y \quad 1220 \quad 1125 \quad 1523 \quad 1723$$

۲. $(1, 1)$ ، $(2, 2+k)$ ، $(3, 3)$ در حالی که k يك ثابت است.

۳. مقدار آهن y [%] موجود در نوع معینی از سنگ آهن به صورت تابعی از چگالی $x [\text{gr/cm}^3]$

$$x \quad 228 \quad 229 \quad 320 \quad 321 \quad 322 \quad 322 \quad 322 \quad 323 \quad 324$$

$$y \quad 27 \quad 23 \quad 30 \quad 28 \quad 30 \quad 32 \quad 34 \quad 33 \quad 30$$

۴. $(2, 5)$ ، $(3, 9)$ ، $(4, 15)$ ، $(5, 21)$

۵. $(0, 223)$ ، $(2, 421)$ ، $(4, 527)$ ، $(6, 629)$

۶. $(4, 3)$ ، $(15, 16)$ ، $(30, 13)$ ، $(100, 70)$ ، $(200, 90)$

۷. اگر اتومبیلی بر روی جاده مستقیمی با تندی ثابت $v = b_1 [\text{m/s}]$ حرکت کند، موضع $y [\text{m}]$ آن در زمان $t [\text{s}]$ عبارت است از $y = b_0 + b_1 t$. فرض کنید مقادیر اندازه گرفته شده عبارت باشند از

$$t \quad 0 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 10$$

$$y \quad 0 \quad 30 \quad 40 \quad 70 \quad 90$$

این مقادیر را در صفحه ty مشخص کنید. خط مستقیمی را (الف) با چشم، (ب) با

روش حداقل مربعات به این نقاط پرازانید. بسا توجه به این خط تندی حرکت را تخمین بزنید.

در هر يك از موارد زیر سهمی (۴) را با روش حداقل مربعات معین کنید.

$$۰۸. (1, 2), (0, 1), (0, 0), (-1, 2)$$

$$۰۹. (6, 4), (4, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 3)$$

$$۰۱۰. (420, 7200), (320, 7500), (223, 7600), (128, 7500), (124, 7400)$$

۱۱. مسئله ۸ را با روش چسکی حل کنید (بخش ۹.۱۹).

۱۲. معادلات نرمال را در مورد چند جمله‌ای درجه سه معین کنید.

۱۳. وقتی اصل حداقل مربعات را در مورد يك چند جمله‌ای به کار می‌بریم، می‌خواهیم رابطه زیر حتی‌الامکان برقرار باشد:

$$b_0 + b_1 x_j + b_2 x_j^2 + \dots + b_n x_j^n = y_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

ماتریس C را طوری تعیین کنید که بتوان نوشت $Cb = y$ و نشان دهید که در این صورت معادلات نرمال را می‌توان به شکل $C^T C b = C^T y$ نوشت.

۱۴. ماتریس ضریب (۵)، که آن را C می‌نامیم، مقارن و معین مثبت (تعریف در بخش ۱۲.۷) است، بنابراین روش چسکی (بخش ۹.۱۹) برای حل (۵) بسیار مناسب است و همین وضع را دارند معادلات نرمال در مورد چند جمله‌ایهایی که از درجات بالاتر هستند. اما C ممکن است بدطرح باشد. برای روشن شدن مطلب، به ترتیب زیر عمل کنید. نشان دهید

$$c_k = \sum_{j=1}^n x_j^k \quad \text{که در آن} \quad C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

فرض کنید n بزرگ است و x در بازه $0 \leq x \leq 1$ قرار گرفته و به طور یکنواخت توزیع شده باشد. از تعریف انتگرال نتیجه بگیرید

$$\int_0^1 x^k dx \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k = \frac{1}{n} c_k.$$

با انتگرال گیری $C = nH$ را که در آن H ماتریس هیلبرت (3×3) است به دست آورید (تعریف ماتریس هیلبرت در بخش ۱۱.۱۹، مسئله ۶، آمده است). نتیجه بگیرید

که در مورد چند جمله‌ای درجه m ، به ماتریس هیلبرت $(m+1)$ سطری می‌رسیم که به ازای m های بزرگ بدطرح است.

۱۵. در مسائل مربوط به رشد اغلب برازاندن تابعی مانند $y = b \cdot e^{ax}$ باروش حداقل مربعات لازم می‌آید. نشان دهید که با لگاریتم گیری می‌توان این کار را به تعیین يك خط مستقیم تبدیل کرد.

۱۳.۱۹ اشتغال مقادیر ویژه ماتریس

مقدار ویژه یا مقدار مشخصه (یا دیشه داکد) يك ماتریس مربعی n سطری (حقیقی یا مختلط) $A = (a_{jk})$ ، بنا به تعریف، عددی است مانند λ که به ازای آن معادله برداری

$$(1) \quad Ax = \lambda x$$

جوابی غیر بدهی، یعنی $x \neq 0$ ، داشته باشد؛ در این صورت x را آن بردار ویژه یا بردار مشخصه A که با مقدار ویژه λ متناظر است می‌نامند. مجموعه تمام مقادیر ویژه A را طیف A می‌نامند. مقادیر ویژه A ریشه‌های معادله مشخصه

$$(2) \quad D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

هستند، که در آن I ماتریس يکه n سطری است. $D(\lambda)$ دترمینان مشخصه نام دارد و می‌توان آن را با يك چند جمله‌ای درجه n بر حسب λ نمایش داد که چند جمله‌ای مشخصه متناظر با A نامیده می‌شود. نتیجه می‌گیریم که A حداقل يك و حداکثر n مقدار ویژه که عدداً متفاوت دارد است. تفصیل مطلب را می‌توانید در بخش ۱۳.۷ ببینید.

وقتی A را داریم می‌توانیم نخست ضرایب چند جمله‌ای مشخصه و بعد ریشه‌ها را، مثلاً باروش نیوتن، تعیین کنیم. ولی اگر n بزرگ باشد هر دو مرحله متضمن محاسبات وقتگیر بوده و عاقلانه آن است که روش کارتری را دنبال کنیم. اساساً دو دسته روش وجود دارد:

۱. روشهای به دست آوردن کرانهای مقادیر ویژه،

۲. روشهای محاسبه مقادیر تقریبی برای مقادیر ویژه.

در اینجا چند مثال متعارف از این دو دسته عرضه می‌شود. در مراجع $[C2]$ ، $[C3]$ ، $[C16]$ ، ضمیمه ۱ مثالهای بیشتری می‌توان یافت.

قضیه جالب زیر که توسط گرشگورین^۱ (Gershgorin) اثبات شده است ناحیه‌ای متشکل از قرصهای دایره‌ای بسته را می‌دهد که تمام مقادیر ویژه ماتریس داده شده را در بر دارد.

1. Bull.-Acad. Sciences de l'URSS, Classe mathém., 7-e série, Leningrad, 1931, p. 749.

قضیه ۱

فرض کنید λ يك مقدار ویژه ماتریس دلخواه مربعی n سطری $A = (a_{jk})$ باشد. در این صورت به ازای بعضی از مقادیر دست k ($1 \leq k \leq n$) داریم:

$$(۳) \quad |a_{kk} - \lambda| \leq |a_{k1}| + |a_{k2}| + \dots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \dots + |a_{kn}|.$$

اثبات. فرض کنید x یکی از بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه λ ی A باشد. در این صورت

$$(۴) \quad (A - \lambda I)x = 0 \quad \text{یا} \quad Ax = \lambda x$$

فرض کنید x_k مؤلفه‌ای از x باشد که بزرگترین قدرمطلق را دارد. در این صورت داریم $|x_m/x_k| \leq 1$ ($m = 1, \dots, n$). معادله برداری (۴) معادل است با دستگاهی متشکل از n معادله که هر کدام یکی از مؤلفه‌های بردارهای موجود در دو طرف (۴) را در بر می‌گیرند؛ k امین معادله از این n معادله عبارت است از

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{k,k-1}x_{k-1} + (a_{kk} - \lambda)x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{kn}x_n = 0$$

از روی این معادله داریم

$$a_{kk} - \lambda = -a_{k1} \frac{x_1}{x_k} - \dots - a_{k,k-1} \frac{x_{k-1}}{x_k} - a_{k,k+1} \frac{x_{k+1}}{x_k} - \dots - a_{kn} \frac{x_n}{x_k}$$

از دو طرف این معادله قدرمطلق گرفته نامساوی مثلثی را به کار می‌بریم:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

(در اینجا a و b اعداد مختلطند) و می‌بینیم که

$$\left| \frac{x_1}{x_k} \right| \leq 1, \dots, \left| \frac{x_n}{x_k} \right| \leq 1$$

و بنابراین (۳) به دست می‌آید و قضیه ثابت می‌شود. ▲

به ازای هر يك از مقادیر $k = 1, \dots, n$ نامساوی (۳) قرص دایره‌ای بسته‌ای را در صفحه مختلط λ مشخص می‌کند که مرکز آن a_{kk} است و شعاعش از عبارت سمت راست (۳) به دست می‌آید. بنا به قضیه ۱ هر يك از مقادیر ویژه A در یکی از این n قرص قرار می‌گیرد.

مثال ۱. کاربرد قضیه گرشگودین

از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که مقادیر ویژه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 26 & -2 & 2 \\ 2 & 21 & 4 \\ 4 & 2 & 28 \end{pmatrix}$$

درسه قرص زیر قرار دارند (شکل ۳۶۰):

$$D_1: \text{ به مرکز } 26, \text{ شعاع } 4 = 2 + 2$$

$$D_2: \text{ به مرکز } 21, \text{ شعاع } 6 = 2 + 4$$

$$D_3: \text{ به مرکز } 28, \text{ شعاع } 6 = 4 + 2$$

▲ (می توان نشان داد که مقادیر ویژه A عبارتند از ۳۰، ۲۵ و ۲۰).

کرانه‌های قدرمطلق مقادیر ویژه از قضیه زیر که از شورا (Schur) است و ما آن را بدون اثبات بیان می کنیم به دست می آید.

قضیه ۲

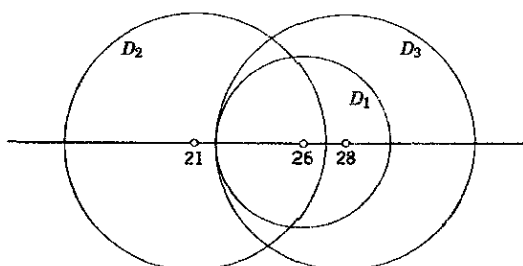
فرض کنید $A = (a_{jk})$ ماتریسی $(n \times n)$ باشد با مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. در این صورت

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2 \quad (\text{نامساوی شور})$$

در (۵) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر A طوری باشد که

$$(6) \quad A^T A = A A^T$$

ماتریسهایی که در (۶) صدق می کنند ماتریسهای نرمال نامیده می شوند. به آسانی می توان نشان داد که ماتریسهای هرمیتی، هرمیتی کج، و یکانی نرمال هستند و همین طور نرماتریسهای



شکل ۳۶۰. مثال ۱

متقارن حقیقی، متقارن کج و متعامد.

فرض کنید، در قضیه ۲، λ_m یکی از مقادیر ویژه ماتریس A باشد. در این صورت $|\lambda_m|^2$ از مجموع موجود درست چپ (۵) کمتر و یا با آن برابر است و اگر از (۵) جذر بگیریم به دست می آوریم

$$(۷) \quad |\lambda_m| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2}.$$

مثال ۲. کرانه‌های مقادیر ویژه‌ای که از نامساوی شور به دست آمده‌اند در مورد ماتریس A بی که در مثال ۱ داده شده، از (۷) به دست می آوریم

$$|\lambda| \leq \sqrt{1949} < 44.2.$$

(مقادیر ویژه A عبارتند از ۳۰، ۲۵ و ۲۰؛ بنابراین)

$$30^2 + 25^2 + 20^2 = 1925 < 1949$$

در واقع، A نرمال نیست.)

قضیه‌های فوق در مورد هر ماتریس مربعی مختلط یا حقیقی صادقند. قضیه‌های دیگری وجود دارند که فقط برای رده‌های خاصی از ماتریسها صادقند. قضیه زیر که از فروبنیوس (Frobenius) است یکی از این نوع قضایاست که ما در اینجا آن را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۳

فرض کنید A یک ماتریس مربعی حقیقی باشد که تمام عناصرش مثبتند. در این صورت A حداقل یک مقدار ویژه حقیقی مثبت λ دارد، در ضمن بردار ویژه متناظر با این مقدار ویژه را می‌توان حقیقی انتخاب کرد و به گونه‌ای که تمام مؤلفه‌هایش مثبت باشند. از این قضیه، کلاس ۲ نتیجه مهم زیر را به دست آورد.

قضیه ۴

فرض کنید $A = (a_{jk})$ ماتریس n سطری حقیقی باشد که تمام عناصرش مثبتند. x را برداری حقیقی بگیرد که مؤلفه‌های $x_1, \dots, x_n$ آن مثبتند و فرض کنید $y_1, \dots, y_n$ مؤلفه‌های بردار $y = Ax$ باشند. در این صورت فاصله بسته‌ای که روی محور حقیقی قرار دارد و با کوچکترین و بزرگترین مقدار از n خارج قسمت $q_j = y_j / x_j$ کراندار شده است حداقل

1. Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss. Math.-Phys. Klasse, Berlin, 1908, p. 471.
2. L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1949, p. 291.

يك مقدار ویژه A را دربرمی گیرد.

اثبات. $Ax = y$ یا

$$(۸) \quad y - Ax = 0$$

ترانهاده A^T در شرایط قضیه ۳ صدق می کند. از این رو A^T يك مقدار ویژه مثبت λ ، و متناظر با این مقدار ویژه، يك بردار u كه تمام مؤلفه های u_j ی آن مثبتند دارد. بنابراین $A^T u = \lambda u$ ، و با ترانهش به دست می آوریم $u^T A = \lambda u^T$. از اینجا و از (۸) نتیجه می گیریم

$$u^T(y - Ax) = u^T y - u^T Ax = u^T(y - \lambda x) = 0$$

یا

$$\sum_{j=1}^n u_j(y_j - \lambda x_j) = 0$$

از اینکه تمام مؤلفه های u مثبت هستند نتیجه می شود

$$y_j - \lambda x_j \geq 0 \text{ یعنی } q_j \geq \lambda \text{ به ازای حداقل يك } j,$$

(۹)

$$y_j - \lambda x_j \leq 0 \text{ یعنی } q_j \leq \lambda \text{ به ازای حداقل يك } j$$

از آنجا که A و A^T مقادیر ویژه یکسان دارند، λ یکی از مقادیر ویژه A است، و از (۹) حکم قضیه نتیجه می شود. $\blacktriangle$

مثال ۳. کرانهای مقادیر ویژه از قضیه کلاتس

فرض کنید

$$y = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ داریم } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ با انتخاب } A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

از این رو $q_1 = 10$ ، $q_2 = 8$ ، $q_3 = 8$ ، و قضیه ۴ ایجاب می کند که یکی از مقادیر ویژه A باید در فاصله $8 \leq \lambda \leq 10$ قرار گیرد. البته طول چنین فاصله ای به انتخاب x بستگی دارد. می توان نشان داد که $\lambda = 9$ مقدار ویژه A است.

مسائل بخش ۱۳.۱۹

با استفاده از قضیه ۱، قرصهایی را که مقادیر ویژه ماتریسهای زیر را دربرمی گیرند مشخص

کرده رسم کنید.

$$\begin{aligned} & ۱. \begin{pmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & -۳ \end{pmatrix} \quad ۲. \begin{pmatrix} ۵ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix} \quad ۳. \begin{pmatrix} ۱/\sqrt{۲} & i/\sqrt{۲} \\ -i/\sqrt{۲} & -۱/\sqrt{۲} \end{pmatrix} \\ & ۴. \begin{pmatrix} ۶ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۶ & ۳ \\ -۳ & ۳ & ۲ \end{pmatrix} \quad ۵. \begin{pmatrix} -۹ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۹ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۹ \end{pmatrix} \quad ۶. \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۳i \\ ۰ & ۲-i & ۱+i \\ ۱+۲i & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

با استفاده از (۷)، کران بالای قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریسهای زیر را به دست آورید.

۷. ماتریس مسئله ۱ ۸. ماتریس مسئله ۲ ۹. ماتریس مسئله ۴

۱۰. ماتریس مثال ۳ ۱۱. ماتریس مسئله ۵ ۱۲. ماتریس مسئله ۶

۱۳. قضیه ۳ را در مورد ماتریس مسئله ۲ تحقیق کنید.

قضیه ۴ را در مورد ماتریسهای زیر به کار ببرید، بردارهای داده شده را به عنوان x انتخاب کنید.

$$۱۴. \begin{pmatrix} ۱۷ & ۸ & ۱ \\ ۸ & ۱۸ & ۸ \\ ۱ & ۸ & ۱۷ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

$$۱۵. \begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

۱۶. (دترمینان غیر صفر) اگر در هر سطر دترمینان قدرمطلق عنصری که روی قطر اصلی قرار دارد از مجموع قدرمطلقهای بقیه عناصر آن سطر بزرگتر باشد نشان دهید که مقدار دترمینان غیر صفر است. از این موضوع در مورد حل پذیری دستگاههای معادلات خطی چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۷. (مجموعه اشتغال) مجموعه اشتغال ماتریس A ، مجموعه‌ای در صفحه مختلط است که حداقل یک مقدار ویژه A را دربرمی‌گیرد. در مورد ماتریسهای یکانی چه نوع مجموعه‌های اشتغالی را با ترکیب قضیه ۱ و قضیه ۳ بخش ۱۴.۷ به دست می‌آوریم؟

۱۸. نشان دهید که ماتریس مثال ۱ نرمال نیست.

۱۹. نشان دهید که ماتریس مثال ۳ دارای مقادیر ویژه ۹، ۶، ۳ است و (۵) با علامت تساوی در مورد آن صدق می کند.

۲۰. با استفاده از قضایای ۱ و ۳، بخش ۱۴.۷، نشان دهید که در مورد ماتریسهای یکانی نامساوی شور با علامت تساوی صدق می کند.

۱۴.۱۹ تعیین مقادیر ویژه با تکرار

روش متعارف محاسبه مقدار تقریبی مقادیر ویژه ماتریس مربعی n سطری $A = (a_{ij})$ روش تکرار درمورد مقادیر ویژه است. در این روش از برداری مانند $x_0 (\neq 0)$ که n مؤلفه دارد شروع کرده و متوالیاً مقادیر زیر را محاسبه می کنیم

$$x_2 = Ax_{1-1}, \dots, x_r = Ax_{r-1}, x_1 = Ax_0.$$

برای ساده کردن نماد گذاریها، x_{r-1} را با x و x_r را با y نشان می دهیم و بنابراین $y = Ax$. اگر A متقارن حقیقی باشد، قضیه زیر کرانه های خطا و تقریب را به ما می دهد.

قضیه ۱

فرض کنید A يك ماتریس متقارن n سطری باشد و $x (\neq 0)$ برداری حقیقی با n مؤلفه. همچنین فرض کنید

$$m_r = y^T y, m_1 = x^T y, m_0 = x^T x, y = Ax$$

دراین صورت خارج قسمت

$$q = \frac{m_1}{m_0} \quad (\text{خارج قسمت رابلی})$$

تقریبی برای مقدار λ ی A است^۲، و اگر قرار دهیم $q = \lambda + \varepsilon$ ، که درآن ε خطای q است، آنگاه

$$|\varepsilon| \leq \sqrt{\frac{m_r}{m_0} - q^2}. \quad (1)$$

اثبات. در (۱)، عبارت زیر رادیکال را با δ^2 نشان دهید. دراین صورت، چون $m_1 = qm_0$

۱. لرد رابلی (جان ویلیام استرات) (Lord Rayleigh (John William Strutt) (۱۸۴۲-۱۹۱۹)، فیزیکدان و ریاضیدان انگلیسی که در رشته های مختلف ریاضیات کاربردی و فیزیک نظری مخصوصاً در نظریه امواج، کشسانی و ژئودینامیک نقش مهمی ایفا کرده است.

۲. معمولاً این همان λ یی است که بزرگترین قدر مطلق را دارد اما حکم کلی نمی توان صادر کرد.

داریم

$$(۲) \quad (y - q\mathbf{x})^T (y - q\mathbf{x}) = m_y - 2qm_1 + q^2 m_0 = m_y - q^2 m_0 = \delta^2 m_0.$$

چون $\mathbf{A}$ متقارن حقیقی است، مجموعه متعامدی از n بردار ویژه یکه حقیقی $z_1, \dots, z_n$ که به ترتیب با مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (که بعضی از آنها ممکن است با هم برابر باشند) متناظرند دارد. (اثبات در مرجع [C۱۴] داده شده است.) در این صورت $\mathbf{x}$ را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\mathbf{x} = a_1 z_1 + \dots + a_n z_n$$

اما $Az_1 = \lambda_1 z_1$ ، و به همین ترتیب. بنابراین به دست می آوریم

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = a_1 \lambda_1 z_1 + \dots + a_n \lambda_n z_n$$

و چون z_j ها بردارهای یکه متعامدند،

$$(۳) \quad m_0 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = a_1^2 + \dots + a_n^2.$$

نتیجه اینکه در (۲)،

$$y - q\mathbf{x} = a_1(\lambda_1 - q)z_1 + \dots + a_n(\lambda_n - q)z_n.$$

چون z_j ها بردارهای یکه متعامدند، از (۲) به دست می آوریم

$$\delta^2 m_0 = a_1^2 (\lambda_1 - q)^2 + \dots + a_n^2 (\lambda_n - q)^2$$

با قرار دادن کوچکترین این جملات به جای $(\lambda_j - q)^2$ و با استفاده از (۳) داریم

$$\delta^2 m_0 \geq (\lambda_c - q)^2 (a_1^2 + \dots + a_n^2) = (\lambda_c - q)^2 m_0.$$

که در آن λ_c نزدیکترین مقدار ویژه به q است. از اینجا (۱) نتیجه می شود و قضیه به اثبات می رسد. ▲

مثال ۰۶. کاربردی از قضیه ۱

همانند مثال ۳ ی بخش قبل ماتریس متقارن حقیقی

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ را در نظر گرفته و انتخاب می کنیم } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

در این صورت متوالیاً به دست می آوریم

$$X_p = \begin{pmatrix} 8316 \\ 4806 \\ 4806 \end{pmatrix}, X_r = \begin{pmatrix} 900 \\ 558 \\ 558 \end{pmatrix}, X_q = \begin{pmatrix} 96 \\ 66 \\ 66 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

با فرض $y = X_p$ و $X = X_p$ داریم

$$m_r = y^T y = 115351128, m_1 = x^T y = 128477896, m_o = x^T x = 1432728$$

و از اینجا مقادیر زیر محاسبه می‌شوند:

$$|\varepsilon| \leq \sqrt{\frac{m_r}{m_o} - q^2} = 0.311, q = \frac{m_1}{m_o} = 8.967$$

این نشان می‌دهد که $q = 8.967$ مقدار تقریبی مقدار ویژه‌ای است که باید بین ۸.۶۵۶ و ۹.۲۷۸ قرار گیرد. دانشجو می‌تواند نشان دهد که $\lambda = 9$ یک مقدار ویژه است.

مسائل بخش ۱۳-۱۹

۱. فرض کنید

$$X_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{و انتخاب کنید}$$

X_1, X_2, X_3 و X_p را محاسبه کنید. به جای X ، به جای y ، و به جای X_p قرار دهید. نشان دهید که انحراف q از ۵ (مقدار دقیق بزرگترین مقدار ویژه A) تقریباً ۱۷٪ است. از (۱) برای q کران خطایی پیدا کنید.

A ماتریس داده شده در مسئله ۱ باشد. X_1, X_2, X_3 متناظر با آن، و کران خطایی را با انتخابهای زیر محاسبه کنید.

$$X_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ۲. \quad X_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ۳. \quad X_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

۵. نشان دهید که مقادیر ویژه ماتریس A ، در مسئله ۱، عبارتند از ۵، ۳، ۵، و مقدار ویژه‌ای را که با نتایج مسائل ۲-۴ تقریب زده می‌شود مشخص کنید.

X_o را برداری ستونی با مؤلفه‌های ۱، ۱، ۱، ۱ انتخاب کنید، X_1, X_2 و تقریبهای

برای $q = \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 / \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1$ ، $q = \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_0 / \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0$ و کسرانهای خطای مناظرشان را برای یکی از مقادیر ویژه هر یک از ماتریسهای متقارن زیر حساب کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ۷.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad ۹.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad ۸.$$

۹. با استفاده از $\mathbf{x}_0^T = (3 \ 1 \ 2)$ و با به کار بردن تکرار درمورد

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

نشان دهید که $A^2 \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ و نتایج را مورد بحث قرار دهید.

۱۰. آیا می‌توان (۱) را درمورد ماتریس مسئله ۹ به کار برد؟

۱۱. نشان دهید که در (۱) اگر $\mathbf{x}$ یکی از بردارهای ویژه باشد، آنگاه $\varepsilon = 0$.

۱۲. برای پی بردن به اهمیت کران خطای (۱)، ماتریس

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{را در نظر گرفته و فرض کنید}$$

نشان دهید که به ازای تمام ε ها داریم $q = 0$. مقادیر ویژه را بیابید و آنچه را که اتفاق می‌افتد تشریح کنید. با انتخاب $\mathbf{x}_0$ دیگری این کار را تکرار کنید.

۱۳. برای درک اینکه چرا خارج قسمت رابلی q عموماً تقریبی برای مقدار ویژه λ_1 است که بیشترین قدرمطلق را دارد فرض کنید

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{z}_1 + \dots + c_n \mathbf{z}_n$$

(که $z_1, \dots, z_n$ همانند آنچه در اثبات قضیه ۱ گفته شد هستند) و نشان دهید که

$$x = x_{n-1} = c_1 \lambda_1^{n-1} z_1 + \dots + c_n \lambda_n^{n-1} z_n$$

$$y = x_n = c_1 \lambda_1^n z_1 + \dots + c_n \lambda_n^n z_n$$

و بنابراین

$$q = \frac{m_1}{m_0} = \frac{c_1^2 \lambda_1^{2n-1} + \dots}{c_1^2 \lambda_1^{2n-2} + \dots} \approx \lambda_1.$$

تحت چه شرایطی این تقریب، تقریب خوبی است؟

۱۴. نشان دهید که در مثال ۱، ماتریس A دارای مقادیر ویژه $\lambda_1 = 9$ ، $\lambda_2 = 6$ ، $\lambda_3 = 3$ است. تکرار را برای $A - 4.5I$ به کار ببرید، از $x_0^T = (1 \ 1 \ 1)$ شروع کرده و در (۱)، $x = x_3$ و $y = x_4$ منظور کنید. نشان دهید $q = 4.4995$ و بنابراین تقریب λ_1 ، 8.9995 را با خطای $0.000393 \leq |e|$ تقریب می‌زند. آیا می‌توانید دلیل بهتر شدن نتیجه مثال ۱ را ذکر کنید؟ (برای بررسی تفصیلی چگونگی بهتر کردن روش تکرار، [GA] ضمیمه ۱ را ببینید.)

۱۵. فرض A متقارن بوده مقادیر ویژه اش $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n$ باشند و $|\lambda_1| > |\lambda_n|$ ، و اینکه α برآورد خوبی از λ_1 است. اگر با این مفروضات تکرار را در مورد $B = A - \alpha I$ به کار ببریم عموماً به تقریبهای λ_n می‌رسیم. چرا چنین است و در اینجا «عموماً» چه معنایی دارد؟ روش فوق را در مورد A در مثال ۱ به کار ببرید، فرض کنید $\alpha = 4.9$ (که همان جواب مسئله ۱ است) و $x_0^T = (1 \ 1 \ 1)$ و به جای x در (۱) قرار دهید x_1 و به جای y قرار دهید x_4 .

۱۵.۱۹ بسطهای مجانبی

بسطهای مجانبی سریهای (عموماً واگرا) هستند که در محاسبه مقادیر تابع $f(x)$ به ازای x های بزرگ از اهمیت عملی زیادی برخوردارند. واضح است که سری مک لودن $f(x)$ ، اگر به ازای مقادیر بزرگ x موجود و همگرا باشد، برای این منظور مناسب نیست زیرا تعداد جملات لازم برای بدست آوردن تعداد معینی از ارقام معنی دار با افزایش x سریعاً زیاد می‌شود. همین مطلب در مورد سری تیلوری به مرکز a و با $|x - a|$ ی بزرگ صادق است. خواهیم دید که هر قدر x بزرگتر باشد جملات کمتری از بسط مجانبی را برای بدست آوردن دقت مورد نظر لازم داریم. از طرف دیگر دقت محدود است و با کم شدن x کم می‌شود و بنابراین بسطهای مجانبی را فقط برای مقادیر بزرگ x می‌توان به کار برد. متغیرها و توابعی که در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرند حقیقی فرض می‌شوند.

سری

$$c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots \quad (c_0, c_1, \dots \text{ ثابتند})$$

(که لزومی ندارد به ازای تمام مقادیر x همگرا باشد) بسط مجانبی یا سری مجانبی تابع $f(x)$ که به ازای هر مقدار به اندازه کافی بزرگ x تعریف شده است نامیده می شود اگر به ازای هر مقدار مشخص $n=0, 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$(1) \quad x \rightarrow \infty \quad \text{وقتی که} \quad \left[f(x) - \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_n}{x^n} \right) \right] x^n \rightarrow 0$$

دراین صورت می نویسیم

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

اگر تابع $f(x)$ دارای بسط مجانبی باشد، آنگاه این بسط یکتاست، زیرا ضرایب $c_0, c_1, \dots$ آن به طور یکتا از (۱) تعیین می شود. در واقع از (۱) به دست می آوریم

$$c_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{یا} \quad f(x) - c_0 \rightarrow 0$$

(۱*)

$$c_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - c_0]x \quad \text{یا} \quad \left[f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x} \right] x \rightarrow 0$$

از طرف دیگر ممکن است توابع مختلف یک بسط مجانبی داشته باشند. مثلاً، فرض کنید $f(x) = e^{-x}$. در این صورت چون $e^{-x} \rightarrow 0$ ، $xe^{-x} \rightarrow 0$ و به همین ترتیب، از (۱*) معلوم است که $c_0 = 0$ ، $c_1 = 0$ و غیره. از این رو

$$e^{-x} \sim 0 + \frac{0}{x} + \dots$$

بنابراین اگر $g(x)$ دارای بسط مجانبی باشد در این صورت $g(x) + e^{-x}$ یقیناً همان بسط مجانبی را خواهد داشت.

از نظر کاربردی خوب است که به ترتیب زیر تعریف را توسعه دهیم:

$$f(x) \sim g(x) + h(x) \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots \right)$$

هر گاه مطابق تعریف قبل داشته باشیم

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

فقط در حالات نادری می توان ضرایب بسط مجانبی را مستقیماً از (*) حساب کرد. عموماً روشهای دیگری نظیر انتگرالگیری جزء به جزء متوالی مناسبترند.

مثال ۱. سری مجانبی تابع خطا

تابع خطای x ($\operatorname{erf} x$) با انتگرال (ر. ک. شکل ۲۰۶، ضمیمه ۳)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (۲ \text{ الف})$$

تعریف می شود و تابع مکمل آن با

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^\infty e^{-\tau} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau \quad (۲ \text{ ب})$$

که در آن $t^2 = \tau$ و $\operatorname{erf} \infty = 1$. با انتگرالگیری جزء به جزء مکرر به انتگرال زیر می رسم:

$$F_n(x) = \int_{x^2}^\infty e^{-\tau} \tau^{-(n+1)/2} d\tau, \quad n = 0, 1, \dots \quad (۳)$$

توجه داشته باشید که $\operatorname{erfc} x = F_0(x)/\sqrt{\pi}$. با انتگرالگیری جزء به جزء به دست می آوریم

$$F_n(x) = -e^{-\tau} \tau^{-(n+1)/2} \Big|_{x^2}^\infty - \frac{n+1}{2} \int_{x^2}^\infty e^{-\tau} \tau^{-(n+3)/2} d\tau.$$

انتگرال سمت راست عبارت است از $F_{n+1}(x)$ و بنابراین

$$e^{x^2} F_n(x) = \frac{1}{x^{2n+1}} - \frac{n+1}{2} e^{x^2} F_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

کاربرد مکرر این فرمول نتیجه می دهد

$$e^{x^2} F_0(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} e^{x^2} F_1(x)$$

.....

$$= \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \times 3}{2^2 x^5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \dots \times (2n-3)}{2^{n-1} x^{2n-1}} \right]$$

$$+ (-1)^n \frac{1 \times 3 \dots \times (2n-1)}{2^n} e^{x^2} F_n(x).$$

نشان می دهیم سری که بدین طریق به دست آمد يك بسط مجانبی است،

$$(۵) \quad e^{x^2} F_0(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \times 3}{2^2 x^5} - + \dots$$

فرض کنید S_{2n-1} عبارت داخل کروه در (۴) باشد. در این صورت از (۴) به دست می آوریم

$$(۶) \quad [e^{x^2} F_0(x) - S_{2n-1}] x^{2n-1} = K_n e^{x^2} x^{2n-1} F_n(x),$$

که در آن $K_n = (-2)^{-n} 1 \times 3 \dots \times (2n-1)$. باید نشان دهیم که به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ $F_n(x)$ مشخص عبارت سمت راست وقتی x به بینهایت میل کند به سمت صفر میل می کند. در (۳) داریم

$$\frac{1}{\tau^{(2n+1)/2}} \leq \frac{1}{x^{2n+1}} \quad \tau \geq x^2$$

از این رو نامساوی زیر به دست می آید:

$$(۷) \quad F_n(x) = \int_{x^2}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^{(2n+1)/2}} d\tau < \frac{1}{x^{2n+1}} \int_{x^2}^{\infty} e^{-\tau} d\tau = \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}}$$

از این معادله بلافاصله نتیجه می شود

$$|K_n| e^{x^2} x^{2n-1} F_n(x) < \frac{|K_n|}{x^2} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

بدین ترتیب اثبات می شود که سری (۵) یک بسط مجانبی تابع سمت چپ (۵) است. چون $\operatorname{erf} x = 1 - \operatorname{erfc} x = 1 - F_0(x)/\sqrt{\pi}$ نتیجه می شود که سری مجانبی تابع خطا عبارت است از

$$(۸) \quad \operatorname{erf} x \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \times 3}{2^2 x^5} - \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 x^7} + \dots \right).$$

به ازای مقادیر بزرگ x تقریب ساده زیر را داریم:

$$(۸^*) \quad \operatorname{erf} x \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi} x} e^{-x^2}$$

از (۶) و (۷) نتیجه می شود

$$|e^{x^2} F_0(x) S_{2n-1}| = \frac{1 \times 3 \dots \times (2n-1)}{2^n} e^{x^2} F_n(x) < \frac{1 \times 3 \dots \times (2n-1)}{2^n} \frac{1}{x^{2n+1}}$$

و به ازای x های به اندازه کافی بزرگ عبارت سمت راست خیلی کوچک است. از این رو به ازای چنین x هایی S_{2n-1} تقریب خیلی خوبی برای $e^{x^2} F_0(x)$ است، و بنابراین، به ازای

$$S_n(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_n}{x^n}$$

با ضرایب $c_0, \dots, c_n$ که در قضیه داده شده است.
عدد دلخواه مشخص n را انتخاب کرده و می نویسیم

$$s_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \quad \text{که در آن} \quad f(x) = s_n(x) + \frac{h(x)}{x^n}$$

پس

$$[f(x) - s_n(x)]x^n = h(x).$$

از این رابطه و از تعریف بسط مجانبی نتیجه می شود که وقتی x به سمت ∞ می رود $h(x)$ باید به سمت صفر میل کند. به همین ترتیب، اگر بنویسیم

$$s_n^*(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n} \quad \text{که در آن} \quad g(x) = s_n^*(x) + \frac{l(x)}{x^n}$$

در این صورت $l(x) \rightarrow 0$ وقتی که $x \rightarrow \infty$. با توجه به این روابط به دست می آوریم

$$fg = s_n s_n^* + \frac{h+l}{x^n} + \frac{hl}{x^{2n}}$$

با ضرب جمله به جمله و گردآوری توانهای مساوی x ، می توان تحقیق کرد که

$$s_n s_n^* = S_n + T_n$$

T_n مجموع جملاتی است که شامل توانهای $1/x^{n+1}, \dots, 1/x^{2n}$ هستند. واضح است که $x^n T_n \rightarrow 0$ وقتی که $x \rightarrow \infty$. حال در (۱۱) داریم

$$fg - S_n = T_n + \frac{h+l}{x^n} + \frac{hl}{x^{2n}}$$

هر دو طرف رابطه اخیر را در x^n ضرب می کنیم. در این صورت وقتی x به ∞ میل کند طرف راست رابطه جدید به سمت صفر میل می کند زیرا $x^n T_n \rightarrow 0$ ، $h \rightarrow 0$ و $l \rightarrow 0$. بنابراین عبارت سمت چپ (۱۱) به صفر میل می کند و بدین ترتیب اثبات کامل می شود. $\triangle$

قضیه ۲ (انتگرالگیری)

فرض کنید $f(x)$ به ازای تمام مقادیر به اندازه کافی بزرگ x پیوسته باشد و فرض کنید

$$f(x) \sim \frac{c_1}{x^1} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

در این صورت به ازای چنین x هایی داریم

$$(۱۲) \quad \int_x^\infty f(t) dt \sim \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{2x^2} + \frac{c_3}{3x^3} + \dots$$

اثبات. انتگرال (۱۲) را با $F(x)$ و انتگرال

$$s_n(x) = \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_n}{x^n}$$

را با $S_{n-1}(x)$ نشان دهید، یعنی

$$S_{n-1}(x) = \int_x^\infty s_n(t) dt = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{2x^2} + \dots + \frac{c_n}{(n-1)x^{n-1}}.$$

بنابراین تعریف بسط مجانبی، به ازای هر یک از مقادیر $n = 0, 1, \dots$ داریم

$$|f(x) - s_n(x)| x^n \rightarrow 0 \quad \text{وقتی که } x \rightarrow \infty.$$

به دلیل پیوستگی f ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض می توان یک x_0 یافت به گونه ای که به ازای هر $x > x_0$

$$|f(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x^n} \quad \text{یا} \quad |f(x) - s_n(x)| x^n < \varepsilon$$

از اینجا به ازای هر $x > x_0$ به دست می آوریم

$$\begin{aligned} |F(x) - S_{n-1}(x)| &= \left| \int_x^\infty f(t) dt - \int_x^\infty s_n(t) dt \right| = \left| \int_x^\infty [f(t) - s_n(t)] dt \right| \\ &\leq \int_x^\infty |f(t) - s_n(t)| dt < \varepsilon \int_x^\infty \frac{dt}{t^n} = \frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}}. \end{aligned}$$

با ضرب کردن طرفین این رابطه در مقدار مثبت x^{n-1} داریم

$$|F(x) - S_{n-1}(x)| x^{n-1} < \frac{\varepsilon}{n-1} \quad \text{وقتی که } x > x_0(\varepsilon)$$

چون $\varepsilon (> 0)$ را هر قدر که بخواهیم می توانیم کوچک انتخاب کنیم نتیجه می شود که

$$|F(x) - S_{n-1}(x)| x^{n-1} \rightarrow 0 \quad \text{وقتی که } x \rightarrow \infty$$

و بدین ترتیب اثبات کامل می شود.

اگر $f(x)$ به ازای تمام مقادیر به اندازه کافی بزرگ x پیوسته باشد و

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots,$$

آنگاه از قضیه ۲ نتیجه می گیریم که

$$(۱۲^*) \quad \int_x^\infty \left[f(t) - c_0 - \frac{c_1}{t} \right] dt \sim \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{2x^2} + \frac{c_4}{3x^3} + \dots$$

اگر $f(x)$ بسط مجانبی داشته باشد نمی توان نتیجه گرفت که مشتق $f'(x)$ بسط مجانبی دارد. مثلاً، از (۱^*) به دست می آوریم

$$f(x) = e^{-x} \sin(e^x) \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \dots$$

اما مشتق $f(x)$ که از فرمول زیر به دست می آید:

$$f'(x) = -e^{-x} \sin(e^x) + e^{-x} \cos(e^x) e^x = -f(x) + \cos(e^x)$$

دارای بسط مجانبی نیست. (چرا؟) با وجود این اگر مشتق $f'(x)$ تابع $f(x)$ دارای بسط مجانبی باشد با مشتق گیری جمله به جمله از $f(x)$ می توان آن را به دست آورد. در واقع قضیه زیر صادق است.

قضیه ۳ (مشتق گیری)

اگر

$$(۱۳) \quad f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

و $f(x)$ مشتقی پیوسته مانند $f'(x)$ که دارای بسط مجانبی است باشد، آنگاه این بسط عبارت است از

$$(۱۴) \quad f'(x) \sim -\frac{c_1}{x^2} - \frac{2c_2}{x^3} - \frac{3c_3}{x^4} - \dots$$

اثبات. بنا به فرض

$$(۱۵) \quad f'(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots$$

و باید نشان دهیم که ضرایب a_n طوری هستند که (۱۴) و (۱۵) را همانند می کنند. نخست نشان می دهیم که $a_0 = 0$ و $a_1 = 0$. از (۱۳) و تعریف بسط مجانبی داریم

$$(۱۶) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - c_0] = c_1 \quad (\text{ب}) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c_0 \quad (\text{الف})$$

برای سری مجانبی (۱۵) روابط متناظر عبارتند از

$$(۱۷) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f'(x) - a_0] = a_1 \quad (\text{ب}) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = a_0 \quad (\text{الف})$$

می‌توان f و f' را با فرمول زیر به هم مربوط کرد:

$$(۱۸) \quad f(x) = \int_{x_0}^x f'(t) dt + k \quad [x_0 (> 0) \text{ ثابت هستند}]$$

از این فرمول و (۱۶ الف) نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'(t) dt + k = c_0.$$

اما (۱۷ الف) نشان می‌دهد که اگر a_0 صفونی بود، حد انتگرال وجود نمی‌داشت. از این رو $a_0 = 0$. بنابراین (۱۷ ب) می‌شود

$$(۱۷ \text{ ب}^*) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x f'(x) = a_1$$

بنابراین تعریف این بدان معنی است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر x به اندازه کافی بزرگ داریم

$$(۱۹) \quad \frac{a_1 - \varepsilon}{x} < f'(x) < \frac{a_1 + \varepsilon}{x} \quad \text{یا} \quad a_1 - \varepsilon < x f'(x) < a_1 + \varepsilon$$

از (۱۶ ب) و (۱۸) به دست می‌آوریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_{x_0}^x f'(t) dt + k - c_0 \right) = c_1.$$

از (۱۹) معلوم می‌شود که به ازای $a_1 \neq 0$ این حد وجود ندارد. بنابراین $a_1 = 0$ و (۱۵) می‌شود

$$f'(x) \sim \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots$$

همچنین از (۱۸) قضیه ۲ به دست می‌آوریم

$$f(x) = \int_{x_0}^{\infty} f'(t) dt - \int_x^{\infty} f'(t) dt + k$$

(۲۰)

$$\sim \int_{x_0}^{\infty} f'(t) dt + k - \frac{a_2}{x} - \frac{a_3}{2x^2} - \dots$$

توجه کنید که اولین انتگرال سمت راست يك ثابت است. اگر تابع مفروضی دارای بسط مجانبی باشد، این بسط مجانبی یکتاست. بنابراین می‌توانیم جملات متناظر موجود در (۱۳) و (۲۰) را باهم مقایسه کرده دریاپیم که $a_1 = -c_1$ ، $a_2 = -2c_2$ ، و غیره. با این ضرایب سریهای (۱۴) و (۱۵) یکسانند و قضیه اثبات شده است. ▲

اگر بدانیم که تابع $f(x)$ در مفروضات قضیه ۳ صدق می‌کند و جوابی از يك معادله دیفرانسیل مرتبه اول است، آنگاه با قراردادادن (۱۳) و (۱۴) در معادله دیفرانسیل می‌توانیم ضرایب بسط مجانبی آن را معلوم کنیم.

مثال ۲. انتگرال نمایی

انتگرال نمایی $Ei(x)$ با فرمول زیر تعریف می‌شود

$$Ei(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

برای به دست آوردن بسط مجانبی $Ei(x)$ تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y = f(x) = e^* Ei(x) = e^* \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

بامشتق گیری می‌بینیم که $f(x)$ در معادله دیفرانسیل خطی

$$(21) \quad y' - y + \frac{1}{x} = 0$$

صدق می‌کند. می‌توان ثابت کرد که این معادله تنها دارای يك جواب y است به طوری که y و y' به ازای x های مثبت وجود داشته و يك بسط مجانبی داشته باشند. با قراردادادن (۱۳) و (۱۴) در (۲۱) و با صفر قرار دادن ضریب تمام توانهای x به دست می‌آوریم

$$-c_0 = 0, \quad -c_1 + 1 = 0, \quad -c_1 - 2c_2 = 0, \quad \dots, \quad -nc_n - c_{n+1} = 0, \dots,$$

یعنی،

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad \dots, \quad c_{n+1} = (-1)^n n!, \quad \dots$$

و بنابراین

$$(22) \quad Ei(x) = e^{-x} f(x) \sim e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots \right).$$

مسائل بخش ۱۵.۱۹

۱. نشان دهید که سری $1 + 1/x + 1/2!x^2 + \dots$ که به ازای $|x| > 0$ همگراست

و $e^{1/x}$ را نمایش می‌دهد] بسط مجانبی $e^{1/x}$ است.

$$۰۲ \quad \sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{3!x^3} + \frac{1}{5!x^5} - + \dots$$

با انتگرالگیری جزء به جزء بسط مجانبی را در هر مورد بیابید.

$$۰۳ \quad \text{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (\text{انتگرال کسینوس})$$

$$۰۴ \quad \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{انتگرال سینوس مکمل})$$

$$۰۵ \quad \text{c}(x) = \int_x^\infty \cos t^2 dt \quad (\text{انتگرال فرنل مکمل})$$

$$۰۶ \quad \text{s}(x) = \int_x^\infty \sin t^2 dt \quad (\text{انتگرال فرنل مکمل})$$

$$۰۷ \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\text{تابع گامای ناکامل})$$

با استفاده از نتایج مسائل ۴، ۵ و ۷، بسط مجانبی را در موارد زیر بیابید.

$$۰۸ \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{انتگرال سینوس}). \quad \text{از } \text{si}(0) = \frac{\pi}{2} \text{ استفاده کنید.}$$

$$۰۹ \quad \text{C}(x) = \int_0^x \cos t^2 dt \quad (\text{انتگرال فرنل}). \quad \text{از } \text{c}(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ استفاده کنید.}$$

$$۰۱۰ \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\text{تابع گامای ناکامل})$$

$$۰۱۱ \quad \text{با نشان دادن اینکه } y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \operatorname{erfc} x \text{ در } y' - 2xy + 1 = 0 \text{ صدق می‌کند}$$

بسط مجانبی $\operatorname{erf} x$ را به دست آورید.

۱. بعضی از فرمولهایی که در مورد این توابع و توابع مربوط به آنها به کار می‌روند در ضمیمه ۳ آمده‌اند. فرمولهای دیگر را می‌توان در مرجع [A۵] (ر. ک. ضمیمه ۱) و مراجع مربوط به جداول مقادیر عددی موجود در مرجع [A۶] یافت. هر چند اطلاق انتگرال کسینوس به انتگرالی که در مسئله ۳ دیدیم مرسوم است باید توجه کنیم که این انتگرال از ۰ تا x وجود ندارد. (چرا؟)

۱۲. بسط مجانبی $Q(1/2, x)$ را با اثبات اینکه $y = e^x \sqrt{x} Q(1/2, x)$ در $y' = (1/2x + 1)y - 1$ صدق می‌کند به دست آورید.

۱۳. بسط مجانبی $Q(\alpha, x)$ را از معادله دیفرانسیلی که برای $y = e^x x^{1-\alpha} Q(\alpha, x)$ نوشته می‌شود به دست آورید.

۱۴. نشان دهید که

$$\text{Ei}(x) = e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u+x} du$$

واز روی آن با بسط $1/(u+x)$ بر حسب توانهای $1/x$ و انتگرالگیری جمله به جمله، سری (۲۲) را به دست آورید.

۱۵. نشان دهید که $\text{Ei}(ix) = \text{Ci}(x) - i \text{Si}(x)$. سپس در (۲۲) به جای x قرار دهید ix و در دو طرف قسمتهای حقیقی و موهومی را از یکدیگر جدا کنید؛ نشان دهید که این کار به بسطهای مجانبی $\text{Ci}(x)$ و $\text{Si}(x)$ ، که در مسائل ۳ و ۴ به دست آمدند، منجر می‌شود.

احتمال و آمار

اهمیت آمار ریاضی در مهندسی، به ویژه در تولید انبوه و در تحلیل داده‌های تجربی رو به تزاید است. در این فصل موضوع را به اجمال بررسی می‌کنیم. مطلب را با نمایش جدولی و نموداری داده‌ها شروع می‌کنیم (بخشهای ۲۰۲۰ و ۳۰۲۰). سپس برخی مفاهیم و روابط بنیادی نظریه احتمال را که پایه آمار ریاضی است مورد بحث قرار می‌دهیم (بخشهای ۴۰۲۰ الی ۱۱۰۲۰). بقیه بخشهای این فصل (۱۲:۲۰ تا ۲۰۰۲۰) به برخی از مهمترین روشهای آماری اختصاص دارد.

پیشنیاز این فصل: حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی.
بخشهایی که در دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: ۱۷۰۲۰ الی ۲۰۰۲۰.
مراجع: ضمیمه ۱، قسمت H.
جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۰۲۰ طبیعت و هدف آمار ریاضی

در آمار مهندسی با روشهایی سروکار داریم که برای طرح تجربیات و بررسی نتایج آنها به منظور کسب اطلاعات در زمینه مسائل عملی به کار می‌روند، این مسائل معمولاً عبارتند از بررسی کیفیت مواد خام یا محصولات ساخته شده، مقایسه ماشینها و ابزارها یا روشهای مورد استفاده در تولید نتیجه کار کارگران، عکس العمل مصرف کننده در مقابل محصولات جدید، تأثیر شرایط مختلف در یک فرایند شیمیایی، رابطه بین مقدار آهن در سنگ آهن و چگالی سنگ آهن، کارآیی سیستمهای تهویه در دماهای مختلف، رابطه بین سختی را کولی

و مقدار کربن موجود در فولاد و غیره.

مثلاً در فرایند تولید انبوه (پیچ و مهره، لامپ الکتریکی، دگمه‌های ماشین تحریر و غیره) معمولاً هم کالای بی عیب، یعنی کالایی که دارای شرایط کیفی مورد نظر است داریم و هم کالای معیوب، یعنی کالایی که دارای شرایط کیفی مورد نظر نیست. این شرایط می‌توانند بیشترین و کمترین قطر میل‌های انتقال حرکت، حداقل طول عمر لامپهای الکتریکی، مقادیر حدی مقاومتهای مصرف شده در رادیو و تلویزیون، حداکثر وزن بسته‌های پستی، حداقل مقدار محتویات بطریهای پر شده به‌طور اتوماتیک، بیشترین زمان عکس‌العمل کلیدها و حداقل استحکام نخ بافتندگی باشند.

تفاوت در کیفیت محصولات به تغییر در عوامل متعددی مربوط است (مثلاً تغییر در مواد خام عملکرد ماشینهای اتوماتیک، مهارت کارگر و غیره) که میزان تأثیر آنها قابل پیش‌بینی نیست به‌طوری‌که تغییر را باید تغییر تصادفی در نظر گرفت. در مورد ارزیابی کارایی روشهای تولید و دیگر مثالهایی که ذکر شد وضع به همین منوال است.

در اکثر موارد بررسی همه نمونه‌های کالای تولید شده به قدری گران و وقت گیر است که مقرون به صرفه نیست و در صورتی که این عمل بررسی منجر به از بین رفتن خود جنس شود حتی این کار غیر ممکن است. از این رو به جای بررسی n محصولات یک کارخانه فقط تعداد کمی از آنها (یک «نمونه») را مورد بررسی قرار داده، از این بررسی نتایجی در مورد کل («جامعه») می‌گیرند. هرگاه از میان یک مجموعه ۱۰۰۰ پیچی ۱۰۰ عدد را جدا کرده مشاهده کنیم که ۵ عدد آنها معیوبند در آن صورت تمایل داریم نتیجه بگیریم که حدود ۵٪ پیچهای مجموعه معیوبند مشروط بر آنکه پیچها «به تصادف» انتخاب شوند، یعنی «شانس» انتخاب هر پیچ با هر پیچ دیگر برابر باشد. واضح است که این یک نتیجه گیری مطلقاً قطعی نیست، یعنی نمی‌توان گفت که دقیقاً ۵٪ کل پیچها معیوبند، اما در اکثر موارد به هیچ وجه چنین حکم دقیقی دارای اهمیت عملی خاصی نیست. همچنین به نظر می‌رسد که هر قدر انتخاب نمونه تصادفیتر باشد، نتیجه‌ای که می‌گیریم مطمئنتر است، خواهیم دید که به کمک نظریه احتمال ریاضی می‌توان مفاهیم شهودی مبهم را دقیق کرد. به علاوه، این نظریه معیارهایی برای سنجش قابلیت اطمینان نتایجی که توسط روشهای آماری از نمونه‌ها در مورد جامعه گرفته می‌شود به دست می‌دهد.

به همین نحو، برای به دست آوردن اطلاع در مورد μ ، مقدار آه‌ن موجود در سنگ آه‌ن، می‌توان n نمونه از سنگ آه‌ن را به‌طور تصادفی اختیار کرده و آه‌ن موجود در آنها را اندازه گرفت. این اندازه گیری یک نمونه n عددی $x_1, \dots, x_n$ (نتایج n اندازه گیری) به دست می‌دهد که میانگین آن $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ تقریبی برای μ است.

ممکن است مسائلی که طبیعتهای متفاوتی دارند نیاز به روشها و تکنیکهای متفاوت داشته باشند. اما مراحلی که از فرمولبندی کردن تار سیدن به جواب طی می‌کنیم تقریباً در تمام موارد یکسان است. این مراحل عبارتند از

۱. فرمولبندی مسئله. این اهمیت دارد که مسئله را به روشی دقیق فرمولبندی کرده جستجو برای حل مسئله را محدود کنیم، به طوری که با توجه به هزینه تحقیق آماری، مهارت جستجوگر، و وسایل موجود بتوان انتظار جواب خوبی را در فاصله زمانی معین داشت. این مرحله همچنین باید شامل خلق مدلی ریاضی بر مبنای مفاهیم روشن باشد. (مثلاً، باید منظور از کالای معیوب را در مسئله خاصی که با آن سروکار داریم روشن کنیم).
۲. طرح آزمایش. این مرحله شامل انتخاب روش آماری مورد استفاده در مرحله آخر، انتخاب حجم نمونه n (تعداد عناصری که باید استخراج و بررسی شوند یا تعداد آزمایشهایی که باید صورت گیرند و غیره)، و انتخاب روشهای فیزیکی و تکنیکهایی است که در آزمایش مورد استفاده قرار می گیرند، هدف نهایی به دست آوردن بیشترین اطلاعات با صرف حداقل هزینه و وقت است.
۳. آزمایش کردن یا گردآوری داده ها. این مرحله باید در چهارچوب قوانین دقیق و مشخصی تحقق پذیرد.
۴. جدول بندی. در این مرحله داده های آزمایشی را در جدولی ساده و روشن تنظیم می کنیم و آنها را به صورت دیاگرام، نمودار میله ای، و غیره نمایش می دهیم و اعدادی را هم که معرف حجم میانگین و پراکندگی نمونه هستند محاسبه می کنیم.
۵. استنباط آماری. در این مرحله با استفاده از نمونه، روش آماری مناسبی برای پی بردن به خواص نامعلوم جامعه به کار می بریم تا جواب مسئله را به دست آوریم.

۲.۲۰ نمایش جدولی و نموداری نمونه ها

معمولاً در آزمایشهای آماری رشته ای از مشاهدات (در بیشتر موارد به صورت اعداد) داریم، این مشاهدات را به ترتیبی که اتفاق می افتند می نویسیم. یک مثال نوعی در جدول ۱۰.۲۰ آمده است. داده های مندرج در این جدول با ساختن استوانه های آزمون استاندارد (به قطر ۱۵ و ارتفاع ۳۰ سانتیمتر) از بتون و اندازه گیری میزان شکندگی آنها بعد از ۲۸ روز حاصل شده اند. بنابراین نمونه ای مرکب از ۱۰۰ مقدار نمونه ای داریم، یعنی حجم نمونه برابر است با $n = 100$.

در این بخش چگونگی نمایش نمونه ها را به صورت جدولی و نموداری مناسب فراخواهیم گرفت. برای این منظور کافی است روشهای مربوطه را در مورد نمونه ذکر شده در جدول ۱۰.۲۰ مورد بحث قرار دهیم.

اکنون برای آنکه ببینیم جدول ۱۰.۲۰ چه اطلاعاتی دربر دارد، داده ها را مرتب می کنیم. در یک ستون ۳۰۰ (کوچکترین مقدار)، ۳۱۰، ۳۲۰، ...، ۴۴۰ (بزرگترین مقدار) را می نویسیم. سپس جدول ۱۰.۲۰ را سطر به سطر بررسی کرده و با مشاهده هر عدد،

مقابل آن درجدول يك خط نشان می گذاریم. بدین طریق يك جدول خط نشانی برای نمونه به دست می آید که مرکب از دو ستون اول جدول ۲۰۲۰ است. تعداد خط نشانها در ستون سوم جدول ۲۰۲۰ آمده است. هر عدد ذکر شده در ستون سوم نشان دهنده تعداد دفعاتی است که مقدار x در نمونه روی داده است و فراوانی مطلق یا به اختصار فراوانی مقدار x در نمونه نامیده می شود. با تقسیم این اعداد بر n ، حجم نمونه، فراوانی نسبی حاصل می شود که آن را در ستون چهارم می نویسیم. در جدول ۲۰۲۰، n را ۱۰۰ گرفته ایم؛ بنابراین $x = 330$ دارای فراوانی ۶ و فراوانی نسبی ۰۰۶ یا ۶٪ است.

اگر به ازای يك مقدار معین x همه فراوانیهای مربوط به مقادیر نمونه ای کوچکتر از x یا مساوی با x را جمع کنیم، فراوانی تجمعی نظیر x حاصل می شود. ستون پنجم جدول ۲۰۲۰ به این ترتیب به دست آمده است. مثلاً با $x = 350$ فراوانی تجمعی ۳۷ نظیر می شود، و این بدان معنی است که ۳۷ مقدار نمونه ای کوچکتر از، یا مساوی با ۳۵۰ هستند. با تقسیم فراوانی تجمعی بر n ، حجم نمونه، فراوانی نسبی تجمعی حاصل می شود که در ستون ۶ جدول ۲۰۲۰ آمده است. مثلاً با توجه به ستون ششم جدول ملاحظه می کنیم که ۷۶٪ مقادیر نمونه ای کوچکتر از یا مساوی با ۳۸۰ هستند.

روش خط نشان با خطا همراه بوده کنترل آن دشوار است. بهتر آن است که داده ها را روی کارتهای جداگانه نوشته، آنها را دسته بندی کرده تعداد کارتهای هر دسته را بشماریم این عمل را می توان با دست و با روشی کاملاً مکانیکی انجام داد.

جدول ۱۰۲۰

نمونه ۱۰۰ مقداری مقاومت کششی در مقابل شکندگی (lb/in^2) برای استوانه های بتونی

۳۲۰	۳۸۰	۳۴۰	۴۱۰	۳۸۰	۳۴۰	۳۶۰	۳۵۰	۳۲۰	۳۷۰
۳۵۰	۳۴۰	۳۵۰	۳۶۰	۳۷۰	۳۵۰	۳۸۰	۳۷۰	۳۰۰	۴۲۰
۳۷۰	۳۹۰	۳۹۰	۴۴۰	۳۳۰	۳۹۰	۳۳۰	۳۶۰	۴۰۰	۳۷۰
۳۲۰	۳۵۰	۳۶۰	۳۴۰	۳۴۰	۳۵۰	۳۵۰	۳۹۰	۳۸۰	۳۴۰
۴۰۰	۳۶۰	۳۵۰	۳۹۰	۴۰۰	۳۵۰	۳۶۰	۳۴۰	۳۷۰	۴۲۰
۴۲۰	۴۰۰	۳۵۰	۳۷۰	۳۳۰	۳۲۰	۳۹۰	۳۸۰	۴۰۰	۳۷۰
۳۹۰	۳۳۰	۳۶۰	۳۸۰	۳۵۰	۳۳۰	۳۶۰	۳۰۰	۳۶۰	۳۶۰
۳۶۰	۳۹۰	۳۵۰	۳۷۰	۳۷۰	۳۵۰	۳۹۰	۳۷۰	۳۷۰	۳۴۰
۳۷۰	۴۵۰	۳۶۰	۳۵۰	۳۸۰	۳۸۰	۳۶۰	۳۴۰	۳۳۰	۳۷۰
۳۴۰	۳۶۰	۳۹۰	۴۰۰	۳۷۰	۴۱۰	۳۶۰	۴۰۰	۳۴۰	۳۶۰

جدول ۲۰۲۰

جدول فراوانی نمونه ذکر شده در جدول ۱۰۲۰

۱	۲	۳	۴	۵	۶
مقاومت کششی $x(\text{lb/in}^2)$	فراوانی مطلق خط نشان	فراوانی نسبی	فراوانی نسبی تجمعی	فراوانی نسبی تجمعی	فراوانی نسبی تجمعی
۳۰۰		۲	۰.۰۵۲	۲	۰.۰۵۲
۳۱۰		۰	۰.۰۵۲	۲	۰.۰۵۲
۳۲۰		۴	۰.۰۵۴	۶	۰.۰۵۶
۳۳۰		۶	۰.۰۵۶	۱۲	۰.۰۱۲
۳۴۰		۱۱	۰.۰۱۱	۲۳	۰.۰۲۳
۳۵۰		۱۴	۰.۰۱۴	۳۷	۰.۰۳۷
۳۶۰		۱۶	۰.۰۱۶	۵۳	۰.۰۵۳
۳۷۰		۱۵	۰.۰۱۵	۶۸	۰.۰۶۸
۳۸۰		۸	۰.۰۰۸	۷۶	۰.۰۷۶
۳۹۰		۱۰	۰.۰۱۰	۸۶	۰.۰۸۶
۴۰۰		۸	۰.۰۰۸	۹۴	۰.۰۹۴
۴۱۰		۲	۰.۰۰۲	۹۶	۰.۰۹۶
۴۲۰		۳	۰.۰۰۳	۹۹	۰.۰۹۹
۴۳۰		۰	۰.۰۰۰	۹۹	۰.۰۹۹
۴۴۰		۱	۰.۰۰۱	۱۰۰	۱.۰۰۰

اگر يك مقدار عددی معين در نمونه‌ای روی ندهد، فراوانی آن صفر خواهد بود. هرگاه تمام n مقدار نمونه از نظر عددی مساوی باشند، آنگاه فراوانی این عدد n و فراوانی نسبی آن $n/n = ۱$ است. چون این دومورد حالت‌های فرین هستند، داریم

قضیه ۱ (فراوانی نسبی)

فراوانی نسبی حداقل برابر ۰ و حداکثر برابر ۱ است.
فرض می‌کنیم نمونه‌ای با حجم n دارای m مقدار عددی مختلف

$$x_1, x_2, \dots, x_m \quad (m \leq n)$$

با فراوانیهای نسبی

$$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_m$$

باشد. آنگاه می‌توان تابعی به صورت

$$(1) \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \tilde{f}_j & x = x_j \\ 0 & \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

به ازای هر مقدار x که متعلق به نمونه نباشد

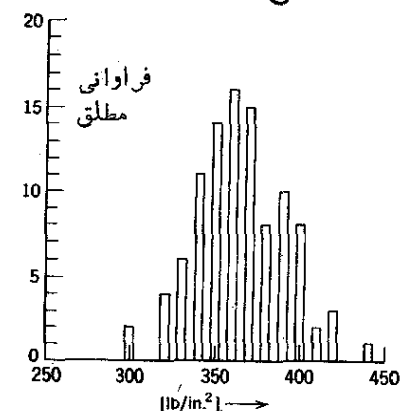
تعریف کرد. این تابع که تابع فراوانی نمونه نام دارد چگونگی توزیع مقادیر نمونه را نشان می‌دهد. بنا براین می‌گوییم که این تابع توزیع فراوانی نمونه را مشخص می‌کند.

مثلا، در جدول ۲.۲۰ مقادیر تابع فراوانی درستون ۴ نشان داده شده‌اند، و چنانکه مشاهده می‌شود $\tilde{f}(300) = 0.02$ ، $\tilde{f}(310) = 0$ ، $\tilde{f}(320) = 0.04$ و الی آخر. در نمونه‌ای به حجم n ، باید مجموع تمام فراوانیها برابر n باشد. (چرا؟) از

اینجا نتیجه می‌شود

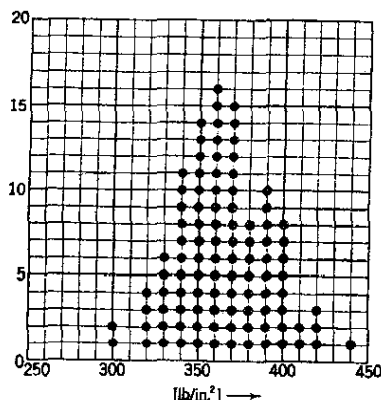
قضیه ۲ (مجموع فراوانیهای نسبی)

در هر نمونه مجموع تمام فراوانیهای نسبی برابر ۱ است، یعنی



شکل ۳۶۲. نمودار میله‌ای نمونه ذکر شده

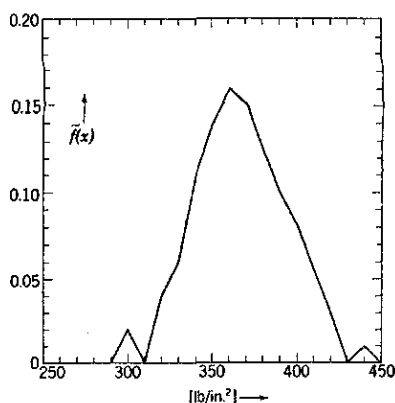
در جدول ۲.۲۰



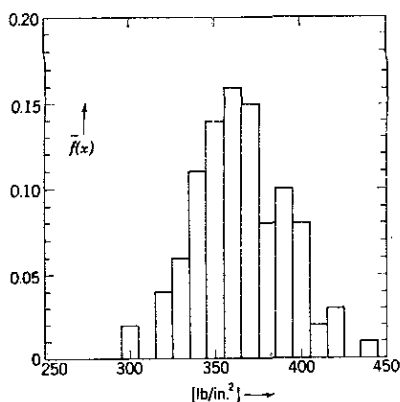
شکل ۳۶۱. نمودار فراوانی نقطه‌ای

نمونه ذکر شده در جدول ۲.۲۰

۱. از آن جهت که به کار برده‌ایم که نماد ساده‌تر f را برای نمایش تابع فراوانی لازم داریم. در این کتاب f بیشتر به کار خواهد رفت.



شکل ۳۶۴. چند ضلعی فراوانی نمونه ذکر شده در جدول ۲.۲۰



شکل ۳۶۳. بافت نیکار فراوانی نمونه ذکر شده در جدول ۲.۲۰

$$\sum_{j=1}^m \tilde{f}(x_j) = \tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_2) + \dots + \tilde{f}(x_m) = 1$$

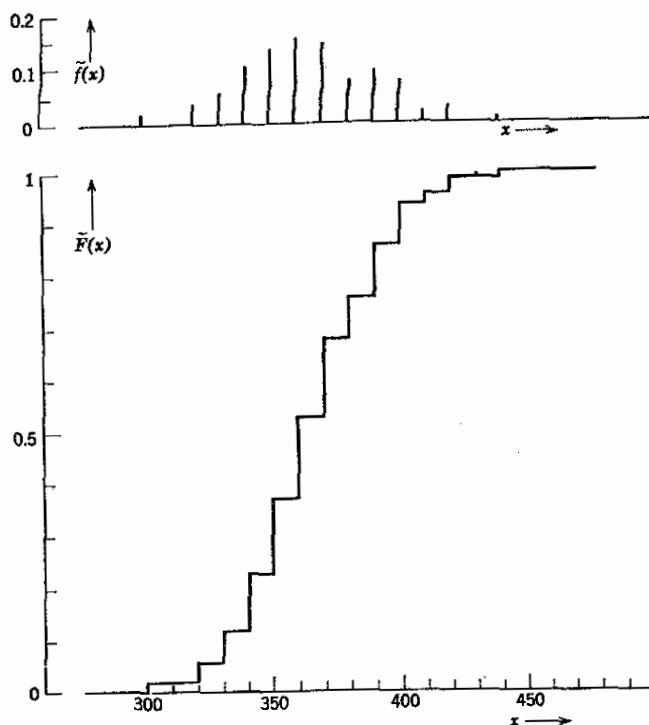
مثالی از نمایش نموداری نمونه‌ها را در شکل‌های ۳۶۱ تا ۳۶۴ می‌بینید. در شکل ۳۶۳ مساحت هر مستطیل برابر فراوانی نسبی متناظر با آن است. از این روی محور عرضها را برای نمایش «فراوانی نسبی برفاصله واحد» به کار می‌بریم. چون در این حالت مستطیلهای هم عرض هستند، مقادیر روی محور عرضها متناسب با $\tilde{f}(x)$ است و می‌توان این محور را بر حسب $\tilde{f}(x)$ مدرج کرد. در موردی که عرض مستطیلهای با هم برابر نباشند این مطلب درست نیست. در شکل ۳۶۴ نیز وضع به همین منوال است. اکنون تابع زیر را معرفی می‌کنیم:

$\tilde{F}(x)$ = مجموع فراوانیهای نسبی تمام مقادیری که کوچکتر از یا مساوی x هستند. این تابع را تابع فراوانی تجمعی نمونه یا تابع توزیع نمونه می‌نامند. در شکل ۳۶۵ مثالی از این تابع آورده‌ایم.

$\tilde{F}(x)$ يك تابع پله‌ای (تابع تکه‌ای ثابت) است که پرهایی به اندازه $\tilde{f}(x)$ در نقاطی که در آنها $\tilde{f}(x) \neq 0$ دارد. اولین پرش مربوط به کوچکترین مقدار و آخرین آن مربوط به بزرگترین مقدار نمونه است. پس از آن، $\tilde{F}(x) = 1$. رابطه بین $\tilde{f}(x)$ و $\tilde{F}(x)$ عبارت است از

$$(2) \quad \tilde{F}(x) = \sum_{t \leq x} \tilde{f}(t)$$

که در آن $x \leq t$ بدین معنی است که به ازای x باید مجموع تمام مقادیر $\tilde{f}(t)$ را که در آن t نایبتر از x است تشکیل دهیم.



شکل ۳۶۵. تابع فراوانی $\tilde{f}(x)$ و تابع فراوانی تجمعی $\tilde{F}(x)$ نمونه ذکر شده در جدول ۲۰۲۰

هرگاه نمونه‌ای شامل تعداد زیادی مقادیر نمونه‌ای مختلف باشد، آنگاه نمایشهای جدولی و نموداری آن پیچیده می‌شوند، بررسی چنین نمونه‌هایی را می‌توان با فرایند گروه‌بندی به شرح زیر ساده‌تر کرد.

برای یک نمونه مفروض، فاصله‌ای مانند I که شامل همه مقادیر نمونه‌ای است انتخاب می‌کنیم. I را به زیر فاصله‌هایی که فاصله رده‌ای نامیده می‌شوند تقسیم می‌کنیم. نقاط وسط این فاصله‌ها را نقاط میان رده‌ای یا نماینده رده می‌نامند. مقادیر نمونه‌ای در هر یک از این فاصله‌ها یک رده تشکیل می‌دهند. تعداد آنها فراوانی رده‌ای مربوطه نامیده می‌شود. از تقسیم فراوانی رده‌ای بر n ، حجم نمونه، فراوانی نسبی رده‌ای حاصل می‌شود. این فراوانی، وقتی به صورت تابعی مانند $\tilde{f}(x)$ از نماینده‌های رده‌ها مورد بررسی قرار گیرد تابع فراوانی نمونه‌گروه‌بندی شده نامیده می‌شود، و فراوانی نسبی رده‌ای تجمعی، تابعی مانند $\tilde{F}(x)$ از نماینده رده‌ها است. این تابع را تابع توزیع نمونه‌گروه‌بندی شده می‌نامند. مثالی در این مورد در جدول ۳۰۲۰ و ۴۰۲۰ ارائه شده است. هر قدر تعداد رده‌هایی که انتخاب می‌کنیم کمتر باشد، توزیع نمونه‌های گروه‌بندی شده ساده‌تر می‌شود اما در عوض اطلاعات بیشتری را ازدست می‌دهیم، زیرا مقادیر نمونه‌ای

اصلی دیگر به صورت صریح ظاهر نمی شوند. گروه بندی باید طوری انجام شود که فقط جزئیات غیر ضروری حذف شوند. برای اجتناب از پیچیدگیهای غیر ضروری در استفاده های بعدی از يك نمونه گروه بندی شده باید از قواعد زیر پیروی کرد.

۱. تمام فاصله های رده ای باید هم طول باشند.
۲. فاصله های رده ای باید طوری انتخاب شوند که نماینده های رده ها اعداد ساده ای باشند (اعدادی که رقمهای غیر صفرشان کم است).
۳. هر گاه مقدار نمونه ای x بر نقطه انتهایی مشترك دو فاصله رده ای منطبق باشد، آن را در رده ای قرار می دهیم که درست راستش قرار دارد

جدول ۳.۲۰

مقاومت های مربوط به ۵۰ عدل پنبه (نیروی لازم برای از هم گسستن کلاف بر حسب پوند)

۱۱۴	۱۱۸	۸۶	۱۰۷	۸۷	۹۴	۸۲	۸۱	۹۸	۸۴
۱۲۰	۱۲۶	۹۸	۸۹	۱۱۴	۸۳	۹۴	۱۰۶	۹۶	۱۱۱
۱۲۳	۱۱۰	۸۳	۱۱۸	۸۳	۹۶	۹۶	۷۴	۹۱	۸۱
۱۰۲	۱۰۷	۱۰۳	۸۰	۱۰۹	۷۱	۹۶	۹۱	۸۶	۱۲۹
۱۳۰	۱۰۴	۸۶	۱۲۱	۹۶	۹۶	۱۲۷	۹۴	۱۰۲	۸۷

جدول ۴.۲۰

جدول فراوانی نمونه ذکر شده در جدول ۳.۲۰ (گروه بندی شده)

فاصله رده ای	نماینده رده x	فراوانی مطلق خط نشانها	$\tilde{f}(x)$	$\tilde{F}(x)$
۶۵ — ۷۵	۷۰		۲	۰.۰۵۴
۷۵ — ۸۵	۸۰		۸	۰.۲۰
۸۵ — ۹۵	۹۰		۱۱	۰.۲۴۲
۹۵ — ۱۰۵	۱۰۰		۱۲	۰.۲۶۶
۱۰۵ — ۱۱۵	۱۱۰		۸	۰.۲۸۲
۱۱۵ — ۱۲۵	۱۲۰		۵	۰.۲۹۲
۱۲۵ — ۱۳۵	۱۳۰		۴	۰.۳۰۸
مجموع			۵۰	۱.۰۰۰

مسائل بخش ۲۰۲۰

درهر يك از مسائل زیرجدول فراوانی نمونه داده شده را تشکیل دهید و نمودار فراوانی نقطه‌ای، نمودارمیله‌ای و بافت نگارآن را رسم کنید.

۱. مقاومت [برحسب اهم]

۱۰۱	۹۹	۱۰۲	۱۰۰	۱۰۳	۹۸	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۰	۹۹
۱۰۰	۹۸	۱۰۱	۹۹	۱۰۲	۱۰۰	۱۰۱	۹۹	۱۰۰	۱۰۰

۲. اعدادی که درپرتاب تاس می‌آیند

۴	۳	۶	۵	۶	۱	۲	۳	۳	۴	۲	۱	۴	۲	۶

۳. زمان رسیدن به‌وضع عادی يك رله (برحسب ثانیه)

۱۲۳	۱۲۴	۱۲۱	۱۲۵	۱۲۴	۱۲۳	۱۲۲	۱۲۴	۱۲۵	۱۲۳
۱۲۲	۱۲۳	۱۲۵	۱۲۴	۱۲۴	۱۲۶	۱۲۳	۱۲۵	۱۲۱	۱۲۴

۴. مقدار کربن موجود [%] درذغال

۸۵	۷۷	۸۱	۸۶	۸۷	۸۶	۸۷	۸۵	۸۶	۸۷
۷۳	۸۲	۷۹	۸۳	۸۴	۸۲	۸۳	۸۳	۸۴	۸۶

۵. مقاومت کششی (کیلوگرم برمیلیمتر مربع) فولاد ورق

۴۶	۴۵	۴۴	۴۳	۴۳	۴۵	۴۲	۴۴	۴۳	۴۴	۴۴	۴۱	۴۱	۴۳	۴۴
۴۴	۴۴	۴۲	۴۵	۴۵	۴۳	۴۱	۴۶	۴۴	۴۳	۴۴	۴۴	۴۱	۴۵	۴۲

۶. مقدار «مازاد» یا «کسری ازصد» ورقه‌های کاغذ هر بسته درفرایند بسته‌بندی

۰	۱	۰	۲	۱	۱	۰	۰	—	۱	۰

۷. مقدار بنزین مصرف شده (برحسب لیتر) درفاصله معین توسط ۶ اتومبیل ازيك نوع

۱۵۲۰	۱۵۲۵	۱۵۲۰	۱۴۲۵	۱۵۲۵	۱۵۲۰

۸. وزن پاکتهای پرشده (برحسب گرم) دريك فرایند بسته‌بندی اتوماتيك

۲۰۱	۲۰۱	۲۰۰	۲۰۱	۱۹۸	۱۹۹	۲۰۳	۲۰۰

۹. زمان توقف (برحسب دقیقه، گرد شده) يك قطار درایستگاههای مختلف

۳	۵	۱	۳	۲	۲	۰	۱	۴	۳

۹۰. نمودار تابع فراوانی تجمعی نمونه ذکر شده در مسئله ۳ را رسم کنید.

۹۱. نمودار میله‌ای، بافت نگار، و چند ضلعی فراوانی نمونه گروه‌بندی شده جدول ۲۰۲ را بیابید.

۹۲. بافت نگار نمونه مربوط به طول عمر [بر حسب ساعت] لامپهای الکتریکی را که در جدول زیر آمده‌اند رسم کنید

فراوانی مطلق	طول عمر	فراوانی مطلق	طول عمر	فراوانی مطلق	طول عمر
۴	۹۵۰-۱۰۵۰	۵۱	۱۳۵۰-۱۴۵۰	۲۰	۱۷۵۰-۱۸۵۰
۹	۱۰۵۰-۱۱۵۰	۵۸	۱۴۵۰-۱۵۵۰	۹	۱۸۵۰-۱۹۵۰
۱۹	۱۱۵۰-۱۲۵۰	۵۳	۱۵۵۰-۱۶۵۰	۳	۱۹۵۰-۲۰۵۰
۳۶	۱۲۵۰-۱۳۵۰	۳۷	۱۶۵۰-۱۷۵۰	۱	۲۰۵۰-۲۱۵۰

۹۳. نمونه داده شده در جدول ۱۰۲۰ را گروه‌بندی کنید، با استفاده از فاصله‌های رده‌ای که نقاط میانی آنها ۳۰۰، ۳۲۰، ۳۴۰، ... هستند جدول فراوانی مربوطه را تشکیل دهید. بافت‌نگار را رسم کرده و آن را با شکل ۳۶۳ مقایسه کنید. تابع فراوانی تجمعی را رسم کنید.

۹۴. نمونه ارائه شده در جدول ۳۰۲ را، با استفاده از فاصله‌های رده‌ای که نقاط میانیشان ۷۵، ۸۵، ۹۵، ... هستند گروه‌بندی کنید. جدول فراوانی مربوطه را تشکیل دهید. بافت نگار را رسم کرده و با بافت نگار مسئله ۹۱ مقایسه کنید.

۹۵. در ۱۵۰۰ اندازه‌گیری، کوچکترین و بزرگترین عددهای به دست آمده به ترتیب ۱۰۸، ۱۱۹۹ سانتیمتر بوده‌اند. فاصله‌های رده مناسبی برای گروه‌بندی این داده‌ها پیشنهاد کنید.

۳۰۲۰ میانگین نمونه و واریانس نمونه

تابع فراوانی (یا تابع توزیع) جزئیات یک نمونه را مشخص می‌کند. با استفاده از این

تابع می‌توان معیارهایی، مانند اندازه متوسط مقادیر نمونه‌ای، «پراکندگی» «عدم تقارن» و غیره برای خواص معین نمونه محاسبه کرد. در این بخش مهمترین این معیارها یعنی دو کمیتی را که میانگین نمونه و واریانس نمونه نامیده می‌شوند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. مقدار میانگین نمونه $x_1, x_2, \dots, x_n$ یا اجمالاً میانگین نمونه، که با $\bar{x}$ نمایش داده می‌شود، چنین تعریف می‌شود:

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

این مقدار از تقسیم مجموع تمام مقادیر نمونه‌ای بر n ، حجم نمونه، حاصل می‌شود. واضح است که $\bar{x}$ معیاری است برای اندازه متوسط مقادیر نمونه‌ای و گاهی کلمه متوسط برای نامیدن آن مورد استفاده قرار می‌گیرد.

واریانس نمونه $x_1, \dots, x_n$ یا اجمالاً، واریانس نمونه، با s^2 نشان داده می‌شود و چنین تعریف می‌شود:

$$(2) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2].$$

این مقدار از تقسیم مجموع مربعات انحراف مقادیر نمونه‌ای از میانگین $\bar{x}$ ، بر $n-1$ حاصل می‌شود. واریانس پراکندگی یا پخش مقادیر نمونه‌ای را اندازه می‌گیرد و جز در حالت نادری که تمام مقادیر نمونه‌ای با هم برابرند (و بنابراین با $\bar{x}$ نیز برابر هستند) مثبت است. جذر مثبت s را انحراف معیار نمونه می‌نامند و با s نشان می‌دهند.

مثال ۰۱ میانگین نمونه و واریانس نمونه

ده میخ با طولهای (بر حسب سانتیمتر)

۰۰۸۰ ۰۰۸۱ ۰۰۸۱ ۰۰۸۲ ۰۰۸۱ ۰۰۸۲ ۰۰۸۰ ۰۰۸۲ ۰۰۸۱ ۰۰۸۱

به تصادف انتخاب شده‌اند. با توجه به (۱)، میانگین این نمونه عبارت است از

$$\bar{x} = \frac{1}{10} (0.080 + 0.081 + 0.081 + 0.082 + \dots + 0.081) = 0.0811 \text{ سانتیمتر}$$

با استفاده از (۲) دیده می‌شود که واریانس نمونه مزبور برابر است با

$$s^2 = \frac{1}{9} [(0.0800 - 0.0811)^2 + \dots + (0.0810 - 0.0811)^2] = 0.000054$$

سانتیمتر مربع

هر گاه مقادیر نمونه‌ای برابر را با هم در نظر بگیریم، این محاسبه ساده تر خواهد شد. آنگاه

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(2 \times 0.080 + 5 \times 0.081 + 3 \times 0.082) = 0.0811$$

درون پراکنش مجموع سه مقدار نمونه‌ای عدداً متفاوت $x_3 = 0.082$ ، $x_2 = 0.081$ ، $x_1 = 0.080$ را داریم، که هر یک در فراوانی مربوط به خود ضرب شده‌اند. همین طور

$$s^2 = \frac{1}{9} [2(0.0800 - 0.0811)^2 + 5(0.0810 - 0.0811)^2 + 3(0.0820 - 0.0811)^2] = 0.0000054.$$

این مثال چگونگی محاسبه $\bar{x}$ و s^2 با استفاده از تابع فراوانی $\tilde{f}(x)$ نمونه را تشریح می‌کند. هر گاه نمونه‌ای n مقداری درست شامل n مقدار عددی متفاوت

$$x_1, x_2, \dots, x_m \quad (m \leq n).$$

باشد. آنگاه فراوانیهای نسبی متناظر عبارتند از

$$\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2), \dots, \tilde{f}(x_m).$$

در نتیجه فراوانیهای مربوطه که در محاسبه مورد نیازند برابرند با

$$n\tilde{f}(x_1), n\tilde{f}(x_2), \dots, n\tilde{f}(x_m),$$

و (۱) و (۲) به صورت

$$(3) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m x_j n\tilde{f}(x_j)$$

و

$$(4) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2 n\tilde{f}(x_j)$$

درمی‌آیند. توجه کنید که در (۱) و (۲) جمع روی تمام مقادیر نمونه‌ای انجام می‌گیرد، و حال آنکه در اینجا جمع بر روی مقادیر عددی متفاوت نمونه صورت می‌پذیرد. فراوانیهای مطلق $nf(x_j)$ اعداد صحیح هستند، و حال آنکه فراوانیهای نسبی $\tilde{f}(x_j)$ ممکن است اعشاری باشند، مثلاً هر گاه $n = 23$ یا $n = 84$ و غیره باشد.

فرمولهای مربوط به s^2 در عمل به کار نمی‌روند زیرا $x_j - \bar{x}$ ها ممکن است از نظر قدر مطلق در مقایسه با مقادیر نمونه‌ای کوچک باشند، و این ممکن است سبب از بین رفتن ارقام معنی‌دار شود (در محاسبه با ماشینهای محاسبه ممکن است این ارقام ظاهر نشوند). حال می‌خواهیم برای s^2 فرمولی را به دست آوریم که در محاسبه مورد استفاده قرار می‌گیرد. با درج

$$(x_j - \bar{x})^2 = x_j^2 - 2x_j\bar{x} + \bar{x}^2$$

در (۲) و تبدیل آن به سه مجموع داریم

$$\sum (x_j - \bar{x})^2 = \sum x_j^2 - 2\bar{x} \sum x_j + \sum \bar{x}^2$$

مجموع آخر برابر $n\bar{x}^2$ است. با جایگزین کردن $\bar{x}$ از (۱) به دست می آوریم

$$n\bar{x}^2 = \frac{1}{n} (\sum x_j)^2, \quad -2\bar{x} \sum x_j = -\frac{2}{n} (\sum x_j)^2$$

از این دو عبارت به دست می آوریم

$$(5) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^n x_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right]$$

همین طور، (۴) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(6) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^m x_j^2 n f(x_j) - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m x_j n f(x_j) \right)^2 \right]$$

برای نمونه، در مثال ۱، مانند قبل، از (۳) و (۶) (ر. ک. جدول ۵.۲۰) مقادیر
و $\bar{x} = ۸۰۱۱/۱۰ = ۸۰۱.۱$

$$s^2 = \frac{1}{9} \left(۶۸۵۷۷۷ - \frac{۸۰۱۱^2}{۱۰} \right) = \frac{۰۰۰۰۰۴۹}{۹} = ۰۰۰۰۰۰۵۴$$

حاصل می شوند.

جدول ۵.۲۰

محاسبه میانگین و واریانس مثال ۱ با استفاده از (۳) و (۶)

x_j	$10\tilde{f}x_j$	$x_j 10\tilde{f}(x_j)$	x_j^2	$x_j^2 \times 10\tilde{f}(x_j)$
۰۰۸۰	۲	۱۶۰	۰۰۶۴۰۰	۱۲۸۰۰
۰۰۸۱	۵	۴۰۵	۰۰۶۵۶۱	۳۲۸۰۵
۰۰۸۲	۳	۲۴۶	۰۰۶۷۲۴	۲۰۱۷۲

مجموع ۸۰۱۱

۶۸۵۷۷۷

مسائل بخش ۳۰۲۰

۱. مطلوب است محاسبه میانگین و واریانس نمونه ذکر شده در مسئله ۲ بخش ۲۰۲۰.
۲. مطلوب است محاسبه میانگین و واریانس نمونه ذکر شده در مسئله ۲ بخش ۲۰۲۰.
۳. بافت نگار نمونه ۲، ۱، ۴، ۵ را رسم کنید و به کمک آن $\bar{x}$ و s^2 را حدس بزنید. سپس $\bar{x}$ ، s^2 ، و s را محاسبه کنید.
۴. نشان دهید که $\bar{x}$ بین کوچکترین و بزرگترین مقادیر نمونه‌ای قرار دارد.
۵. (برد نمونه) اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین مقادیر نمونه‌ها برد نمونه می‌نامند. مطلوب است برد نمونه مندرج در مثال ۱.
۶. (صدك، میانه) p امین صدك يك نمونه، عددی است مانند Q_p ، به طوری که لااقل $p\%$ مقادیر نمونه‌ای نایبتر از Q_p و همچنین لااقل $(100 - p)\%$ از مقادیر نمونه‌ای ناکمتر از Q_p باشند. هرگاه از این اعداد بیش از یکی وجود داشته باشد. (درچنین حالتی فاصله‌ای از نقاط داریم)، p امین صدك برابر میانگین این اعداد گرفته می‌شود (نقطه میانی فاصله). بخصوص، Q_{50} چارك میانی یا میانه نامیده شده با $\bar{x}$ نمایش داده می‌شود. مطلوب است $\bar{x}$ برای نمونه ذکر شده در جدول ۲۰۲۰.
۷. صدكهای Q_{25} و Q_{75} نمونه را چارکهای تحتانی و فوقانی نمونه می‌نامند، $Q_{75} - Q_{25}$ ، که معیاری برای پراکندگی است، بود میان چارکی نامیده می‌شود. مطلوب است Q_{25} ، Q_{75} ، $Q_{75} - Q_{25}$ برای نمونه‌ای که در جدول ۳۰۲۰ داده شده است.
۸. مسائل ۶ و ۷ را برای نمونه‌ای که در جدول ۳۰۲۰ داده شده است حل کنید.
۹. (مد) مد نمونه مقداری از نمونه است که بیشتر از سایر مقادیر در نمونه ظاهر می‌شود. مطلوب است میانگین، میانه، مد نمونه زیر. نتایج را تعبیر کنید.

مقدار موجودی شخصی			
۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰
۱۰۰	۹۰	۲۰	
فراوانی			

۱۰. (میدانکارآمد) هرگاه $x_j = x_j^* + c$ که در آن $j = 1, \dots, n$ و c ثابت دلخواهی باشد، نشان دهید

$$\bar{x} = c + \bar{x}^* \quad (\bar{x}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^*), \quad s^2 = s^{*2},$$

که در آن s^{*2} واریانس x_j^* ها است. (درعمل، c طوری انتخاب می‌شود که قدر

مطلق x_j^* ها کوچک باشد. از نقطه نظر هندسی این انتقال مبدأ است و روش مبدأ کارآمد نامیده می شود.

۱۱. روش مبدأ کارآمد را در مورد نمونه ذکر شده در مثال ۱ به کار ببرید.

۱۲. (کدگذاری کامل) هر گاه $x_j = c_1 x_j^* + c_j$ که در آن $j = 1, \dots, n$ و c_1 و c_j ثابت هستند، نشان دهید

$$\bar{x} = c_1 \bar{x}^* + c_j, \quad s^2 = c_1^2 s^{*2},$$

که در آن $\bar{x}^*$ و s^{*2} همان معانی مسئله ۱۰ را دارند. (این روش را روش کدگذاری کامل می نامند. واضح است که این روش در محاسبات غیرالکترونیکی، مثلاً برای کنترل سریع با ارزش است.)

۱۳. کدگذاری کامل را در مورد نمونه ذکر شده در مثال ۱ به کار ببرید.

۱۴. هر گاه نمونه ای گروه بندی شود، میانگین آن، در حالت کلی، تغییر نخواهد کرد. نشان دهید مقدار این تغییر از $l/2$ ، که در آن l طول فاصله های رده ای است، تجاوز نخواهد کرد.

۱۵. میانگین و واریانس نمونه گروه بندی نشده ذکر شده در جدول ۳.۲۰ (بخش ۲.۲۰) و نمونه گروه بندی شده در جدول ۴.۲۰ را محاسبه کرده و نتایج را مقایسه کنید.

۴.۲۰ آزمایش تصادفی، برآمد، پیشامد

آزمایشها یا مشاهدات آماری، نمونه هایی را که قصد داریم نتایج مربوط به جامعه را از آنها استخراج کنیم به دست می دهند. برای آنکه بتوانیم چنین کاری بکنیم نخست باید مدل های ریاضی جامعه را با استفاده از نظریه احتمال ریاضی توسعه دهیم. بنا بر این، نظریه احتمال یکی از مبانی مهم آمار ریاضی است و ما آن را تاحدی که نیازهایمان را برآورده کند بررسی خواهیم کرد. در این بخش برخی مفاهیم بنیادی را تعریف می کنیم. آزمایش تصادفی یا مشاهده تصادفی و یا اجمالاً آزمایش یا مشاهده فرایندی است که خواص زیر را دارد:

۱. طبق مجموعه قواعدی که انجام آزمایش را به طور کامل معین می کند صورت می پذیرد.

۲. هر قدر که بخواهیم می توانیم تکرارش کنیم.

۳. نتیجه هر اجرای آزمایش به «شانس» بستگی دارد (یعنی، تحت تأثیر عواملی است که از کنترل ما خارجند) و بنابراین به طوریکتا قابل پیش بینی نیست. نتیجه هر اجرای يك آزمایش برآمدن آن اجرا نامیده می شود.

مثالهایی که ارائه می‌شوند بازیهایی شانس هستند، چیزهایی از قبیل ریختن تاس و پرتاب سکه، یا آزمایشهای فنی مانند انتخاب تصادفی و بازرسی ۱۰۰ پیچ از جعبه‌ای محتوی ۱۰۰ پیچ، تعیین نتیجه يك فرايند شیمیایی تحت شرایط مختلف، یا آزمایشهای دیگری مثل انتخاب تصادفی ۲۰ نفر از يك گروه و تعیین فشارخون آنها یا عقیده‌شان در مورد يك فیلم سینمایی.

مجموعه تمام برآمدهای ممکن يك آزمایش، فضای نمونه آن آزمایش نامیده می‌شود و آن را با S نمایش می‌دهند. هر برآمد را يك عضو یا يك نقطه s می‌نامند. فضای نمونه را ممتد یا ناممتد می‌گویند، هرگاه به ترتیب مرکب از تعدادی ممتد یا ناممتد باشد.

مثلاً می‌توان با آزمایش تصادفی ریختن يك تاس، فضای نمونه

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مرکب از ۶ عدد در مقابل ۶ وجه تاس، را متناظر قرار داد.

در تولید صنعتی برای پی بردن به معیوب یا نامعیوب بودن کالا می‌توان کالا را به تصادف انتخاب کرد. در این صورت S مرکب از دو عضو D (معیوب) و N (نامعیوب) است، که می‌توان آنها را با عدد نیز نمایش داد، مثلاً ۰ (معیوب) و ۱ (نامعیوب). هرگاه بتوان بین انواع عیب تمایز قابل شده، فضای نمونه‌ای خواهیم داشت که بیش از دو نقطه دارد.

فضای نمونه آزمایش اندازه‌گیری استحکام پنبه (ر. ک. جدول ۳۰۲۰ بخش ۲۰۲۰) ناممتد است، زیرا برآمد می‌تواند هر عدد مثبتی از يك برد معین باشد.

در اغلب مسائل عملی خود برآمدها مورد نظر ما نیستند، بلکه می‌خواهیم بدانیم که يك برآمد به مجموعه معینی از برآمدها تعلق دارد (یا نه). واضح است که اگر A چنین مجموعه‌ای باشد، زیرمجموعه فضای نمونه S خواهد بود. این مجموعه يك پیشامد نامیده می‌شود.

از آنجا که هر برآمد زیر مجموعه‌ای از S است، هر برآمد يك پیشامد است، منتهی پیشامدی خاص، که گاه پیشامد مقدماتی نامیده می‌شود. به همین ترتیب S ، تمامی فضا، نیز پیشامد خاصی است.

مثال ۱

هرگاه ۲ و اشرا از يك مجموعه ۵ و اشری (که اعضای آن از ۱ تا ۵ شماره گذاری شده‌اند) برداریم، فضای نمونه مرکب از ۱۰ رویداد زیر خواهد بود

$$1, 2 \quad 1, 3 \quad 1, 4 \quad 1, 5 \quad 2, 3 \quad 2, 4 \quad 2, 5 \quad 3, 4 \quad 3, 5 \quad 4, 5$$

ولی امکان دارد تنها تعداد و اشراهای معیوبی که بیرون می‌کشیم مورد نظر ما باشد، در این صورت سه پیشامد خواهیم داشت:

A : هیچ واشری معیوب نباشد، B : ۱ واشر معیوب باشد، C : ۲ واشر معیوب باشد.

چنانچه فرض کنیم ۳ واشر مثلاً، ۱، ۲، ۳ معیوب باشند، آنگاه مشاهده می کنیم که

A اتفاق می افتد، هرگاه ۴، ۵ را برداریم

B اتفاق می افتد، هرگاه ۱، ۴؛ ۱، ۵؛ ۲، ۴؛ ۲، ۵؛ ۳، ۴ یا ۳، ۵ را برداریم

C اتفاق می افتد، هرگاه ۱، ۲؛ ۱، ۳؛ ۲، ۳ یا ۳، ۴ را برداریم. ▲

فضای نمونه S و پیشامدهای یک تجربه را می توان با ترسیم به وسیله نمودار ون به صورت زیر نمایش داد. فرض می کنیم که مجموعه نقاط داخل مستطیل شکل ۳۶۶ نمایش S باشد. آنگاه درون منحنی بسته ای که داخل مستطیل قرار دارد نمایش یک پیشامد است و ما آن را با E نشان می دهیم. مجموعه تمام عناصر برآمدهای غیر واقع در E را مکمل E در S نامیده و با E^c نشان می دهند.^۱

مثلاً، در آزمایش ریختن یک تاس، مکمل پیشامد

E : آوردن عدد زوج

عبارت است از

E^c : آوردن عدد فرد.

پیشامدی را که شامل هیچ عنصری نباشد پیشامد غیرممکن یا پیشامد تهی نامیده، با $\emptyset$ نمایش می دهند.

اگر A و B دو پیشامد دلخواه در یک تجربه باشند. آنگاه پیشامد مرکب از همه اعضای فضای نمونه S در A یا B ، یا هر دو را، اجتماع A و B نامیده و با

$$A \cup B$$

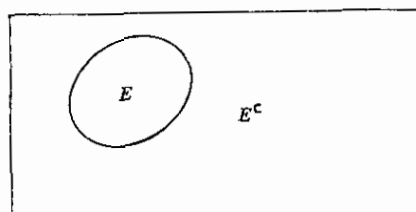
نشان می دهند، پیشامد مرکب از همه اعضای S که هم در A و هم در B باشند اشتراک A و B نامیده می شود و با

$$A \cap B$$

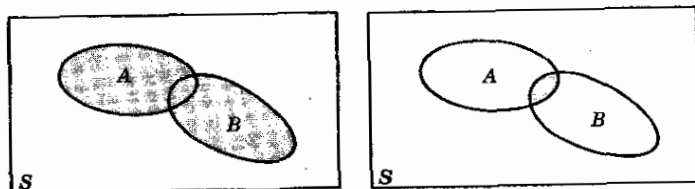
نمایش داده می شود. شکل ۳۶۷ چگونگی نمایش این دو پیشامد را به وسیله نمودار ون نشان می دهد. هرگاه A و B دارای عضو مشترکی نباشند، آنگاه $A \cap B = \emptyset$ ، و A و B را پیشامدهای دو به دو ناسازگار یا پیشامدهای جدا از هم می نامند.

برای نمونه، در مثال ۱، $B \cap C = \emptyset$ و $B \cup C$: ۱ یا ۲ واشر معیوب.

۱. یا با E نمایش می دهند، ولی ما نمی خواهیم از این نماد استفاده کنیم زیرا این نماد در نظریه مجموعه ها برای منظور دیگری به کار می رود (برای نشان دادن بستاریک مجموعه).



شکل ۳۶۶. نمودار ون نمایش دهنده فضای نمونه S و پیشامدهای E و E^c



اجتماع $A \cup B$

اشترك $A \cap B$

شکل ۳۶۷. نمودارهای ون نمایش دهنده دو پیشامد A و B در فضای نمونه S و اجتماع $A \cup B$ (هاشورخورده) و اشترك $A \cap B$ (هاشورخورده)

مثال ۲

در آزمایش تصادفی ریختن يك تاس ، پیشامدهای

A : عدد تاس کمتر از ۴ نباشد

B : عدد تاس بر ۳ بخشپذیر باشد

دارای اجتماع $A \cup B = \{۳, ۴, ۵, ۶\}$ و اشترك $A \cap B = \{۶\}$ هستند (شکل ۳۶۸). ▲

هر گاه تمام اعضای پیشامد A عضو مجموعه B باشند، آنگاه A زیر پیشامد B نامیده می شود، و چنین می نویسد:

$$B \supset A \quad \text{یا} \quad A \subset B$$

واضح است که، اگر $A \subset B$ ، آنگاه اگر B اتفاق بیفتد، A حتماً اتفاق می افتد. مثلاً، پیشامد $D = \{۴, ۶\}$ زیر پیشامد $E = \{۲, ۴, ۶\}$ ، این پیشامد که عدد تاس زوج باشد، است.

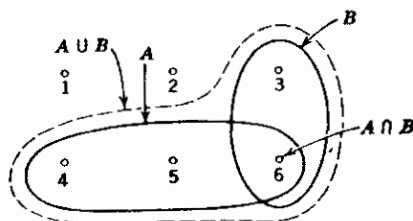
فرض می کنیم $A_1, \dots, A_m$ پیشامدهایی در فضای نمونه S باشند. در این صورت پیشامدی را که شامل تمام عناصری که عضویک یا چندتا از این m پیشامدها هست اجتماع $A_1, \dots, A_m$ نامیده و به صورت

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m, \quad \text{یا اجمالاً} \quad \bigcup_{j=1}^m A_j$$

می‌نویسند. پیشامدی را که شامل تمام عناصری که متعلق به همهٔ m پیشامدها باشند اشتراک $A_1, \dots, A_m$ نامیده و به صورت

$$\bigcap_{j=1}^m A_j \quad \text{یا اجمالا} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$$

می‌نویسند.



شکل ۳۶۸. نمودار ون مثال ۲

به صورت کلیتر، فرض می‌کنیم $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots$ تعدادی نامتناهی پیشامد در S باشند، آنگاه اجتماع

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{یا اجمالا} \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

پیشامدی تعریف می‌شود که شامل تمام عناصری است که لااقل به یکی از پیشامدها تعلق داشته باشند، و اشتراک

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{یا اجمالا} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots$$

پیشامدی تعریف می‌شود که شامل تمام عناصری است که متعلق به همهٔ پیشامدها باشند. هرگاه پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots$ طوری باشند که وقوع هر کدام از آنها مانع از وقوع هر یک از پیشامدهای دیگر در همان زمان گردد، آنگاه به ازای هر j و k داریم $A_j \cap A_k = \emptyset$ ، و چنین پیشامدهایی را پیشامدهای دو به دو ناسازگار یا پیشامدهای مجزا می‌نامند.

برای نمونه، پیشامدهای A, B, C در مثال ۱ دو به دو ناسازگار هستند. فرض می‌کنیم که یک تجربهٔ تصادفی n بار تکرار شود و نمونه‌ای مرکب از n مقدار بدست می‌آید. اگر A و B پیشامدهایی باشند که فراوانیهای نسبی آنها در n آزمایش به ترتیب $\tilde{f}(A)$ و $\tilde{f}(B)$ باشند، آنگاه پیشامد $A \cup B$ دارای فراوانی نسبی

$$(۱) \quad \tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B) - \tilde{f}(A \cap B)$$

است. هر گاه A و B دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه $f(A \cap B) = 0$ ، و

$$(۲) \quad f(A \cup B) = f(A) + f(B).$$

درستی این فرمولها، باتوجه به نمودار ون شکل ۳۶۷، واضح است؛ اثبات صورت آنها به خواننده واگذار می شود (مسئله ۵).

مسائل بخش ۴.۲۰

۱. مطلوب است فضای نمونه آزمایش تصادفی پرتاب دوسکه.
۲. در يك آزمایش، دو تاس را با هم می ریزیم. فضای نمونه این آزمایش را یافته و اعضای آن را بنویسید. بر روی این نمودار پیشامدهای زیر را مشخص کنید:

A : اعداد دوی دو تاس مساوی باشند.

B : مجموع از ۷ تجاوز کند.

C : مجموع برابر ۵ باشد.
۳. فضای نمونه آزمایش ثبت طول عمر سه قطعه الکترونیکی را تعریف کنید.
۴. در آزمایش حفر سوراخی در يك صفحه و اندازه گیری قطر آن، مطلوب است مکمل E : قطر سوراخ حداقل ۲٫۹ اینچ و حداکثر ۳٫۱ اینچ است.
۵. (۱) را ثابت کنید.
۶. جعبه ای محتوی ۲۰ خودنویس است که ۱۰ تا از آنها سالم، ۸ تا دارای عیب A ، ۵ تا دارای عیب B و ۳ تا دارای هر دو عیب هستند. يك خودنویس به تصادف برمی داریم. نمودار ون فضای نمونه S را که پیشامدهای E_A ، برداشتن خودنویسی که عیب A را دارد، E_B ، برداشتن خودنویسی که عیب B را دارد، $E_A \cap E_B$ ، $E_A \cup E_B$ ، $E_A^C \cap E_B^C$ ، $E_A^C \cup E_B^C$ ، $E_A \cap E_B^C$ و $E_A^C \cap E_B$ را نشان دهد رسم کنید. هر پیشامد چند عضو (برآمد) دارد؟
۷. نمودار ون هر يك از تساویهای زیر را رسم کرده و درستی آنها را تحقیق کنید

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
۸. (قوانین دمورگن) با استفاده از نمودار ون، درستی قوانین دمورگن را تحقیق کنید:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

۹. با توجه به تعریف مکمل، نشان دهید

$$(A^c)^c = A, S^c = \emptyset, \emptyset^c = S, A \cup A^c = S, A \cap A^c = \emptyset,$$

۱۰. با استفاده از نمودار ون نشان دهید $A \subset B$ ، اگر و تنها اگر $A \cup B = B$. برای $A \subset B$ شرطی بر حسب اشتراك $A \cap B$ بیابید.

۵.۲۰ احتمال

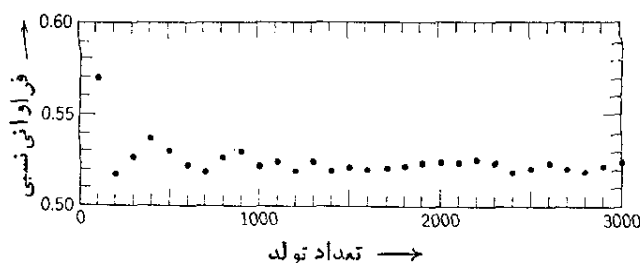
تجربه نشان می‌دهد که در اغلب آزمایشهای تصادفی نظم آماری یا پایداری فراوانیهای نسبی وجود دارد، یعنی، در دنباله‌های طولانی از چنین آزمایشهایی فراوانیهای نسبی متناظر بایک پیشامد اغلب باهم برابرند. مثالهای نوعی را در جدول ۶.۲۰ و شکل ۳۶۹ آورده‌ایم. در شکل ۳۶۹ دیده می‌شود که با افزایش تعداد تولدها نوسانات درصد پسران کمتر و کمتر می‌شود. درصد کالاهای معیوب که تحت شرایط نسبتاً ثابتی تولید شده باشند دارای رفتار مشابهی است، به آسانی می‌توان مثالهای دیگری نیز پیدا کرد. چون اغلب آزمایشهای تصادفی نظم آماری دارند، می‌توان ادعا کرد که در چنین آزمایشی به ازای هر پیشامد E عددی مانند $P(E)$ موجود است به طوری که فراوانی نسبی E در تعداد زیادی اجرای آزمایش تقریباً برابر $P(E)$ است.

جدول ۶.۲۰

پرتاب سکه

آزمایش به وسیله	تعداد دفعات پرتاب	تعداد شیرها	فراوانی نسبی شیرها
بوفون	۴۰۴۰	۲۰۴۸	۰٫۵۰۶۹
کی. پیرشن	۱۲۰۰۰	۶۰۱۹	۰٫۵۰۱۶
کی. پیرشن	۲۴۰۰۰	۱۲۰۱۲	۰٫۵۰۰۵

بدین جهت وجود عدد $P(E)$ را که احتمال پیشامد E در آزمایش تصادفی مورد نظر نامیده می‌شود می‌پذیریم. توجه کنید که این عدد يك خاصیت مطلق E نیست بلکه به فضای نمونه S ، یعنی به آزمایش تصادفی معین بستگی دارد.



شکل ۳۶۹. فراوانی نسبی پیشامد «تولد پسر»
(داده‌ها از گرتز (Graz) اتریش، ۱۹۶۲)

بنا بر این عبارت « E دارای احتمال $P(E)$ است» بدان معنی است که هرگاه آزمایش به دفعات زیاد تکرار شود، از نقطه نظر عملی می‌توان گفت که فراوانی نسبی $f(E)$ تقریباً برابر $P(E)$ است. (عبارت «تقریباً برابر» باید دقیقاً توضیح داده شود. این توضیح در بخش ۱۰.۲۰ آمده است.)

احتمالی که به این ترتیب معرفی می‌شود المثنای فراوانی نسبی است که از آزمایش به دست آمده، در نتیجه انتظار اینکه دارای خواص اساسی معینی از فراوانی نسبی باشد طبیعی است. این خواص را می‌توان از قضایای ۱ و ۲، بخش ۴.۲۰، و فرمول (۲)، بخش ۴.۲۰، نتیجه گرفت، و تحت عنوان اصول احتمال ریاضی به شرح زیر فرمولبندی کرد.

اصول احتمال ریاضی

۱. اگر E پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد، آنگاه

$$(۱) \quad 0 \leq P(E) \leq 1$$

۲. برای فضای نمونه تام S داریم

$$(۲) \quad P(S) = 1$$

۳. هرگاه A و B پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند (ر.ک. بخش ۴.۲۰)، آنگاه

$$(۳) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

اگر فضای نمونه نامتناهی باشد، به جای اصل ۳ داریم

۳*. هرگاه $E_1, E_2, \dots$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه

$$(۳^*) \quad P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots$$

از اصل موضوع ۳ با استقرا نتیجه می‌شود

قضیه ۱ (قانون جمع درمورد پیشامدهای دوه‌دو ناسازگار)

هرگاه $E_1, \dots, E_m$ پیشامدهای دوه‌دو ناسازگار باشند، آنگاه

$$(۴) \quad P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_m).$$

خواننده می‌تواند مشابه (۱)، بخش ۴.۲۰، را ثابت کند.

قضیه ۲ (قانون جمع درمورد پیشامدهای دلخواه)

هرگاه A و B پیشامدهای دلخواهی در فضای نمونه S باشند، آنگاه

$$(۵) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

به‌علاوه، پیشامد E و مکمل آن E^C (بخش ۴.۲۰) دوه‌دو ناسازگار هستند، و

$$E \cup E^C = S.$$

بنابراین با استفاده از اصول موضوعه ۳ و ۲ داریم

$$P(E \cup E^C) = P(E) + P(E^C) = 1$$

و از اینجا نتیجه می‌شود.

قضیه ۳ (قاعده مکمل‌گیری)

احتمال پیش‌آمد E و مکمل آن E^C در فضای نمونه S با فرمول زیر به هم مربوط می‌شوند

$$(۶) \quad P(E) = 1 - P(E^C)$$

این فرمول وقتی مورد استفاده قرار می‌گیرد که محاسبه $P(E^C)$ ساده‌تر از محاسبه

$P(E)$ باشد. کاربردی از فرمول (۶) در مثال ۲ آمده است.

چگونه می‌توان احتمالات مختلف را به پیشامدهای گوناگون در فضای نمونه S

نسبت داد؟

هرگاه S متناهی، مرکب از k عنصر، باشد و طبیعت آزمایش نشان دهد که این k

برآمد از نظر اتفاق افتادن مانند همد، آنگاه می‌توان به برآمدها احتمالات مساوی نسبت

داد، و بنا به اصل ۲ این احتمال باید برابر $1/k$ باشد. در این حالت محاسبه احتمالات

پیشامدها به شمارش عناصر تشکیل دهنده آنها برمی‌گردد.

مثال ۱. تاس سالم

یک تاس سالم، یعنی، تاس همگنی را که کاملاً مکعبی شکل است، یک بار می‌ریزیم. در این

آزمایش $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. بنابراین داریم $P(1) = 1/6$ ، $P(2) = 1/6$ ، $\dots$ ،

$P(6) = 1/6$. از اینجا و با توجه به قضیه ۱ می‌بینیم که مثلاً پیشامد

A : اینکه زوج بیاید

دارای احتمال $P(A) = P(۲) + P(۴) + P(۶) = ۱/۲$ است، پشامد

B : اینکه بیشتر از ۴ بیاید

دارای احتمال $P(B) = P(۵) + P(۶) = ۱/۳$ است، و الی آخر. فرمولهای مربوط به موارد پیچیده‌تر و مثالهای بیشتر در بخش بعدی ارائه خواهد شد.

مثال ۲. پرتاب سکه

پنج سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال پشامد A : آمدن لااقل یک شیر را بیابید. چون در پرتاب هر سکه ممکن است شیر یا خط بیاید، فضای نمونه دارای $۲^۵ = ۳۲$ عنصر خواهد بود. با فرض آنکه سکه‌ها سالم هستند، به هر برآمد می‌توان احتمال $۱/۳۲$ را نسبت داد. در این صورت پشامد A^C (هیچ شیری نیاید) تنها از یک برآمد تشکیل شده است. در نتیجه $P(A^C) = ۱/۳۲$ و جواب عبارت است از $P(A) = ۱ - P(A^C) = ۳۱/۳۲$.

هرگاه طبیعت آزمایش نشان ندهد که تعدادی متناهی برآمد از نظر اتفاق افتادن مثل هم هستند، یا اگر فضای نمونه متناهی نباشد، باید احتمالات را با استفاده از فراوانیهای نسبی مشاهده شده در دنباله‌های طولانی از آزمایشها طوری به دست آورد که در اصول احتمال صدق کنند.

بدین طریق تنها مقدار تقریبی به دست می‌آید، ولی این موضوع مهم نیست. در اینجا وضع شبیه فیزیک کلاسیک است، که در آن فرض می‌کنیم هر جسمی دارای جرم معینی است ولی نمی‌توانیم این جرم را با دقت تعیین کنیم. این موضوع مانعی در راه توسعه و تکمیل نظریه ایجاد نمی‌کند.

اگر شک داشته باشیم که احتمالات را به روشی صحیح معین کرده‌ایم یا نه، می‌توانیم یک آزمون آماری را که بعداً مورد بررسی قرار می‌گیرد (در بخش ۱۸.۲۵) به کار ببریم. اغلب اوقات لازم است احتمال پشامد B را با فرض آنکه پشامد A رخ داده است پیدا کنیم. این احتمال را احتمال شرطی B به فرض A نامیده با $P(B|A)$ نمایش می‌دهند. در این حالت A مانند یک فضای نمونه جدید (کاهش یافته) عمل می‌کند، و احتمال کسری از $P(A)$ است که با $A \cap B$ متناظر است. بنابراین

$$(۷) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad [P(A) \neq 0].$$

همین‌طور، احتمال شرطی A به فرض B عبارت است از

$$(۸) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad [P(B) \neq 0].$$

اگر از (۷) و (۸) : $P(A \cap B)$ را تعیین کنیم خواهیم داشت

قضیه ۴ (قاعده ضرب)

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه S باشند و $P(A) \neq 0$ و $P(B) \neq 0$ ، آنگاه

$$(9) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

اگر پیشامدهای A و B طوری باشند که

$$(10) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

آنگاه A و B را پیشامدهای مستقل نامند. با فرض $P(A) \neq 0$ ، $P(B) \neq 0$ ، با توجه به (۷) الی (۹) مشاهده می‌کنیم که در این حالت

$$P(B|A) = P(B) \quad , \quad P(A|B) = P(A)$$

یعنی احتمال A به اتفاق افتادن یا اتفاق نیفتادن B بستگی ندارد، و بالعکس. این توضیح اصطلاح فوق را توجیه می‌کند.

به همین نحو، m پیشامد $A_1, A_2, \dots, A_m$ مستقل نامیده می‌شوند هرگاه به ازای هر k پیشامد $A_1, A_2, \dots, A_k$ (که در آن $1 \leq k \leq m$) داشته باشیم

$$(11) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_k).$$

قبل از آوردن مثالی تشریحی، یادآوری می‌کنیم که برای انتخاب شیء از يك مجموعه مفروض اشیاء و به دست آوردن يك نمونه از آن دو راه وجود دارد، این کار نمونه‌گیری از جامعه نامیده می‌شود و به شرح زیر است:

۱. نمونه‌گیری با جایگذاری: در این نمونه‌گیری که به تصادف استخراج شده‌است به مجموعه داده شده برگردانده شده و با بقیه اشیاء به‌طور کامل مخلوط می‌شود. سپس شیء بعدی به تصادف استخراج می‌شود.

۲. نمونه‌گیری بدون جایگذاری: در این نمونه‌گیری شیء استخراج شده به مجموعه اشیاء برگردانده نمی‌شود.

مثال ۳. نمونه‌گیری با و بدون جایگذاری

جعبه‌ای محتوی ۱۰ پیچ است که سه تای آنها معیوبند. دو پیچ به تصادف استخراج می‌شود. احتمال این را که هیچ يك از دو پیچ معیوب نباشد بیابید. پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:

A : اولین پیچ استخراج شده نامعیوب باشد.

B : دومین پیچ استخراج شده نامعیوب باشد.

بدیهی است که $P(A) = \frac{7}{10}$ ، زیرا ۷ تا از ۱۰ پیچ سالم هستند و ما به تصادف نمونه می‌گیریم، یعنی احتمال استخراج همهٔ پیچها یکسان و برای هر پیچ $\frac{1}{10}$ است. اگر ما جایگذاری نمونه‌گیری کنیم، وضعیت قبل از استخراج دومین شیء مانند آغاز کار است و $P(B) = \frac{7}{10}$. پیشامدها مستقل هستند، و جواب عبارت است از

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.7 \times 0.7 = 0.49 = 49\%$$

اگر بدون جایگذاری نمونه‌گیری کنیم، آنگاه مانند قبل $P(A) = \frac{7}{10}$. هرگاه رخ داده باشد، آنگاه ۹ پیچ درجه‌ی باقی می‌ماند، ۳ تایی آنها معیوب هستند. بنابراین $P(B|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ، و از قضیهٔ (۲) نتیجه می‌شود

$$P(A \cap B) = \frac{7}{10} \times \frac{2}{3} \approx 47\%.$$

مسائل بخش ۵.۲۰

۱. ۵ سکهٔ سالم را پرتاب می‌کنیم، احتمال اینکه لا اقل يك شیر بیاید چقدر است؟
۲. ۳ تاس سالم را می‌ریزیم، احتمال اینکه از ۳ عدد حاصل حداقل ۲ عدد مختلف باشند بیاید.
۳. سه پیچ از ۱۰۰ پیچ که ۱۰ تایی آنها معیوبند به تصادف استخراج می‌شود. مطلوب است احتمال این پیشامد که هرسه پیچ سالم باشند، با فرض آنکه سه پیچ را، (الف) با جایگذاری استخراج کنیم، (ب) بدون جایگذاری استخراج کنیم.
۴. سه گلدان در نظر می‌گیریم که هر يك محتوی ۵ مهره که روی آنها از ۱ تا ۵ شماره گذاری شده هستند. مطلوب است احتمال اینکه مجموع شماره‌های مهره‌های استخراج شده بزرگتر از ۳ باشد.
۵. از ۱۰۰ میلهٔ آهنی ۲۵ تا بزرگتر از اندازهٔ مورد نظر و ۲۵ تا کوچکتر از اندازهٔ مورد نظر هستند، ۵۰ تایی بقیه اندازهٔ مورد نظر را دارند. هرگاه دو میله به تصادف بدون جایگذاری استخراج شوند، مطلوب است احتمال اینکه (الف) دوميله دارای اندازهٔ مورد نظر باشند، (ب) یکی از دوميله دارای اندازهٔ مورد نظر باشد، (ج) هیچک از میله‌ها دارای اندازهٔ مورد نظر نباشد، (د) هر دو میله کوچکتر از اندازهٔ مورد نظر باشند.
۶. طی يك فرایند طولانی تولید شمع اتومبیل، نسبت شمعی‌های معیوب در ۲٪ ثابت باقی مانده است. در هر نیم ساعت تنها دوتا از شمعی‌های تولید شده مورد بازرسی قرار می‌گیرد. احتمال آنکه (الف) هیچک از شمعی‌های معیوب نباشد، (ب) یکی از آنها معیوب باشد، (ج) هر دو معیوب باشند چقدر است؟ مجموع احتمالات (الف)، (ب)، (ج)

چقدر است؟

۷. موتوری يك ژنراتور الکتریکی را می گردانند. احتمال اینکه موتور طی ۳۰ روز نیاز به تعمیر پیدا کند ۵٪ و احتمال اینکه ژنراتور طی همین مدت نیاز به تعمیر پیدا کند ۶٪ است. احتمال اینکه طی يك دوره مقروض، کل دستگاه نیاز به تعمیر داشته باشد چقدر است؟

۸. يك دستگاه كنترل فشار اتوماتيك شامل ۶ لوله الكترونی است. تا وقتی همه لوله ها كار نکنند دستگاه كار نمی کند. هرگاه احتمال ازكار افتادن هر لوله بعد از يك فاصله زمانی ۵۵۰۰ باشد. احتمال ازكار افتادن دستگاه در این فاصله زمانی چیست؟

۹. جعبه ای محتوی ۱۰۰ و اشراست که از میان آنها ۱۰ و اشريعيب A ، ۵ و اشريعيب B و ۲ و اشهر دوعيب A و B را دارند. هرگاه و اشري که از جعبه استخراج می شود دارای عيب A باشد. مطلوب است احتمال آنکه این و اشردارای عيب B نیز باشد.

۱۰. مطلوب است احتمال آنکه در ریختن دو تاس سالم مجموع شماره های حاصل بیشتر از ۹ باشد، مشروط بر اینکه یکی از تاسها ۵ آمده باشد.

۱۱. با فرض آنکه $P(A^C) = 0.2$ ، $P(B) = 0.5$ و $P(A \cap B^C) = 0.4$ ، مطلوب است $P(B|A \cup B^C)$. (دانهایی. از نمودار ون استفاده کنید.)

۱۲. قضیه ۲ را ثابت کنید.

۱۳. قضیه ۱ را ثابت کنید.

۱۴. با تعمیم قضیه ۴، نشان دهید که

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B).$$

۱۵. هرگاه B زیر مجموعه A باشد، نشان دهید که $P(B) \leq P(A)$.

۶.۲۰ جایگشت و ترکیب

در بخش قبل آموختیم که برای فضای نمونه متناهی S که از k برآمد و هم شانس، تشکیل شده است، احتمال هر رویداد $1/k$ است، و احتمال پیشامد A با شمارش تعداد برآمدهای تشکیل دهنده A به دست می آید. بدیهی است که اگر این تعداد m باشد، آنگاه $P(A) = m/k$. فرمولهایی که ارائه خواهند شد اغلب برای شمارش رویدادها مفید واقع می شوند.

فرض می کنیم n چیز (عنصر یا شیء) داده شده باشند. می توانیم این چیزها را به ترقیبهای دلخواهی در يك ردیف قرار دهیم. هر يك از این ترقیها را يك جایگشت چیزهای

داده شده می نامند.

قضیه ۱ (جایگشت)

تعداد جایگشتهای n شیء متمایز، وقتی که همه آنها با هم در نظر گرفته شود برابر است با

$$(1) \quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \quad (\text{بخوانید «n فاکتوریل»})$$

در واقع، n امکان برای پر کردن مکان اول ردیف؛ و سپس $n-1$ امکان برای پر کردن مکان دوم، و قس علیهذا موجود است. به همین ترتیب به دست می آوریم

قضیه ۲ (جایگشت)

هرگاه n شیء مفروض را بتوان به C دسته طوری تقسیم کرد که اشیاء متعلق به هر دسته مثل هم باشند ولی اشیاء متعلق به دسته های متفاوت مختلف باشند، آنگاه تعداد جایگشتها وقتی که همه اشیاء با هم در نظر گرفته شوند، عبارت است از

$$(2) \quad \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_e!} \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_e = n)$$

که در آن n_j تعداد اشیاء دسته j ام است.

جایگشت n شیء وقتی که k به k در نظر گرفته شوند جایگشتی است که تنها شامل k شیء از n شیء مفروض می شود. اگر دو تا از این جایگشتها مرکب از k عنصر یکسان، با ترتیب متفاوت، باشند بنا به تعریف متمایز هستند. مثلاً e جایگشت مختلف از سه حرف a, b, c وقتی دو به دو در نظر گرفته شود به صورت ca, ba, bc, ac, ab وجود دارد. cb

جایگشت n شیء وقتی که k به k و با تکرار در نظر گرفته شوند به این حاصل می شود که هر شیء مفروض را در مکان اول قرار می دهیم، سپس هر شیء مفروض از جمله شینی را که قبلاً مورد استفاده قرار گرفته است در مکان دوم قرار می دهیم و این کار را آنقدر ادامه می دهیم تا k مکان پر شود. مثلاً $9 = 3^2$ جایگشت متمایز از سه حرف a, b, c وقتی که دو به دو و با تکرار در نظر گرفته شوند موجود است که از e جایگشت قبلی و 3 جایگشت cc, bb, aa تشکیل می شود. خواننده می تواند قضیه زیر را ثابت کند (ر. ک. مسئله ۹).

قضیه ۳ (جایگشت)

تعداد جایگشتهای متمایز بدون تکرار n شیء متمایز وقتی که k به k در نظر گرفته شوند عبارت است از

$$(۳الف) \quad n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

و با تکرار عبارت است از

$$(۳ب) \quad n^k.$$

در جایگشت نه تنها خود اشیاء مهم هستند، بلکه ترتیب آنها هم مهم است. يك تركيب از اشیاء مفروض انتخاب يك يا چند شیء بدون در نظر گرفتن ترتیب از میان آنها است. دو نوع تركيب به شرح زیر موجودند.

تعداد ترکیبهای n شیء مختلف، k به k و بدون تکرار عبارت است از تعداد مجموعه‌هایی که می‌توان از n شیء ساخت، به طوری که هر مجموعه شامل k شیء مختلف باشد و هیچ دو مجموعه‌ای دارای k عضو یکسان نباشند.

تعداد ترکیبهای n شیء متمایز، k به k و با تکرار، عبارت است از تعداد مجموعه‌هایی که می‌توان با انتخاب k شیء از میان n شیء مفروض ساخت، به طوری که هر شیء به تعداد دلخواه تکرار شود.

مثلاً، در انتخاب ۲ حرف از ۳ حرف a, b, c ، ۳ تركيب بدون تکرار، یعنی، ab, ac, bc ، و ۶ تركيب با تکرار یعنی، ab, ac, bc, aa, bb, cc موجود است.

قضیه ۴ (تركيب)

تعداد ترکیبهای مختلف n شیء متمایز، k به k و بدون تکرار، عبارت است از

$$(۴الف) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k}$$

و تعداد ترکیبهای با تکرار برابر است با

$$(۴ب) \quad \binom{n+k-1}{k}$$

حکم مربوط به (۴ الف) از قسمت اول قضیه ۳ نتیجه می‌شود، با توجه به آنکه $k!$ جایگشت برای k شیئی که از میان n شیء مفروض انتخاب می‌شوند وجود دارد تفاوتشان تنها در ترتیب قرار گرفتنشان است (ر. ک. قضیه ۱). ولی تنها يك تركيب از این k شیء از نوعی است که در حکم قضیه ۴ آمده است. حکم آخر قضیه ۴ را می‌توان بسا استقرا ثابت کرد (ر. ک. مسئله ۱۰).

مثال ۱. در مورد قضایای ۱ و ۲

هرگاه ۱۰ بیج مختلف که باید با ترتیب معینی برای سوار کردن يك محصول صنعتی به کار

روند درجه‌ای باشند و بخواهیم آنها را به تصادف از جعبه استخراج کنیم، P ، احتمال اینکه پیچها ترتیب مورد نظر را داشته باشند بسیار كوچك خواهد بود، در واقع (ر.ك. قضیه ۱)،

$$P = \frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800} \approx 0.0000003\%$$

هرگاه جعبه محتوی ۶ پیچ راستگرد مشابه و ۴ پیچ چپگرد مشابه باشد و نخست به ۶ پیچ راستگرد و سپس به ۴ پیچ چپگرد نیاز داشته باشیم، P ، احتمال اینکه استخراج تصادفی پیچها نتیجه دلخواه را بدهد عبارت است از (ر.ك. قضیه ۲)

$$P = \frac{6!4!}{10!} = \frac{1}{210} \approx 0.00476\%$$

مثال ۲. در مورد قضیه ۳

در تلگرافهایی که با کد نوشته می‌شوند، حروف را در گروههای ۵ تایی قرار داده هر گروه را يك کلمه می‌گویند. بنا به (۳ ب) نتیجه می‌گیریم که

$$26^5 = 11881336$$

تا از این کلمات وجود دارد. بنا به (۳ الف) نتیجه می‌شود که

$$\frac{26!}{(26-5)!} = 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7893600$$

تا از این کلمات وجود دارند که در آنها هر حرف حداکثر یک بار آمده است.

مثال ۳. در مورد قضیه ۴

تعداد نمونه‌های ۵ عضوی که می‌توان از يك دسته ۵۰۰ تایی لامپ روشنایی انتخاب کرد عبارت است از [ر.ك. (۴ الف)]

$$\binom{500}{5} = \frac{500!}{5!495!} = \frac{500 \times 499 \times 498 \times 497 \times 496}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 255244687600 \triangle$$

در اینجا مطالبی دربارهٔ تابع فاکتوریل می‌آوریم. با تعریف

$$(5) \quad 0! = 1$$

سایر مقادیر را می‌توان به کمک رابطه

$$(6) \quad (n+1)! = (n+1)n!$$

محاسبه کرد. به ازای مقادیر بزرگ n ، تابع فاکتوریل خیلی بزرگ است (د. ک. جدول A۴، ضمیمه ۴). یک تقریب مناسب برای n بزرگ فرمول استرلینگ^۱

$$(۷) \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (e = ۲.۷۱۸\dots),$$

است، که در آن، $\sim$ بدان معنی است که نسبت دوطرف وقتی n به سمت بینهایت میل کند به سمت ۱ میل می کند.

ضرایب دوجمله ای چنین تعریف می شوند:

$$(۸) \quad \binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-k+1)}{k!} \quad (k \geq 0 \text{ عدد صحیح})$$

صورت دارای k عامل است، به علاوه، تعریف می کنیم

$$(۹) \quad \binom{0}{0} = 1 \quad \text{خصوصاً} \quad \binom{a}{0} = 1$$

به ازای مقدار صحیح $a = n$ با توجه به (۸) به دست می آوریم

$$(۱۰) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (n \geq 0, 0 \leq k \leq n).$$

ضرایب دوجمله ای را می توان به طور بازگشتی محاسبه کرد، زیرا

$$(۱۱) \quad \binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1} \quad (k \geq 0, \text{ صحیح}).$$

از (۸) همین نتیجه می شود

$$(۱۲) \quad \binom{-m}{k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k} \quad (m > 0, \text{ صحیح}, k \geq 0).$$

روابط دیگری هم وجود دارند که ما دوتا از آنها را در اینجا می آوریم

$$(۱۳) \quad \sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} = \binom{n+k}{k+1} \quad (n \geq 1, k \geq 0 \text{ هر دو صحیح})$$

۱. جیمز استرلینگ (James Stirling) ، ۱۶۹۲-۱۷۷۰، ریاضیدان انگلیسی.

$$(۱۴) \quad \sum_{k=0}^r \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}.$$

مسائل بخش ۶.۲۰

۱. همه جایگشهای چهار رقم ۱، ۲، ۳، ۴ را وقتی که همه آنها بسا هم در نظر گرفته شوند بنویسید.
۲. همه جایگشهای پنج حرف a, e, i, o, u را وقتی که سه به سه در نظر گرفته شوند بنویسید.
۳. به چند طریق می توان از میان ۱۵ نفر يك کمیته سه نفری انتخاب کرد.
۴. چند پلاک مختلف که روی هر يك ۵ علامت، ۲ حرف و به دنبال آن ۳ عدد حك شده باشد می توان ساخت؟
۵. مطلوب است تعداد نمونه های ۳ عضوی که از يك مجموعه ۱۰۰ عضوی از اشیاء می توان انتخاب کرد.
۶. کیسه ای محتوی ۲ گلوله سیاه، ۳ گلوله سفید، ۴ گلوله قرمز است. يك گلوله به تصادف استخراج کرده و کنار می گذاریم. سپس گلوله دیگری استخراج می کنیم و این کار را ادامه می دهیم. مطلوب است احتمال آنکه نخست ۲ گلوله سیاه، سپس ۳ گلوله سفید، و در پایال گلوله های قرمز استخراج شوند.
۷. هر گاه ۶ شیشه جوهر مختلف داشته باشیم، به چند طریق می توانیم دورنگ و به چند طریق می توانیم چهار رنگ را برای نقاشی کردن انتخاب کنیم.
۸. در مجموعه ۱۰ نایبی کالایی، ۲ تا معیوب وجود دارد. (الف) مطلوب است تعداد نمونه های گوناگون ۴ عضوی. مطلوب است تعداد نمونه های ۴ عضوی شامل (ب) هیچ عضو معیوب، (ج) يك عضو معیوب، (د) ۲ عضو معیوب.
۹. قضیه ۳ را ثابت کنید.
۱۰. آخرین حکم قضیه ۴ را ثابت کنید. راهنمایی. از (۱۳) استفاده کنید.
۱۱. با استفاده از (۷)، مقادیر تقریبی ۴! و ۸! را محاسبه کرده و خطاهای مطلق و نسبی را تعیین کنید.
۱۲. برای تعداد معینی از اجناس مختلف که هر بار ۴ به ۴ و بدون تکرار در نظر گرفته می شوند، تعداد ترکیبات با تعداد جایگشتها چه رابطه ای دارد؟
۱۳. (۱۱) را از (۸) نتیجه بگیرید.

۱۴. (قضیه دو جمله‌ای) بنا به قضیه دو جمله‌ای

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

بنا بر این $a^k b^{n-k}$ دارای ضریب $\binom{n}{k}$ است. آیا می‌توانید این قضیه را از قضیه ۴ نتیجه بگیرید یا آنکه این شباهت صرفاً زائیده يك تصادف است؟

۱۵. با به کار بردن قضیه دو جمله‌ای (مسئله ۱۴) در مورد

$$(1+b)^p(1+b)^q = (1+b)^{p+q}$$

تساوی (۱۴) را ثابت کنید.

۷.۲۰ متغیرهای تصادفی. توزیعهای گسسته و پیوسته

اگر دو تاس را بر تاس کنیم، مجموع شماره‌های حاصل، X ، یکی از اعداد صحیح بین ۲ و ۱۲ خواهد بود، ولی نمی‌توان پیش‌بینی کرد که مقدار X در بر تاس بعدی چه خواهد شد، و می‌توان گفت که مقدار X به «شانس» بستگی دارد. به همین نحو، هرگاه بخواهیم ۵ پیچ را از تعداد زیادی پیچ استخراج کنیم و قطرهای آنها را اندازه بگیریم، نمی‌توانیم پیش‌بینی کنیم که چه تعدادی از آنها معیوب خواهند بود، معیوب به این معنی که فاقد شرایط لازم باشند؛ در نتیجه X ، تعداد پیچهای معیوب، مجدداً به «شانس» بستگی خواهند داشت. طول عمر X يك لامپ روشنایی که به تصادف از میان تعداد زیادی لامپ انتخاب می‌شود نیز به «شانس» بستگی دارد و همین طور است X ، محتوی يك بطری لیموناد که به تصادف از بین تعداد زیادی بطری که توسط ماشین پر شده‌اند انتخاب شده باشد.

به عبارت ساده، متغیر تصادفی X (متغیر استوکاستیک یا واریت) تابعی است که مقادیرش اعداد حقیقی هستند و به «شانس» وابسته‌اند؛ بدعبارت دقیقتر، متغیر تصادفی تابعی مانند X است که خواص زیر را دارد:

۱. X بر S ، فضای نمونه آزمایش، تعریف می‌شود، و مقادیرش اعداد حقیقی هستند.
۲. فرض می‌کنیم a عددی حقیقی و I فاصله دلخواه باشد. آنگاه مجموعه همه برآمدهای واقع در S که به ازای آنها $X=a$ ، دارای احتمالی خوش تعریف است، و همین حکم در مورد مجموعه همه برآمدهای واقع در S که به ازای آنها مقادیر X در I هستند نیز برقرار است. این احتمالات از اصول موضوعه بخش ۵.۲۰

تبعیت خواهند کرد.

اگر چه این تعریف کاملاً کلی است و توابع زیادی را شامل می‌شود، خواهیم دید که در عمل تعداد انواع مهم متغیرهای تصادفی و «توزیعهای احتمال» مربوط به آنها نسبتاً کم است.

هرگاه يك آزمایش تصادفی را انجام دهیم و پیشامد مربوط به عدد a روی دهد، آنگاه گوییم که در این اجرای آزمایش، X ، متغیر تصادفی متناظر با آزمایش مقدار a را اختیار می‌کند. همچنین گوییم که مقدار $X=a$ را مشاهده کرده‌ایم. به جای عبارت «پیشامد متناظر با عدد a »، اجمالاً می‌گوییم، «پیشامد $X=a$ ». احتمال مربوطه را با $P(X=a)$ نشان می‌دهیم. به همین نحو، احتمال پیشامد

X مقداری در فاصله $a < X < b$ اختیار می‌کند

را با $P(a < X < b)$ نشان می‌دهیم. احتمال پیشامد

$X \leq c$ (مقداری کوچکتر از c یا مساوی c را اختیار می‌کند)

را با $P(X \leq c)$ ، و احتمال پیشامد

$X > c$ (مقداری بزرگتر از c را اختیار می‌کند)

را با $P(X > c)$ نشان می‌دهیم.

دو پیشامد اخیر دو به دو ناسازگارند. از اصل موضوع ۳، بخش ۵.۲۰ به دست می‌آوریم

$$P(X \leq c) + P(X > c) = P(-\infty < X < \infty).$$

با توجه به اصل موضوع ۲، مشاهده می‌کنیم که طرف راست مساوی ۱ است، زیرا $-\infty < X < \infty$ با کل فضای نمونه متناظر است. از اینجا فرمول مهم زیر نتیجه می‌شود:

$$(۱) \quad P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \quad (c \text{ دلخواه})$$

مثلاً، هرگاه X عددی باشد که هنگام ریختن يك تاس می‌آید $1/6 = P(X=1)$ ، $1/6 = P(X=2)$ و غیره. $P(1 < X < 2) = 0$ ، $P(1 \leq X \leq 2) = 1/3$ ، $P(X \leq 5) = 0$ ، $P(X > 4) = 1/3$ ، $P(0 \leq X \leq 3) = 1/2$ ، و غیره.

در بیشتر موارد عملی متغیرهای تصادفی، گسسته هستند یا پیوسته. اکنون این دو مفهوم مهم را یکی بعد از دیگری مورد بررسی قرار می‌دهیم.

متغیر تصادفی X و توزیع مربوط به آن را گسسته می‌نامند، هرگاه X دارای خواص زیر باشد.

۱. تعداد مقادیری که به ازای آنها X دارای احتمالی مخالف صفر است متناهی یا حداکثر نامتناهی شمارش پذیر باشد.
۲. اگر فاصله‌ای مانند $a < X \leq b$ شامل چنین مقداری نباشد، آنگاه $P(a < X \leq b) = 0$.

فرض می‌کنیم

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots$$

مقادیری باشند که به ازای آنها X دارای احتمال مثبت باشد، و فرض می‌کنیم

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \dots$$

احتمالات متناظر با آنها باشند. در آن صورت $P(X=x_1)=p_1$ و غیره. اکنون تابع

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} p_j & x=x_j \quad (j=1, 2, \dots) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

را تعریف می‌کنیم. $f(x)$ تابع احتمال X نامیده می‌شود.

چون $P(S)=1$ (ر. ک. اصل موضوع ۲، بخش ۵.۲۰)، باید داشته باشیم

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) = 1.$$

هرگاه تابع احتمال يك متغیر تصادفی گسسته X را بشناسیم، آنگاه به سادگی می‌توانیم احتمال $P(a < X \leq b)$ را که متناظر با فاصله دلخواه $a < X \leq b$ است محاسبه کنیم. در واقع

$$(4) \quad P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_j \leq b} f(x_j) = \sum_{a < x_j \leq b} p_j.$$

این مقدار مجموع تمام احتمالات $f(x_j)=p_j$ است که به ازای آنها x_j در فاصله مورد نظر قرار دارد. در مورد فاصله بسته، باز، یا نامتناهی وضع کاملاً به همین منوال است. می‌گوییم تابع احتمال $f(x)$ توزیع احتمال یا اجمالاً، توزیع متغیر تصادفی X را به طریقی یکتا مشخص می‌کند.

هرگاه X متغیری تصادفی، که الزاماً گسسته هم نیست، باشد، آنگاه به ازای هر عدد حقیقی x احتمال $P(X \leq x)$ که با

$$X \leq x \quad (X \text{ مقادیر کوچکتر از } x \text{ یا مساوی } x \text{ را اختیار می‌کند})$$

متناظر است وجود دارد. واضح است که $P(X \leq x)$ به انتخاب x وابسته است؛ این

احتمال تابعی از x است که تابع توزیع^۱ X نامیده می‌شود و آن را با $F(x)$ نشان می‌دهند. بنا براین

$$(۵) \quad F(x) = P(X \leq x).$$

چون به ازای هر a و $b > a$ داریم

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a),$$

پس

$$(۶) \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

این تساوی نشان می‌دهد که تابع توزیع به طور یکتا توزیع X را معین می‌کند و می‌توان از آن برای محاسبه احتمالات استفاده کرد.

فرض می‌کنیم که X یک متغیر گسسته باشد. در این صورت تابع توزیع $F(x)$ را می‌توان بر حسب تابع احتمال $f(x)$ نمایش داد. در واقع، با جایگزین کردن $a = -\infty$ و $b = x$ در (۴)، به دست می‌آوریم

$$(۷) \quad F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

که در آن طرف راست، مجموع تمام $f(x_j)$ هایی است که به ازای آنها $x_j \leq x$. مثالهای ساده در شکلهای ۳۷۰ و ۳۷۱ ارائه شده‌اند. $f(x)$ در هر دو شکل با نمودار میله‌ای نمایش داده شده است. در شکل ۳۷۰ به ازای $x = ۱, ۲, \dots, ۶$ داریم $f(x) = ۱/۶$ و به ازای x های دیگر داریم $f(x) = ۰$. در شکل ۳۷۱ تابع $f(x)$ دارای مقادیر زیر است:

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f(x)$	$\frac{1}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

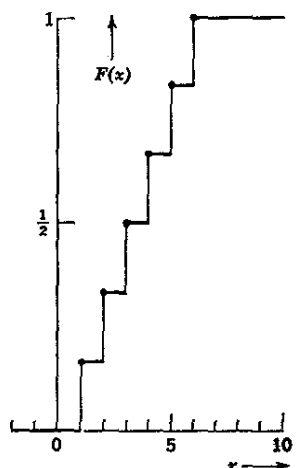
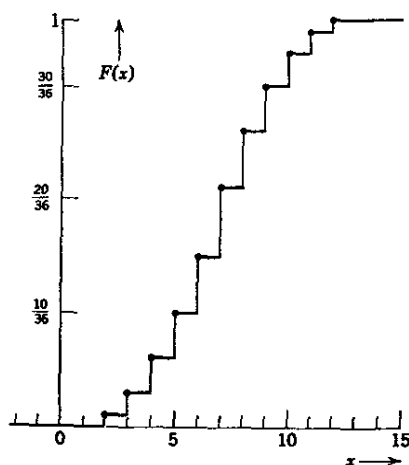
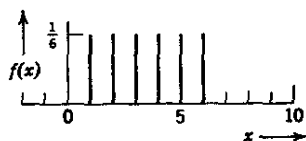
چون $۶ \times ۶ = ۳۶$ برآمد هم‌شانس وجود دارد، هر برآمد دارای احتمال $۱/۳۶$ خواهد بود؛ تنها به ازای یک برآمد داریم $X = ۲$ و آن $(۱, ۱)$ (عدد اول به تاس اول و عدد دوم به تاس دوم مربوط می‌شود) است درمورد برآمد $(۱, ۲)$ و $(۲, ۱)$ داریم $X = ۳$ ؛ و داریم $X = ۴$ اگر یکی از سه برآمد $(۱, ۳)$ ، $(۲, ۲)$ ، $(۳, ۱)$ را داشته باشیم، و الی آخر.

مقادیر $x_۱, x_۲, \dots, x_p$ که به ازای آنها متغیر تصادفی X دارای احتمال مثبت

۱. توجه کنید که برخی از مؤلفین $F(x)$ را تابع توزیع تجمعی می‌نامند. خصوصاً آنهایی که عبارت تابع توزیع را برای تابع احتمال $f(x)$ مورد استفاده قرار می‌دهند.

باشد (و تنها این مقادیر) مقادیر ممکن X نامیده می شوند. در هر فاصله‌ای که هیچ يك از مقادیر ممکن نباشد تابع توزیع $F(x)$ ثابت است. از این رو $F(x)$ يك تابع پله‌ای (تابع تکه‌ای ثابت) است که پرشی به اندازه $P_i = P(X = x_i)$ در $x = x_i$ دارد و بین دو مقدار ممکن متوالی ثابت است. شکلهای ۳۷۵ و ۳۷۱ مثالهای توضیحی هستند.

اکنون متغیرهای تصادفی پیوسته را تعریف و بررسی می کنیم. متغیر تصادفی X و توزیع متناظر با آن از نوع پیوسته، یا اجمالا، پیوسته نامیده می شوند هرگاه تابع توزیع مربوط به آنها، $F(x) = P(X \leq x)$ ، را بتوان با انتگرالی به صورت زیر نمایش داد:



شکل ۳۷۱. تابع احتمال $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ متغیر تصادفی X ، مجموع اعدادی که در پرتاب دو تاس سالم می آیند

شکل ۳۷۵. تابع احتمال $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ متغیر تصادفی X ، عددی که در پرتاب يك تاس سالم می آید

۱. $F(x)$ پیوسته است، ولی پیوستگی $F(x)$ وجود نمایی به صورت (۸) را لازم نمی آورد. چون توابع توزیع پیوسته‌ای که نمی توان آنها را به صورت (۸) نمایش داد، در عمل بسیار کم هستند، عبارات «متغیر تصادفی پیوسته» و «توزیع پیوسته» را که به طور وسیع جا افتاده اند نباید باهم اشتباه کرد.

$$(۸) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv$$

که در آن انتگران، به جز احتمالا به ازای حداکثر تعدادی متناهی از مقادیر v پیوسته و منفی است. انتگران f را چگالی احتمال، یا اجمالا، چگالی توزیع می نامند. با مشتقگیری از (۸) به دست می آوریم

$$F'(x) = f(x),$$

به ازای x هایی که $f(x)$ در آنها پیوسته است. به مفهومی که گفته شد چگالی مشتق تابع توزیع است.

از (۸) واصل موضوع ۲، بخش ۵.۲۰ داریم

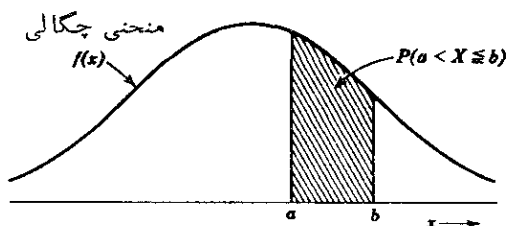
$$(۹) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv = 1$$

به علاوه، از (۶) و (۸)، فرمول

$$(۱۰) \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(v) dv$$

را به دست می آوریم. پس این احتمال با مساحت زیر منحنی چگالی $f(x)$ در فاصله بین $x=a$ و $x=b$ برابر است.

واضح است که به ازای هر دو مقدار ثابت a و b ($b > a$)، احتمالات مربوط به فواصل $a < X \leq b$ ، $a < x < b$ ، $a \leq X < b$ ، و $a \leq X \leq b$ همه با هم برابرند و این با آنچه در مورد توزیعهای گسسته دیدیم متفاوت است. مثالهای توزیعهای پیوسته در مجموعه مسائل آینده و بخشهای بعدی ارائه خواهد شد.



شکل ۳۷۲. مثال برای فرمول (۱۰)

مسائل بخش ۷.۲۰

۹. نمودار تابع احتمال $f(x) = x^2/14$ ($x = 1, 2, 3$) و تابع توزیع آن را رسم کنید.

۲. هر گاه X دارای تابع احتمال $f(۲)=۱/۲, f(۳)=۱/۴, f(۴)=۱/۸, f(۵)=۱/۸$ باشد، احتمال آنکه X مقداری کمتر از ۴ اختیار کند چقدر است؟

۳. فرض می‌کنیم X تعداد سالهایی باشد که پس از آن لازم است نوع خاصی ماشین تعویض شود. هر گاه X دارای تابع احتمال $f(۱)=۰.۳, f(۲)=۰.۴, f(۳)=۰.۲, f(۴)=۰.۱$ باشد، نمودارهای f و F را رسم کنید.

۴. نمودار چگالی $f(x)=1/4$ ($1 < x < 5$) و تابع توزیع آن را رسم کنید.

۵. تقاضای بنزین روزانه برحسب لیتر در یک پمپ بنزین، متغیر تصادفی X است.

فرض می‌کنیم X دارای چگالی

$$f(x) = \begin{cases} k & 2000 < x < 6000 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد.

تابع توزیع را یافته رسم کنید.

۶. فرض کنید $f(x) = ce^{-x}$ به ازای $x \geq 0$ ، و $f(x) = 0$ به ازای $x < 0$. مقدار c را بیابید و E را رسم کنید.

۷. مطلوب است تعیین و رسم $f(x)$ ، تابع احتمال متغیر تصادفی X = مجموع ۳ عددی که در ریختن ۳ تاس سالم می‌آیند.

۸. فرض می‌کنیم X (میلیتر) نشان دهنده ضخامت و اشرفای تولید شده در یک کارخانه باشد. هر گاه X دارای چگالی

$$f(x) = \begin{cases} kx & 19 < x < 21 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد، مقدار k را بیابید. احتمال آنکه ضخامت و اشرفی بین ۱۹.۵ تا ۲۰.۵ میلی‌متر باشد چقدر است؟

۹. نشان دهید که متغیر تصادفی

X = تعداد دفعاتی که یک سکه سالم باید پرتاب شود تا یک شیر بیاید دارای تابع احتمال $f(x) = 2^{-x}$ ($x = 1, 2, \dots$) است. نشان دهید که $f(x)$ در (۳) صدق می‌کند.

۱۰. فرض می‌کنیم $f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$ را بیابید. c را طوری

بیابید که $P(X \leq c) = 0.729$.

۱۱. مطلوب است احتمال آنکه هیچک از ۳ لامپ چراغ راهنمایی تا ۱۲۰۰ ساعت نیاز به تعویض پیدا نکنند، در صورتی که طول عمر X يك لامپ متغیری تصادفی با چگالی

$$f(x) = \begin{cases} 6[0.25 - (x - 1.5)^2] & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد؛ که در آن x بر حسب ۱۰۰۰ ساعت است.

۱۲. فرض می‌کنیم X نسبت فروش به سود يك شرکت تجاری باشد. هرگاه X دارای

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{x^2 - 4}{5} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases} \quad \text{تابع توزیع}$$

و نمودار آن را رسم کنید. احتمال آنکه X مقداری بین ۲.۵ (۴۰٪ سود) و ۵ (۲۰٪ سود) اختیار کند چیست؟

۱۳. فرض می‌کنیم X يك متغیر تصادفی باشد که هر مقدار حقیقی را اختیار می‌کند. مکمل هر يك از پیشامدهای $b < X < c$, $X \leq b$, $X < b$, $X \geq c$, $X > c$, $b \leq X \leq c$ را تعیین کنید.

۱۴. جعبه‌ای محتوی ۴ پیچ راست‌گرد و ۶ پیچ چپ‌گرد است. دو پیچ به تصادف و بدون جایگزادی استخراج می‌شود. فرض می‌کنیم X تعداد پیچهای چپ‌گرد استخراج شده باشد. مطلوب است هر يك از احتمالات $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(1 < X < 2)$, $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 1)$, $P(X > 1)$ و $P(0.5 < X < 1.5)$.

۱۵. نشان دهید که از $b < c$ نتیجه می‌شود $P(X \leq b) \leq P(X \leq c)$.

۸.۲۰ میانگین و واریانس يك توزیع

مقدار میانگین یا میانگین يك توزیع که با μ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu = \sum_j x_j f(x_j) \quad (\text{توزیع گسسته}) \quad (\text{الف})$$

(۱)

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{توزیع پیوسته}) \quad (\text{ب})$$

تابع $f(x)$ در (الف) تابع احتمال متغیر تصادفی X است، و عمل جمع بر روی کلیه مقادیر ممکن صورت می گیرد (ر. ک. بخش ۷.۲۰). تابع $f(x)$ در (ب) چگالی X است. میانگین به امید ریاضی X نیز معروف است و گاهی با $E(X)$ نمایش داده می شود. بنابه تعریف فرض می شود که سری (الف) همگرای مطلق است و انتگرال $|f(x)|$ از $-\infty$ تا ∞ وجود دارد. اگر چنین نباشد، گوییم که توزیع دارای میانگین نیست؛ چنین حالتی بندرت در کاربردهای مهندسی پیش می آید.

یک توزیع نسبت به عدد $x=c$ متقارن نامیده می شود، هرگاه به ازای هر عدد حقیقی x داشته باشیم

$$(۲) \quad f(c+x) = f(c-x)$$

خواننده می تواند قضیه زیر را ثابت کند (ر. ک. مسئله ۱).

قضیه ۱ (میانگین توزیع متقارن)

هرگاه توزیعی که میانگین آن μ است نسبت به $x=c$ متقارن باشد، آنگاه $\mu=c$.
واریانس توزیع را با σ^2 نمایش می دهند و با فرمولهای زیر تعریف می کنند:

$$(توزیع گسسته) \quad \sigma^2 = \sum_j (x_j - \mu)^2 f(x_j) \quad (الف)$$

(۳)

$$(توزیع پیوسته) \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (ب)$$

در این فرمولها، بنابه تعریف، فرض می شود که سری (۳ الف) همگرای مطلق است و انتگرال (۳ ب) وجود دارد.

در مورد توزیع گسسته ای با $f(x)=1$ در یک نقطه و $f(x)=0$ در سایر نقاط، داریم $\sigma^2=0$. این مورد هیچگونه فایده عملی ندارد. در سایر موارد

$$(۴) \quad \sigma^2 > 0.$$

ریشه دوم مثبت واریانس را **انحراف معیار** نامیده و با σ نمایش می دهند.
به عبارت ساده، واریانس معیاری است برای گستردگی یا پراکندگی مقادیری که متغیر تصادفی X می تواند اختیار کند.

مثال ۱. میانگین و واریانس

متغیر تصادفی

$$X = \text{تعداد شیرهایی که در یک پرتاب سکه ای سالم می آید}$$

دارای مقادیر ممکن $X=0$ و $X=1$ با احتمالات $P(X=0)=1/2$ و

$P(X=1) = 1/2$ است. بنابراین از (۱ الف) مقدار میانگین به دست می‌آید:

$$\mu = 0 \times 1/2 + 1 \times 1/2 = 1/2$$

(۳ الف) نتیجه می‌دهد

$$\sigma^2 = \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مثال ۲. توزیع یکنواخت

توزیعی که چگالی

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a < x < b \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

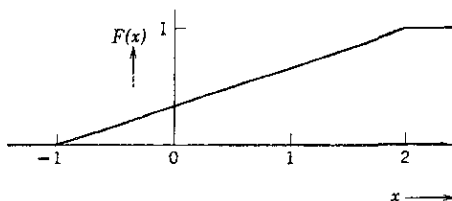
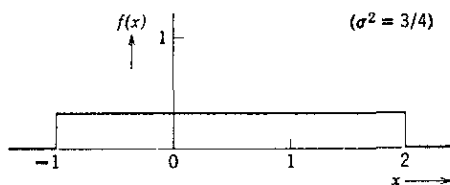
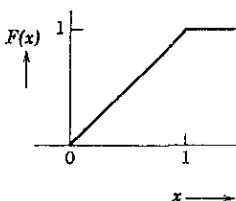
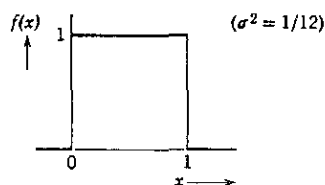
را دارد، یکنواخت یا توزیع مستطیلی برفاصله $a < x < b$ نامیده می‌شود. از قضیه ۱ یا از (۱ ب) به دست می‌آوریم $\mu = (a+b)/2$ ، و از (۳ ب) مقدار واریانس نتیجه می‌شود:

$$\sigma^2 = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

شکل ۳۷۳ موارد خاصی را نشان می‌دهد که در آنها σ^2 گسترده‌گی را اندازه می‌گیرد. ▲

قضیه ۲ (تبدیل خطی)

اگر متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، متغیر تصادفی



شکل ۳۷۳. توزیعهای یکنواختی که دارای میانگین یکسان (۵ره) و واریانسهای متفاوت σ^2 هستند

$X^* = c_1 X + c_2 (c_1 \neq 0)$ دارای میانگین

$$(5) \quad \mu^* = c_1 \mu + c_2$$

و واریانس

$$(6) \quad \sigma^{*2} = c_1^2 \sigma^2$$

است.

اثبات. (۵) را برای حالت پیوسته، نخست با فرض $c_1 > 0$ ثابت می‌کنیم. برای x و $x^* = c_1 x + c_2$ چگالیهای $f(x)$ و $f^*(x^*)$ مربوط به X و X^* در رابطه احتمال $f(x) \Delta x$ (باتقریب) متناظر می‌شود و این باید برابر $f^*(x^*) \Delta x^*$ باشد که در آن $\Delta x^* = c_1 \Delta x$ طول فاصله متناظر روی محور X^* است. چون $dx^*/dx = c_1$ ، داریم $dx^* = c_1 dx$ ، از این رو

$$\begin{aligned} \mu^* &= \int_{-\infty}^{\infty} x^* f^*(x^*) dx^* = \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 x + c_2) f(x) dx \\ &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

انتگرال آخر برابر ۱ است، ر. ک. (۹)، بخش ۷.۲۵، و فرمول (۵) ثابت می‌شود. چون

$$x^* - \mu^* = (c_1 x + c_2) - (c_1 \mu + c_2) = c_1 x - c_1 \mu,$$

از تعریف واریانس نتیجه می‌شود

$$\sigma^{*2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x^* - \mu^*)^2 f^*(x^*) dx^* = \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 x - c_1 \mu)^2 f(x) dx = c_1^2 \sigma^2.$$

اگر $c_1 < 0$ ، نتایج عوض نمی‌شوند، زیرا دو علامت منها داریم که یکی از تغییر جهت انتگرالگیری نسبت به x (توجه کنید که $x^* = -\infty$ با $x = \infty$ متناظر است) و دیگری از $f^*(x^*) = f(x)/(-c_1)$ نتیجه می‌شود؛ در اینجا بساید داشته باشیم $-c_1 > 0$ ، زیرا چگالیها غیر منفی هستند.

در مورد توزیع گسسته، اثبات قضیه ۲ به نحو مشابهی انجام می‌گیرد. ▲

از (۵) و (۶) به سادگی نتیجه زیر را به دست می‌آوریم :

قضیه ۳ (متغیر استاندارد شده)

هرگاه متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آنگاه متغیر متناظر با آن، $Z = (X - \mu)/\sigma$ ، دارای میانگین ۰ و واریانس ۱ است.

Z متغیر استاندارد شده متناظر با X نامیده می شود.

اگر X يك متغیر تصادفی باشد و $g(X)$ تابع پیوسته ای باشد که برای تمام X های حقیقی تعریف شده است، آنگاه عدد

$$(الف) \quad E(g(X)) = \sum_j g(x_j) f(x_j) \quad (X \text{ گسسته})$$

$$(ب) \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (X \text{ پیوسته})$$

امید ریاضی $g(X)$ نامیده می شود. در اینجا f به ترتیب تابع احتمال یا چگالی است. با انتخاب $g(X) = X^k (k = 1, 2, \dots)$ در (۷)، به ترتیب به دست می آوریم

$$(۸) \quad E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad \text{و} \quad E(X^k) = \sum_j x_j^k f(x_j).$$

$E(X^k)$ را k امین گشتاور X می نامند. با قرار دادن $g(X) = (X - \mu)^k$ در (۷)، به ترتیب، خواهیم داشت

$$(۹) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx \quad \text{و} \quad E[(X - \mu)^k] = \sum_j (x_j - \mu)^k f(x_j).$$

این بسط k امین گشتاور مرکزی X نام دارد. خواننده می تواند نشان دهد که

$$(۱۰) \quad E(1) = 1$$

$$(۱۱) \quad \mu = E(X)$$

$$(۱۲) \quad \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$

مسائل بخش ۸.۲۰

۱. قضیه ۱ را ثابت کنید.

۲. مطلوب است میانگین و واریانس توزیعی با چگالی $f(x) = 1/2 e^{-|x|}$.

۳. فرض می کنیم که X دارای چگالی $f(x) = \begin{cases} 0.5x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$ باشد. نشان دهید که X دارای میانگین $4/3$ و واریانس $2/9$ است.

۴. مطلوب است میانگین و واریانس $Y = -2X + 5$. متغیر تصادفی X در مسئله ۳ داده شده است.

۵. مطلوب است متغیر تصادفی استاندارد شده متناظر با X در مسئله ۳.

۶. قضیه ۲ را برای حالت گسسته ثابت کنید.

۷. قضیه ۳ را از (۵) و (۶) نتیجه بگیرید.

۸. فرض کنید حداکثر مسافتی (برحسب هزار کیلومتر) که بانوع معینی لاستیک اتومبیل می‌توان طی کرد متغیری تصادفی مانند X باشد که تابع چگالی آن به صورت

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x > 0 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

است. در اینجا، $\theta (> 0)$ يك پارامتر است. (الف) راننده انتظار دارد چه مسافتی را با یکی از این نوع لاستیکها طی کند؟ (ب) فرض کنید $\theta = 0.05$. مطلوب است احتمال آنکه لاستیک پس از طی ۳۰۰۰۰ کیلومتر فرسوده شود.

۹. فرض کنید X [سانتیمتر] قطر پیچهای يك محصول صنعتی دارای تابع چگالی

$$f(x) = \begin{cases} k(x - 0.09)(1.1 - x) & 0.09 < x < 1.1 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد. k را تعیین کنید، نمودار $f(x)$ را رسم کنید و μ و σ^2 را بیابید.

۱۰. در مسئله ۹ فرض می‌کنیم پیچی معیوب است که قطر آن در هر ۱۰۰ سانتیمتر بیش از ۰.۰۶ سانتیمتر انحراف داشته باشد. انتظار دارید چه درصدی از پیچها معیوب باشد؟

۱۱. يك پمپ بنزین کوچک را هر بعد از ظهر شنبه پرمی‌کنند. فرض می‌کنیم X مقدار بنزین فروخته شده برحسب هزار لیتر دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد. میانگین و واریانس X را تعیین کنید.

۱۲. مخزن پمپ بنزین ذکر شده در مسئله ۱۱ چه ظرفیتی داشته باشد تا احتمال خالی شدن مخزن در يك هفته برابر ۱۰٪ باشد.

۱۳. (۱۰) و (۱۱) را ثابت کنید.

۱۴. (۱۲) را ثابت کنید.

۱۵. نشان دهید که $E(X - \mu) = 0$.

۱۶. نشان دهید که $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$.

۱۷. فرض می‌کنیم X دارای چگالی

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد. همه گشتاورها را بیابید. σ^2 را به کمک فرمول ذکر شده در مسئله ۱۶ محاسبه کنید.

۱۸. نشان دهید که $\sigma^2 = E(X[X-1]) + \mu - \mu^2$.

۱۹. نشان دهید که $E(ag(X) + bh(X)) = aE(g(X)) + bE(h(X))$ ؛ E ثابت a و b هستند.

۲۰. $E([X-c]^2)$ را گشتاور دوم X نسبت به c می‌نامند. نشان دهید این گشتاور، اگر وجود داشته باشد، به ازای $c = \mu$ مینیمم است.

۲۱. مطلوب است گشتاورهای توزیع یکنواخت بر فاصله $0 \leq x \leq 1$.

۲۲. (چاولگی) عدد

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3} E([X - \mu]^3)$$

چاولگی X نامیده می‌شود. نشان دهید در صورت متقارن بودن X نسبت به μ ، گشتاور مرکزی سوم، اگر وجود داشته باشد، برابر صفر است و با توجه به این مسئله چاولگی را توجیه کنید.

۲۳. مطلوب است چاولگی توزیعی با چگالی

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

نمودار $f(x)$ را رسم کنید.

۲۴. مطلوب است چاولگی توزیعی با چگالی

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

۲۵. (تابع مولد گشتاور) تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی گسسته یا پیوسته X به ترتیب

با فرمولهای زیر داده می‌شود:

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \quad \text{و} \quad G(t) = E(e^{tX}) = \sum_j e^{tx_j} f(x_j)$$

با فرض اینکه، مشتقگیری زیر علامت جمع و علامت انتگرال مجاز است، نشان دهید که $E(X^k) = G^{(k)}(0)$ ، خصوصاً $\mu = G'(0)$ ، در اینجا $G^{(k)}(t)$ مشتق k ام G نسبت به t است.

۹.۲۰ توزیعهای دوجمله‌ای، پواسن، و فوق هندسی

هم‌اکنون به بررسی توزیعهای گسسته خاصی که به ویژه در آمار مهم هستند می‌پردازیم. از توزیع دوجمله‌ای آغاز می‌کنیم، این توزیع را وقتی به دست می‌آوریم که دفعات وقوع پیشامد A در n اجرای مستقل آزمایش موردنظر ما باشد، با فرض اینکه پیشامد A در هر آزمایش دارای احتمال $P(A) = p$ باشد. آنگاه $q = 1 - p$ احتمال رخ ندادن پیشامد A در هر آزمایش است. فرض می‌کنیم آزمایش n بار تکرار شود، متغیر تصادفی

$$X = \text{تعداد دفعاتی که } A \text{ روی می‌دهد}$$

را در نظر می‌گیریم در این صورت X می‌تواند هر یک از مقادیر $0, 1, \dots, n$ را اختیار کند، و ما می‌خواهیم احتمالهای متناظر با آنها را تعیین کنیم. برای این منظور هر یک از این مقادیر، مثلاً $X = x$ ، را بررسی می‌کنیم، $X = x$ بدان معنی است که در n آزمایش x بار A روی می‌دهد و $n - x$ بار A روی نمی‌دهد. این را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$(1) \quad \underbrace{AA \dots A}_{\text{تا } x} \quad \underbrace{BB \dots B}_{\text{تا } n-x}$$

در اینجا $B = A^c$ ، یعنی A روی نمی‌دهد. فرض می‌کنیم که آزمایشها مستقل باشند، یعنی روی هم اثر نگذارند. آنگاه نظریه اینکه $P(A) = p$ و $P(B) = q$ ، مشاهده می‌کنیم که (۱) دارای احتمال

$$\underbrace{pp \dots p}_{\text{تا } x} \quad \underbrace{qq \dots q}_{\text{تا } n-x} = p^x q^{n-x}$$

است. واضح است که (۱) تنها یک ترتیب x تا A و $n - x$ بار B است، و بنابراین احتمال $P(X = x)$ برابر است با حاصل ضرب $p^x q^{n-x}$ در همه ترتیبهای x تا A و $n - x$ تا B ، قضیه ۱ بخش ۵.۲۰ نیز همین نتیجه را می‌دهد. می‌توان این n آزمایش را

از ۱ تا n شماره گذاری کرده x تا از آنها را که متناظر با اجرایی هستند که در آنها A روی می دهد جدا کرد. چون در جدا کردن این x تا آزمایش ترتیب اهمیتی ندارد، از

(۴ الف) بخش ۶.۲۵ نتیجه می شود که انتخاب x از n تنها به $\binom{n}{x}$ روش مختلف

امکان دارد. از این رو احتمال $P(X=x)$ ، متناظر با $X=x$ ، برابر است با

$$(۲) \quad f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (x=0, 1, \dots, n)$$

و $f(x)$ به ازای سایر مقادیر x برابر صفر است. این احتمال رویداد پیشامدی مانند A به تعداد دقیقاً x بار در n آزمایش مستقل است، در صورتی که p احتمال A در یک آزمایش و $q=1-p$ است. توزیعی که با تابع احتمال (۲) مشخص می شود، توزیع دوجمله ای یا توزیع برنولی نامیده می شود. روی دادن A موفقیت، و عدم روی دادن آن شکست نامیده می شود. p احتمال موفقیت در یک آزمایش نامیده می شود. شکل ۳۷۴ با چند مثال مطلب را روشن تر می کند.

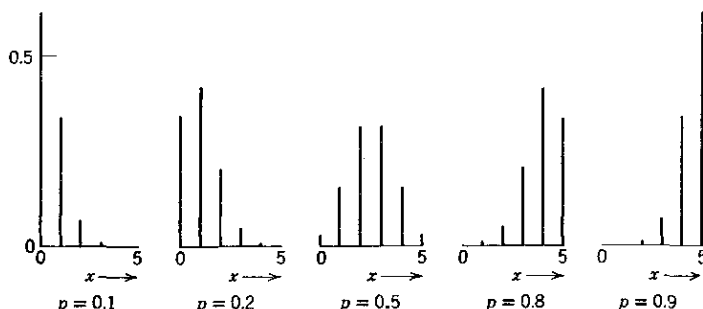
توزیع دوجمله ای دارای میانگین (ر. ک. مسئله ۲۱)

$$(۳) \quad \mu = np$$

و واریانس (ر. ک. مسئله ۲۲)

$$(۴) \quad \sigma^2 = npq$$

است. توجه کنید که وقتی $p=0.5$ ، توزیع نسبت به μ متقارن است.



شکل ۳۷۴. تابع احتمال (۲)ی توزیع دوجمله ای به ازای $n=5$ و مقادیر گوناگون p

جدولی از توزیع دو جمله‌ای در ضمیمه ۴ آمده است. برای دیدن جدولهای مفصلتر به مرجع [۱۵] ضمیمه ۱ مراجعه کنید. توزیعی که با تابع احتمال

$$(5) \quad f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \quad (x=0, 1, \dots)$$

داده می‌شود، به افتخار اس. دی. پواسن (ر. ک. بخش ۴.۱۸) نامگذاری شده است. شکل ۳۷۵ تابع احتمال (۵) را به ازای برخی از مقادیر μ نشان می‌دهد. ثابت می‌شود که توزیع پواسن را می‌توان با حدگیری از توزیع دو جمله‌ای به دست آورد، اگر $p \rightarrow 0$ و $n \rightarrow \infty$ و میانگین $\mu = np$ به مقداری متناهی میل کند. توزیع پواسن دارای میانگین μ و واریانس (ر. ک. مسئله ۲۳)

$$(6) \quad \sigma^2 = \mu$$

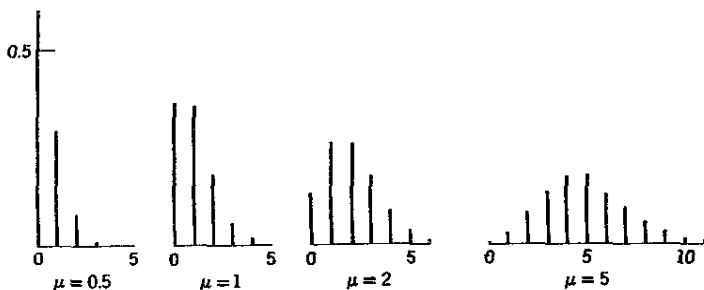
است. این توزیع احتمالهایی را نشان می‌دهد از قبیل تعداد اتومبیلهایی که در واحد زمان از تقاطعی می‌گذرند، تعداد عیبهایی که نوعی سیم در واحد طول یا نوعی کاغذ یا پارچه در واحد مساحت دارد و غیره.

مثال زیر نشان می‌دهد که توزیع دو جمله‌ای در نمونه با جایگذاری (ر. ک. مثال ۳، بخش ۵.۲۵) اهمیت دارد. فرض می‌کنیم جعبه‌ای محتوی N شیء، مثلاً، N پیچ باشد، که M تای آنها معیوبند. هر گاه بخواهیم پیچی را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال به دست آوردن يك پیچ معیوب عبارت است از

$$p = \frac{M}{N}$$

از این رو در استخراج يك نمونه n تایی از پیچها با جایگذاری، احتمال آنکه درست x پیچ از n پیچ معیوب باشند عبارت است از [ر. ک. (۲)]

$$(7) \quad f(x) = \binom{n}{x} \left(\frac{M}{N}\right)^x \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-x} \quad (x=0, 1, \dots, n).$$



شکل ۳۷۵. تابع احتمال (۵) توزیع پواسن به ازای مقادیر گوناگون μ

در نمونه‌گیری بدون جایگذاری این احتمال برابر است با

$$(۸) \quad f(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (x=0, 1, \dots, n).$$

این توزیع که تابع احتمال آن (۸) است توزیع فوق هندسی نامیده می‌شود.^۱ برای تحقیق درستی این حکم، با توجه به (۲ الف)، بخش ۶.۲۵ یادآوری می‌کنیم که

$$(الف) \quad \binom{N}{n} \text{ راه مختلف برای استخراج } n \text{ شیء از } N$$

$$(ب) \quad \binom{M}{x} \text{ راه مختلف برای استخراج } x \text{ شیء معیوب از } M$$

$$(ج) \quad \binom{N-M}{n-x} \text{ راه مختلف برای استخراج } n-x \text{ شیء نامعیوب از } N-M$$

وجود دارد. اگر یکی از راههای (ب) را بایکسی از راههای (ج) ترکیب کنیم تعداد کل راههای دو به دو ناسازگار برای به دست آوردن x شیء معیوب در n استخراج بدون جایگذاری حاصل می‌شود. چون (الف) تعداد کل برآمدها است و استخراج به تصادف انجام می‌گیرد، هر یک از این راهها دارای احتمال $1/\binom{N}{n}$ است. از آنچه گفته شد، (۸) نتیجه می‌شود.

توزیع فوق هندسی دارای میانگین (ر. ک. مسئله ۲۵)

$$(۹) \quad \mu = n \frac{M}{N}$$

و واریانس

۱. این نامگذاری بدان علت است که تابع مولدگشتاور (ر. ک. مسئله ۲۵، بخش ۸.۲۵) این توزیع را می‌توان به صورت تابع فوق هندسی نمایش داد.

$$\sigma^2 = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} \quad (10)$$

است.

مثال ۰۱. نمونه‌گیری با و بدون جایگذاری

می‌خواهیم از جعبه‌ای محتوی ۱۰ و اشر که ۳ تایشان معیوبند ۲ و اشر به تصادف استخراج کنیم. تابع احتمال متغیر تصادفی

$$X = \text{تعداد اشیاء معیوب در نمونه}$$

را بیابید. داریم $N=10$ ، $M=3$ ، $N-M=7$ ، $n=2$. در مورد نمونه‌گیری با جایگذاری، از فرمول (۷) نتیجه می‌شود

$$f(x) = \binom{2}{x} \left(\frac{3}{10}\right)^x \left(\frac{7}{10}\right)^{2-x}, \quad f(2) = 0.09, \quad f(1) = 0.42, \quad f(0) = 0.49$$

هرگاه N ، M و $N-M$ نسبت به n بزرگ باشند، آنگاه نمونه‌گیری با جایگذاری یا بدون جایگذاری بایکدیگر تفاوت چندانی ندارند، و در این حالت توزیع فوق هندسی را می‌توان به کمک توزیع دو جمله‌ای با $(p = M/N)$ که تا اندازه‌ای ساده‌تر است محاسبه کرد. از این دو در نمونه‌گیری از یک جامعه بسیار بزرگ («جامعه نامتناهی») می‌توان توزیع دو جمله‌ای را بدون توجه به اینکه نمونه‌گیری با جایگذاری است یا بدون جایگذاری به کار برد.

مسائل بخش ۹.۲۰

۱. فرمولهایی برای $f(x)$ ، μ ، و σ^2 در حالتی که توزیع دو جمله‌ای است و $p = 0.5$ ، بیابید.

۲. ۵ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تابع احتمال متغیر تصادفی

$$X = \text{تعداد شیرها}$$

را پیدا کنید و به ترتیب احتمال به دست آوردن هیچ شیر، درست یک شیر، لا اقل یک شیر، و حداکثر ۴ شیر را حساب کنید.

۳. اگر در یک تجربه، شانس رسیدن به مقدار مثبت و منفی یکسان باشد، احتمال به دست آوردن حداکثر یک مقدار منفی در ۹ آزمایش چیست؟

۴. اگر احتمال برخورد به هدف ۱۰٪ باشد و ۱۰ گلوله به طور مستقل شلیک شوند،

احتمال آنکه حداکثر یکی از گلوله‌ها به هدف برخورد چیست؟

۵. فرض می‌کنیم $p = 1\%$ احتمال سوختن نوعی لامپ در یک آزمون ۲۴ ساعته باشد. چقدر احتمال دارد در تابلویی که در آن ۱۰ تا از این لامپ‌ها به کار رفته پس از ۲۴ ساعت کار مداوم هیچ لامپی نسوزد.

۶. فرض می‌کنیم ۳ درصد پیچ‌هایی که یک کارخانه می‌سازد معیوب باشند. پیچ‌های معیوب به تصادف تولید می‌شوند. اگر پیچ‌ها در جعبه‌های ۵۰ تایی بسته‌بندی شوند، تقریباً بواسن احتمال آنکه جعبه‌ای شامل x پیچ معیوب باشد چیست؟

۷. فرض می‌کنیم در تولید مقاومت‌های ۵۰ اهمی برای رادیو، کالای غیر معیوب به آن‌هایی اطلاق شود که مقاومتشان بین ۴۵ و ۵۵ اهم باشد و فرض می‌کنیم احتمال اینکه مقاومتی معیوب باشد ۲۰٪ است. مقاومت‌ها را در جعبه‌های ۱۰۰ تایی با تضمین آنکه به تمامی غیر معیوب‌ها به فروش می‌رسانند. احتمال آنکه ضمانت در مورد جعبه‌ای درست نباشد چیست؟ (از توزیع بواسن استفاده کنید.)

۸. فرض می‌کنیم تابلوی راهنمایی یک مرکز تلفن در یک ساعت پرمشغله به طور متوسط به ۳۰۰ تلفن راه دهد، و در هر دقیقه بتواند حداکثر ۱۰ ارتباط برقرار کند. با استفاده از توزیع بواسن، احتمال آنکه در خلال یک دقیقه معین تابلو با کاری بیش از ظرفیتش مواجه شود چیست؟

۹. آزمایش‌های کلاسیکی که توسط بی. راترفورد و اچ. گایگر در سال ۱۹۱۰ انجام شدند نشان دادند که تعداد ذرات آلفای گسیل شده در یک فرایند رادیو اکتیو در مدت یک ثانیه متغیری تصادفی است مانند X که دارای توزیع بواسن است. اگر X دارای میانگین ۵٫۰۰ باشد، احتمال اینکه در یک ثانیه ۲ ذره α یا بیشتر مشاهده شود چیست؟

۱۰. فرض می‌کنیم نوعی نوار مغناطیسی، به طور متوسط، در هر ۱۰۰ متر دو عیب داشته باشد. احتمال اینکه یک حلقه از این نوع نوار به طول ۳۰۰ متر (الف) شامل x عیب (ب) بی عیب باشد چیست؟

۱۱. فرض می‌کنیم X تعداد اتومبیهایی باشد که در هر دقیقه از نقطه معین جاده‌ای بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح یک روز یک‌شنبه می‌گذرند. فرض می‌کنیم که X دارای توزیع بواسنی بامیانگین ۵ باشد. احتمال گذشتن ۳ اتومبیل یا کمتر، از این نقطه در هر دقیقه چیست؟

۱۲. کارتنی محتوی ۱۰ فیوز است که ۵ تای آنها معیوبند نمونه‌ای ۳ تایی از این فیوزها را به طور تصادفی بدون جایگزینی انتخاب می‌کنیم، احتمال وجود x فیوز معیوب در چنین نمونه‌ای چقدر است؟

۱۳. یک توزیع کننده نوار لاستیکی نوارها را در بسته‌های ۱۰۰ تایی می‌فروشد و تضمین می‌کند که بیشتر از ۱۰٪ آنها معیوب نباشد. یک مشتری هر بسته را با کشیدن ۱۰ نوار

به طور تصادفی و بدون جایگذاری کنترل می‌کند. اگر نمونه ۱۰ تایی انتخاب شده شامل هیچ نوار معیوبی نباشد آن را می‌خرد و در غیر این صورت آن را به فروشنده برمی‌گرداند. مطلوب است احتمال آنکه در این فرایند مشتری بسته‌ای را برگرداند که شامل ۱۰ نوار معیوب است و شرایط قید شده در تضمین نامه را داراست.

۱۴. در مسئله ۱۳، مطلوب است احتمال اینکه مشتری همه بسته‌ها را بخرد، در صورتی که هر بسته شامل ۲۰ لاستیک معیوب باشد.

۱۵. یک کارخانه تولیدکننده پیچ در هر ساعت با انتخاب n پیچ به طور تصادفی محصولات خود را مورد بازرسی قرار می‌دهد؛ اگر در میان این n پیچ، پیچ معیوبی دیده شود عمل تولید متوقف می‌شود و جستجو برای یافتن عیب کار با دقت آغاز می‌شود. اگر صاحب کارخانه بخواهد احتمال متوقف شدن تولید حدود ۹۵٪ باشد n را چند بگیرد؟ وقتی که ۱۰٪ مهره‌های تولید شده معیوب باشند. (استقلال کیفیت هر کار از سایر کالاها را فرض کنید.)

۱۶. (توزیع چندجمله‌ای) فرض کنید نتیجه آزمایشی یکی از k پیش آمد دو به دو ناسازگار $A_1, \dots, A_k$ باشد که به ترتیب احتمال‌های $p_1, \dots, p_k$ را دارند و $p_1 + \dots + p_k = 1$. فرض کنید n آزمایش به طور مستقل انجام شود. نشان دهید که احتمال روی دادن x_1 بار $A_1, \dots, x_k$ بار A_k برابر است با

$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$$

که در آن $0 \leq x_j \leq n$ ، $j = 1, \dots, k$ و $x_1 + \dots + x_k = n$ توزیعی که چنین تابع احتمالی دارد توزیع چندجمله‌ای نامیده می‌شود.

۱۷. فرض کنید که در تولید مقاومت‌های الکتریکی، احتمال تولید یک مقاومت $R < 198 \text{ ohm}$ یا $R > 201 \text{ ohm}$ به ترتیب ۳٪ و ۵٪ باشد. مطلوب است احتمال اینکه یک نمونه تصادفی ۲۰ مقاومتی شامل درست x_1 مقاومت با $R < 198 \text{ ohm}$ و x_2 مقاومت با $R > 201 \text{ ohm}$ باشد چقدر است.

۱۸. نشان دهید که تابع توزیع، توزیع پواسن در $F(\infty) = 1$ صدق می‌کند.

۱۹. فرض می‌کنیم X دارای توزیعی دوجمله‌ای با $p = 0.05$ باشد. مطلوب است احتمال آنکه X مقداری از فاصله $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$ اختیار کند، با فرض

(الف) $n = 1$ ، (ب) $n = 2$ ، (ج) $n = 3$ ، (د) $n = 4$ ، و (ه) $n = 5$.

۲۰. با استفاده از قضیه دوجمله‌ای، نشان دهید که توزیع دوجمله‌ای دارای تابع مولد گشتاور

$$G(t) = \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n$$

است. (ر.ك. مسئله ۲۵، بخش ۰.۸۰۲۰)

۲۱. با استفاده از مسئله ۲۰، $p+q=1$ ، (۳) را ثابت کنید.

۲۲. (۴) را ثابت کنید.

۲۳. نشان دهید که توزیع پواسن دارای تابع مولد گشتاور

$$G(t) = e^{-\mu} e^{\mu e^t}$$

است و (۶) را ثابت کنید.

۲۴. نشان دهید که $E([X - \mu]^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$. با استفاده از این موضوع و مسئله ۲۳، نشان دهید که توزیع پواسن دارای چولگی $\gamma = 1/\sqrt{\mu}$ است و نتیجه بگیرید که اگر μ بزرگ باشد توزیع تقریباً متقارن خواهد بود. (ر.ك. شکل ۳۷۵)

۲۵. (۹) را ثابت کنید.

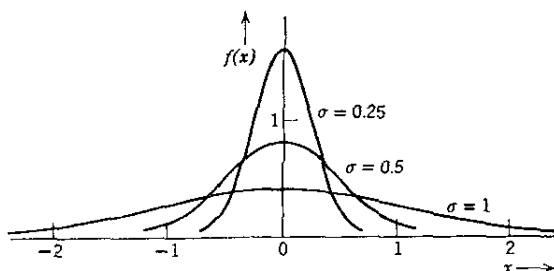
۱۰.۲۰ توزیع نرمال

توزیع پیوسته‌ای که چگالی آن

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (\sigma > 0)$$

است، توزیع نرمال یا توزیع گاوسی نامیده می‌شود. یک متغیر تصادفی که این توزیع را داشته باشد نرمال نامیده می‌شود، یا گفته می‌شود که به طور نرمال توزیع شده است. این توزیع خیلی مهم است، زیرا بسیاری از متغیرهای تصادفی که در عمل جالب هستند یا نرمالند یا تقریباً نرمال، و یا به روشی نسبتاً ساده قابل تبدیل به متغیرهای تصادفی نرمال هستند. به علاوه، توزیع نرمال تقریب مفیدی است برای بسیاری از توزیعهای پیچیده‌تر. از این توزیع در اثبات ریاضی آزمونهاى آماری گوناگون نیز استفاده می‌شود.

در (۱)، μ میانگین و σ انحراف معیار توزیع است. منحنی $f(x)$ را منحنی ذنگی-شکل می‌نامند. این منحنی نسبت به μ متقارن است. شکل ۳۷۶، $f(x)$ را به ازای $\mu = 0$ نشان می‌دهد؛ به ازای $\mu > 0$ ($\mu < 0$) منحنی همین شکل را دارد، با این تفاوت که $|\mu|$ واحد به راست (چپ) انتقال می‌یابد. در شکل ۳۷۶ هرچه σ^2 کوچکتر



شکل ۳۷۶. چگالی (۱) درمورد توزیع نرمالی با $\mu = 0$ ، به ازای مقادیر گوناگون σ

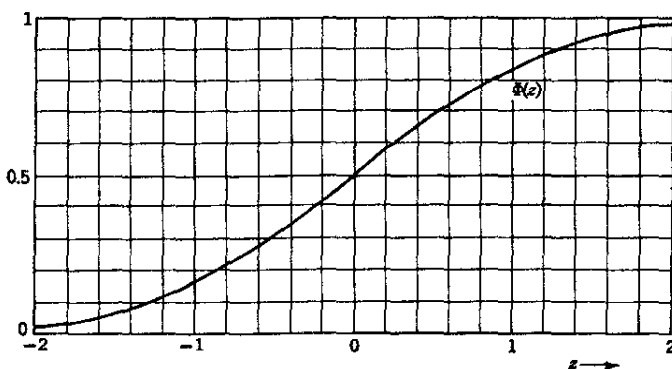
باشد، ارتفاع قله منحنی در $x = 0$ بیشتر می شود و شیب دو طرف منحنی نیز بیشتر خواهد شد و این بامعنی واریانس مطابقت دارد.

بنابراین (۱) مشاهده می کنیم که توزیع نرمال دارای تابع توزیع

$$(2) \quad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

است. از این فرمول و (۱۵) بخش ۷.۲۰ به دست می آوریم

$$(3) \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du.$$



شکل ۳۷۷. تابع توزیع $\Phi(z)$ درمورد توزیع نرمالی با میانگین ۰ و واریانس ۱

انتگرال (۲) رابطه روشهای مقدماتی نمی توان حساب کرد، بلکه آن را می توان

$$(۴) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{\pi}} du$$

نمایش داد (شکل ۳۷۷)، که تابع توزیع نرمالی با میانگین ۰ و واریانس ۱ است و مقادیر آن محاسبه و در جدول آمده است (جدول A۸، ضمیمه ۴). درواقع، هرگاه قرار دهیم $u = (v - \mu)/\sigma$ ، آنگاه $du/dv = 1/\sigma$ ، و اکنون باید از $-\infty$ تا $z = (x - \mu)/\sigma$ انتگرال بگیریم. بنابراین با توجه به (۲) به دست می آوریم

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{\pi}} \sigma du.$$

σ حذف می شود، و عبارت طرف راست مساوی با (۴) می شود که در آن $z = (x - \mu)/\sigma$ ، یعنی

$$(۵) \quad F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

از این فرمول مهم و (۳) به دست می آوریم

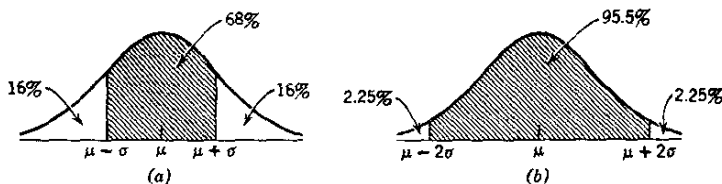
$$(۶) \quad P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

خصوصاً وقتی $a = \mu - \sigma$ و $b = \mu + \sigma$ ، طرف راست برابر است با $\Phi(1) - \Phi(-1)$ ؛ به $a = \mu - 2\sigma$ و $b = \mu + 2\sigma$ مقدار $\Phi(2) - \Phi(-2)$ مربوط می شود، و قس علی هذا. با استفاده از جدول A۸، ضمیمه ۴، می یابیم (شکل ۳۷۸)

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 68\% \quad (\text{الف})$$

$$(۷) \quad P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.5\% \quad (\text{ب})$$

$$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\% \quad (\text{ب})$$



شکل ۳۷۸. توصیف فرمول (۷)

از این دو می‌توان انتظار داشت که اگر مقادیر مشاهده شده متغیر تصادفی نرمال X زیاد باشند به شرح زیر توزیع شوند:

- (الف) حدود $2/3$ مقادیر بین $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$ قرار گیرند.
 (ب) حدود ۹۵٪ مقادیر بین $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$ قرار گیرند.
 (پ) حدود $99\frac{3}{4}$ ٪ مقادیر بین $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ قرار گیرند.

این را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

مقداری که انحراف آن از μ بیشتر از σ باشد در ۳ آزمایش حدوداً یک بار روی می‌دهد. مقداری که انحراف آن از μ بیشتر از 2σ یا 3σ باشد به ترتیب در هر ۲۰ یا ۴۰۰ آزمایش تقریباً یک بار روی می‌دهد. از نظر کاربردی مطالب بالا بدین معنی است که همه مقادیر بین $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ واقع می‌شوند؛ این دو عدد را حدود سه - سیگما می‌نامند.

به طریقی مشابه به دست می‌آوریم

$$P(\mu - 1.96\sigma < X \leq \mu + 1.96\sigma) = 95\% \quad (\text{الف})$$

$$(8) \quad P(\mu - 2.58\sigma < X \leq \mu + 2.58\sigma) = 99\% \quad (\text{ب})$$

$$P(\mu - 3.29\sigma < X \leq \mu + 3.29\sigma) = 99.9\% \quad (\text{پ})$$

مثالهای نوعی زیر به خواننده کمک می‌کنند تا طرز استفاده عملی از جدولهای A۸ و A۹ ضمیمه ۴ را بیاموزد.

مثال ۱

احتمالهای

$$P(X \leq 2.44) \quad (\text{الف}), \quad P(X \leq -1.16) \quad (\text{ب}), \quad P(X \geq 1) \quad (\text{پ}),$$

$$(ت) \quad P(2 \leq X \leq 10) \quad \text{را تعیین کنید؛ } X \text{ متغیر تصادفی نرمال بامیانگین ۵ و واریانس ۱ است.}$$

چون $\mu = 5$ و $\sigma^2 = 1$ ، می‌توان مقادیر مطلوب را مستقیماً از جدول A۸ استخراج کرد.

$$(\text{الف}) \quad 0.99427, \quad (\text{ب}) \quad 0.1230,$$

$$(\text{پ}) \quad 0.1587 = 1 - 0.8413 = 1 - P(X \leq 1) \quad [ر.ك. (۶) \text{ بخش } 5.2],$$

$$(\text{ت}) \quad 100000 - \Phi(10) = \Phi(2) = 0.9772 \quad (\text{چرا؟}),$$

$$\Phi(10) - \Phi(2) = 0.0228.$$

مثال ۲

احتمالهای خواسته شده در مثال ۱ را، با فرض آنکه X نرمال باشد و میانگین آن ۸۰۰

و واریانسش ۴ باشد، محاسبه کنید.

از (۶) و جدول A۸ به دست می آوریم

$$F(۲۰۴۴) = \Phi\left(\frac{۲۰۴۴ - ۰٫۸۰}{۲}\right) = \Phi(۰٫۸۲) = ۰٫۷۹۳۹ \quad (\text{الف})$$

$$F(-۱٫۱۶) = \Phi(-۰٫۹۸) = ۰٫۱۶۳۵ \quad (\text{ب})$$

$$1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \Phi(۰٫۱) = ۰٫۴۶۰۲ \quad (\text{پ})$$

$$F(۱۰) - F(۲) = \Phi(۴٫۶) - \Phi(۰٫۶) = 1 - ۰٫۷۲۵۷ = ۰٫۲۷۴۳ \quad (\text{ت})$$

مثال ۳

فرض می کنیم X نرمال باشد و میانگین ۰ و واریانس ۱ داشته باشد. ثابت c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم

$$P(X \leq c) = ۵\% \quad (\text{ب}) \quad P(X \geq c) = ۱۰\% \quad (\text{الف})$$

$$P(-c \leq X \leq c) = ۹۹\% \quad (\text{ت}) \quad P(0 \leq X \leq c) = ۴۵\% \quad (\text{پ})$$

از جدول A۹، ضمیمه ۴ به دست می آوریم

$$1 - P(X \leq c) = 1 - \Phi(c) = ۰٫۰۵, \quad \Phi(c) = ۰٫۹۵, \quad c = ۱٫۶۴۴۹ \quad (\text{الف})$$

$$c = -۱٫۶۴۴۹ \quad (\text{ب})$$

$$\Phi(c) - \Phi(0) = \Phi(c) - ۰٫۵ = ۰٫۴۵, \quad \Phi(c) = ۰٫۹۵, \quad c = ۱٫۶۴۴۹ \quad (\text{پ})$$

$$c = ۲٫۵۷۵۸ \quad (\text{ت})$$

مثال ۴

فرض می کنیم X نرمال باشد و میانگین ۲- و واریانس ۲٫۵ داشته باشد. c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم

$$P(-c \leq X \leq -۱) = ۰٫۰۵ \quad (\text{ب}) \quad P(X \geq c) = ۰٫۲ \quad (\text{الف})$$

$$P(-۲ - c \leq X \leq -۲ + c) = ۰٫۹ \quad (\text{پ})$$

$$P(-۲ - c \leq X \leq -۲ + c) = ۹۹٫۹۶\% \quad (\text{ت})$$

با استفاده از جدول A۹، ضمیمه ۴ نتایج زیر حاصل می شود:

$$1 - P(X \leq c) = 1 - \Phi\left(\frac{c+۲}{۰٫۵}\right) = ۰٫۲, \quad (\text{الف})$$

$$\Phi(2c+4)=0.8, 2c+4=0.842, c=-1.579$$

$$\Phi\left(\frac{-1+2}{0.5}\right)-\Phi\left(\frac{-c+2}{0.5}\right)=0.9772-\Phi(4-2c)=0.5, \quad (\text{ب})$$

$$\Phi(4-2c)=0.4772, 4-2c=-0.557, c=2.03$$

$$\Phi\left(\frac{-2+c+2}{0.5}\right)-\Phi\left(\frac{-2-c+2}{0.5}\right) \quad (\text{پ})$$

$$=\Phi(2c)-\Phi(-2c)=0.9, 2c=1.645, c=0.823$$

$$\Phi(2c)-\Phi(-2c)=0.996, 2c=2.878, c=1.439 \quad (\text{ت})$$

مثال ۵

فرض کنید در تولید ورقه‌های آهنی لازم باشد که ورقه‌ها دارای ضخامت معینی باشند، و کار تولید باماشین صورت گیرد. به طور کلی محصولات صنعتی تفاوت کمی باهم دارند، زیرا خواص ماده اولیه و طرز کار ماشینها و ابزار مورد استفاده به دلیل اختلافات کوچکی که قابل پیش بینی نیست، تغییرات تصادفی اندکی دارند. بنابراین، X [میلی متر]، ضخامت ورقه‌ها، را می‌توانیم متغیر تصادفی بگیریم. فرض می‌کنیم به ازای حالت معینی متغیر تصادفی X نرمال، با میانگین $\mu=10$ میلی متر و انحراف معیار $\sigma=0.02$ میلی متر، باشد. می‌خواهیم درصد ورقه‌هایی را که انتظار می‌رود معیوب باشند تعیین کنیم، اگر ورقه معیوب ورقه‌ای باشد که (الف) ضخامتش کمتر از ۹.۹۷ میلی متر باشد، (ب) ضخامتش بیشتر از ۱۰.۰۵ میلی متر باشد (پ) ضخامتش به ازای هر ۱۰ میلی متر بیش از ۰.۰۳ میلی متر انحراف داشته باشد. (ت) اعداد $c-10$ و $c+10$ را چطور انتخاب کنیم تا درصد مورد انتظار ورقه‌های معیوب بیش از ۵٪ نباشد؟ (ث) درصد ورقه‌های معیوبی که در قسمت (ج) تعریف شده‌اند اگر μ از ۱۰ میلی متر به ۱۰.۰۱ میلی متر تبدیل شود چگونه تغییر خواهند کرد؟ با استفاده از جدول $A4$ ، ضمیمه ۴، و (۶)، جوابهای زیر حاصل می‌شوند.

$$P(X \leq 9.97) = \Phi\left(\frac{9.97-10.00}{0.02}\right) \quad (\text{الف})$$

$$=\Phi(-1.5)=0.0668 \approx 6.7\%$$

$$P(X \geq 10.05) = 1 - P(X \leq 10.05) = 1 - \Phi\left(\frac{10.05-10.00}{0.02}\right) \quad (\text{ب})$$

$$=1-\Phi(2.5)=1-0.9938 \approx 0.6\%$$

$$P(9.97 \leq X < 10.03) = \Phi\left(\frac{10.03-10.00}{0.02}\right) - \quad (\text{پ})$$

$$\Phi\left(\frac{9997-10000}{0.02}\right) = \Phi(1.75) - \Phi(-1.75) = 0.8664$$

جواب: $1 - 0.8664 \approx 13\%$

(ت) از (الف) به دست می آوریم $c = 1965 = 0.039$

جواب: 9961 میلی متر و 10039 میلی متر

(ث) $P(9961 \leq X \leq 10039) =$

$$\Phi\left(\frac{10039-10010}{0.02}\right) - \Phi\left(\frac{9961-10010}{0.02}\right)$$

$$= \Phi(1.45) - \Phi(-2.45) = 0.9265 - 0.0071 \approx 92\%$$

جواب: ۸٪

مشاهده می کنیم که این تغییر اندک سبب افزایش قابل ملاحظه در درصد ورقه های معیوب می گردد. ▲

دراثر تبدیل خطی، یک متغیر تصادفی نرمال به متغیر تصادفی نرمال دیگری تبدیل می شود. در واقع، با استفاده از (۵)، خواننده می تواند قضیه زیر را ثابت کند.

قضیه ۱

اگر X نرمال، با میانگین μ و واریانس σ^2 ، باشد، آنگاه $X^* = c_1 X + c_2$ ($c_1 \neq 0$) نرمال، با میانگین $\mu^* = c_1 \mu + c_2$ و واریانس $\sigma^{*2} = c_1^2 \sigma^2$ ، است.

وقتی n آنقدر بزرگ باشد، که محاسبه ضرایب دوجمله ای و توانهای موجود در تسابع احتمال توزیع دوجمله ای،

$$(9) \quad f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (x=0, 1, \dots, n)$$

(ر. ک. بخش ۹.۲۰) بیش از حد مشکل شود، توزیع نرمال را می توان برای تقریب زدن توزیع دوجمله ای مورد استفاده قرار داد. در واقع، قضیه مهم زیر برقرار است.

قضیه ۲ (قضیه حد دموآور و لاپلاس)

به ازای n بزرگ داریم

$$f(x) \sim f^*(x) \quad (x=0, 1, \dots, n)$$

که در آن f با (۹) تعریف شده است،

$$(10) \quad f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{npq}} e^{-z^2/2}, \quad z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

چگالی توزیع نرمال، با میانگین هر $\mu = np$ و واریانس $\sigma^2 = npq$ (میانگین و واریانس توزیع دو جمله‌ای)، است و علامت $\sim$ (بخوانید به‌طور مجانبی مساوی است با) بدان معنی است که وقتی n به ∞ میل می‌کند نسبت طرفین به ۱ میل کند. به علاوه، به ازای هر دو عدد صحیح نامنفی a و b ($b > a$) داریم

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^b \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \sim \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

(۱۱)

$$\beta = \frac{b - np + 0.5}{\sqrt{npq}}, \quad \alpha = \frac{a - np - 0.5}{\sqrt{npq}}$$

اثبات این قضیه را می‌توان در مرجع [H۴] یافت، ر.ک. ضمیمه ۱. در این اثبات نشان داده می‌شود که جمله 0.5 در α و β ، تصحیحی است که به‌خاطر استفاده از توزیع پیوسته به جای توزیع گسسته وارد شده است.

مسائل بخش ۱۰.۲۰

۱. نشان دهید که منحنی (۱) دارای دو نقطهٔ عطف با طولهای $x = \mu \pm \sigma$ است.
 ۲. نشان دهید که $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.
 ۳. فرض می‌کنیم X نرمال، با میانگین ۱۰ و واریانس ۴، باشد. مطلوب است $P(9 < X < 13)$ ، $P(X < 11)$ ، $P(X < 10)$ ، $P(x > 12)$.
 ۴. فرض کنیم X نرمال، با میانگین ۵۰ و واریانس ۹، باشد. c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم
- $$P(50 - c < X < 50 + c) = 50\%, \quad P(X > c) = 1\%, \quad P(X < c) = 5\%$$
۵. در مثال ۵، قسمت (ب) σ چه مقداری داشته باشد تا درصد ورقه‌های معیوب به ۱٪ تقلیل یابد؟
 ۶. در قسمت (ب)، مثال ۵، هرگاه ماشین تراش بهتری به کار ببریم به طوری که $\sigma = 0.01$ میلی‌متر باشد، انتظار چند درصد ورقه‌های معیوب باید داشته باشیم؟

۷. کارخانه‌ای پاکت پست هوایی تولید می‌کند؛ وزن این پاکتها نرمال، با میانگین $\mu = ۱۰۹۵$ گرم و انحراف معیار $\sigma = ۰.۰۵$ گرم است. پاکتها در بسته‌های ۱۰۰۰ تایی به فروش می‌رسند. در هر بسته چند پاکت دارای وزنی بیشتر از ۲ گرم خواهند بود؟
۸. در مسئله ۷، انتظار می‌رود در هر بسته صد تایی چه تعدادی از پاکتها دارای وزن ۲.۰۵ گرم یا بیشتر باشند؟
۹. سکه‌ای را ۴۰۴۰ بار پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه حداقل ۲۰۴۸ بار شیر بیاید چیست؟ در صورتی که شانس آوردن شیر و خط با هم برابر باشند (ر. ک. جدول ۶.۲۰ بخش ۵.۲۰).
۱۰. اگر X طول عمر نوعی باتری اتومبیل باشد که به‌طور نرمال، با میانگین ۳ سال و انحراف معیار ۱ سال، توزیع شده است، و کارخانه‌دار باتریهای تولیدی خود را ۲ سال تضمین کند؛ چه درصدی از باتریها باید به‌خاطر این تضمین پس گرفته شود؟
۱۱. مقاومت شکنندگی x [کیلوگرم] از یک نمونه خاص از قالبهای پلاستیکی به‌طور نرمال توزیع شده است با یک میانگین ۱۰۰۰ کیلوگرم و انحراف معیار ۷۵ گرم. ما کزیم باری را که می‌توان انتظار داشت تا اینکه بیشتر از ۵٪ قالبها نشکند چیست؟
۱۲. برای انجام کار معینی پیچهای به قطر ۰.۰۵ ± ۰.۰۰۲۶۰ سانتیمتر مورد نیاز است. هرگاه قطر پیچهای ساخته شده توسط کارخانه‌ای به‌طور نرمال، با $\mu = ۰.۰۲۵۹$ و $\sigma = ۰.۰۰۰۳$ ، توزیع شده باشد، چند درصد پیچهای ساخته شده قابل استفاده خواهد بود.
۱۳. جواب مسئله ۱۲ اگر $\sigma = ۰.۰۰۰۳$ به $\sigma = ۰.۰۰۳۰$ افزایش یابد (کیفیت تولید پایین بیاید)، چه تغییری پیدا می‌کند.
۱۴. کارخانه‌داری به‌تجربه آموخته است که مقاومت‌های تولیدی کاخانه‌اش دارای مقاومت نرمال، با میانگین $\mu = ۱۰۰$ اهم و انحراف معیار $\sigma = ۲$ اهم است. چه درصدی از مقاومتها دارای مقاومتی بین ۹۸ اهم و ۱۰۲ اهم خواهد بود؟ چه درصدی از آنها دارای مقاومتی بین ۹۵ اهم و ۱۰۵ اهم خواهد بود؟
۱۵. تولیدکننده‌ای لامپهای تولید شده را در بسته‌های ۱۰۰۰ تایی عرضه می‌کند. با استفاده از (۱۱)، حساب کنید احتمال آنکه هر کارتن شامل بیش از ۱٪ لامپ معیوب نباشد چقدر است، در صورتی که فرایند تولید یک آزمایش برنویی، $p = ۱\%$ ، باشد (پد احتمال معیوب بودن هر یک از لامپها است).
۱۶. اگر X نرمال، با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، $X -$ چه توزیعی خواهد داشت؟
۱۸. با بررسی $\Phi^2(\infty)$ و با استفاده از مختصات قطبی برای محاسبه انتگرال دوگانه،

ثابت کنید.

$$(۱۲) \quad \Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du = 1$$

۱۸. با استفاده از (۱۲) و انتگرالگیری به روش جزء به جزء، نشان دهید که در (۱)، σ انحراف معیار توزیع نرمال است.

۱۹. قضیه ۱ را ثابت کنید.

۲۰. (قانون اعداد بزرگ برنولی) فرض می‌کنیم در یک آزمایش تصادفی پیشامد A دارای احتمال p ($0 < p < 1$) باشد، و X تعداد دفعاتی باشد که A در n آزمایش مستقل رخ می‌دهد. نشان دهید که به ازای هر عدد مفروض $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1 \quad \text{وقتی که } n \rightarrow \infty$$

۱۱.۲۰ توزیعهای چند متغیر تصادفی

اگر در یک آزمایش تصادفی فقط به مشاهده یک کمیت پردازیم، باید به آن آزمایش یک متغیر تصادفی، مانند X ، وابسته کنیم. از بخش ۷.۲۰ به یاد داریم که تابع توزیع متناظر با X ، یعنی $F(x) = P(X \leq x)$ ، توزیع را کاملاً مشخص می‌کند، زیرا به ازای هر فاصله $a < X \leq b$

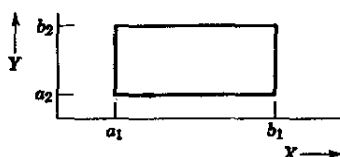
$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

هرگاه در یک آزمایش تصادفی به مشاهده دو کمیت پردازیم، باید به آن آزمایش دو متغیر تصادفی، مانند X و Y ، وابسته کنیم. مثلاً، X می‌تواند متناظر با سختی راکولی فولاد Y متناظر با کربن موجود در آن باشد. نتیجه هر آزمایش دو عدد $X = x$ ، $Y = y$ ، یا اجمالاً (x, y) را به دست می‌دهد، که می‌تواند به صورت نقطه‌ای در صفحه XY تصویر شود. حال مستطیل $a_1 < X \leq b_1$ ، $a_2 < Y \leq b_2$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۷۹). هرگاه احتمال متناظر با چنین مستطیلی را بدانیم،

$$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2),$$

آنگاه گوییم توزیع احتمال دوبعدی متغیرهای تصادفی X و Y یا متغیر تصادفی دوبعدی (X, Y) مشخص شده است. تابع

$$(۱) \quad F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y),$$



شکل ۳۷۹. تصور توزیع دوبعدی

تابع توزیع توزیع نامبرده یا تابع توزیع (X, Y) نامیده می‌شود. این تابع، توزیع را به طور یکتا مشخص می‌کند، زیرا (د. ک. مشاء ۱)

$$(2) \quad P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) \\ = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2).$$

توزیع دوبعدی و متغیر (X, Y) گسسته هستند هر گاه، (X, Y) دارای خواص زیر باشد:

(X, Y) تنها تعدادی متناهی یا نامتناهی شمارش پذیر از مقادیر (x, y) اختیار کند و احتمالاتی نظیر آنها مثبت باشند. به هر حوزه کرانداری^۱ که شامل چنین زوجیهایی نباشد احتمال ۰ مربوط شود.

فرض کنیم (x_i, y_j) یکی از این جفتهای بوده و داشته باشیم

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

p_{ij} می‌تواند به ازای زوجهای معینی از i و j صفر باشد). تابع

$$(3) \quad f(x, y) = \begin{cases} p_{ij} & x = x_i \text{ و } y = y_j \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

تابع احتمال (X, Y) نامیده می‌شود؛ در اینجا $i = 1, 2, \dots$ و $j = 1, 2, \dots$ به طور مستقل مقادیر خود را اختیار می‌کنند. مشابه با (۷)، بخش ۷.۲۰، تابع توزیع چنین می‌شود:

$$(4) \quad F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j),$$

و به جای فرمول (۳) از بخش ۷.۲۰ شرط زیر را خواهیم داشت:

$$(5) \quad \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$$

۱. یعنی حوزه‌ای که بتوان آن را داخل دایره‌ای با شعاع به اندازه کافی بزرگ جا داد.

مثلاً، هرگاه يك سكه ده‌ریالی و يك سكه ۵‌ریالی را يك بار پرتاب كنیم و متغیرهای تصادفی

X = تعداد شیرهایی که با سكه ۱۰ ریالی می‌آید،

Y = تعداد شیرهایی که با سكه ۵ ریالی می‌آید،

را در نظر بگیریم، آنگاه X و Y می‌توانند یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ را اختیار کنند و تابع احتمال چنین می‌شود:

$$f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = \frac{1}{4}$$

و به ازای سایر مقادیر $f(x, y) = 0$.

(X, Y) و توزیع آن را پیوسته می‌نامند هرگاه، تابع توزیع $F(x, y)$ را بتوان با انتگرال دوگانه

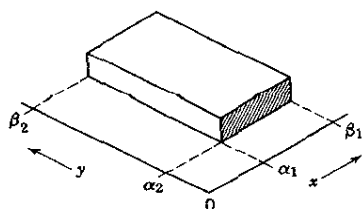
$$(۶) \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x^*, y^*) dx^* dy^*$$

نمایش داد، که در آن $f(x, y)$ در سراسر صفحه، احتمالاً جز روی تعدادی منتهای منحنی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته، تعریف شده، نامنفی و کراندار است. $f(x, y)$ را چگالی احتمال توزیع می‌نامند. نتیجه می‌شود

$$(۷) \quad P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy.$$

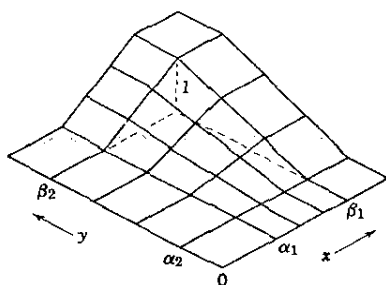
مثلاً (ر. ک. شکل ۳۸۰)

$$(۸) \quad f(x, y) = \begin{cases} 1/k & \text{وقتی } (x, y) \text{ در ناحیه } R \text{ باشد} \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$



شکل ۳۸۰. تابع چگالی احتمال

توزیع یکنواخت (رابطه شماره (۸))



شکل ۳۸۱. تابع توزیع یکنواخت
ارائه شده با (۸)

توزیع یکنواخت در مستطیل R نامیده می‌شود؛ در اینجا k ، مساحت R است، یعنی $k = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)$. تابع توزیع در شکل ۳۸۱ نشان داده شده است. در مورد متغیر تصادفی گسسته (X, Y) با تابع احتمال $f(x, y)$ ، ممکن است بخواهیم به محاسبه احتمال وقتی که X مقدار x ، و Y هر مقدار دلخواهی را اختیار کند، یعنی به محاسبه $P(X=x, Y \text{ دلخواه})$ بپردازیم. این احتمال تابعی مانند $f_1(x)$ ، از x ، خواهد بود، و داریم

$$(9) \quad f_1(x) = P(X=x, Y \text{ دلخواه}) = \sum_y f(x, y)$$

که در آن جمع روی همه مقادیر $f(x, y)$ که به ازای این مقدار x صفر نیستند صورت می‌گیرد. واضح است که $f_1(x)$ تابع احتمال توزیع احتمال یک متغیر تصادفی تنها است. این توزیع را **توزیع حاشیه‌ای X** نسبت به توزیع دو بعدی مفروض می‌نامند. این توزیع دارای تابع توزیع

$$(10) \quad F_1(x) = P(X \leq x, Y \text{ دلخواه}) = \sum_{x^* \leq x} f_1(x^*)$$

است. همین طور، تابع احتمال

$$(11) \quad f_2(y) = P(X \text{ دلخواه}, Y=y) = \sum_x f(x, y)$$

توزیع حاشیه‌ای Y نسبت به توزیع دو بعدی مفروض نامیده می‌شود. در (۱۱) جمع روی همه مقادیر $f(x, y)$ که به ازای مقدار متناظر y صفر نیستند صورت می‌گیرد. تابع توزیع این توزیع عبارت است از

$$(12) \quad F_2(y) = P(X \text{ دلخواه}, Y \leq y) = \sum_{y^* \leq y} f_2(y^*)$$

واضح است که هر دو توزیع حاشیه‌ای یک متغیر تصادفی گسسته (X, Y) گسسته هستند. جدول ۷.۲۰ شامل مثالی است که مطلب را روشن می‌کند. X تعداد «۱۲» و Y تعداد «۱۳» یا «۱» در استخراج ۳ کارت*، با جایگذاری، از یک دسته کارت ۵۲ تایی است. چون از ۵۲ کارت ۴ کارت ۱۲، ۴ کارت ۱۳ و ۴ کارت ۱ است. احتمال به دست آوردن یک ۱۲ در استخراج یک کارت برابر $1/13 = 4/52$ و احتمال استخراج یک ۱۳ یا یک ۱ برابر $1/13 = 4/52$ است. پس به این آزمایش تصادفی تابع احتمال

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3!}{x!y!(3-x-y)!} \left(\frac{1}{13}\right)^x \left(\frac{2}{13}\right)^y \left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y} & x+y \leq 3 \\ 0 & \text{به‌ازای سایر مقادیر} \end{cases}$$

نظیر می‌شود. جدول ۷.۲۰ مقادیر $f(x, y)$ ، $f_1(x)$ و $f_2(y)$ را نشان می‌دهد.

همین طور، در مورد متغیر تصادفی پیوسته (X, Y) با چگالی $f(x, y)$ ،

$$(Y \leq y, -\infty < X < \infty) \quad \text{یا} \quad (X \leq x, -\infty < Y < \infty)$$

را می‌توان مورد بررسی قرار داد واضح است که احتمال متناظر با این متغیر عبارت است از

$$F_1(x) = P(X \leq x, -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x^*, y) dy \right) dx^*$$

جدول ۷.۲۰

مقادیر توابع احتمال $f(x, y)$ ، $f_1(x)$ و $f_2(y)$ در استخراج ۳ کارت؛ با جایگذاری، از یک دسته کارت، X تعداد ۱۲، و Y تعداد ۱۳ یا کشیده شده است.

y	۰	۱	۲	۳	$f_1(x)$
x					
۰	$\frac{1000}{2197}$	$\frac{600}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	$\frac{1728}{2197}$
۱	$\frac{300}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{12}{2197}$	۰	$\frac{432}{2197}$
۲	$\frac{30}{2197}$	$\frac{6}{2197}$	۰	۰	$\frac{36}{2197}$
۳	$\frac{1}{2197}$	۰	۰	۰	$\frac{1}{2197}$
$f_2(y)$	$\frac{1331}{2197}$	$\frac{726}{2197}$	$\frac{132}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	

* منظور از یک دسته کارت، مجموعه‌ای از ۵۲ کارت سفید رنگ کاملاً مشابه است که روی سیزده‌تای آنها از ۱ تا ۱۳ به رنگ سیاه، روی سیزده‌تای دوم از ۱ تا ۱۳ به رنگ قرمز، روی سیزده‌تای سوم از ۱ تا ۱۳ به رنگ سبز روی سیزده‌تای آخر، از ۱ تا ۱۳ به رنگ آبی شماره گذاری شده است. - م.

با قرارداد

$$(۱۳) \quad f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

می توان نوشت

$$(۱۴) \quad F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(x^*) dx^*.$$

$f_1(x)$ چگالی و $F_1(x)$ تابع توزیع توزیع حاشیه ای X نسبت به توزیع پیوسته مفروض نامیده می شود. تابع

$$(۱۵) \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

چگالی و

$$(۱۶) \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^y f_2(y^*) dy^* = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y^*) dx dy^*$$

تابع توزیع توزیع حاشیه ای Y نسبت به توزیع دوطرفه مفروض نامیده می شود. می بینیم که هر دو توزیع حاشیه ای يك توزیع پیوسته هستند.

X و Y ، متغیرهای تصادفی توزیع دوطرفه (X, Y) ، با تابع توزیع $F(x, y)$ ، مستقل نامیده می شوند هر گاه تساوی

$$(۱۷) \quad F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

به ازای هر (x, y) برقرار باشد. درغیراین صورت دومتغیر وابسته هستند.

فرض می کنیم X و Y هر دو گسسته یا هر دو پیوسته باشند. آنگاه X و Y مستقل هستند اگر و تنها اگر توابع احتمال متناظر با آنها یا چگالیهای $f_1(x)$ و $f_2(y)$ به ازای هر مقدار (x, y) در تساوی

$$(۱۸) \quad f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

صدق کنند، ر. ک. مسئله ۲. مثلاً، متغیرها در جدول ۷.۲۰ وابسته هستند. متغیرهای X = تعداد شیرها در پرتاب يك سکه ده ریالی Y = تعداد شیرها در پرتاب يك سکه ۵ ریالی در پرتاب يك سکه ده ریالی و يك سکه ۵ ریالی مقادیر ۰ یا ۱ را اختیار می کنند و مستقل هستند.

مفاهیم استقلال و وابستگی را می توان به n متغیر تصادفی توزیع n بعدی $(X_1, \dots, X_n)$ ، با تابع توزیع

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n),$$

تعمیم داد. این متغیرهای تصادفی مستقل نامیده می شوند هر گاه به ازای هر $(x_1, \dots, x_k)$

$$(۱۹) \quad F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \cdots F_n(x_n),$$

که در آن $F_j(x_j)$ تابع توزیع حاشیه‌ای X_j است، یعنی

$$F_j(x_j) = P(X_j \leq x_j, \text{ دلخواه } X_k, k \neq j)$$

درغیر این صورت، این متغیرهای تصادفی را وابسته می‌نامند.

فرض می‌کنیم (X, Y) یک متغیر تصادفی با تابع احتمال یا چگالی $f(x, y)$ و تابع توزیع $F(x, y)$ باشد، و $g(x, y)$ تابع پیوسته دلخواهی باشد که به ازای هر (x, y) تعریف شده است و ثابت نیست. آنگاه $Z = g(X, Y)$ نیز یک متغیر تصادفی است. مثلاً هرگاه دو تاس را پرتاب کنیم و X عدد مربوط به تاس اول و Y عدد مربوط به تاس دوم باشد، آنگاه $Z = X + Y$ مجموع آن دو عدد است (دک. شکل ۳۷۱، بخش ۷۰۲۰). هرگاه $(X_1, \dots, X_n)$ یک متغیر تصادفی n بعدی باشد و $g(x_1, \dots, x_n)$ تابع پیوسته‌ای باشد که به ازای هر $(x_1, \dots, x_n)$ تعریف شده است و ثابت نیست، آنگاه $Z = g(X_1, \dots, X_n)$ نیز یک متغیر تصادفی است.

درحالتی که (X, Y) یک متغیر تصادفی گسسته باشد می‌توان، $f(z)$ ، تابع احتمال $Z = g(X, Y)$ را با جمع کردن همه $f(x, y)$ هایی که به ازای آنها $g(x, y)$ برابر مقدار z مورد نظر است به دست آورد؛ بنابراین

$$(۲۰) \quad f(z) = P(Z = z) = \sum_{g(x,y)=z} f(x, y).$$

تابع توزیع Z عبارت است از

$$(۲۱) \quad F(z) = P(Z \leq z) = \sum_{g(x,y) \leq z} f(x, y),$$

که در آن همه مقادیر $f(x, y)$ را که به ازای آنها $g(x, y) \leq z$ ، باهم جمع می‌کنیم. به همین نحو درمورد متغیر تصادفی پیوسته (X, Y) داریم

$$(۲۲) \quad F(z) = P(Z \leq z) = \iint_{g(x,y) \leq z} f(x, y) dx dy$$

که در آن به ازای هر z ، بر روی ناحیه $g(x, y) \leq z$ در صفحه xy انتگرال می‌گیریم.
عدد

$$(۲۳) \quad E(g(X, Y)) = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y) & [X, Y] \text{ گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy & [X, Y] \text{ پیوسته} \end{cases}$$

امید ریاضی یا اجمالا امید $g(X, Y)$ نامیده می‌شود. در اینجا فرض می‌شود که سری دوگانه مطلقاً همگراست و انتگرال $|g(x, y)| f(x, y)$ بر صفحه xy وجود دارد. فرمول

$$(۲۴) \quad E(ag(X, Y) + bh(X, Y)) = aE(g(X, Y)) + bE(h(X, Y))$$

را می‌توان به روشی مشابه آنچه در مسئله ۱۹، بخش ۸.۲۰، مورد استفاده قرار گرفت ثابت کرد. يك مورد خاص مهم عبارت است از $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ ، و با استقرا نتیجه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۱ (جمع میانگینها)

میانگین (امید) مجموع متغیرهای تصادفی با مجموع میانگینها (امیدها) برابر است، یعنی

$$(۲۵) \quad E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

به علاوه، به آسانی به دست می‌آوریم

قضیه ۲ (ضرب میانگینها)

میانگین (امید) حاصل ضرب متغیرهای تصادفی مستقل با حاصل ضرب میانگینها (امیدها) برابر است، یعنی

$$(۲۶) \quad E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) E(X_2) \dots E(X_n)$$

اثبات. اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند (هر دو گسسته یا هر دو پیوسته)، آنگاه $E(XY) = E(X)E(Y)$. در واقع، در حالت گسسته داریم

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy f(x, y) = \sum_x x f_1(x) \sum_y y f_2(y) = E(X)E(Y),$$

و در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته رابطه به همین شکل است. از تعمیم این رابطه به n متغیر تصادفی مستقل، (۲۶) حاصل می‌شود، و قضیه ۲ به اثبات می‌رسد. ▲

اکنون جمع واریانسها را مورد بحث قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم $Z = X + Y$ ، و μ و σ^2 میانگین و واریانس Z باشند. نخست داریم (ر. ک. مسئله ۱۶، بخش ۸.۲۰)

$$\sigma^2 = E([Z - \mu]^2) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

از (۲۴) نتیجه می‌شود که جمله اول طرف راست برابر است با

$$E(Z^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2),$$

و برای جمله دوم طرف راست، از قضیه ۱ به دست می‌آوریم

$$[E(Z)]^2 = [E(X) + E(Y)]^2 = [E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2.$$

با جایگزین کردن این عبارات در فرمول σ^2 داریم

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &\quad + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]. \end{aligned}$$

از مسئله ۱۶، بخش ۸۰۲۰، مشاهده می‌کنیم که عبارت سمت راست سطر اول مجموع واریانسهای X و Y است که به ترتیب با σ_1^2 و σ_2^2 نمایش داده می‌شوند. کمیت

$$(27) \quad \sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

کوواریانس X و Y نامیده می‌شود. در نتیجه داریم

$$(28) \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{XY}$$

اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه $E(XY) = E(X)E(Y)$ ؛ در نتیجه $\sigma_{XY} = 0$ ، و

$$(29) \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

با تعمیم این قضیه برای بیش از دو متغیر، نتیجه می‌گیریم

قضیه ۳ (جمع واریانسها)

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی مستقل با مجموع واریانسهای این متغیرها برابر است.

مسائل بخش ۱۱۰۲۰

۱. (۲) را ثابت کنید.

۲. حکمی را که رابطه (۱۸) را دربردارد ثابت کنید.

۳. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

نمودار f و تابع توزیع مربوط به آن را رسم کنید.

۴. توزیهای حاشیه‌ای توزیع مربوط به شکل ۳۸۰ و ۳۸۱ را بیابید.

۵. دستگاهی تشکیل شده از چهار چرخ دنده که بامیله به هم وصل شده‌اند. میانگین ضخامت چرخ دنده‌ها ۵۰۲۰ سانتیمتر و انحراف معیار آنها ۰۰۰۳ است. میانگین میله‌ها ۰۰۴۰ سانتیمتر و انحراف معیار آنها ۰۰۰۲ است. مطلوب است میانگین و انحراف معیار دستگاهی مرکب از ۴ چرخ دنده و ۳ میله که به تصادف انتخاب شده‌اند.

۶. فرض می‌کنیم X [سانتیمتر] و Y [سانتیمتر] به ترتیب قطرهای يك پین و حفره باشند. گیریم (X, Y) دارای چگالی

$$f(x, y) = \begin{cases} 2500 & 0.99 < x < 1.01 \text{ و } 1.00 < y < 1.02 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد. (الف) توزیعهای حاشیه‌ای را پیدا کنید. (ب) احتمال آنکه پینی که به تصادف انتخاب می‌شود مناسب حفره‌ای به قطر ۱.۰۰ باشد چقدر است؟

۷. مطلوب است $P(X > Y)$ در صورتی که (X, Y) دارای چگالی

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد.

۸. مطلوب است چگالیهای توزیعهای حاشیه‌ای مربوط به مسئله ۷.

۹. يك وسیله الکتریکی از دو قسمت تشکیل شده است. گیریم X و Y [بر حسب ماه] مدت زمانهایی باشند که پس از طی آنها به ترتیب جزء اول و جزء دوم خراب می‌شوند. فرض می‌کنیم (X, Y) دارای چگالی احتمال

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.01e^{-0.1(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد. (الف) X و Y وابسته هستند یا مستقل؟ (ب) مطلوب است چگالیهای توزیعهای حاشیه‌ای. (ج) احتمال آنکه جزء اول دارای طول عمری برابر ۱۰ ماه یا بیشتر باشد چقدر است؟

۱۰. فرض می‌کنیم (X, Y) دارای تابع احتمال $f(0, 0) = f(1, 1) = 3/8$ ، $f(0, 1) = f(1, 0) = 1/8$ است. آیا X و Y مستقل هستند؟

۱۱. مثالی از دو توزیع گسسته مختلف ارائه دهید که دارای توزیعهای حاشیه‌ای یکسان باشند.

۱۲. نشان دهید دو متغیر تصادفی که دارای چگالیهای $f(x, y) = x + y$ و $g(x, y) = (x + 1/2)(y + 1/2)$ وقتی که $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ هستند، توزیعهای حاشیه‌ای یکسان دارند.

۱۳. فرض می‌کنیم $(\bar{X}, \bar{Y})$ دارای چگالی

$$f(x, y) = \begin{cases} k & x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد. k را مشخص کنید. چگالیهای توزیعهای حاشیه‌ای را پیدا کنید. مطلوب است

$$P(X^2 + Y^2 < 1/2).$$

۱۴. با استفاده از قضیه ۱، فرمولی برای μ ، میانگین توزیع دوجمله‌ای، به دست آورید.

۱۵. با استفاده از قضیه ۳، فرمولی برای σ^2 ، واریانس توزیع دوجمله‌ای، به دست آورید.

۱۲۰۲۰ نمونه‌گیری تصادفی. اعداد تصادفی

بخشهای قبل (۳۰۲۰ تا ۱۱۰۲۰) به نظریه احتمال اختصاص داشتند و بخشهای باقیمانده (۱۲۰۲۰ تا ۲۰۰۲۰) به بحث درمورد آمار اختصاص یافته‌اند. نظریه احتمال به آفریدن مدل‌های ریاضی برای جامعه کمک می‌کند، و روشهای آماری که مورد بحث قرار می‌گیرند روابطی بین مطالب نظری و واقعتهای قابل مشاهده، نتایجی که درمورد جامعه از طریق مطالعه نمونه‌ها گرفته می‌شود (استنباط آماری؛ ر. ک. بخش ۱۰۲۰)، به دست می‌دهند. تا اینجا دانستن اینکه نمونه‌ای از یک جامعه انتخابی از جامعه است (مثلاً بخش ۱۰۲۰ را ببینید) کافی بود، اما اکنون دیگر باید این مفهوم را به شکل دقیقی تعریف کنیم. در واقع، برای آنکه درمورد جامعه‌ای از نمونه‌ها اطلاعات با معنی به دست آوریم لازم است که هر نمونه یک انتخاب تصادفی باشد؛ یعنی هر عضو جامعه باید احتمال معینی برای وارد شدن در نمونه داشته باشد. این شرط باید (لااقل تقریباً) برقرار باشد در غیر این صورت روشهای مورد بحث ممکن است به نتایجی کاملاً بی‌معنی و گسره‌کننده منجر شوند.

اگر فضای نمونه نامتناهی باشد، مقادیر نمونه مستقل خواهند بود، یعنی نتایج n اجرای یک آزمایش تصادفی که برای به دست آوردن n مقدار نمونه انجام می‌شوند روی هم تأثیری نخواهند داشت. البته این موضوع درمورد نمونه‌هایی که از یک جامعه نرمال انتخاب می‌شوند درست است. اگر فضای نمونه متناهی باشد، در صورتی که نمونه‌گیری با جایگذاری باشد، باز هم مقادیر نمونه مستقل خواهند بود؛ عملاً هرگاه بدون جایگذاری نمونه‌گیری کنیم و حجم نمونه را نسبت به حجم جامعه ناچیز بگیریم (مثلاً نمونه‌های ۵ یا ۱۰ مقداری از جامعه ۱۰۰۰۰ مقداری) مقادیر نمونه عملاً مستقل خواهند بود. در هر صورت، اگر بدون جایگذاری نمونه‌گیری کنیم و نمونه‌های بزرگی از یک جامعه متناهی انتخاب کنیم، در چنین حالتی است که وابستگی پیش می‌آید.

فراهم آوردن شرایط لازم برای آنکه نمونه‌ای انتخاب تصادفی باشد کار ساده‌ای نیست، زیرا عوامل ظریف بسیاری از انواع گوناگون وجود دارند که می‌توانند در نتایج نمونه‌گیری تأثیر بگذارند. مثلاً، هرگاه خریداری بخواهد قبل از خرید کالایی نمونه‌ای ۱۰ تایی از یک بسته ۸۰ تایی انتخاب و بررسی کند، در عمل این ۱۰ کالا را چگونه انتخاب کند تا مطمئن باشد که تمام (۱۰۰٪) نمونه‌ای که او می‌تواند انتخاب کند دارای احتمالات برابر باشند؟

برای حل این مسئله روشهایی به وجود آمده است، و ما اکنون به تشریح یکی از آنها که کاربرد زیاد دارد می پردازیم.

کالاها را از ۱ تا ۸۰ شماره گذاری می کنیم. آنگاه با استفاده از جدول A۱۰، ضمیمه ۴، که شامل اعداد تصادفی ساخته شده از مجموعه های **ارقام تصادفی** است، ۱۰ تا از آنها را به شرح زیر جدا می کنیم. ابتدا عددی بین ۵ تا ۹۹ به عنوان شماره سطر به تصادف انتخاب می کنیم. برای این منظور می توان سکه ای را ۷ بار پرتاب کرد و با شیره و با خط ۱ را متناظر قرار داد، بدین طریق عددی ۷ رقمی درمبنای ۲ به دست می آید که یکی از اعداد ۱، ۵، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰ را نمایش می دهد و احتمال به دست آمدن این اعداد با هم برابر است. اگر این عدد ۱، ۵، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰ باشد آن را مورد استفاده قرار می دهیم و در غیر این صورت کنارش گذاشته پرتاب سکه را تکرار می کنیم. سپس برای شماره ستون عددی بین ۵ و ۹ با نوشتن عددی ۴ رقمی درمبنای ۲ به روشی مشابه انتخاب می کنیم. فرض می کنیم به ترتیب اعداد (۲۶ = ۵۰۱۱۰۱۰) و (۷ = ۵۱۱۱) را به دست آورده ایم. در سطر ۲۶ و ستون ۷ جدول A۱۰ مقدار ۴۴۹۷۳ را می یابیم. دورقم اول، یعنی ۴۴، را نگه می داریم. حالا از ۴۴۹۷۳ شروع کرده، به طرف پایین ستون حرکت می کنیم؛ از هر عدد تنها دورقم اول را نگه می داریم، بدین طریق خواهیم داشت

۴۴ ۴۴ ۸۳ ۹۱ ۵۵ و غیره.

اعداد بزرگتر از ۸۰ و اعدادی را که برای دومین بار پیش می آیند حذف می کنیم و این کار را ادامه می دهیم تا ۱۰ عدد به شرح زیر حاصل شود:

۴۴ ۵۵ ۵۳ ۵۲ ۶۱ ۶۷ ۷۸ ۳۹ ۵۴.

ده کالایی که این ده شماره را دارند انتخاب مورد نظر را تشکیل می دهند. جدول بزرگتری از ارقام تصادفی در مرجع [۱۵]، ضمیمه ۱، معرفی شده است. در هر صورت، ممکن است در مورد نمونه های بزرگتر استفاده از چنین جدولهایی ملال آور باشد که می توان آنها را تحت عنوان **مولد اعداد تصادفی** در بسیاری از مخازن در زبانهای کامپیوتری و زیر برنامه ها یافت. به مراجع [H۷] و [H۱۱]، از ضمیمه ۱، مراجعه شود.

مسائل بخش ۱۲.۲۰

۱. فرض کنید در مثال متن از سطر ۸۳ و ستون ۲ی جدول A۱۰، ضمیمه ۴، شروع کنیم، و به طرف بالا حرکت کنیم. بدین صورت چه کالاهایی در نمونه ۱۰ عضوی قرار خواهند گرفت؟

۲. با استفاده از جدول A۱۰، ضمیمه ۴، نمونه ای به حجم ۲۰ از يك دسته ۲۵۰ تایی جدا کنید.

۳. چطور می‌توان از يك تاس سالم برای انتخاب تصادفی استفاده کرد؟

۴. متغیر تصادفی Y با چگالی یکنواخت

$$f(y) = \begin{cases} 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان Y (یعنی مقادیر نمونه Y را با استفاده از رقمهای تصادفی شبیه‌سازی کرد مثلاً، برای به دست آوردن ۲۰ مقدار که تا دو رقم اعشار گرد شده‌اند یکی از ۱۰ ستون جدول A۱۰ را در نظر بگیرید، سطر i را به تصادف انتخاب کرده و ضمن حرکت به طرف پایین، تنها دو رقم اول هر عدد پنج رقمی را برمی‌داریم و سمت چپ رقم اول ممیز می‌گذاریم. فرض کنید انتخاب شما ستون ۳ و سطر ۳۶ باشد. نشان دهید که نمونه زیر به دست می‌آید و نمودار فراوانی نقطه‌ای آن را رسم کنید

۰٫۱۲ ۰٫۳۸ ۰٫۲۰ ۰٫۰۶ ۰٫۸۶ ۰٫۸۷ ۰٫۸۶ ۰٫۶۷ ۰٫۴۰ ۰٫۸۹
۰٫۹۸ ۰٫۵۳ ۰٫۸۵ ۰٫۱۹ ۰٫۹۰ ۰٫۰۸ ۰٫۱۰ ۰٫۵۳ ۰٫۵۰ ۰٫۶۸

۵. رقمهای تصادفی را می‌توان برای شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی پیوسته نیز مورد استفاده قرار داد. به این منظور نمودار تابع توزیع متغیر پیوسته X را رسم می‌کنیم، با استفاده از رقمهای تصادفی مقادیری از متغیر تصادفی Y را که در مسئله ۴ توصیف شده به دست می‌آوریم، این مقادیر را روی محور قائم مشخص کرده و مقادیر متناظر X را می‌خوانیم. این کار را برای يك متغیر تصادفی نرمال X با میانگین ۰ و واریانس ۱، با استفاده از نمونه ذکر شده در مسئله ۴، انجام دهید. بافت نگار نمونه‌ای با ۲۰ مقدار X را، با استفاده از نماینده‌های رده‌ای ۲-، ۱-، ۰، ۱، ۲، رسم کنید.

۶. روش شبیه‌سازی تشریح شده در مسئله ۴ را می‌توان برای متغیرهای تصادفی گسسته نیز به کار گرفت. اگر X مجموع دوشماره به دست آمده در ریختن دو تاس سالم باشد، چگونه باید عمل کرد (ر. ک. شکل ۳۷۱، بخش ۷.۲۰)؟

۱۳.۲۰ برآورد پارامترها

کمیت‌هایی که در توزیع‌ها وارد می‌شوند، مانند p که در توزیع دو جمله‌ای وارد شد و μ و σ که در توزیع نرمال وارد شدند، پارامتر نامیده می‌شوند.

برآورد نقطه‌ای يك پارامتر عددی است (نقطه‌ای است واقع بر محور حقیقی) که از نمونه‌ای مفروض محاسبه می‌شود و همچون تقریبی از يك مقدار دقیق پارامتر به کار می‌رود.

بر آورد فاصله‌ای فاصله‌ای است («فاصله اطمینان»ی است) که از يك نمونه به دست می‌آید؛ چنین برآوردهایی در بخش بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بر آورد پارامترها در عمل مسئله مهمی است.

می‌توان میانگین $\bar{x}$ را تقریبی از میانگین μ ی جامعه در نظر گرفت. به این ترتیب بر آورد $\mu = \bar{x}$ برای μ حاصل می‌شود، یعنی

$$(۱) \quad \mu = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \quad (n = \text{تعداد اعضای نمونه})$$

به همین نحو، بر آورد σ^2 برای واریانس جامعه را می‌توان واریانس s^2 ی نمونه متناظر گرفت، یعنی

$$(۲) \quad \sigma^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2.$$

واضح است که (۱) و (۲) بر آورد پارامترهای توزیعی هستند که در آنها μ یا σ^2 صریحاً به صورت پارامتر ظاهر می‌شوند، مانند توزیعهای نرمال و پواسن. در مورد توزیع دو جمله‌ای، $p = \mu/n$ [ر. ک. (۳)، بخش ۹.۲۰]. در این حالت، هرگاه A پیشامدی که احتمال آن p است در آزمایش j ام روی دهد، آنگاه در (۱) قرار می‌دهیم $x_j = 1$ ؛ و هرگاه A در آزمایش j ام روی ندهد، قرار می‌دهیم $x_j = 0$. بنابراین از (۱) برای p بر آورد

$$(۳) \quad p = \frac{\bar{x}}{n}$$

حاصل می‌شود.

متذکر می‌شویم که (۱) حالت بسیار خاصی است از روشی که روش گشتاورها نامیده می‌شود. در این روش پارامترهایی که باید بر آورد شوند بر حسب گشتاورهای توزیع بیان می‌شوند (ر. ک. بخش ۸.۲۰). در فرمولهای حاصل این گشتاورها با گشتاورهای متناظر نمونه جایگزین می‌شوند و در نتیجه برآوردهای مطلوب به دست می‌آیند. در اینجا گشتاور k ام نمونه $x_1, \dots, x_n$ عبارت است از

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k.$$

روش دیگر به دست آوردن بر آورد درست نمایی ماکزیمم آر. ای. فیشر نام دارد.* برای تشریح این روش به بررسی متغیر تصادفی گسسته (یا پیوسته) X که تابع احتمال (یا چگالی) آن، $f(x)$ ، تنها به پارامتر θ بستگی دارد و نمونه متناظری با n مقدار

مستقل $x_1, \dots, x_n$ می گیرد می پردازیم. در حالت گسسته احتمال آنکه نمونه ای به حجم n دقیقاً از همان n مقدار تشکیل شده باشد عبارت است از

$$(۴) \quad l = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n).$$

در حالت پیوسته احتمال آنکه نمونه مرکب از مقادیری باشد که در فاصله کوچک $x_i \leq x \leq x_i + \Delta x$ قرار دارند عبارت است از

$$(۵) \quad f(x_1) \Delta x f(x_2) \Delta x \dots f(x_n) \Delta x = l(\Delta x)^n$$

چون $f(x_i)$ به θ بستگی دارد، تابع l به $x_1, \dots, x_n$ و θ وابسته است. فرض می کنیم $x_1, \dots, x_n$ مفروض و مشخص باشند. آنگاه l تابعی از θ است، که تابع درست نمایی نامیده می شود. ایده اساسی روش درست نمایی ماکزیم خیلی ساده است و به شرح زیر بیان می شود. تقریبی برای مقدار مجهول θ انتخاب می کنیم که برای آن l تا آنجا که ممکن است بزرگ باشد. اگر l تابع مشتق پذیری از θ باشد، شرط لازم برای آنکه l دارای ماکزیممی (غیر واقع بر کرانه) باشد عبارت است از

$$(۶) \quad \frac{\partial l}{\partial \theta} = 0$$

(چون l به $x_1, \dots, x_n$ نیز وابسته است از علامت مشتق جزئی استفاده کرده ایم.) جوابی از (۶) را که به $x_1, \dots, x_n$ وابسته است بر آورد دست نمایی ماکزیم برای θ می نامند. می توانیم (۶) را چنین بنویسیم:

$$(۷) \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta} = 0$$

زیرا $f(x) \geq 0$ ، در حالت کلی ماکزیم f مثبت است، و $\ln l$ تابعی صعودی یکنوا از l است. این موضوع اغلب محاسبات را ساده تر می کند.

هرگاه توزیع X شامل r پارامتر $\theta_1, \dots, \theta_r$ باشد، آنگاه به جای (۶)، r شرط $\partial l / \partial \theta_1 = 0, \dots, \partial l / \partial \theta_r = 0$ را داریم، و به جای (۷) داریم

$$(۸) \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_1} = 0, \dots, \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_r} = 0$$

مثال ۱. توزیع نرمال

مطلوب است بر آورد درست نمایی ماکزیم برای μ و σ در مورد توزیع نرمال. از (۱)، بخش ۱۰.۲، و (۴) به دست می آوریم

$$l = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \left(\frac{1}{\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad \text{که در آن} \quad h = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

با لگاریتم گیری، می‌یابیم

$$\ln l = -n \ln \sqrt{2\pi} - n \ln \sigma - h.$$

اولین معادله (۸) عبارت است از $\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = 0$ ، که می‌شود آن را چنین نوشت:

$$\sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0 \quad \text{بنابراین} \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = -\frac{\partial h}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$$

جواب این معادله برآورد μ برای μ است؛ خواهیم داشت

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

معادله دوم (۸) عبارت است از $\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = 0$ ، که چنین نوشته می‌شود

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{\partial h}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$$

با گذاشتن μ به جای $\hat{\mu}$ و حل آن بر حسب σ^2 ، برآورد زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

که در بخش ۱۸.۲۰ مورد استفاده قرار خواهد گرفت. توجه کنید که این با (۲) تفاوت دارد. در اینجا مانمی‌توانیم محک‌های نیکویی برآورد را تشریح کنیم، ولی بدنیست متذکر شویم که به ازای n های کوچک، فرمول (۲) مناسبتراست.

برای به دست آوردن برآوردهای توان از روشهای نموداری استفاده کرد. به عنوان یک مورد مهم، توزیع نرمال را مورد بررسی قرارداد و برآوردهای μ و σ را برای نمونه $x_1, \dots, x_n$ به دست می‌آوریم. با توجه به (۵)، بخش ۱۰.۲۰، می‌دانیم که تابع توزیع توزیع نرمال عبارت است از

$$F(x) = \Phi(z), \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

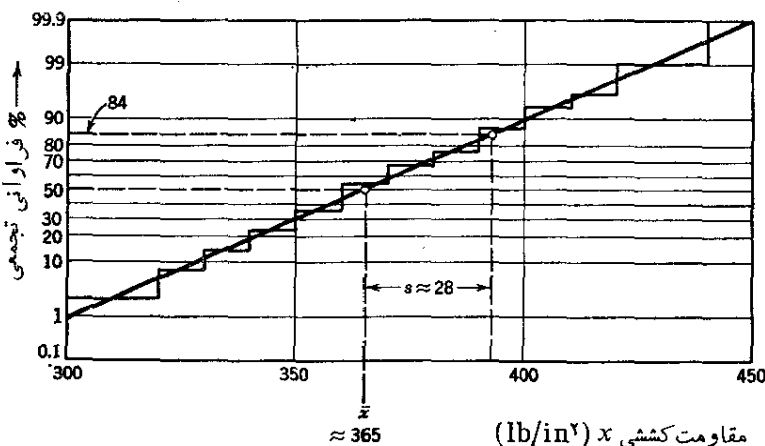
شکل ۳۷۷، بخش ۱۰.۲۰، نشان می‌دهد که منحنی مربوط S -شکل بوده و خط ۵۰٪ را در $z = 0$ ، یعنی در $x = \mu$ یا $x = \mu$ ، قطع می‌کند. به علاوه، با توجه به جدول A_9 ، ضمیمه ۴، مشاهده می‌کنیم که وقتی $z = 1$ (تقریباً) $\Phi = 84\%$. از این رو $(x - \mu)/\sigma = 1$ ، یعنی $x = \mu + \sigma$. با توجه به مطالب بالا روش زیر ارائه می‌شود:

نمودار تابع توزیع نمونه مورد نظر را رسم می‌کنیم و به کمک چشم منحنی S -شکل C

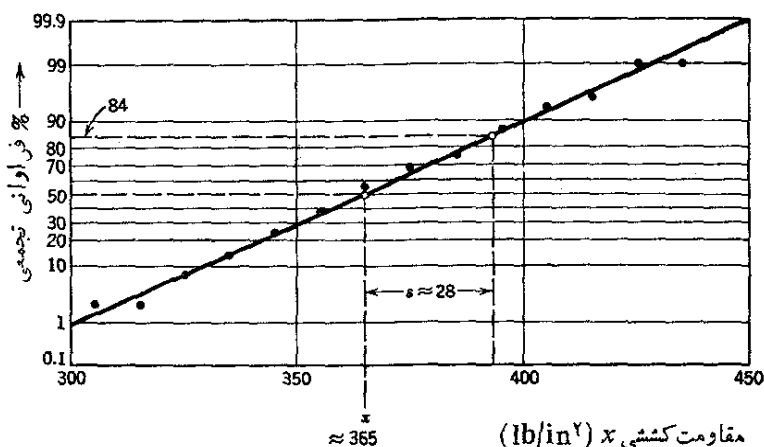
را به آن برآزانیید. فرض می‌کنیم x_0 و x_1 به ترتیب طولهای نقاط تقاطع C و خطوط ۵۰٪ و ۸۴٪ باشند. آنگاه x_0 برآوردی برای μ و $x_1 - x_0$ برآوردی برای σ است. این روش را می‌توان اصلاح کرد مقیاس قائم را می‌توان طوری «فشرده کرد» که منحنی S - شکل $F(x)$ به صورت خط راست درآید. کاغذی را که چنین مقیاس مختصاتی روی آن به کار رفته باشد کاغذ احتمال نرمال می‌نامند. امتیاز استفاده از این کاغذها روشن است، زیرا اکنون نیازی به برآزاندن خط مستقیم داریم، که از برآزاندن منحنی S - شکل ساده‌تر است شکل ۳۸۲ مثالی را نشان می‌دهد، در این مثال داریم $\bar{x} \approx 365$ (گردشده ۳۶۴٫۷) و $s \approx 27$ (گردشده ۲۶٫۸ $\approx \sqrt{720}$). صفحه بعد را ببینید.

اگر مقادیر نمونه به فاصله‌های مساوی از هم قرار داشته باشند (مانند جدول ۲۰۲۰)، می‌توان صرفاً با مشخص کردن مقادیر فراوانیهای نسبی به صورت نقاطی روی کاغذ احتمال و برآزاندن يك خط مستقیم «با چشم» تا آنجا که ممکن است، کار را ساده‌تر کرد، از شکل ۳۸۲ واضح است که اگر نقطه‌ای مربوط به هر مقدار را بالاتر از مقدار $\bar{x}$ متناظر انتخاب کنیم، مرتکب يك خطای سیستماتیک خواهیم شد زیرا خطی که به دست می‌آید بالاتر از خطی که در شکل ۳۸۲ دیده می‌شود خواهد بود. برای جبران این اثر، هر مقدار را به اندازه $1/2$ فاصله $\bar{x}$ های متوالی بالاتر از مقدار $\bar{x}$ تصور می‌کنیم. (در جدول ۲۰۲۰ این فاصله برابر $5 = 10/2$ است.) به این ترتیب شکل ۳۸۳ نتیجه می‌شود.

به همین نحو، اگر نمونه گروه‌بندی شده باشد، نمودار فراوانیهای نسبی تجمعی را به صورت نقاطی که درست بالای نقاط انتهایی راست فواصل رده‌ای (نه بالای نماینده رده) هستند ترسیم کرده، آنگاه «به کمک چشم» خط راستی به این نقاط می‌برازانیم. کاغذ احتمال نرمال را می‌توان برای کنترل اینکه نمونه‌ای به يك جامعه نرمال مربوط



شکل ۳۸۲. تابع توزیع نمونه جدول ۲۰۲۰ که روی کاغذ احتمال رسم شده است



شکل ۳۸۳. فراوانیهای نسبی تجمعی نمونه ذکر شده در جدول ۲.۲۰ که روی کاغذ احتمال ترسیم شده است

است یا نه مورد استفاده قرارداد. آزمونی برای این مسئله در بخش ۱۸.۲۰ بررسی می شود.

مسائل بخش ۱۳.۲۰

۱. مطلوب است برآورد درست نمایی ماکزیمم پارامتر μ ی توزیع نرمالی که واریانس $\sigma^2 = \sigma_0^2$ آن را می دانیم.

۲. روش درست نمایی ماکزیمم را برای توزیع نرمالی با $\mu = 0$ به کار ببرید.

۳. مطلوب است برآورد درست نمایی ماکزیمم θ در چگالی

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

۴. در مسئله ۳، میانگین μ را بیابید، آن را در $f(x)$ بگذارید، برآورد درست نمایی ماکزیمم μ را پیدا کنید، و نشان دهید که مقدار آن با برآورد μ ی که می توان از θ مسئله ۳ به دست آورد یکی است.

۵. برآورد درست نمایی ماکزیمم را برای پارامتر p در توزیع دو جمله ای به دست آورید.

۶. روش درست نمایی ماکزیمم را برای توزیع پواسن به کار ببرید. با استفاده از کاغذ احتمال، μ و σ را برای نمونه داده شده ای برآورد کنید، با فرض

آنکه نمونه مزبور از جامعه‌ای که به طریق نرمال توزیع شده آمده است.

۷. نمونه مثال ۱، بخش ۳۰۲۰.

۸. نمونه (دسته بندی نشده) جدول ۳۰۲۰، بخش ۲۰۲۰.

۹. نمونه دسته بندی شده جدول ۴۰۲۰، بخش ۲۰۲۰.

۱۰. نمونه مثال ۱، بخش ۲۰۲۰.

۱۴۰۲۰ فاصله اطمینان

بخش قبل به برآوردهای نقطه‌ای پارامترها اختصاص داشت، در این بخش می‌خواهیم برآوردهای فاصله‌ای را مورد بحث قرار دهیم.

هروقت فرمولهای تقریبی ریاضی را مورد استفاده قرار می‌دهیم، باید سعی کنیم حداکثر انحرافی را که مقدار تقریبی می‌تواند از مقدار واقعی نامعلوم داشته باشد بیاوریم. مثلاً، در روشهای انتگرالگیری عددی «فرمولهای خطایی» وجود دارند که می‌توان به کمک آنها بیشترین خطای ممکن (یعنی، بیشترین اختلاف بین مقدار تقریبی و مقدار واقعی) را محاسبه کرد. فرض کنید در یک مورد معینی 2447 را به عنوان مقدار تقریبی يك انتگرال داده شده و $2052 \pm$ را به عنوان بیشترین انحراف ممکن از مقدار دقیق نامعلوم به دست آوریم. در این صورت فاصله بین مقادیر $245 = 2447 - 2052$ و $249 = 2447 + 2052$ مطمئناً «شامل» مقدار دقیق نامعلوم هست.

برای برآورد پارامتری مانند θ ، باید دو مقدار عددی تعیین کرد که بستگی به مقادیر نمونه داشته باشند و فاصله بین آنها به طور قطع شامل مقدار نامعلوم پارامتر باشد. در هر صورت، قبلاً آموختیم که از يك نمونه نمی‌توان در مورد جامعه به نتایجی رسید که ۱۰۰٪ مطمئن باشند. بنابراین ما جانب اعتدال را نگهداشته و مسئله را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم.

احتمالی مانند γ که به ۱ نزدیک باشد (مثلاً ۹۵٪ و $\gamma = 99\%$ ، یا نظیر آنها) انتخاب می‌کنیم. آنگاه دو مقدار θ_1 و θ_2 را طوری بر می‌گزینیم که احتمال آنکه $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ دقیقاً شامل مقدار دقیق نامعلوم پارامتر θ باشد مساوی با γ باشد.

در اینجا می‌خواهیم شرط ناممکن «با اطمینان» را با شرط قابل وصول «با احتمال نزدیک به ۱» جایگزین کنیم.

مقادیر عددی این دو کمیت را باید از نمونه مفروض $x_1, \dots, x_n$ محاسبه کرد. مقدار نمونه را می‌توان مقادیر مشاهده شده n متغیر تصادفی $X_1, \dots, X_n$ در نظر گرفت. آنگاه θ_1 و θ_2 توابعی از این متغیرهای تصادفی هستند و بنابراین خود نیز متغیرهای تصادفی هستند. بنابراین شرط بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$P(\Theta_1 \leq \theta \leq \Theta_2) = \gamma.$$

هرگاه توابع Θ_1 و Θ_2 را بشناسیم و نمونه‌ای داده شده باشد، می‌توانیم θ_1 مقدار عددی Θ_1 و θ_2 مقدار عددی Θ_2 را محاسبه کنیم. فاصله‌ای که نقاط انتهایی θ_1 و θ_2 است فاصله اطمینان یا برآورد فاصله‌ای پارامتر نامعلوم θ نامیده می‌شود، و ما آن را با

$$\text{CONF} \{(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)\}$$

نشان می‌دهیم. مقادیر θ_1 و θ_2 حدود اطمینان پایین و بالای θ نامیده می‌شوند. عدد γ را تراز اطمینان می‌نامند. می‌توان γ را برابر ۹۵٪، ۹۹٪، حتی گاهی ۹۹٫۹٪ گرفت. واضح است که اگر بخواهیم نمونه‌ای به دست آوریم و فاصله اطمینان مربوط به آن را تعیین کنیم، آنگاه γ برابر احتمال به دست آوردن فاصله‌ای خواهد بود که شامل مقدار دقیق نامعلوم پارامتر است.

مثلاً، اگر γ را ۹۵٪ انتخاب کنیم، آنگاه می‌توان انتظار داشت که حدود ۹۵٪ نمونه‌هایی که به دست می‌آوریم فواصل اطمینانی را به دست می‌دهند که شامل مقدار θ هستند، ضمن اینکه ۵٪ باقیمانده شامل θ نیستند. بنابراین حکم «فاصله اطمینان شامل θ است» در حدود ۱۹ بار از ۲۰ بار درست در یک بار باقیمانده نادرست خواهد بود.

با انتخاب $\gamma = ۹۹\%$ به جای ۹۵٪ انتظار می‌رود که عبارت فوق در حدود ۹۹ بار از ۱۰۰ بار درست باشد. ولی چنانکه بعداً خواهیم دید فاصله‌های متناظر با $\gamma = ۹۹\%$ بزرگتر از فاصله‌های متناظر با $\gamma = ۹۵\%$ هستند و این اشکال افزایش γ است.

در عمل برای γ چه مقداری باید انتخاب کرد؟ این یک سؤال ریاضی نیست، بلکه سؤالی است که از نقطه نظر کاربردی باید جواب داده شود با توجه به اینکه در صورت غلط بودن حکم تا چه اندازه حاضر به خطا کردن هستیم.

واضح است که عدم اطمینان موجود در روش فعلی و روشهایی که در آینده مورد بحث واقع می‌شوند ناشی از فرایندهای نمونه‌گیری است، بنابراین باید برای آماردان اشتباهاتی که ممکن است خود او مرتکب شود توجیه شود. با این همه، وضع آماردان بدتر از وضع قاضی یا بانکداری که در کارش تصادف دخالت دارد نیست. برعکس او از این امتیاز برخوردار است که می‌تواند اشتباهات خود را اندازه بگیرد.

اکنون روشهایی را برای به دست آوردن فواصل اطمینان برای میانگین (جدولهای ۸۰۲۰، ۹۰۲۰) و واریانس (جدول ۱۰۰۲۰) توزیع نرمال بررسی می‌کنیم. نظریه

۱. نظریه جدید و اصطلاحات مربوط به فواصل اطمینان توسط جی. نیمن به وجود آمده‌اند (Annals Math. Stat. ۶, ۱۹۳۵, ۱۱۱-۱۱۶).

در ریاضیات $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ بدان معنی است که θ بین θ_1 و θ_2 قرار دارد و برای اجتناب از سوء تفاهم، به نظر می‌رسد ارزش دارد که فاصله اطمینان را با علامت مخصوصی مانند CONF نشان دهیم.

مربوطه در قسمت آخر این بخش مورد بحث قرار می گیرد.

جدول ۸.۲۰

تعیین فاصله اطمینان برای میانگین μ ی توزیع نرمالی با واریانس معلوم σ^2

مرحله اول. تراز اطمینان γ را انتخاب کنید (۹۵٪ ، ۹۹٪ یا نظیر آنها).

مرحله دوم. c ی متناظر را تعیین کنید:

γ	۰.۹۰	۰.۹۵	۰.۹۹	۰.۹۹۹
c	۱.۶۴۴۵	۱.۹۶۰	۲.۵۷۶	۳.۲۹۱

مرحله سوم. میانگین $\bar{x}$ نمونه $x_1, \dots, x_n$ را محاسبه کنید.

مرحله چهارم. $k = c\sigma/\sqrt{n}$ را محاسبه کنید. فاصله اطمینان برای μ عبارت است از

$$(۱) \quad \text{CONF} \{ \bar{x} - k \leq \mu \leq \bar{x} + k \}.$$

مثال ۱. فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نرمال با واریانس معلوم

برای میانگین توزیع نرمالی با واریانس $\sigma^2 = ۹$ ، با استفاده از یک نمونه $n = ۱۰۰$ مقداری با میانگین $\bar{x} = ۵$ ، یک فاصله اطمینان ۹۵٪ معین کنید.

مرحله اول. باید داشته باشیم $\gamma = ۰.۹۵$.

مرحله دوم. c ی متناظر برابر است با ۱.۹۶۰.

مرحله سوم. $\bar{x} = ۵$ داده شده است.

مرحله چهارم. داریم $k = ۱.۹۶۰ \times ۳/\sqrt{۱۰۰} = ۰.۵۸۸$. در نتیجه

$$\bar{x} + k = ۵.۵۸۸, \quad \bar{x} - k = ۴.۴۱۲$$

$$\text{CONF} \{ ۴.۴۱۲ \leq \mu \leq ۵.۵۸۸ \}.$$

بعضی اوقات می نویسند $\mu = ۵ \pm ۰.۵۸۸$ ، ولی ما این نماد گذاری را، که ممکن است گمراه کننده باشد، مورد استفاده قرار نمی دهیم.

مثال ۲. تعیین حجم نمونه لازم برای به دست آوردن فاصله اطمینانی با طول مفروض

در مثال قبل، n را چقدر باید بزرگ انتخاب کنیم، تا یک فاصله اطمینان ۹۵٪، با طول

۰۴ = L ، داشته باشیم؟

فاصله (۱) دارای طول $L = 2k = 2c\sigma/\sqrt{n}$ است. n را به دست می آوریم:

$$n = (2c\sigma/L)^2.$$

در این حالت جواب برابر است با $870 \approx (2 \times 19960 \times 3/0.4)^2$.

شکل ۳۸۴ نشان می دهد که وقتی n افزایش می یابد، L کاهش می یابد. به عبارت دیگر برای به دست آوردن فاصله اطمینان کوچکتر باید n ، حجم نمونه، را بزرگتر انتخاب کرد. ▲

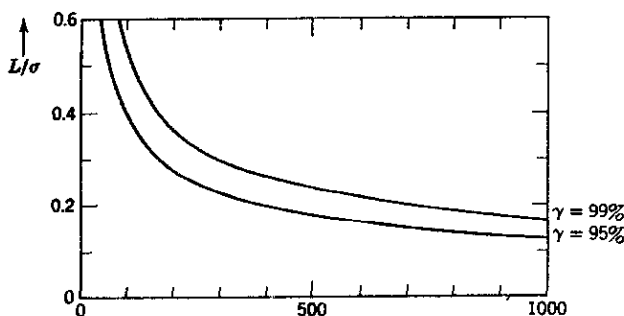
جدول ۹.۲۰ چگونگی تعیین فاصله اطمینان برای میانگین μ یک توزیع نرمال با واریانس نامعلوم σ^2 را نشان می دهد. مراحل این کار شبیه مراحل مذکور در جدول ۸.۲۰ است، با این تفاوت که k در جدول ۹.۲۰ با k در جدول ۸.۲۰ تفاوت دارد. به علاوه، c به n وابسته است و باید از جدول A۱۱ ضمیمه ۴ تعیین شود؛ این جدول شامل مقادیر داده شده تابع توزیع

$$F(z) = K_m \int_{-\infty}^z \left(1 + \frac{u^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} du$$

که توزیع t استیودنت (نام مستعار W. S. Gosset) نام دارد؛ در رابطه بالا $K_m = \Gamma(m/2 + 1/2) / [\sqrt{m\pi} \Gamma(m/2)]$ و $\Gamma(\alpha)$ تابع گاما است [د.ک. (۲۴)، ضمیمه ۳]. $m (= 1, 2, \dots)$ پارامتری است که تعداد درجات آزادی توزیع نامیده می شود.

مثال ۳. فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نرمال با واریانس نامعلوم

با استفاده از نمونه ذکر شده در جدول ۲.۲۰، بخش ۲.۲۰، یک فاصله اطمینان ۹۹٪ برای



شکل ۳۸۴. طول فاصله اطمینان (۱) (بر حسب مضارب σ)

به صورت تابعی از حجم نمونه n

میانگین μ ی جامعه متناظر، با فرض آنکه جامعه نرمال است، تعیین کنید. (این فرض در بخش ۱۸۰۲۰ مورد بررسی قرار می گیرد.)

مرحله اول. باید داشته باشیم $\gamma = ۰.۹۹$

مرحله دوم. نظر به اینکه $n = ۱۰۰$ ، داریم $c = ۲.۶۳$.

مرحله سوم. پس از محاسبه داریم $\bar{x} = ۳۶۴.۷۰$ و $s = \sqrt{۷۲۰.۱} = ۲۶.۸۳$.

مرحله چهارم. می یابیم $k = ۲.۶۳ \times ۲۶.۸۳ / ۱۰ = ۷.۰۶$. در نتیجه فاصله اطمینان برابر است با

$$\text{CONF} \{ ۳۵۷.۶۴ \leq \mu \leq ۳۷۱.۷۶ \}.$$

جدول ۹.۲۰

تعیین فاصله اطمینان برای میانگین μ ی توزیع نرمالی با واریانس نامعلوم σ^2

مرحله اول. تراز اطمینان γ را انتخاب کنید (۹۵٪، ۹۹٪ یا نظیر آنها).

مرحله دوم. از معادله

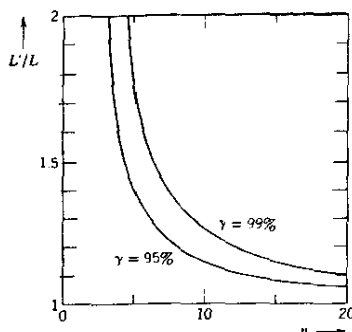
$$(۲) \quad F(c) = \frac{1}{\gamma} (1 + \gamma)$$

به کمک جدول توزیع t با $n - ۱$ درجه آزادی (جدول A۱۱، ضمیمه ۴؛ حجم نمونه برابر است با n) مقدار c را بیابید.

مرحله سوم. میانگین $\bar{x}$ و واریانس s^2 نمونه $x_1, \dots, x_n$ را محاسبه کنید.

مرحله چهارم. $k = sc / \sqrt{n}$ را محاسبه کنید. فاصله اطمینان عبارت است از

$$(۳) \quad \text{CONF} \{ \bar{x} - k \leq \mu \leq \bar{x} + k \}.$$



شکل ۳.۸۵. نسبت طولهای L' و L فواصل اطمینان (۱) و (۳) به صورت تابعی از حجم نمونه n با s و σ ی برابر

برای مقایسه، اگر σ مشخص و برابر ۲۶۸۳ باشد، از جدول ۸۰۲۰ داریم
 $\text{CONF} \{35779 \leq \mu \leq 37161\}$ ، $k = 2576 \times 2683 / \sqrt{100} = 691$
 این مقدار کمی با نتیجه قبلی تفاوت دارد چرا که n بزرگ است. برای n کوچکتر، همان طور
 که شکل ۳۸۵ نشان می دهد، تفاوت قابل ملاحظه است. ▲

مراحل جدول ۱۰۰۲۰ برای به دست آوردن فاصله اطمینانی برای واریانس یک توزیع
 نرمال شبیه مرحله‌ای است که در جدولهای ۸۰۲۰ و ۹۰۲۰ ذکر شد، با این تفاوت که در اینجا
 باید دو عدد c_1 و c_2 را تعیین کنیم. هر دو عدد از جدول A_{12} ، ضمیمه ۴، به دست می آیند،
 این جدول شامل مقادیر z متناظر است با مقادیر داده شده تابع توزیع $F(z) = 0$ به ازای
 $z < 0$

$$F(z) = C_m \int_0^z e^{-u/2} u^{(m-2)/2} du \quad \text{به ازای } z \geq 0$$

جدول ۱۰۰۲۰

تعیین فاصله اطمینان برای واریانس σ^2 ی توزیع نرمالی که لازم نیست میانگینش
 معلوم باشد

مرحله اول. ترازا اطمینان γ را انتخاب کنید (۹۵٪، ۹۹٪ یا یک درصد دیگر).

مرحله دوم. از معادلات

$$(4) \quad F(c_2) = \frac{1}{\gamma} (1 + \gamma) \quad , \quad F(c_1) = \frac{1}{\gamma} (1 - \gamma)$$

به کمک جدول توزیع مربعی که با $n - 1$ درجه آزادی (جدول A_{12} ، ضمیمه ۴؛
 $n =$ حجم نمونه) c_1 و c_2 را تعیین کنید.

مرحله سوم. $s^2 (n - 1)$ را که در آن s^2 واریانس نمونه $x_1, \dots, x_n$ است
 محاسبه کنید.

مرحله چهارم. $k_1 = (n - 1)s^2 / c_1$ و $k_2 = (n - 1)s^2 / c_2$ را محاسبه کنید.
 فاصله اطمینان عبارت است از

$$(5) \quad \text{CONF} \{k_2 \leq \sigma^2 \leq k_1\}$$

این تابع توزیع را توزیع χ^2 (توزیع مربعی کی) می نامند؛ در اینجا
 $C_m = 1 / [2^{m/2} \Gamma(m/2)]$ ، و $m (= 1, 2, \dots)$ پارامتری است که تعداد درجات

آزادی توزیع نامیده می‌شود.

مثال ۴. فاصله اطمینان برای واریانس توزیع نرمال

با استفاده از نمونه جدول ۲.۲۰، بخش ۲.۲۰، فاصله اطمینان ۹۵٪ برای واریانس جامعه متناظر تعیین کنید.

مرحله اول. باید داشته باشیم $\gamma = 0.95$.

مرحله دوم. چون $n = 100$ ، داریم $c_1 = 73.4$ و $c_2 = 128$.

مرحله سوم. از جدول ۲.۲۰، بخش ۲.۲۰، پس از انجام محاسبه به دست می‌آوریم $99.5^2 = 71,291$.

مرحله چهارم. فاصله اطمینان عبارت است از

$$\Delta \quad \text{CONF} (556 \leq \sigma^2 \leq 972).$$

توزیعهای دیگر. فاصله‌های اطمینان برای میانگین و واریانس سایر توزیعها را می‌توان با استفاده از روشهایی که قبلاً برای نمونه‌های باحجم به اندازه کافی بزرگ مورد استفاده قرار گرفتند به دست آورد. در عمل، هرگاه نمونه دلتا بر کوچک بودن چاولگی توزیع نامعلوم داشته باشد، باید نمونه‌هایی با حداقل حجم $n = 20$ را برای به دست آوردن فاصله‌های اطمینان برای μ ، و نمونه‌هایی با حداقل حجم $n = 50$ را برای به دست آوردن فاصله‌های اطمینان برای σ^2 در نظر گرفت. دلیل این کار در انتهای همین بخش تشریح خواهد شد.

مبنای نظری روشهای ذکر شده در جدولهای ۸.۲۰ الی ۱۰.۲۰. اکنون نظریه‌ای را مورد بحث قرار می‌دهیم که روشهای ما را برای به دست آوردن فواصل اطمینان، با استفاده از ایده ساده ولی خیلی مهم زیر، توجیه می‌کند.

ثابتون مقادیر $x_1, \dots, x_n$ یک نمونه را n مقدار مشاهده شده‌ی n متغیر تصادفی X در نظر می‌گیریم. این n مقدار را می‌توان n مشاهده‌ی متغیر تصادفی $X_1, \dots, X_n$ که دارای توزیع یکسان (همان توزیع X) هستند نیز در نظر گرفت؛ این n متغیر مستقل خواهند بود زیرا مقادیر نمونه مستقل فرض شده‌اند.

برای رسیدن به (۱)، جدول ۸.۲۰، به قضیه زیر احتیاج داریم:

قضیه ۱ (مجموع متغیرهای تصادفی نرمال مستقل)

فرض می‌کنیم $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی نرمال مستقلی باشند که میانگین آنها به ترتیب $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ و واریانسشان به ترتیب $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ باشد آنگاه متغیر تصادفی

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

توزیعی است نرمال با میانگین

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

و واریانس

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2.$$

احکام مربوط به μ و σ مستقیماً از قضایای ۱ و ۳، بخش ۱۱.۲۰، نتیجه می‌شوند. اثبات اینکه X توزیعی نرمال است در مرجع [H۱۲] یافت می‌شود، ر. ک. ضمیمه ۱. از این قضیه، قضیه ۱، بخش ۱۰.۲۰، و قضیه ۳، بخش ۸.۲۰ به دست می‌آوریم

قضیه ۲

اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی نرمال مستقلی باشند که هر یک دارای میانگین μ و واریانس σ^2 هستند، آنگاه متغیر تصادفی

$$(۶) \quad \bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2/n است، و متغیر تصادفی

$$(۷) \quad Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ است.

(۱) رابه دست می‌آوریم. با توجه به انگیزه ما که در ابتدای بخش توضیح داده شد، هدف ما یافتن دو متغیر تصادفی Θ_1 و Θ_2 است به طوری که

$$(۸) \quad P(\Theta_1 \leq \mu \leq \Theta_2) = \gamma,$$

که γ معین است، و نمونه مقادیر مشاهده شده θ_1 از Θ_1 و θ_2 از Θ_2 است، که فاصله اطمینان $\text{CONF}\{\theta_1 \leq \mu \leq \theta_2\}$ رابه دست می‌دهد. در این حالت می‌توان به شرح زیر عمل کرد. عدد γ را بین ۰ و ۱ انتخاب می‌کنیم و c را از جدول A_9 ، ضمیمه ۴، طوری تعیین می‌کنیم که $P(-c \leq Z \leq c) = \gamma$ (وقتی که $\gamma = 0.90$ و غیره باشد. مقادیر c را از جدول ۸.۲۰ به دست می‌آوریم). نامساوی $-c \leq Z \leq c$ که در آن Z با (۷) داده شده، چنین می‌شود:

$$-c \leq \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \leq c$$

و می‌توان آن را به یک نامساوی برای μ تبدیل کرد. در واقع از ضرب کردن رابطه بالا در $\sigma/\sqrt{n}$ نتیجه می‌شود $-k \leq \bar{X} - \mu \leq k$ که در آن $k = c\sigma/\sqrt{n}$. ضرب رابطه اخیر

در ۱- و افزودن $\bar{X}$ به طرفین آن، نتیجه می‌دهد

$$(9) \quad \bar{X} + k \geq \mu \geq \bar{X} - k$$

بنابراین $P(-c \leq Z \leq c) = \gamma$ با $P(\bar{X} - k \leq \mu \leq \bar{X} + k) = \gamma$ معادل است. این رابطه همان (۸) است که در آن $\Theta_1 = \bar{X} - k$ و $\Theta_2 = \bar{X} + k$ انتخاب شده‌اند. با مفروضاتی که داریم این بدان معنی است که متغیرهای تصادفی $\bar{X} - k$ و $\bar{X} + k$ با احتمال γ مقادیری اختیار می‌کنند که شامل میانگین نامعلوم μ است. اگر مقادیر نمونه $x_1, \dots, x_n$ موجود در جدول ۸.۲۰ را مقادیر مشاهده شده n متغیر تصادفی نرمال $X_1, \dots, X_n$ در نظر بگیریم، درمی‌یابیم که میانگین نمونه $\bar{x}$ یک مقدار مشاهده شده (۶) است، و با درج این مقدار در (۹) عبارت (۱) را به دست می‌آوریم.

برای به دست آوردن (۳) از جدول ۹.۲۰ به قضیه زیر نیاز داریم.

قضیه ۳

فرض کنیم $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی نرمال مستقل با میانگین یکسان μ و واریانس یکسان σ^2 باشند. آنگاه متغیر تصادفی

$$(10) \quad T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S}$$

که در آن $\bar{X}$ با (۶) داده شده است و

$$(11) \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$$

دارای توزیع t (د.ك. صفحه ۱۲۰۲) با $n-1$ درجه آزادی است.

اثبات این موضوع را می‌توان در مرجع [H۱۲] یافت؛ ر.ك. ضمیمه ۱. راه رسیدن به (۳) شبیه راه رسیدن به (۱) است. برای این منظور عدد γ را بین ۰ و ۱ انتخاب می‌کنیم و عدد c را از جدول A۱۱، ضمیمه ۴، با $n-1$ درجه آزادی طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم

$$(12) \quad P(-c \leq T \leq c) = F(c) - F(-c) = \gamma.$$

چون توزیع t متقارن است، داریم $F(-c) = 1 - F(c)$ ، و (۱۲) به صورت (۲) درمی‌آید. با تبدیل $-c \leq T \leq c$ در (۱۲) مانند قبل، به دست می‌آوریم

$$(13) \quad K = cS/\sqrt{n} \quad \text{که در آن} \quad \bar{X} - K \leq \mu \leq \bar{X} + K$$

و (۱۲) می‌شود $P(\bar{X} - K \leq \mu \leq \bar{X} + K) = \gamma$. با درج مقادیر مشاهده شده $\bar{x}$ از $\bar{X}$ و S^2 از S^2 در (۱۳)، عبارت (۳) حاصل می‌شود.

برای استنتاج رابطه (۵) از جدول ۱۰.۲۰ به قضیه زیر نیاز داریم.

قضیه ۴

تحت مفروضات قضیه ۳، متغیر تصادفی

$$(۱۴) \quad Y = (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2}$$

که در آن S^2 با (۱۱) داده شده است، دارای توزیع مربع کی (د.ك. صفحه ۱۲۰۵) با $n-1$ درجه آزادی است.

اثبات این قضیه را می توان در مرجع [H۱۲] یافت، ر.ك. ضمیمه ۱.
روش رسیدن به (۵) مشابه روش رسیدن به (۱) و (۳) است. عدد γ را بین ۱ و ۰ انتخاب می کنیم و c_1 و c_2 را از جدول A_{12} ، ضمیمه ۴، طوری تعیین می کنیم که [ر.ك. (۴)]

$$P(Y \leq c_2) = F(c_2) = \frac{1}{\gamma} (1 + \gamma), P(Y \leq c_1) = F(c_1) = \frac{1}{\gamma} (1 - \gamma)$$

با کم کردن این دو عدد از هم نتیجه می شود

$$P(c_1 \leq Y \leq c_2) = P(Y \leq c_2) - P(Y \leq c_1) = \gamma.$$

با تبدیل $c_1 \leq Y \leq c_2$ ، با $c_1 Y$ که با (۱۴) داده شده، به یک نامساوی بر حسب S^2 ، به دست می آوریم

$$\frac{n-1}{c_2} S^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{n-1}{c_1} S^2.$$

با درج مقدار مشاهده شده S^2 از S^2 در رابطه بالا، (۵) به دست می آید.

فاصله های اطمینان برای میانگین و واریانس توزیعهای دیگر را می توان با روشهای ذکر شده در جدولهای ۸.۲۰ و ۱۰.۲۰ به دست آورد، ولی در این مورد باید از نمونه های بزرگ استفاده کنیم.

قضیه ۵ (قضیه حد مرکزی)

فرض کنیم $X_1, \dots, X_n, \dots$ ، متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که دارای تابع توزیع یکسان و بنا بر این میانگین و واریانس یکسان هستند. فرض می کنیم $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ آنگاه متغیر تصادفی

$$(۱۵) \quad Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

نرمال مجانبی بامیانگین ۰ و واریانس ۱ است، یعنی، تابع توزیع $F_n(x)$ متغیر تصادفی در Z_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

صدق می‌کند.

اثبات این قضیه را در مرجع [H۴] می‌توان یافت؛ ر. ک. ضمیمه ۱. می‌دانیم که اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین یکسان μ و واریانس یکسان σ^2 باشند، آنگاه مجموعه‌شان، $X = X_1 + \dots + X_n$ ، خواص زیر را دارد:
(الف) X دارای میانگین $n\mu$ و واریانس $n\sigma^2$ است (ر. ک. قضیه‌های ۱ و ۳، بخش ۱۱.۲۰).

(ب) اگر متغیرها نرمال باشند، آنگاه X نیز نرمال است (ر. ک. قضیه ۱).
اگر متغیرها نرمال نباشند، آنگاه (ب) برقرار نیست، ولی اگر n بزرگ باشد، آنگاه X تقریباً نرمال است (ر. ک. قضیه ۵) و این کاربرد روشهای مربوط به توزیع نرمال را برای توزیعهای دیگر توجیه می‌کند، ولی در چنین موردی باید از نمونه‌های بزرگ استفاده کنیم.

مسائل بخش ۱۴.۲۰

۱. با استفاده از نمونه‌ای با حجم ۳۶ و میانگین ۱۸۴، يك فاصله اطمینان ۹۹٪ برای میانگین μ ی جامعه‌ای نرمال با واریانس $\sigma^2 = ۱۶۹$ پیدا کنید.
۲. با استفاده از نمونه‌ای با حجم ۳۵۰ و میانگین ۸۷، يك فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین μ ی جامعه‌ای نرمال با واریانس $\sigma^2 = ۱۶$ از شکل ۳۸۴ به دست آورید.
۳. با استفاده از نمونه ۱۶ و ۱۲، ۱۹، ۱۰، ۱۵، يك فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین μ ی جامعه‌ای نرمال با انحراف معیار ۲٫۵، پیدا کنید.
۴. برای تولید فاصله اطمینان ۹۵٪ی که با (۱) داده شده و طول آن (الف) ۲۵، (ب) σ است، حجم نمونه چقدر باید باشد؟
- بافرض آنکه جامعه‌ای که از آن نمونه زیر گرفته می‌شود نرمال باشد، فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین μ ی جامعه تعیین کنید.
۵. نمونه‌ای از قطره‌های ۱۰ گلوله بلبرینگ بامیانگین ۴٫۳۷ سانتیمتر و انحراف معیار ۰٫۱۵ سانتیمتر.
۶. چگالی [گرم بر سانتیمتر مکعب] زغال کک ۱۴۵، ۱۴۵، ۱۴۵، ۱۳۹، ۱۴۴، ۱۳۸، ۱۳۸.
۷. درصد نیتروژن در فولاد ۵۰٫۷۴، ۵۰٫۷۵، ۵۰٫۷۳، ۵۰٫۷۵، ۵۰٫۷۴، ۵۰٫۷۲.
۸. درمسئله ۵، حجم نمونه را چقدر باید انتخاب کنیم تا فاصله اطمینانی به طول ۰٫۱ به دست آوریم؟

۹. گرمای ویژه آهن ۴۱ بار در دمای 25°C اندازه گرفته شده است. نمونه دارای میانگین $0.106 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$ و انحراف معیار $0.002 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$ است. در صورتیکه از میانگین نمونه برای برآورد کردن گرمای ویژه واقعی استفاده کنیم، در مورد اندازه خطا، با احتمال ۹۹٪، چه ادعایی می‌توانیم بکنیم؟
۱۰. مطلوب است فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای درصد اتومبیل‌هایی که در یک بزرگراه با ترمزهای نامیزان در حال حرکتند، از نمونه تصادفی ۵۰۰ اتومبیلی که پشت یک مانع توقف کرده‌اند استفاده کنید، ۸۷ تا از این ۵۰۰ اتومبیل ترمزهای نامیزان دارند. با فرض آنکه جوامعی که نمونه‌های زیر از آنها انتخاب شده‌اند نرمال باشند بایک فاصله اطمینان ۹۹٪ برای واریانس σ^2 ی جامعه معین کنید.
۱۱. سختی برحسب راکول یک وسیله یرش ۶۴۹، ۶۴۱، ۶۳۸، ۶۴۰، ۶۴۵.
۱۲. نمونه ذکر شده در مسئله ۷.
۱۳. نمونه‌ای با حجم $n = 128$ و واریانس $s^2 = 19921$.
۱۴. چرا برآوردهای فاصله‌ای در اغلب موارد مفیدتر از برآوردهای نقطه‌ای هستند؟
۱۵. اگر X نرمال با میانگین ۱۲ و واریانس ۲۵ باشد، $-X$ ، $2X$ ، و $X - 1$ دارای چه توزیع‌هایی هستند؟
۱۶. اگر X ، وزن پاکتهای سیمان، به طور نرمال با میانگین ۴۰ کیلوگرم و انحراف معیار ۲ کیلوگرم توزیع شده باشد، چه تعدادی از پاکتهای سیمان باید تحویل کامیون داده شود، تا احتمال تجاوز از ۲۰۰۰ کیلوگرم برابر ۵٪ باشد.
۱۷. ماشینی جعبه‌های Y کیلو گرمی را با X کیلوگرم نمک پرمی‌کند که X و Y نرمال و به ترتیب دارای میانگین ۱۰۰ و ۵ کیلوگرم و انحراف معیار ۱ و ۵ کیلوگرم هستند. چه درصدی از جعبه‌های پر شده دارای وزنی بین ۱۰۴ و ۱۰۶ کیلوگرم خواهند بود؟
۱۸. توزیع ضخامت هسته ترانسفورماتوری که از ۵۰ لایه ورقه فلزی و ۴۹ لایه کاغذی عایق تشکیل شده چیست؟ در صورتی که X ، ضخامت هر ورقه فلزی، نرمال با میانگین ۵ میلیمتر و انحراف معیار ۰.۵ میلیمتر و Y ، ضخامت لایه کاغذی، نرمال با میانگین ۰.۵ میلیمتر و انحراف معیار ۰.۰۲ میلیمتر است.
۱۹. با استفاده از قضیه ۱، پیدا کنید که در بستن بطریها چه کسری از جفتهای تصادفی بطریها و درپوشها متناسب هستند، با فرض آنکه D ، قطر بطریها، نرمال با میانگین $\mu_1 = 1 \text{ cm}$ و انحراف معیار $\sigma = 0.01 \text{ cm}$ و D ، قطر درپوشها، نرمال با میانگین $\mu_2 = 0.99 \text{ cm}$ و انحراف معیار $\sigma_2 = 0.01 \text{ cm}$ باشد.
۲۰. اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی نرمال با میانگین به ترتیب ۶ و ۲ - و واریانس ۴ و ۶ باشند، متغیر تصادفی $X_1 - X_2$ چه توزیعی دارد؟

۱۵.۲۰ آزمون فرض، تصمیم

فرض آماری فرضی است درمورد توزیع متغیر تصادفی، مثل این فرض که توزیعی معین دارای میانگین ۲۰۳ است و غیره. **آزمون** آماری فرض عبارت است از فرایندی که در آن نمونه‌ای را مورد استفاده قرار می‌دهیم تا پی ببریم که آیا می‌توانیم فرض را «رد نکنیم»، («پذیریم»)، یعنی طوری عمل کنیم که انگار فرض درست است، یا باید آن را «رد کنیم» یعنی طوری عمل کنیم که انگار فرض نادرست است.

این آزمون‌ها زیاد به کار می‌روند؛ می‌توان سؤال کرد که اهمیت این آزمون‌ها در چیست. اغلب اوقات باید درمورد مسائلی که شانس در آنها دخالت دارد تصمیم گرفت. هرگاه بخواهیم مثلاً بین دو امکان یکی را انتخاب کنیم، تصمیم‌گیری در این انتخاب می‌تواند بر اساس يك آزمون آماری پایه‌گذاری شود.

مثلاً، هرگاه بخواهیم دستگاه تراش معینی را برای تولید پیچ‌هایی که قطرشان در حدود مشخصی است مورد استفاده قرار دهیم و اجازه دهیم که حداکثر ۲٪ از تولیدات معیوب باشد، می‌توانیم نمونه‌ای شامل ۱۰۰ پیچ تولید شده توسط این دستگاه تراش را در نظر بگیریم و آن را برای آزمون $\sigma^2 = \sigma_0^2$ مورد استفاده قرار دهیم با توجه به اینکه واریانس σ^2 جامعه متناظر دارای مقدار معین σ_0^2 است، این مقدار را طوری انتخاب کرده‌ایم که بیش از ۲٪ کالای معیوب نداشته باشیم. يك فرض مقابل و بسا معنی در این مورد فرض $\sigma^2 > \sigma_0^2$ است. بسته به نتیجه آزمون، یا فرض $\sigma^2 = \sigma_0^2$ را رد نمی‌کنیم (و بنابراین ماشین تراش مزبور را مورد استفاده قرار می‌دهیم)، یا آن را رد کرده، اظهار می‌کنیم $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ، و ماشین تراش دیگری به کار می‌بریم. درمورد اخیر گوییم که آزمون دلالت بر **انحراف معنی‌دار** σ^2 از σ_0^2 دارد. **انحراف معنی‌دار** انحرافی است که صرفاً به علت تأثیر اجتناب ناپذیر شانس عارض نشده بلکه به علت فقدان دقت تراش به وجود آمده باشد.

در موارد دیگر، ممکن است بخواهیم دوشیء مثلاً دوداروی متفاوت، دوروش اجرای کاری معین، دقت دوروش اندازه‌گیری، کیفیت محصولات تولید شده به وسیلهٔ دو ابزار مختلف، و غیره را باهم مقایسه کنیم.

این فرض‌ها معمولاً ناشی از عوامل زیرند.

۱. فرض می‌تواند از يك نیاز کیفی ناشی شود. (تجربه درمورد کیفیت قابل حصول می‌تواند با تولید تعداد نسبتاً زیادی کالا با دقت خاص به دست آید.)
۲. فرض بر اساس مقادیر شناخته شده از تجربه قبلی پایه‌گذاری می‌شود.
۳. فرض از نظریه‌ای که قرار است تحقیق شود ناشی می‌شود.
۴. فرض عبارت است از حدس صرف که مشاهدات اتفاقی موجب آن می‌شوند.

مطلب را با يك مثال مقدماتی ساده شروع می‌کنیم.

مثال ۱. آزمون فرضی

تولد يك بچه را می توان يك آزمایش تصادفی در نظر گرفت که دوامكان B : تولد پسر و G : تولد دختر برای آن قابل تصور است. به طور شهودی انتظار داریم که هر دو برآمد هم شانس باشند. در صورتی که اغلب ادعا می شود تعداد موالید پسر بیشتر از موالید دختر است. بنا بر این می خواهیم این فرض را که دو برآمد B و G دارای احتمال یکسان هستند آزمون کنیم. اگر P را احتمال برآمد B فرض کنیم، فرض مورد نظر عبارت است از $p = 0.50$. ولی با توجه به ادعاهای عنوان شده $p > 0.50$ انتخاب می کنیم.

برای آزمون از يك نمونه $n = 3000$ نوزادی که در سال ۱۹۶۲ در گرتس اتریش متولد شده اند و ۱۵۷۸ تا از آنها پسر بوده اند استفاده می کنیم.

اگر فرض درست باشد، انتظار می رود که در نمونه ای با حجم $n = 3000$ نوزاد، در حدود ۱۵۰۰ نوزاد پسر باشد. هرگاه فرض مقابل برقرار باشد، آنگاه انتظار می رود که تعداد پسرهای متولد شده به طور متوسط بیش از ۱۵۰۰ باشد. در نتیجه هرگاه تعداد پسرهایی که متولد شده اند خیلی بیش از ۱۵۰۰ باشد، آنگاه این موضوع به عنوان دلیلی بر این ادعا که ممکن است فرض غلط باشد مورد استفاده قرار می گیرد، و فرض را رد می کنیم.

برای انجام این آزمون، به طریق زیر عمل می کنیم. نخست مقدار بحرانی c را تعیین می کنیم. به دلیل فرض مقابل، c بزرگتر از ۱۵۰۰ است. (روشی برای تعیین c در ذیل ارائه خواهد شد.) بنا بر این، هرگاه تعداد مشاهده شده پسرهای بیشتر از c باشد، فرض را رد می کنیم. هرگاه تعداد بیش از c نباشد، آن را رد نمی کنیم.

سؤال اساسی که هم اکنون مطرح است، در مورد چگونگی انتخاب c است، یعنی، خط جداکننده انحرافهای تصادفی کوچک از انحرافهای معنی دار بزرگ را کجا باید بکشیم؟ افراد مختلف ممکن است نظرات مختلفی داشته باشند، ما برای پاسخ دادن به این سؤال به استدلال ریاضی می پردازیم. در مورد اخیر، همان طور که در زیر مشاهده خواهید کرد انجام این کار بسیار ساده است.

c را طوری تعیین می کنیم که در صورت درست بودن فرض، احتمال مشاهده بیش از c پسر در يك نمونه ۳۰۰۰ تایی از نوزادان بسیار كوچك باشد، این احتمال را α می نامیم. مرسوم است که α را ۱٪ یا ۵٪ اختیار کنند. با انتخاب $\alpha = 1\%$ (یا ۵٪) این ریسك را کرده ایم که در حدود يك بار در ۱۰۰ بار (۲۰ بار) فرض را رد کنیم حتی اگر درست باشد. بعداً به این موضوع بر خواهیم گشت. با انتخاب $\alpha = 1\%$ متغیر تصادفی

$$X = \text{تعداد پسرها در } 3000 \text{ تولد}$$

را مورد بررسی قرار می دهیم. اگر این فرض درست باشد، مقدار بحرانی c برابر می شود با

(۱)

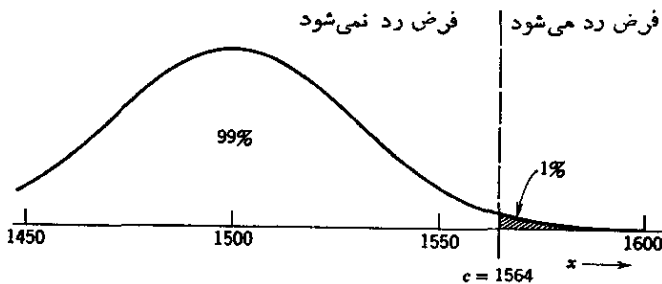
$$P(X > c)_{p=0.50} = \alpha = 0.01$$

(فرضی را که کرده ایم با شاخص زیر $p = 0.05$ نمایش داده ایم.) هرگاه مقدار مشاهده شده 1578 بیش از c باشد، فرض را رد می کنیم. اگر $c \leq 1578$ ، فرض را رد نمی کنیم. برای تعیین c از (۱)، باید توزیع X را بدانیم. برای این منظور توزیع دو جمله ای جمله ای مدل نسبتاً دقیقی است. بنابراین اگر فرض درست باشد، X توزیعی دو جمله ای با $p = 0.05$ و $n = 3000$ دارد. این توزیع را می توان با توزیع نرمالی با میانگین $\mu = np = 1500$ و واریانس $\sigma^2 = npq = 750$ تقریب زد؛ به بخش ۱۰.۲ رجوع کنید. (برای سادگی کار از جمله 0.05 در (۱۱)، بخش ۱۰.۲۰، صرف نظر می کنیم.) چگالی در شکل ۳۸۶ نشان داده شده است. بنابراین با استفاده از (۱) به دست می آوریم

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \approx 1 - \Phi\left(\frac{c - 1500}{\sqrt{750}}\right) = 0.01$$

جدول A۹، ضمیمه ۴، نتیجه می دهد $(c - 1500)/\sqrt{750} = 2.326$. از این رو $c = 1564$. چون $c > 1578$ ، فرض را رد کرده اظهار می کنیم که $p > 0.05$. بدین طریق آزمون کامل می شود.

در مورد یک نمونه 3000 مقداری، با انتخاب $X =$ تعداد پسرها در 3000 تولد، از (۱) مقدار بحرانی $c = 1578$ را به دست می آوریم، و نمونه ای که در آن 158 (همان درصدی که در نمونه بزرگتر داشتیم) پسر باشد نتیجه می دهد $c < 158$ ، و بنابراین فرض رد نمی شود. این موضوع جالبی است، زیرا نشان می دهد که با افزایش n ، حجم نمونه، سودمندی آزمون بیشتر می شود. ما باید n را به قدری بزرگ اختیار کنیم که آزمون در مورد سؤالی



شکل ۳۸۶. چگالی X در مثال ۱ (به طور تقریبی)، هرگاه فرضی درست باشد. مقدار بحرانی $c = 1564$

که در حالت واقعی جالب است اطلاعاتی به دست دهد. از طرف دیگر، برای صرفه جویی در هزینه و وقت، n نباید بزرگتر از مقدار لازم باشد. در اغلب موارد انتخاب مقرون به صرفه n را می توان به کمک آزمایشهای کوچک مقدماتی انجام داد. ▲

فرض آزمون شدنی را بعضی اوقات فرض صفر می نامند، و فرض ناقص (مانند $p > 0.05$)

در مثال ۱) فرض مقابل، یا اجمالا مقابل نامیده می شود. عدد α (۱۰۰٪) تراز معنی دار بودن آزمون نامیده می شود. c را مقدار بحرانی می نامند. ناحیه ای را که شامل مقادیری است که به ازای آنها فرض رد می شود ناحیه رد یا ناحیه بحرانی می نامند. ناحیه ای که شامل مقادیری است که به ازای آنها فرض رد نمی شود ناحیه پذیرش نامیده می شود. در موارد بسیاری α را ۵٪ انتخاب می کنند.

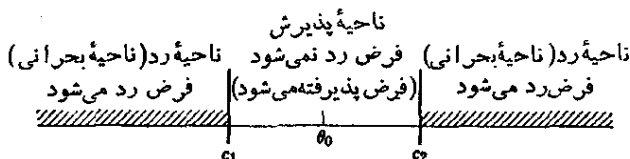
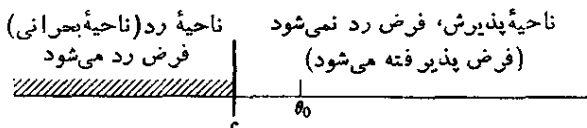
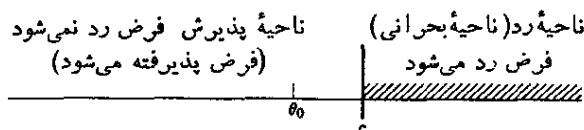
فرض می کنیم θ پارامتری مجهول در یک توزیع باشد، و بخواهیم فرض $\theta = \theta_0$ را آزمون کنیم. فرضهای مقابل از سه نوع اصلیند:

$$(۲) \quad \theta > \theta_0$$

$$(۳) \quad \theta < \theta_0$$

$$(۴) \quad \theta \neq \theta_0$$

(۲) و (۳) فرضهای مقابل یک طرفه نامیده می شوند و (۴) را فرض مقابل دو طرفه می خوانند. (۲) از همان نوعی است که در مثال ۱ دیدیم (اگر فرض کنیم $\theta_0 = p = ۰.۵$ و $\theta = p > ۰.۵$)؛ c در طرف راست θ_0 واقع است، و ناحیه رد از c تا ∞ است (شکل ۳۸۷، قسمت فوقانی). این آزمون را آزمون از طرف راست می نامند. در مورد (۳)، عدد c در طرف چپ θ_0 واقع است، ناحیه رد از c تا $-\infty$ ادامه دارد (شکل ۳۷۱، قسمت میانی)، و در این صورت آزمون را آزمون از طرف چپ می نامند. هر دو آزمون را آزمون یک طرفه می نامند. در حالت (۴) دو مقدار بحرانی c_1 و c_2 ($c_1 > c_2$) را داریم. ناحیه رد از c_1 تا $-\infty$ و از c_2 تا ∞ ادامه دارد، و آزمون، آزمون دو طرفه نامیده می شود.



شکل ۳۸۷. آزمون در مورد فرض مقابل (۲) (قسمت فوقانی شکل). فرض مقابل (۳) (قسمت میانی). و فرض مقابل (۴)

هر سه نوع فرض فوق در عمل مهم هستند. مثلاً، (۳) در ارتباط با آزمون استحکام ماده ظاهر می‌شود. در آن صورت θ_0 می‌تواند استحکام مسورد نظر باشد و فرض مقابل سستی نامطلوبی را مشخص می‌کند. البته حالتی که استحکام ماده بیش از میزان مورد نظر باشد قابل قبول است و ملاحظات خاصی را لازم نمی‌آورد. فرضهای از نوع (۴)، مثلاً در ارتباط با قطر میل گردان ممکن است مهم باشند. در آن صورت θ_0 قطر مورد نظر است و میل گردانهای با قطر کم هم درست مانند میل گردانهای قطور نامرغوب هستند، به طوری که باید مراقب انحرافات θ_0 در هر دو جهت بود.

اکنون به بررسی مخاطراتی که در اتخاذ تصمیمات نادرست نهفته است می‌پردازیم. این کار را در مورد آزمون فرض $\theta = \theta_0$ در برابر فرض مقابلی که برای سادگی تنها يك عدد θ_1 در نظر گرفته شده است، انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم $\theta_1 > \theta_0$ باشد طوری که يك آزمون سمت راست داشته باشیم، در مورد آزمونهای سمت چپ یا دو طرفه نیز وضع به همین منوال است. در مورد نمونه مفروض $x_1, \dots, x_n$ مقدار $\theta = g(x_1, \dots, x_n)$ را محاسبه می‌کنیم. هرگاه $\hat{\theta} > c$ ، فرض رد می‌شود (مانند مثال ۱). اگر $\hat{\theta} \leq c$ ، فرض رد نمی‌شود. $\hat{\theta}$ را می‌توان به عنوان مقدار مشاهده شده متغیر تصادفی

$$\hat{\theta} = g(X_1, \dots, X_n)$$

در نظر گرفت چرا که x_j را می‌توان مقدار مشاهده شده X_j ، که در آن $j = 1, \dots, n$ دانست. در این آزمون ممکن است دو نوع خطا، به شرح زیر، پیش آیند.

خطای نوع اول (ر.ك. جدول ۱۱.۲۵). فرض درست است، اما رد می‌شود زیرا $\hat{\theta} > c$ مقدار $\hat{\theta}$ را اختیار می‌کند. واضح است که احتمال چنین خطایی برابر است با

$$(۵) \quad P(\hat{\theta} > c)_{\theta = \theta_0} = \alpha,$$

که تراز معنی‌دار بودن آزمون است.

خطای نوع دوم (ر.ك. جدول ۱۱.۲۵). فرض نادرست است، ولی رد نمی‌شود زیرا $\hat{\theta} \leq c$ مقدار $\hat{\theta}$ را اختیار می‌کند. احتمال وقوع چنین خطایی به β نمایش داده می‌شود؛ بنابراین

$$(۶) \quad P(\hat{\theta} \leq c)_{\theta = \theta_1} = \beta.$$

$\eta = 1 - \beta$ توان آزمون نامیده می‌شود. واضح است که این مقدار برابر احتمال اجتناب از خطای نوع دوم است.

خطاهای نوع اول و نوع دوم در آزمون $\theta = \theta_0$ در برابر فرض مقابل $\theta = \theta_1$

		واقعیت نامعلوم	
		$\theta = \theta_0$	$\theta = \theta_1$
رد نشده (پذیرفته شده)	$\theta = \theta_0$	تصمیم درست $p = 1 - \alpha$	خطای نوع دوم $p = \beta$
	$\theta = \theta_1$	خطای نوع اول $p = \alpha$	تصمیم درست $p = 1 - \beta$

فرمولهای (۵) و (۶) نشان می‌دهند که هم α و هم β به c بستگی دارند، و ما می‌خواهیم c را طوری انتخاب کنیم که این احتمالات هرچه ممکن است کوچکتر باشند؛ ولی شکل ۳۸۸ نشان می‌دهد که هر دوی این شرطها را نمی‌توان بسا هم تأمین کرد، زیرا برای آنکه α را کاهش دهیم باید c را به طرف راست منتقل کنیم، ولی در این صورت β افزایش می‌یابد. در عمل ابتدا α را انتخاب می‌کنیم (۵٪، یا گاهی ۱٪)، بعد c را مشخص می‌کنیم و بالاخره β را محاسبه می‌کنیم. اگر β آنقدر بزرگ باشد که توان $\eta = 1 - \beta$ کوچک شود، باید با انتخاب يك نمونه بزرگتر، آزمون را تکرار کرد، دلایل این روش به اختصار تشریح خواهد شد.

اگر فرض مقابل تنها يك عدد نباشد بلکه به یکی از صورت‌های (۲) تا (۴) باشد، آنگاه β تابعی از θ خواهد بود. این تابع $\beta(\theta)$ مشخصه عمل‌کننده (OC) ی آزمون و منحنی آن را منحنی OC می‌نامند. واضح است که در این حالت $\eta = 1 - \beta$ نیز به θ بستگی دارد، و تابع $\eta(\theta)$ را تابع توان آزمون می‌نامند.

البته، از آزمونی که منجر به پذیرش فرض معین θ_0 می‌شود، نتیجه نمی‌شود که این تنها فرض ممکن یا بهترین فرض ممکن است. در نتیجه عبارات «رد نمی‌شود» یا «رد کردن با موفقیت همراه نیست» شاید بهتر از عبارت «پذیرفته می‌شود» است. در مثالهای زیر به تشریح آزمون فرضیهایی که در عمل مهم هستند می‌پردازیم.

مثال ۲. آزمون برای میانگین توزیع نرمال با واریانس معلوم

فرض می‌کنیم X يك متغیر تصادفی نرمال با واریانس $\sigma^2 = 9$ باشد. با استفاده از نمونه‌ای به حجم $n = 10$ ، با میانگین $\bar{x}$ ، فرض $\mu = \mu_0 = 24$ را در برابر هر يك از سه نوع فرض مقابل، یعنی

(الف) $\mu > \mu_0$ (ب) $\mu < \mu_0$ (ج) $\mu \neq \mu_0$

آزمون کنید. تراز معنی دار بودن $\alpha = 0.05$ را انتخاب می کنیم. با استفاده از

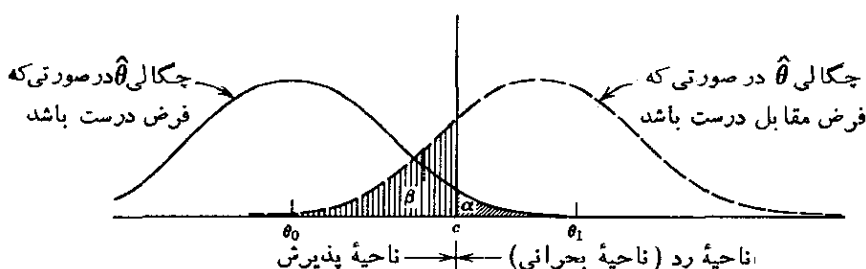
$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

برآوردی برای میانگین به دست می آید. هرگاه فرض درست باشد، $\bar{X}$ نرمال بامیانگین $\mu = 24$ و واریانس $\sigma^2/n = 0.9$ است، ر.ك. قضیه ۲، بخش ۱۴.۲۰. از این رو مقدار بحرانی c را می توان از جدول A_9 ، ضمیمه ۴، به دست آورد.

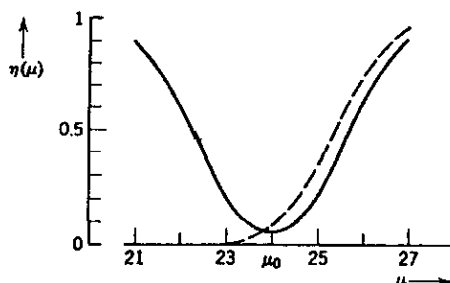
حالت (الف) c را از $\mu_{-24} P(\bar{X} > c) = \alpha = 0.05$ تعیین می کنیم:

$$P(\bar{X} \leq c)_{\mu_{-24}} = \Phi\left(\frac{c - 24}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \alpha = 0.95.$$

از جدول A_9 ، ضمیمه ۴، نتیجه می شود $(c - 24)/\sqrt{0.9} = 1.645$ ، $c = 25.56$ ، که بزرگتر از μ_0 است، مانند قسمت بالای شکل ۳۸۷. اگر $\bar{x} \leq 25.56$ فرض رد نمی شود. هرگاه $\bar{x} > 25.56$ ، فرض رد می شود. توان آزمون عبارت است از (ر.ك. شکل ۳۸۹).



شکل ۳۸۸. شرح خطاهای نوع اول و دوم در آزمون $\theta = \theta_0$ در برابر فرض مقابل $\theta = \theta_1 (> \theta_0)$



شکل ۳۸۹. توان $\eta(\mu)$ در مثال ۲، حالت (الف) (خط چین) و حالت (ج)

$$\begin{aligned} (۷) \quad \eta(\mu) &= P(\bar{X} > ۲۵۷۵۶)_\mu = 1 - P(\bar{X} \leq ۲۵۷۵۶)_\mu \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{۲۵۷۵۶ - \mu}{\sqrt{۵۰۹}}\right) = 1 - \Phi(۲۶۷۹۴ - ۱۷۵۵\mu). \end{aligned}$$

حالت (ب) مقدار بحرانی c از معادله

$$P(\bar{X} \leq c)_{\mu=۲۴} = \Phi\left(\frac{c-۲۴}{\sqrt{۵۰۹}}\right) = \alpha = ۰.۰۵$$

به دست می آید. از جدول A_9 ، ضمیمه ۴، نتیجه می شود $c = ۲۴ - ۱.۷۵۶ = ۲۲.۲۴۴$ ، اگر $\bar{x} \geq ۲۲.۲۴۴$ ، فرض را رد نمی کنیم. هر گاه $\bar{x} < ۲۲.۲۴۴$ فرض را رد می کنیم. توان آزمون عبارت است از

$$(۸) \quad \eta(\mu) = P(\bar{X} \leq ۲۲.۲۴۴)_\mu = \Phi\left(\frac{۲۲.۲۴۴ - \mu}{\sqrt{۵۰۹}}\right) = \Phi(۲۳.۷۶۵ - ۱.۷۵۵\mu).$$

حالت (ج) چون توزیع نرمال متقارن است، c_1 و c_2 را به فاصله مساوی از $\mu = ۲۴$ ، مثلاً $c_1 = ۲۴ - k$ و $c_2 = ۲۴ + k$ انتخاب می کنیم، k را با توجه به

$$\begin{aligned} P(۲۴ - k \leq \bar{X} \leq ۲۴ + k)_{\mu=۲۴} &= \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{۵۰۹}}\right) - \Phi\left(-\frac{k}{\sqrt{۵۰۹}}\right) \\ &= 1 - \alpha = ۰.۰۹۵ \end{aligned}$$

تعیین می کنیم. با استفاده از جدول A_9 ، ضمیمه ۴، به دست می آوریم $k/\sqrt{۵۰۹} = ۱.۷۹۶۰$ ، $k = ۱.۷۹۶ \times \sqrt{۵۰۹} = ۱۲.۸۶$ ، از این رو $c_1 = ۲۴ - ۱.۷۹۶ = ۲۲.۲۰۴$ و $c_2 = ۲۴ + ۱.۷۹۶ = ۲۵.۷۹۶$ ، فرض را رد نمی کنیم در غیر این صورت آن را رد می کنیم. توان آزمون عبارت است از (د. ک. شکل ۳۸۹)

$$\begin{aligned} \eta(\mu) &= P(\bar{X} < ۲۲.۲۰۴)_\mu + P(\bar{X} < ۲۵.۷۹۶)_\mu \\ &= P(\bar{X} < ۲۲.۲۰۴)_\mu + 1 - P(\bar{X} \leq ۲۵.۷۹۶)_\mu \\ (۹) \quad &= 1 + \Phi\left(\frac{۲۲.۲۰۴ - \mu}{\sqrt{۵۰۹}}\right) - \Phi\left(\frac{۲۵.۷۹۶ - \mu}{\sqrt{۵۰۹}}\right) \\ &= 1 + \Phi(۲۳.۳۳۴ - ۱.۷۵۵\mu) - \Phi(۲۷.۷۲۶ - ۱.۷۵۵\mu). \end{aligned}$$

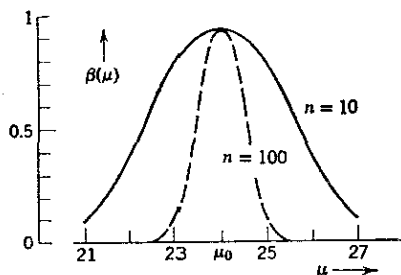
در نتیجه، مشخصه عمل کننده $\beta(\mu) = 1 - \eta(\mu)$ که در بالا تعریف شد عبارت است از (د. ک. شکل ۳۹۰)

$$\beta(\mu) = \Phi(۲۷.۷۲۶ - ۱.۷۵۵\mu) - \Phi(۲۳.۳۳۴ - ۱.۷۵۵\mu).$$

هر گاه نمونه را بزرگتر بگیریم، مثلاً حجم نمونه را برابر $n = ۱۰۰$ (به جای ۱۰) بگیریم آنگاه $\delta^2/n = ۰.۰۵۹$ (به جای ۰.۵۰۹) و مقادیر بحرانی عبارتند از $c_1 = ۲۳.۷۴۱$ و

$c_p = 24.59$ ، که درستی آنها را می‌توان از طریق محاسبه تحقیق کرد. در این صورت مشخصه عمل‌کننده آزمون برابر است با

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= \Phi\left(\frac{24.59 - \mu}{\sqrt{0.09}}\right) - \Phi\left(\frac{23.41 - \mu}{\sqrt{0.09}}\right) \\ &= \Phi(81.97 - 33.33\mu) - \Phi(78.03 - 33.33\mu).\end{aligned}$$



شکل ۳۹۰. منحنیهای مشخصه عمل‌کننده
(منحنیهای OC) در مثال ۲، حالت (ج)، در
مورد دو حجم نمونه مختلف n

شکل ۳۹۰ نشان می‌دهد که منحنی OC متناظر نسبت به منحنی متناظر با $n=10$ شیب بیشتری دارد. بدین ترتیب افزایش n باعث اصلاح آزمون شده است. در موارد عملی، n راناجایی که ممکن است کوچک اختیار می‌کنیم ولی نه تا آن حد که آزمون نتواند انحرافات بین μ و μ_0 را که از نقطه نظر عملی جالب هستند آشکار کند. برای نمونه، هرگاه انحرافات ± 2 واحد مورد نظر باشد، با توجه به شکل ۳۹۰ مشاهده می‌کنیم که $n=10$ بسیار کوچک است زیرا وقتی که $\mu = 24 - 2 = 22$ یا $\mu = 24 + 2 = 26$ ، آنگاه β تقریباً برابر ۵۰٪ است. از طرف دیگر، مشاهده می‌کنیم که $n=100$ برای منظور ما مناسب است.

مثال ۳. آزمون برای میانگین توزیع نرمال با واریانس مجهول

استحکام کششی نمونه‌ای با حجم $n=16$ از طنابهای مانیلی (به قطر سه اینچ) اندازه گرفته شده و میانگین آن $\bar{x} = 4482 \text{ kg}$ ، و انحراف معیارش $s = 115 \text{ kg}$ به دست آمده است. (N. C. Wiley, 41st Annual Meeting of the Amer. Soc. for Test Materials) با فرض آنکه استحکام کششی یک متغیر تصادفی نرمال است، فرض $\mu_0 = 4500 \text{ kg}$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1 = 4400 \text{ kg}$ آزمون می‌کنیم. در اینجا مقدار μ_0 را می‌توان از تولیدکننده گرفت و مقدار μ_1 را با توجه به تجارب قبلی به دست آورد. تراز منعی دار بودن را $\alpha = 5\%$ انتخاب می‌کنیم. هرگاه فرض درست باشد از قضیه ۳، بخش ۱۴.۲۰، نتیجه میشود که متغیر تصادفی

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} = 4 \frac{\bar{X} - 4500}{S}$$

دارای توزیع t با $15 = n - 1$ درجه آزادی است. مقدار بحرانی c از معادله

$$P(T < c)_{\mu_0} = \alpha = 0.05$$

به دست می آید. جدول A_{11} ، ضمیمه ۴، نتیجه می دهد $c = -1.75$. از نمونه $t = 4(4482 - 4500)/115 = -0.626$ را به عنوان مقدار مشاهده شده T به دست می آوریم. ملاحظه می کنیم که $t > c$ و فرض را رد نمی کنیم. برای به دست آوردن مقادیر عددی توان آزمون، نیاز به جدولهایی داریم که به جدولهای t استیودنت غیر مرکزی موسومند؛ این مسئله را در اینجا مورد بحث قرار نمی دهیم.

مثال ۴. آزمون برای واریانس توزیع نرمال

با استفاده از نمونه ای به حجم $n = 15$ و واریانس نمونه $s^2 = 13$ از یک جامعه نرمال، فرض $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 10$ را در برابر فرض مقابل $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 20$ آزمون می کنیم. تراز معنی دار بودن را $\alpha = 5\%$ انتخاب می کنیم. هرگاه فرض درست باشد، آنگاه

$$Y = (n-1) \frac{s^2}{\sigma_0^2} = 14 \frac{s^2}{10} = 1.4 S^2$$

دارای توزیع کی با $14 = n - 1$ درجه آزادی است، ر.ك. قضیه ۴، بخش ۱۴.۲۰. از

$$P(Y > c) = \alpha = 0.05 \quad \text{یعنی} \quad P(Y \leq c) = 0.95$$

و جدول A_{12} ، ضمیمه ۴، با 14 درجه آزادی به دست می آوریم $c = 23.68$. این مقدار بحرانی Y است. از این رو با $0.0714 Y = 0.9714 S^2 = 1.36 S^2$ مقدار بحرانی $c^* = 0.9714 \times 23.68 = 16.91$ متناظر می شود. چون $s^2 < c^*$ ، فرض را رد نمی کنیم.

اگر فرض مقابل درست باشد، متغیر

$$Y_1 = 14 \frac{S^2}{\sigma_1^2} = 0.7 S^2$$

دارای توزیع کی با 14 درجه آزادی است. پس این آزمون دارای توان

$$\begin{aligned} \eta &= P(S^2 > c^*)_{\sigma^2=20} = P(Y_1 > 0.7c^*)_{\sigma^2=20} \\ &= 1 - P(Y_1 \leq 11.84)_{\sigma^2=20} \approx 62\% \end{aligned}$$

خواهد بود و مشاهده می کنیم که مخاطره نوع II، که برابر 38% است خیلی بزرگ است. برای کوچکتر کردن این مخاطره، باید حجم نمونه را افزایش دهیم.

مثال ۵. مقایسه میانگین دو توزیع نرمال

با استفاده از نمونه $x_1, \dots, x_n$ از یک توزیع نرمال با میانگین نامعلوم μ_1 و نمونه $y_1, \dots, y_n$ از توزیع نرمال دیگری با میانگین نامعلوم μ_2 ، می‌خواهیم فرض تساوی میانگینها، یعنی $\mu_1 = \mu_2$ را در برابر یک فرض مقابل، مثلاً $\mu_1 > \mu_2$ ، آزمون کنیم. لازم نیست واریانسها معلوم باشد، ولی فرض می‌شود که باهم برابرند. دو حالت وجود دارد که از نقطه نظر علمی جالب هستند.

حالت الف. حجم نمونه‌ها باهم مساوی است. به علاوه، هر مقدار از نمونه اول درست با یک مقدار از نمونه دیگر متناظر است، چرا که مقادیر مربوطه از یک شخص یا یک شیء نتیجه می‌شوند (مقایسه زوجی)؛ مثلاً، دو اندازه‌گیری از یک شیئی بادو روش متفاوت یا دو اندازه‌گیری از دو چشم یک حیوان، و به طور کلیتر، ممکن است این نمونه‌ها از زوجهای افراد یا اشیاء مشابه، مثلاً، دوقلوهای یکسان، زوج مستعمل لاستیکهای جلوی اتوموبیل و غیره نتیجه شوند. در مرحله بعد تفاضلهای مقادیر مربوطه را تشکیل می‌دهیم و با استفاده از روش ذکر شده در مثال ۳، این فرض را که جامعه متناظر با تفاضلهای دارای میانگین صفر است آزمون می‌کنیم. اگر امکان انتخاب باشد این روش بهتر از روش زیر است.

حالت ب. دو نمونه مستقل هستند و ضرورتاً هم حجم نیستند. در این صورت به شرح زیر عمل می‌کنیم. فرض مقابل را $\mu_1 > \mu_2$ می‌گیریم. تراز معنی‌دار بودن α را انتخاب می‌کنیم. $\bar{x}$ و $\bar{y}$ ، میانگینهای نمونه و $(n_1 - 1)s_1^2$ و $(n_2 - 1)s_2^2$ را محاسبه می‌کنیم، s_1^2 و s_2^2 واریانسهای نمونه هستند. با استفاده از جدول A۱۱، ضمیمه ۴، با $n_1 + n_2 - 2$ درجه آزادی، مقدار c را از

$$(10) \quad P(T \leq c) = 1 - \alpha$$

به دست می‌آوریم. در پایان

$$(11) \quad t_0 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \times \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}}$$

را محاسبه می‌کنیم. می‌توان نشان داد که این مقدار مشاهده شده یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع t با $n_1 + n_2 - 2$ درجه آزادی است، مشروط بر اینکه فرض درست باشد. هرگاه $t_0 \leq c$ ، فرض رد نمی‌شود. هرگاه $t_0 > c$ ، فرض رد می‌شود.

۱. هرگاه آزمون ذکر شده در مثال بعدی نشان دهد که واریانس به میزان قابل مشاهده‌ای تغییر می‌کند، آنگاه دو نمونه نه چندان کوچک با حجمهای مساوی (مثلاً $n_1 = n_2 = n > 30$) انتخاب می‌کنیم و با استفاده از این واقعیت که (۱۲) مقداری مشاهده شده از یک متغیر تصادفی تقریباً نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است، مانند مثال ۲ عمل می‌کنیم.

اگر فرض مقابل $\mu_1 \neq \mu_2$ باشد، آنگاه (۱۰) باید با

$$(10^*) \quad P(T \leq c_2) = 1 - 0.05\alpha, \quad P(T \leq c_1) = 0.05\alpha$$

جایگزین شود.

توجه کنید که برای نمونه‌هایی با حجمهای مساوی $n_1 = n_2 = n$ ، فرمول (۱۱) به

$$(12) \quad t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$$

تبدیل می‌شود.

برای روش‌تر کردن طرزکار با اعداد، به بررسی دومنونه

۱۰۵	۱۰۸	۸۶	۱۰۳	۱۰۳	۱۰۷	۱۲۴	۱۰۵
۸۹	۹۲	۸۴	۹۷	۱۰۳	۱۰۷	۱۱۱	۹۷

می‌پردازیم؛ این دومنونه بازده نسبی يك کارخانه تولید ورقه‌های قلع را تحت دو دسته شرایط مختلف نشان می‌دهند. (J. J. B. WORTH, J. Indust. Eng. 9, 1958, 249-253).
 با فرض آنکه جوامع متناظر نرمال و هم‌واریانس هستند، فرض $\mu_1 = \mu_2$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1 \neq \mu_2$ آزمون می‌کنیم. (تساوی واریانسها در مثال بعدی آزمون می‌شود).
 خواهیم داشت $\bar{x} = 105.125$ ، $\bar{y} = 97.500$ ، $s_1^2 = 106.125$ ، $s_2^2 = 84.000$.
 تراز معنی‌دار بودن را $\alpha = 5\%$ انتخاب می‌کنیم. با در نظر گرفتن $\alpha = 2.5\%$ و 0.05
 $97.5\% = 1 - 0.05\alpha$ و با استفاده از جدول A11، ضمیمه ۴، با 14 درجه آزادی از
 (10^*) به دست می‌آوریم $c_1 = -2.15$ ، $c_2 = 2.15$. از فرمول (۱۲) به ازای $n = 8$
 مقدار $t_0 = 1.56 = \sqrt{8} \times 7.625 / \sqrt{190.125} = \sqrt{8} \times 7.625 / \sqrt{190.125}$ حاصل می‌شود. چون $t_0 \leq c_2$ ،
 فرض $\mu_1 = \mu_2$ ، برابری بازده میانگین تحت دودسته شرایط، را رد نمی‌کنیم.

این مثال با حالت (الف) سازگار است، زیرا دو مقدار اول نمونه‌ها با نوع معینی از کار،
 و دو مقدار بعدی با نوع دیگری از کار، و غیره، مربوطند. بنابراین می‌توانیم از تفاضلهای
 مقادیر متناظر در دومنونه، یعنی

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

استفاده کرده و با روش مذکور در مثال ۳، فرض $\mu = 0$ را که در آن μ میانگین جامعه متناظر با تفاضلهای است آزمون کنیم. به عنوان يك شق منطقی دیگر می‌گیریم $\mu \neq 0$. میانگین نمونه و واریانس نمونه به ترتیب عبارتند از $\bar{d} = 7.625$ ، $s^2 = 45.696$. در نتیجه
 $t = \sqrt{8} (7.625 - 0) / \sqrt{45.696} = 3.19$ از $P(T \leq c_1) = 2.5\%$
 $P(T \leq c_2) = 97.5\%$ و جدول A11، ضمیمه ۴، با $7 = n - 1$ درجه آزادی به دست
 می‌آوریم $c_1 = -2.37$ ، $c_2 = 2.37$ و فرض را رد می‌کنیم زیرا $t = 3.19$ بین

c_1 و c_2 واقع نیست. از این رو آزمون اخیر، که در آن از اطلاعات بیشتری (با همان نمونه‌ها) استفاده شده است، نشان می‌دهد که تفاضل در بازده معنی‌دار است.

مثال ۶. مقایسه واریانس دو توزیع نرمال

با استفاده از دو نمونه ذکر شده در مثال فوق، فرض $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ را آزمون کنید؛ فرض می‌کنیم که جامعه‌های متناظر نرمال هستند و طبیعت آزمایش فرض مقابل $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ را القاء می‌کند. می‌یابیم $s_1^2 = 106125$ ، $s_2^2 = 84000$. ترازمعنی‌دار بودن $\alpha = 5\%$ را انتخاب می‌کنیم. با استفاده از $P(V \leq c) = 1 - \alpha = 95\%$ و جدول A_{13} ، ضمیمه ۴، با $(n_1 - 1, n_2 - 1) = (7, 7)$ درجه آزادی، مقدار c برابر 3.79 تعیین می‌گردد. در پایان $v_0 = s_1^2 / s_2^2 = 1.26$ را محاسبه می‌کنیم. چون $v_0 \leq c$ ، فرض را رد نمی‌کنیم. اگر $v_0 > c$ می‌بود آن را رد می‌کردیم. آزمون یاد شده این واقعیت را که v_0 مقدار مشاهده شده متغیری تصادفی است که دارای توزیعی موسوم به توزیع F با $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ درجه آزادی است توجیه می‌کند، مشروط بر اینکه فرض درست باشد (اثبات در مرجع [H۴]، ر. ک. ضمیمه ۰۱). توزیع F با (m, n) درجه آزادی به وسیله آر. ای. فیشر تعریف شده است و دارای تابع توزیع $F(z) = 0$ به‌ازای $z < 0$ و

$$F(z) = K_{mn} \int_0^z t^{(m-2)/2} (mt+n)^{-(m+n)/2} dt \quad (z \geq 0) \quad (13)$$

$$K_{mn} = m^{m/2} n^{n/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}m\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right) \text{ که است،}$$

مسائل بخش ۱۵.۲۰

۱. با فرض نرمال بودن و با استفاده از نمونه $1, 1, -1, 1, 3, -8, 6, 5$ (انحرافات سمت (بر حسب مضارب 0.01 رادیان) در چرخش 143 rad ی ماهواره تل استار)، $\mu = 0$ را در مقابل $\mu > 0$ آزمون کنید.
۲. با استفاده از نمونه مثال ۱، بخش ۳.۲۰، فرض $\mu = 0.80 \text{ in.}$ (طول جعبه‌ها) را در برابر فرض مقابل $\mu \neq 0.80 \text{ in.}$ آزمون کنید. (فرض کنید توزیع نرمال است.)
۳. با استفاده از داده‌های بوفن، جدول ۶.۲۰، بخش ۵.۲۰، فرض سالم بودن سکه را در برابر این فرض مقابل که احتمال آمدن شیر بیشتر از خط است آزمون کنید؛ سالم بودن به‌این معنی است که شانس آمدن شیر و خط یکی است.
۴. این فرض را که اختلاف معنی‌داری بین دوروش اندازه‌گیری نشاسته موجود در سیب-زمینیها وجود ندارد آزمون کنید، برای این منظور فرض کنید توزیع نرمال است و

نمونه (اختلاف مقادیر متناظر از ۹۶ سیب زمینی، اندازه گرفته شده به صورت مضارب ۵۰٪)

$$۲۰۰۱۲۲۳ - ۳۱۲۳۵ - ۱۱ - ۲۱$$

را مورد استفاده قرار دهید.

۵. شرکتی روغنهای تولیدی خود را در قوطیهای ۵۰۰ گرمی می فروشد. این شرکت مایل است بداند که آیا میانگین اوزان، در تراز ۵٪، اختلاف معنی داری با ۵۰۰ گرم دارد یا نه، اگر چنین اختلافی وجود داشت ماشین را که قوطیها را پر می کند تنظیم می کنند. يك فرض و يك فرض مقابل در نظر بگیرید و با فرض نرمال بودن توزیع و با استفاده از يك نمونه، شامل ۱۰ قوطی با میانگین ۴۹۶ گرم و انحراف معیار ۵ گرم، آزمون را انجام دهید.

۶. هرگاه نمونه ای شامل ۵۰ حلقه لاستیک از نوعی معین دارای عمر متوسط ۳۲۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار ۴۰۰۰ کیلومتر باشد، آنگاه آیا تولیدکننده می تواند ادعا کند که میانگین واقعی عمر چنین لاستیکی بیشتر از ۳۰۰۰۰ کیلومتر است؟ فرضی در نظر بگیرید و با فرض نرمال بودن، آن را در سطح ۵٪ آزمون کنید.

۷. نمودار منحنیهای OC مذکور در مثال ۲، موارد (الف) و (ب)، رسم کنید.

۸. نشان دهید که در مورد يك توزیع دوتوع خطایی را که در آزمون فرض $H_0: \mu = \mu_0$ در برابر فرض مقابل $H_1: \mu = \mu_1$ پیش می آید می توان، با انتخاب نمونه به قدر کافی بزرگ به اندازه دلخواه کوچک کرد (ولی نمی توان صفر کرد).

۹. سه نمونه بتن مرغوب در اختیار داریم که مقاومتشان در برابر فشار به ترتیب ۳۵۷، ۳۵۹، ۴۱۳ (کیلو گرم بر سانتیمتر مربع) است؛ این کمیت در مورد سه نمونه بتن معمولی برابر با ۳۴۶، ۳۵۸، ۳۵۲ شده است. برابری میانگینهای جامعه، $\mu_1 = \mu_2$ ، را در برابر فرض مقابل $\mu_1 > \mu_2$ آزمون کنید. (نرمال بودن و تساوی واریانسها را فرض کنید).

۱۰. با فرض نرمال بودن و تساوی واریانسها و با استفاده از نمونههای مستقلی با $n_1 = 9$ ، $\bar{x} = 12$ ، $s_1 = 2$ ، $n_2 = 9$ ، $\bar{y} = 15$ ، $s_2 = 2$ ، $\mu_1 = \mu_2$ ، $H_0: \mu_1 = \mu_2$ را ۵٪ انتخاب کنید.

۱۱. دو نمونه ساده طوری تشکیل دهید که فرض تساوی میانگینهای جامعه با وجود بزرگی تفاضل میانگینهای دو نمونه رد نشود.

۱۲. به منظور کسب اطمینان از کارآیی يك روش الکتریکی برای اندازه گیری دما، دو نمونه در نظر گرفته می شوند. با فرض نرمال بودن و تساوی واریانسهای جامعههای متناظر،

فرض برابری میانگینهای جامعه را آزمون کنید. نمونه‌ها عبارتند از [$^{\circ}\text{C}$]

۱۵۴۹ ۱۵۶۵ ۱۵۷۵ ۱۵۶۳ ۱۵۶۹

۱۵۵۶ ۱۵۶۱ ۱۵۶۸ ۱۵۶۷ ۱۵۶۵

۱۳. هر گاه داروی استاندارد ۷۰٪ از مریضهای مبتلا به بیماری معینی را بهبود بخشد و داروی جدیدی ۱۴۸ مریض از ۲۵۰ مریض را بهبود بخشد، آیا می‌توان گفت که داروی جدید داروی بهتری است.

۱۴. با استفاده از نمونه‌هایی با حجم ۱۵ و ۵ و با واریانسهای $\sigma_1^2 = 50$ و $\sigma_2^2 = 20$ و با فرض نرمال بودن جامعه‌های مربوط به آنها، فرض $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$: H_0 را در برابر فرض مقابل $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ آزمون کنید. α را ۵٪ بگیرید.

۱۵. با استفاده از دو نمونه (وزن گردوغبار موجود در چند لوله معین، که برحسب میلی گرم اندازه‌گیری شده است) که توسط انجمن پژوهش استخراج زغال سنگ بریتانیا ارائه شده است و با فرض نرمال بودن جامعه‌های مربوطه، تحقیق کنید که واریانس جامعه‌ها با هم تفاوت معنی‌داری دارند یا نه. نمونه‌ها عبارتند از

۷۵ ۲۰ ۷۰ ۷۰ ۸۵ ۹۰ ۱۰۰ ۴۰ ۳۵ ۶۵ ۹۰ ۳۵

۲۰ ۳۵ ۵۵ ۵۰ ۶۵ ۴۰

۱۶.۲۰ کنترل کیفیت

هیچ فرایند تولیدی آنقدر کامل نیست که تمام محصولات آن دقیقاً مثل هم باشند. همواره تفاوت‌های کوچکی وجود دارند که از تعداد زیادی عوامل کوچک غیرقابل کنترل ناشی می‌شوند و بنابراین باید آنها را به صورت نوسانات شانسی مورد بررسی قرار داد. اطمینان یافتن از آنکه تولیدات دارای مقادیر (مثلاً طول، استحکام، یا هر خاصیتی که ممکن است در حالتی خاص مهم باشد) مطلوب است اهمیت دارد. برای این منظور می‌توان این فرض را که تولیدات دارای خاصیت مطلوب هستند آزمون کرد، مثلاً $\mu = \mu_0$ را می‌توان فرض کرد که در آن μ_0 مقدار مورد نظر است. اگر این کار بعد از تولید مقدار زیادی کالا (مثلاً بعد از تولید ۱۰۰۰۰۰۰ پیچ) انجام شود، آزمون روشن می‌کند که کیفیت محصولات تولید شده چگونه بوده است، ولی دیگر برای تغییر دادن نتایج نامطلوب خیلی دیر است. بهتر است که آزمون در خلال تولید محصول انجام گیرد. این کار در فواصل زمانی منظم (مثلاً، هر نیم ساعت یا هر ساعت یک بار) انجام می‌شود و کنترل کیفیت نام دارد. هر بار نمونه‌ای با حجم معین در عمل، ۳ تا ده قلم در نظر گرفته می‌شود. اگر فرض رد شود، فرایند تولید را متوقف کرده به جستجوی عواملی که سبب انحراف شده‌اند می‌پردازند.

هر گاه فرایند تولید را در صورتی که پیشرفت کار خوب باشد متوقف کنیم مرتکب خطایی از نوع I شده ایم. اگر فرایند را در صورت نامرتب بودن آن متوقف نکنیم، مرتکب خطایی از نوع II شده ایم (ر. ک. بخش ۱۵.۲۰).

نتیجه هر آزمون، روی چیزی که نمودار کنترل نام دارد رسم می شود. این نمودار در سال ۱۹۲۴ توسط دلبویو ای. شیوهارت پیشنهاد شده است و سبب می شود که کنترل کیفیت در عمل تأثیر بیشتری داشته باشد.

نمودار کنترل در مورد میانگین. یک مثال تشریحی از نمودار کنترل در قسمت فوقانی، شکل ۳۹۱ آمده است. این نمودار کنترل در مورد میانگین، حد پایین کنترل LCL، خط کنترل مرکزی CL و حد بالای کنترل UCL را نمایش می دهد. دو حد کنترل با مقادیر بحرانی c_1 و c_2 در حالت (ج) مثال ۲، بخش ۱۵.۲۰، متناظر هستند. وقتی که میانگین نمونه ای در خارج از حدود کنترل افتاد، فرض را رد کرده ادعا می کنیم که فرایند تولید «خارج از کنترل» است، یعنی ادعا می کنیم که در تراز فرایند انتقالی رخ داده است. این عمل هر زمان که نقطه ای از حدود تجاوز کند انجام می شود.

اگر حدود کنترل خیلی باز انتخاب شوند، هیچ انتقال فرایندی مشاهده نخواهیم کرد. از طرف دیگر هر گاه حدود کنترل را خیلی تنگ انتخاب کنیم قادر به اجرای عملیات تولید نخواهیم بود زیرا باید مکرر برای جستجوی اشکالی که وجود ندارد عملیات را متوقف کنیم. تراز معنی دار بودن معمولاً $\alpha = 1\%$ می گیرند. بنا به قضیه ۲، بخش ۱۴.۲۰، و جدول A۹، ضمیمه ۴، در مورد توزیع نرمال حدود کنترل متناظر برای میانگین عبارتند از

$$(۱) \quad UCL = \mu_0 + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad LCL = \mu_0 - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

در اینجا σ معلوم فرض می شود. هر گاه σ نامعلوم باشد، انحراف معیار ۲۰ یا ۳۰ نمونه اول را محاسبه کرده واسطه حسابی آنها را به صورت تقریبی برای σ به کار می بریم. خط شکسته که در شکل ۳۹۱ میانگینها را به هم وصل می کند صرفاً برای مشخصتر کردن نتایج است.

نمودار کنترل در مورد واریانس. علاوه بر میانگین، اغلب می توان واریانس، انحراف معیار، یا دامنه را کنترل کرد. برای ترسیم یک نمودار کنترل در مورد واریانس در توزیع نرمال، می توان روش مذکور در مثال ۴، بخش ۱۵.۲۰، را جهت تعیین حدود کنترل به کار گرفت. مرسوم است که تنها یک حد کنترل، یعنی، حد بالای کنترل را مورد استفاده قرار دهند. با توجه به مثال ۴، بخش ۱۵.۲۰، مقدار این حد عبارت است از

$$(۲) \quad UCL = \frac{\sigma^2 c}{n-1}$$

که در آن c از معادله

$$P(Y \leq c) = 1 - \alpha \quad \text{یعنی} \quad P(Y > c) = \alpha$$

جدول ۱۴۰۲۰

دوازده نمونه ۵ مقداری (قطراستوانه‌های کوچک بر حسب میلیمتر)

شماره نمونه	مقادیر نمونه	$\bar{x}$	s	R
۱	۴۲۰۶ ۴۲۰۸ ۴۲۰۸ ۴۲۰۸ ۴۲۱۰	۴۲۰۸۰	۰۲۰۱۴	۰۲۰۴
۲	۴۲۱۰ ۴۲۱۰ ۴۲۱۲ ۴۲۱۲ ۴۲۱۲	۴۲۱۱۲	۰۲۰۱۱	۰۲۰۲
۳	۴۲۰۶ ۴۲۰۶ ۴۲۰۸ ۴۲۱۰ ۴۲۱۲	۴۲۰۸۴	۰۲۰۲۶	۰۲۰۶
۴	۴۲۰۶ ۴۲۰۸ ۴۲۰۸ ۴۲۱۰ ۴۲۱۲	۴۲۰۸۸	۰۲۰۲۳	۰۲۰۶
۵	۴۲۰۸ ۴۲۱۰ ۴۲۱۲ ۴۲۱۲ ۴۲۱۲	۴۲۱۰۸	۰۲۰۱۸	۰۲۰۴
۶	۴۲۰۸ ۴۲۱۰ ۴۲۱۰ ۴۲۱۰ ۴۲۱۲	۴۲۱۰۰	۰۲۰۱۴	۰۲۰۴
۷	۴۲۰۶ ۴۲۰۸ ۴۲۰۸ ۴۲۱۰ ۴۲۱۲	۴۲۰۸۸	۰۲۰۲۳	۰۲۰۶
۸	۴۲۰۸ ۴۲۰۸ ۴۲۱۰ ۴۲۱۰ ۴۲۱۲	۴۲۰۹۶	۰۲۰۱۷	۰۲۰۴
۹	۴۲۰۶ ۴۲۰۸ ۴۲۱۰ ۴۲۱۲ ۴۲۱۴	۴۲۱۰۰	۰۲۰۳۲	۰۲۰۸
۱۰	۴۲۰۶ ۴۲۰۸ ۴۲۱۰ ۴۲۱۲ ۴۲۱۶	۴۲۱۰۴	۰۲۰۳۸	۰۲۱۰
۱۱	۴۲۱۲ ۴۲۱۴ ۴۲۱۴ ۴۲۱۴ ۴۲۱۶	۴۲۱۴۰	۰۲۰۱۴	۰۲۰۴
۱۲	۴۲۱۴ ۴۲۱۶ ۴۲۱۶ ۴۲۱۶ ۴۲۱۶	۴۲۱۵۲	۰۲۰۱۱	۰۲۰۲

و جدول توزیع مربع کی (جدول A۱۲، ضمیمه ۴) با $n-1$ درجه آزادی به دست می آید؛ در اینجا α که (مثلاً ۵٪ یا ۱٪ گرفته می شود) عبارت است از احتمال آنکه مقدار مشاهده شده $\bar{x}$ از S^2 در یک نمونه بزرگتر از حد بالای کنترل باشد.

اگر نمودار کنترلی برای واریانس بخواهیم که هم حد بالای کنترل UCL و هم حد پایین کنترل LCL را داشته باشد، این حدود عبارت خواهند بود از

$$(۳) \quad UCL = \frac{\sigma^2 c_2}{n-1} \quad \text{و} \quad LCL = \frac{\sigma^2 c_1}{n-1}$$

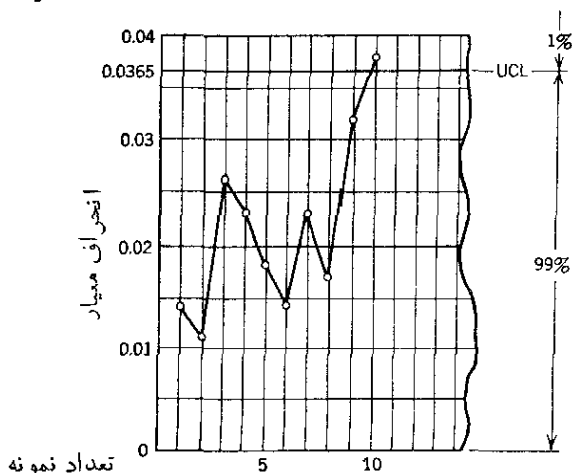
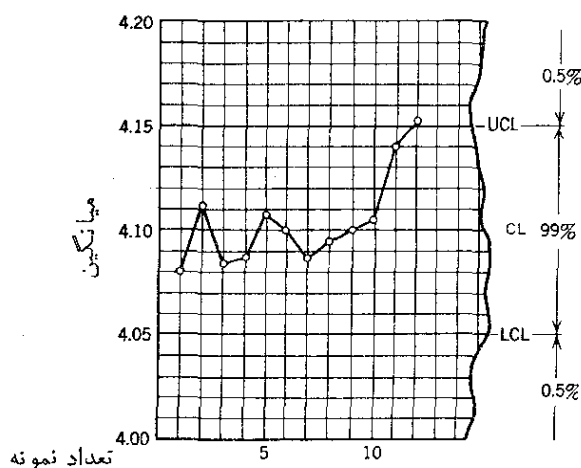
که در آن c_1 و c_2 از معادلات

$$(۴) \quad P(Y \leq c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{و} \quad P(Y \leq c_1) = \frac{\alpha}{2}$$

و جدول A۱۲، ضمیمه ۴، با $n-1$ درجه آزادی به دست می آید.

نمودار کنترل برای انحراف معیار. به همین ترتیب، به منظور رسم نمودار کنترل برای انحراف معیار، نیاز به حد بالای کنترل

$$(۵) \quad UCL = \frac{\sigma \sqrt{c}}{\sqrt{n-1}}$$



شکل ۳۹۱. نمودار کنترل درمورد میانگین (قسمت فوقانی

شکل) و انحراف معیار برای نمونه مذکور در جدول ۱۲.۲۰

داریم که از (۲) به دست می‌آید. مثلاً، درجدول ۱۲.۲۰ داریم $n=5$. با فرض آنکه جامعه مربوطه نرمال، با انحراف معیار $\sigma=0.02$ ، است و با انتخاب $\alpha=1\%$ از معادله

$$P(Y \leq c) = 1 - \alpha = 99\%$$

و جدول A۱۲، ضمیمه ۴، با ۴ درجه آزادی $c=1.3728$ و بنا به (۵)، مقدار متناظر عبارت است از

$$UCL = \frac{0.02 \sqrt{1.3728}}{\sqrt{4}} = 0.00365$$

که در قسمت پایین شکل ۳۹۱ نشان داده شده است.

نمودار کنترل درمورد انحراف معیار با هر دو حد بالا و پایین کنترل از (۳) به دست می‌آید.

نمودار کنترل درمورد دامنه. برای کنترل σ^2 یا σ باید به ترتیب s^2 یا s را محاسبه کرد. چون ممکن است این محاسبه برای اشخاصی که آموزش کافی در ریاضی ندیده‌اند تولید اشکال کند معمولاً کنترل واریانس یا انحراف معیار را با کنترل دامنه R (بزرگترین مقدار نمونه منهای کوچکترین مقدار نمونه) جایگزین می‌کنند. درمورد توزیع نرمال می‌توان نشان داد که انحراف معیار σ با امید ریاضی متغیر تصادفی R^* که R مقدار مشاهده شده آن است متناسب است، می‌توان $\sigma = \lambda_n E(R^*)$ را مثال زد که در آن ضریب تناسب λ_n به n ، حجم نمونه، بستگی داشته و دارای مقادیر زیر است:

n	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	۰.۸۹	۰.۵۹	۰.۴۹	۰.۴۳	۰.۴۰	۰.۳۷	۰.۳۵	۰.۳۴	۰.۳۲

n	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	۰.۳۱	۰.۲۹	۰.۲۸	۰.۲۸	۰.۲۷	۰.۲۵	۰.۲۳	۰.۲۲

چون R تنها به دو مقدار نمونه وابسته است، اطلاعاتی که درمورد نمونه به دست می‌دهد کمتر از اطلاعاتی است که از s حاصل می‌شود. واضح است که هر چه حجم نمونه n بزرگتر باشد، اطلاعاتی که در اثر جایگزین کردن s با R از دست می‌دهیم بیشتر خواهد بود. در عمل وقتی s را به کار می‌بریم، که n بزرگتر از ده باشد.

توجه کنید که بر آورد انحراف معیار بر اساس دامنه يك امتحان تقریبی ساده در محاسبه s است. این روش وقتی مفید است که شخص دیگری (مثلاً از يك مرکز محاسباتی محاسبات

عددی را برای آمار گرانجام می‌دهد. در این صورت سوء تفاهات و اشتباهات کاملاً مشترک هستند، و بنا بر این امتحانهای سریع از اهمیت فزاینده‌ای برخوردارند.

مسائل بخش ۱۶۰۲۰

۱. محصولات ماشینی که قوطیهای روغن ماشین را پرمی‌کند تشکیل جامعه‌ای نرمال با میانگین ۱ گالن و انحراف معیار ۰۰۵ گالن می‌دهند. نمودار کنترلی از نوعی که در شکل ۳۹۱ دیدیم برای کنترل میانگین ترسیم کنید (یعنی LCL و UCL را بیابید)؛ حجم نمونه را ۴ بگیرید.

۲. (نمودار کنترل سه - سیگما). نشان دهید که هرگاه در مسئله ۱، تراز معنی‌دار را $\alpha = 3\%$ اختیار کنیم آنگاه نتیجه می‌شود $LCL = \mu - 3\sigma/\sqrt{n}$ و $UCL = \mu + 3\sigma/\sqrt{n}$ و سپس مقادیر عددی مربوطه را بیابید.

۳. ده نمونه دوعضوی از پیچهای تولید شده در نظر می‌گیریم. مقادیر این نمونه‌ها (طول بر حسب میلیمتر) عبارتند از

شمارهٔ نمونه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
طول	۲۷۲۴	۲۷۲۴	۲۷۲۷	۲۷۲۴	۲۷۲۵	۲۷۲۵	۲۷۲۴	۲۷۲۳	۲۷۲۴	۲۷۲۳

بافرض آنکه جامعه نرمال دارای میانگین ۲۷۲۵ و واریانس ۰۰۰۲۴ است و با استفاده از (۱)، نمودار کنترلی برای میانگین ترسیم کنید و نمودار میانگینهای نمونه‌ها را بر روی نمودار مشخص کنید.

۴. میانگینهای ده نمونه زیر (ضخامت و اشرفا، مقادیر کد شده) را بر روی یک نمودار کنترل مربوط به میانگینها، بافرض آنکه جامعه نرمال با میانگین ۵ و انحراف معیار ۱٫۵۵ است، رسم کنید.

زمان ۸:۰۰ ۸:۳۰ ۹:۰۰ ۹:۳۰ ۱۰:۰۰ ۱۰:۳۰ ۱۱:۰۰ ۱۱:۳۰ ۱۲:۰۰ ۱۲:۳۰

مقادیر نمونه	۳	۳	۵	۷	۷	۴	۵	۶	۵	۵
نمونه	۴	۶	۲	۵	۳	۴	۶	۴	۵	۲
	۸	۶	۵	۴	۶	۳	۴	۶	۶	۵
	۴	۸	۶	۴	۵	۶	۶	۴	۴	۳

۵. دامنه نمونه‌های مذکور در مسئله ۴ را بر روی يك نمودار کنترل مربوط به دامنه‌ها را رسم کنید.
۶. نظر به اینکه وجود يك نقطه در خارج از حدود کنترل برای میانگین دلالت بر اشکالی در کار دارد، اشتباه جستجوی اشکال را هنگامی که اشکالی وجود ندارد هر چند دفعه يك بار مرتکب خواهیم شد هر گاه (الف) حدود ۱- سیگما، (ب) حدود ۲- سیگما را مورد استفاده قرار دهیم؟ (نرمال بودن را مفروض بگیرید).
۷. چه تغییری در معنی حدود کنترل (۱) حاصل می‌شود؟ هر گاه بخواهیم نمودار کنترلی با این حدود را در مورد جامعه‌ای که نرمال نیست به کار ببریم.
۸. هر گاه به جای $\bar{x}$ مجموع مقادیر نمونه، یعنی، $x_1 + \dots + x_n$ را به کار ببریم چه LCL و UCLی را باید به جای (۱) به کار ببریم؟ در مورد شکل ۳۹۱، این حدود را مشخص کنید.
۹. (تعداد کالاهای معیوب) در مورد نمودار کنترل برای کالاهای معیوب، LCL، CL و UCL را با استفاده از توزیع دو جمله‌ای، به شرح زیر، تعیین کنید. (الف) فرمولهایی بیابید که LCL و UCL را متناظر با $\mu \pm 3\sigma$ قرار دهند. (ب) هر گاه بخواهیم نمونه‌هایی با حجم ۱۰ در يك تولید انبوه از نوع معینی از مقادیر را در نظر بگیریم و بر اساس تجارب گذشته بدانیم که درصد کالاهای معیوب در حدود ۷۰۵ است مقادیر عددی را بیابید، مشروط بر اینکه فرایند تحت کنترل آماری باشد. توجه کنید که به خاطر کوچک بودن p ، نتیجه فرمول مربوط به LCL عددی منفی خواهد شد. در چنین حالتی LCL را برابر ۰ می‌گیریم و تنها UCL را به کار می‌بریم.
۱۰. (تعداد عیبه در واحد) نمودار c یا نمودار عیب در واحد برای کنترل X ، تعداد عیبه در واحد (مثلاً، تعداد عیبه‌دار ۱۰ متر کاغذ، تعداد میخهای مفقود شده هنگام پرچ شدن روی بال هواپیما، و غیره) به کار می‌رود. (الف) فرمولهایی برای CL، LCL و UCL متناظر با $\mu \pm 3\sigma$ ، با فرض آنکه X دارای توزیع پواسن است، بیابید. (ب) CL، LCL و UCL را در يك فرایند کنترل تعداد نقصهای روی شیشه‌های جام محاسبه کنید؛ برای این منظور فرض کنید که این تعداد، در صورتی که فرایند تحت کنترل آماری باشد، به طور متوسط برابر ۲٫۵ در هر جام است.

۱۷۰۲۰ نمونه‌گیری برای پذیرش

نمونه‌گیری برای پذیرش در تولید انبوه وقتی که يك تولید کننده به يك مشتری توده‌ای مرکب از N کالا تحویل می‌دهد به کار برده می‌شود. در چنین وضعیتی باید برای پذیرش یا رد يك توده کالا تصمیم گرفته شود. اغلب اوقات این تصمیم بر اساس بررسی نمونه‌ای به

حجم n از توده کالا و تعیین تعداد کالاهای معیوب، که به طور خلاصه معیوبها نامیده می شوند، اتخاذ می شود؛ کالاهای معیوب آنهايي هستند که یکی از خصوصیات مورد نظر (اندازه، رنگ، استحکام، یا هر چیز مهم دیگر) را نداشته باشند. اگر x ، تعداد کالاهای معیوب در نمونه، بزرگتر از عدد معینی مانند $(n < c)$ نباشد، کالا پذیرفته می شود. اگر $c > x$ ، کالا رد می شود. c را تعداد مجاز معیوبها یا عدد پذیرش می نامند. واضح است که تولید کننده و مشتری باید بر روی يك طرح نمونه گیری یعنی روی حجم نمونه معین n و تعداد مجاز c ، با هم توافق کنند. چنین طرحی را طرح نمونه گیری c می نامند زیرا چنین طرحی بر اساس يك نمونه c قرار دارد. طرحهای نمونه گیری دقتایی که در آنها از دو نمونه استفاده می شود، بعداً مورد بررسی قرار می گیرند.

فرض می کنیم A پیشامد پذیرش يك کالا باشد. واضح است که احتمال متناظر با A ، یعنی $P(A)$ ، نه فقط به n و c بلکه به تعداد کالاهای معیوب توده نیز وابسته است. فرض می کنیم M نمایش این عدد باشد و متغیر تصادفی X تعداد معیوبهای يك نمونه را نشان دهد، و نمونه گیری بدون جایگذاری باشد. آنگاه (ر. ک. بخش ۹.۲۰)

$$(۱) \quad P(A) = P(X \leq c) = \sum_{x=0}^c \binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x} / \binom{N}{n}.$$

اگر $M = 0$ (توده شامل کالای معیوب نباشد)، آنگاه X مقدار ۰ را اختیار می کند، و

$$P(A) = \binom{0}{0} \binom{N}{n} / \binom{N}{n} = 1$$

به ازای مقادیر مشخص n و c و با افزایش M احتمال $P(A)$ تنزل می کند. اگر $M = N$ (تمام کالاهای توده معیوب باشد)، آنگاه X مقدار n را اختیار می کند، و داریم $P(A) = P(X \leq c) = 0$ زیرا $c < n$.

نسبت $\theta = M/N$ نسبت معیوبها در توده نامیده می شود. با توجه به آنکه $M = N\theta$ ، (۱) را می توان چنین نوشت:

$$(۲) \quad P(A; \theta) = \sum_{x=0}^c \binom{N\theta}{x} \binom{N-N\theta}{n-x} / \binom{N}{n}.$$

چون θ می تواند یکی از $0, 1/N, 2/N, \dots, N/N$ مقدار را اختیار کند، احتمال $P(A)$ تنها به ازای این مقادیر تعریف می شود. به ازای مقادیر مشخص n و c ، می توان $P(A)$ را به صورت تابعی از θ ترسیم کرد. نتیجه این ترسیم $N+1$ نقطه است. این نقاط را توسط يك منحنی هموار، که منحنی مشخصه عمل کننده (منحنی OC) طرح نمونه گیری مورد نظر نامیده می شود، به هم وصل می کنیم.

مثال ۱

می‌خواهیم چند بسته تیغه رنده انتخاب کنیم. در هر بسته ۲۰ عدد تیغه رنده وجود دارد؛ طرح نمونه‌گیری تکی به شرح زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد. نمونه‌ای ۲ تایی از تیغه‌ها انتخاب می‌شود، و بسته مربوط به آن پذیرفته می‌شود اگر و تنها اگر دو تیغه نمونه خوب باشند. در این مورد $N=20$ ، $n=2$ ، $c=0$ ، و (۲) به صورت زیر درمی‌آید:

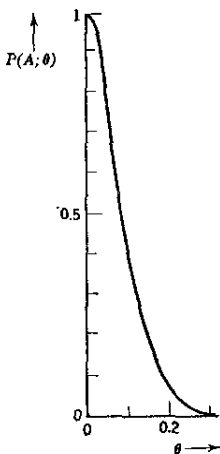
$$P(A; \theta) = \binom{20\theta}{0} \binom{20-20\theta}{2} / \binom{20}{2} = \frac{(20-20\theta)(19-20\theta)}{380}$$

مقادیر عددی عبارتند از

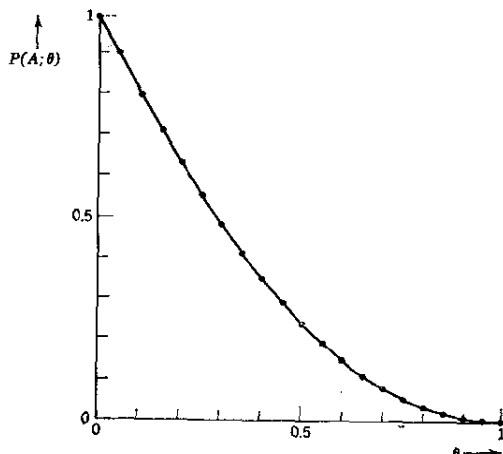
θ	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۵	۰٫۰۱۰	۰٫۰۱۵	۰٫۰۲۰
$P(A, \theta)$	۱٫۰۰۰	۰٫۰۹۰	۰٫۰۸۱	۰٫۰۷۲	۰٫۰۶۳

منحنی OC در شکل ۳۹۲ نشان داده شده است. ▲

در بیشتر موارد عملی θ کوچک است (کمتر از ۱۰٪). در بسیاری موارد N ، حجم توده کالا، خیلی بزرگ است (۱۰۰۰۰، ۱۰۰۰۰۰ و غیره)، طوری که می‌توان توزیع فوق هندسی موجود در (۱) و (۲) را با توزیعی دوجمله‌ای، با $p = \theta$ ، تقریب زد. آنگاه اگر n طوری باشد که $n\theta$ مناسب باشد (مثلاً، کمتر از ۲۰)، می‌توان توزیع فوق رابا توزیع پواسنی، با میانگین $\mu = n\theta$ ، تقریب زد. در آن صورت بنا بر (۲) داریم



شکل ۳۹۳. منحنی OC در مورد مثال ۲



شکل ۳۹۲. منحنی OCی طرح نمونه‌گیری تک با $N=20$ و $n=2$ ، $c=0$ ، برای توده‌ای به حجم

$$(۳) \quad P(A; \theta) \sim e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} \quad (\mu = n\theta).$$

مثال ۲

فرض کنید در مورد توده‌هایی با حجم بزرگ طرح نمونه‌گیری زیر مورد استفاده قرار گرفته است. نمونه‌ای با حجم $n = ۲۰$ در نظر گرفته می‌شود. اگر این نمونه بیش از ۱ کالای معیوب نداشته باشد پذیرفته می‌شود؛ هرگاه نمونه شامل ۲ کالای معیوب یا بیشتر بود رد می‌شود. در این طرح، با توجه به (۳) به دست می‌آوریم

$$P(A; \theta) \sim e^{-20\theta} (1 + 20\theta).$$

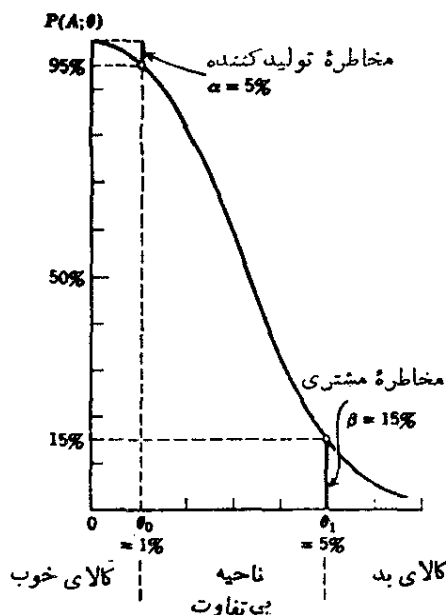
▲ منحنی OCی مربوطه در شکل ۳۹۳ نشان داده شده است.

حال می‌خواهیم دو نوع خطای ممکن در نمونه‌گیری برای پذیرش و مسئله انتخاب n و c را که به این بحث مربوط می‌شود بررسی کنیم. در نمونه‌گیری برای پذیرش تولید کننده و مشتری دارای علائق مختلفی هستند. تولیدکننده مایل است احتمال رد شدن يك توده كالای «خوب» یا «پذیرفتنی» عددی كوچك باشد که ما آن را α می‌نامیم. مشتری (خریدار) مایل است احتمال پذیرش يك كالای «بد» یا «ناپذیرفتنی» عدد كوچك β باشد. برای بیان دقیقتر مطلب، فرض می‌کنیم هر دو طرف توافق کنند که اگر در مورد توده كالایی θ از عدد معین θ_0 تجاوز نکند آن توده يك توده پذیرفتنی است و در صورتی که θ بزرگتر از یا مساوی با عدد معین θ_0 باشد توده مورد نظر يك توده ناپذیرفتنی است. در این صورت احتمال رد توده‌ای با $\theta \leq \theta_0$ بوده و مخاطره تولیدکننده نامیده می‌شود. این مخاطره با خطای نوع I در آزمون فرض (بخش ۱۵.۲۰) متناظر است. β احتمال پذیرش توده‌ای با $\theta \geq \theta_0$ است و مخاطره مشتری نامیده می‌شود. این نوع مخاطره هم با خطای نوع II (بخش ۱۵.۲۰) متناظر است. شکل ۳۹۴ مثالی را نشان می‌دهد. θ_0 تراز کیفیت پذیرفتنی (AQL) نامیده می‌شود، θ_1 را درصد اغماض معیوب توده (LTPD) یا تراز کیفیت رد شدنی (RQL) می‌نامند. توده‌ای با $\theta_0 < \theta < \theta_1$ را می‌توان توده بی تفاوت نامید.

با توجه به شکل ۳۹۴ مشاهده می‌کنیم که نقاط $(\theta_0, 1 - \alpha)$ و (θ_1, β) روی منحنی OC قرار دارند. می‌توان نشان داد که در مورد توده‌های بزرگ ابتدا می‌توان θ_0 و θ_1 ($\theta_1 > \theta_0$) را β و α را انتخاب کرد و سپس n و c را طوری تعیین کرد که منحنی OC از نزدیکی نقاط مورد نظر بگذرد. طرحهای نمونه‌گیری در مورد مقادیر خاص α و β ، θ_0 و θ_1 به چاپ رسیده‌اند؛ ر.ک. مرجع [۶]، ضمیمه ۱.

رابطه نزدیکی بین بازرسی نمونه‌گیری و آزمون فرض، به شرح زیر، موجود

است:



شکل ۳۹۴. منحنی OC، مخاطره تولید کننده و مشتری

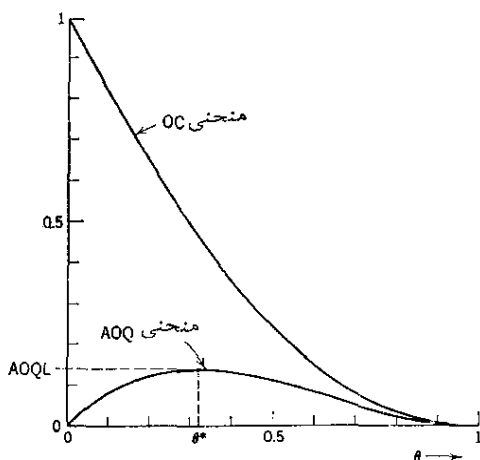
آزمون فرض	بازرسی نمونه گیری
فرض $\theta = \theta_0$	تراز کیفیت پذیرفتنی (AQL) $\theta = \theta_0$
فرض مقابل $\theta = \theta_1$	درصد اغماض معیوب توده (LTPD) $\theta = \theta_1$
مقدار بحرانی c	تعداد مجاز معیوب c
α ، احتمال ارتکاب خطای نوع اول (تراز معنی دار بودن)	مخاطره تولید کننده، در مورد توده ای با $\theta \leq \theta_0$
β ، احتمال ارتکاب خطای نوع دوم	مخاطره مشتری، β ، در مورد پذیرش توده ای با $\theta \geq \theta_1$

عمل نمونه گیری به خودی خود مشتری را به اندازه کافی از ضرر مصون نمی دارد. در واقع، هرگاه تولید کننده مجاز باشد توده ای را که قبلاً رد شده، بدون ذکر این موضوع، باردیگر به معرض فروش بگذارد، آنگاه حتی کالاهای بد نیز بالاخره پذیرفته خواهند شد. برای مصونیت مشتری در مقابل این امکان و سایر امکانات، تولید کننده می تواند بامشتری بر سر این موضوع توافق کند که توده رد شده تصفیه شود، یعنی ۱۰۰٪ بازرسی شود، کالا به

کالا، و همه کالاهای معیوب آن را خارج کرده به جای آنها کالای سالم بگذارند.^۱ فرض می‌کنیم کارخانه‌ای θ ۱۰۰٪ کالای معیوب تولید کند و توده‌های رد شده آن تصفیه شوند، آنگاه K توده به اندازه N شامل KN کالا است، که $KN\theta$ ی آن معیوب است $KP(A; \theta)$ کالا پذیرفته می‌شود؛ این مقدار شامل $KPN\theta$ کالای معیوب است. توده‌های رد و تصفیه شده شامل هیچ کالای معیوبی نیستند. از این رو بعد از تصفیه نسبت معیوبها در K توده برابر است با $KPN\theta / KN = \theta P(A; \theta)$. این تابع θ را کیفیت خروجی متوسط (AOQ) نامیده و با $AOQ(\theta)$ نمایش می‌دهند. بنا براین

$$(۴) \quad AOQ(\theta) = \theta P(A; \theta)$$

به ازای یک طرح نمونه‌گیری مفروض، تابع مزبور و نمودارش، منحنی کیفیت خروجی متوسط (منحنی AOQ)، رابطه سادگی می‌توان از روی منحنی OC و $P(A; \theta)$ به دست آورد. شکل ۳۹۵ مثالی را نشان می‌دهد.



شکل ۳۹۵. منحنیهای OC و AOQ برای نقشه ساده در شکل ۳۹۲

واضح است که $AOQ(0) = 0$ همچنین $AOQ(1) = 0$ زیرا $P(A; 1) = 0$. با توجه به این موضوع و از $AOQ \geq 0$ نتیجه می‌گیریم که این تابع باید در نقطه‌ای مانند $\theta = \theta^*$ دارای ماکزیمم باشد. مقدار مربوطه $AOQ(\theta^*)$ را حد کیفیت خروجی

۱. البته، هرگاه بازرسی مخرب باشد، یا در مقایسه با ارزش کالا گران بوده و مقرون به صرفه نباشد، تصفیه غیر ممکن است. در آن صورت توده رد شده را با قیمت ارزان می‌فروشند یا اوراق می‌کنند.

متوسط (AOQL) می نامند. این بدترین کیفیت متوسطی است که با وجود تصفیه ممکن است پذیرفته شود.

معلوم می شود که ممکن است چند طرح نمونه گیری n دارای $AOQL$ باشند؛ به مرجع [۱۶]، ضمیمه ۱، مراجعه کنید. از این رو هرگاه مشتری تنها به $AOQL$ اهمیت دهد، تولیدکننده در انتخاب طرح نمونه گیری قدری آزادی خواهد داشت و می تواند طرحی را انتخاب کند که میزان نمونه گیری، یعنی تعداد کالاهای بازرسی شده در هر توده را به حداقل برساند. این تعداد عبارت است از

$$nP(A; \theta) + N(1 - P(A; \theta))$$

که در آن جمله اول مربوط به کالاهای پذیرفته شده و جمله دوم مربوط به کالاهای رد و تصفیه شده است؛ در واقع، برای تصفیه نیاز به بازرسی همه N کالای توده داریم، و $1 - P(A; \theta)$ احتمال رد یک توده است.

مذاکره می شویم که با استفاده از طرح نمونه گیری دوگانه می توان در کار بازرسی صرفه جویی کرد. در این طرح که نمونه ای به حجم n را به دو نمونه با حجمهای n_1 و n_2 ($n_1 + n_2 = n$) تقسیم می کنیم. اگر توده خیلی خوب یا خیلی بد باشد، آنگاه امکان دارد، تنها با استفاده از یک نمونه، بتوان درباره پذیرش یا رد تصمیم گرفت، بنابراین نمونه دیگر تنها در صورتی مورد استفاده قرار می گیرد که توده کیفیتی متوسط داشته باشد. مرجع [۱۶] شامل طرحهای نمونه گیری دوگانه با استفاده از بازرسی همراه با تصفیه از نوع زیر است (که x_1 و x_2 تعداد معیوبها در دو نمونه است).

۱. اگر $x_1 \leq c_1$ توده را می پذیریم. اگر $x_1 > c_1$ ، توده را رد می کنیم.
۲. اگر $c_1 < x_1 \leq c_2$ ، از نمونه دوم استفاده می کنیم. هرگاه $x_1 + x_2 \leq c_2$ توده را می پذیریم. اگر $x_1 + x_2 > c_2$ ، توده را رد می کنیم.

مسائل بخش ۱۷.۲۰

۱. مطلوب است تقریب دو جمله ای توزیع فوق هندسی مذکور در مثال ۱ و مقایسه مقادیر تقریبی و واقعی با هم.
۲. در مثال ۱، مخاطره های تولیدکننده و مشتری چیست؟ هرگاه AQL برابر ۱۰٪ و RQL برابر ۶٪ باشد.
۳. خریداری لوله های الکترونی را به کمک طرح نمونه گیری n امتحان می کند، او برای این منظور از نمونه ای به حجم ۴۰ و عدد پذیرش ۱ استفاده می کند. با استفاده از جدول A_1 ، ضمیمه ۴، احتمال پذیرش توده هایی را که شامل ۱/۴٪، ۱/۲٪، ۱٪، ۵٪، ۱۰٪ لوله معیوب هستند محاسبه کنید. نمودار منحنی OC را رسم کنید.

۴. توده‌های بزرگی از باتری که برای استفاده در ماشینهای حساب ساخته شده‌اند با توجه به طرح زیرمورد بازرسی قرار می‌گیرند. تعداد $n = 30$ باتری به تصادف از يك توده انتخاب شده و آزمون می‌شوند. اگر این نمونه حداکثر شامل $c = 1$ باتری معیوب باشد، توده پذیرفته می‌شود و در غیر این صورت رد می‌شود. با استفاده از تقریب پواسن، منحنی OCی طرح را رسم کنید.

۵. منحنی AOQی مذکور در مسئله ۴ را رسم کنید. AOQL را، با فرض آنکه تصفیه به کار گرفته شود، پیدا کنید.

۶. مسئله ۴ را در حالتی که $n = 50$ و $c = 0$ حل کنید.

۷. منحنی OC و منحنی AOQ را در مورد طرح ساده تکی برای توده‌های بزرگ به ازای $n = 5$ و $c = 0$ رسم کنید.

۸. مسئله ۷ را به ازای $n = 4$ و $c = 1$ حل کنید.

۹. در مسئله ۷، θ_0 را به کمک منحنی بیابید، در صورتی که مخاطره تولید کننده ۵٪ باشد. در مسئله ۷، اگر مخاطره مشتری ۱۰٪ باشد θ_1 را بیابید.

۱۰. نمودار طرح‌های نمونه‌گیری را به ازای $c = 0$ و مقادیر صعودی n ، مثلاً $n = 2, 3, 4$ ، رسم کرده با هم مقایسه کنید (از توزیع دوجمله‌ای استفاده کنید).

۱۱. در مورد طرح نمونه‌گیری تکی با $n = 5$ و $c = 0$ مخاطره‌ها را بیابید، با این فرض که AQL برابر است با $\theta_0 = 1\%$ و RQL برابر است با $\theta_1 = 15\%$.

۱۲. منحنی OC و منحنی AOQ را در مورد طرح نمونه‌گیری تکی برای توده‌های بزرگ به ازای $n = 5$ و $c = 0$ رسم کنید، و AOQL را بیابید.

۱۳. اگر در یک طرح نمونه‌گیری تکی در مورد توده‌های بزرگ و اشتر، حجم فضای نمونه ۱۰۰ باشد و بخواهیم AQL برابر ۵٪ و مخاطره تولید کننده ۲٪ باشد، عدد پذیرش c را چقدر باید بگیریم؟ (از تقریب نرمال استفاده کنید).

۱۴. مخاطره مشتری در مسئله ۱۳ چقدر است؟ اگر بخواهیم RQL برابر ۱۲٪ باشد.

۱۵. فرض می‌کنیم در یک طرح نمونه‌گیری تکی برای بازرسی پیچ‌ها نمونه‌ای با حجم ۴۰ و $c = 3$ داشته باشیم، و بخواهیم مخاطره تولید کننده برابر ۵٪ باشد. AQL چقدر است؟

۱۸.۲۰ نیکویی برازش. آزمون x^2

می‌خواهیم با استفاده از نمونه $x_1, \dots, x_n$ ، این فرض را که تابع معین $F(x)$ تابع

توزیع جامعه‌ای است که نمونه از آن گرفته شده است آزمون کنیم. واضح است که، تابع توزیع نمونه $F(x)$ تقریبی برای $F(x)$ است و اگر این تابع «به قدر کافی خوب» $F(x)$ را تقریب بزند، این فرض را که $F(x)$ تابع توزیع جامعه است رد نخواهیم کرد. هرگاه $F(x)$ «خیلی زیاد» از $F(x)$ انحراف داشته باشد فرض را رد می‌کنیم.

جدول ۱۳.۲۰

آزمون مجذور کی در مورد فرض که $F(x)$ تابع توزیع جامعه‌ای است که از آن نمونه $x_1, \dots, x_n$ گرفته شده است

مرحله اول. محور x را به K فاصله $I_1, I_2, \dots, I_K$ طوری تقسیم می‌کنیم که هر فاصله لا اقل شامل ۵ مقدار از نمونه $x_1, \dots, x_n$ باشد. عدد b_j ، تعداد مقادیری از نمونه‌ها که در فاصله $I_j (j = 1, \dots, K)$ قرار دارند، تعیین می‌کنیم. اگر مقداری از نمونه در مرز مشترک دو فاصله باشد، به هر یک از این دو b_j می‌مرز ۵۰٪ اضافه می‌کنیم.

مرحله دوم. با استفاده از $F(x)$ ، p_j ، احتمال آن را که متغیر تصادفی تحت بررسی مقداری را در فاصله $I_j (j = 1, \dots, K)$ اختیار کند، محاسبه می‌کنیم.

$$e_j = np_j$$

را حساب می‌کنیم. (این تعداد مقادیر نمونه است که به طوری نظری انتظار می‌رود در صورت درست بودن فرض در فاصله I_j قرار گیرد.)

مرحله سوم. انحراف

$$\chi_0^2 = \sum_{j=1}^K \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j}$$

را محاسبه می‌کنیم.

مرحله چهارم. تراز معنی‌داری (۵٪، ۱٪ یا درصد دیگری) انتخاب می‌کنیم.

مرحله پنجم. از معادله

$$P(\chi^2 \leq c) = 1 - \alpha$$

با کمک جدول توزیع مجذور کی با $K - 1$ درجه آزادی (جدول ۱۱۲، ضمیمه ۴) را تعیین می‌کنیم. هرگاه r پارامتر $F(x)$ نامعلوم باشد و بر آورد درست نمایی ماکزیمم (بخش ۱۳.۲۰) مورد استفاده قرار گیرد، آنگاه $K - r - 1$ درجه آزادی (به جای $K - 1$) به کار می‌رود. اگر $\chi_0^2 \leq c$ ، فرض رد نمی‌شود. اگر $\chi_0^2 > c$ ، فرض رد می‌شود.

برای تصمیم گیری با این روش، لازم است بدانیم که $\tilde{F}(x)$ با $F(x)$ ، در صورت درست بودن فرض، چقدر تفاوت دارد. بنابراین نخست باید معیاری برای انحراف $\tilde{F}(x)$ از $F(x)$ معرفی کنیم، در ضمن باید توزیع احتمال این معیار را با فرض درست بودن فرض بدانیم. آنگاه به طریق زیر عمل می کنیم. عدد c را طوری تعیین می کنیم که در صورت درست بودن فرض برای انحرافی بزرگتر از c احتمال کوچکی انتظار رود. اگر، با این همه، انحرافی بزرگتر از c روی دهد، دلیلی داریم که به درست بودن فرض شک کرده آن را رد می کنیم. از طرف دیگر، اگر انحراف از c تجاوز نکند، طوری که $\tilde{F}(x)$ تقریبی به قدر کافی خوب برای $F(x)$ باشد، فرض را رد نمی کنیم، یعنی در این حالت مدرک کافی برای رد کردن فرض نداریم، نباید از نظر دور داشت که ممکن است توابعی وجود داشته باشند که در آزمون رد نشوند. از این نظر موقعیت فعلی شبیه وضعی است که در بخش ۱۵.۲۰ ملاحظه کردیم.

جدول ۱۳.۲۰ آزمونی از این نوع را که توسط آر. ای. فیش معرفی شده است، نشان می دهد. این آزمون با توجه به این واقعیت توجیه می شود که اگر فرض درست باشد، آنگاه χ_0^2 مقدار مشاهده شده یک متغیر تصادفی است که تابع توزیع آن وقتی که n به سمت بینهایت می رود به سمت توزیع مجذور کی با $K-1$ درجه آزادی (یا $K-r-1$) درجه آزادی، اگر r پارامتر برآورد شوند) میل می کند. این شرط که باید در هر فاصله ذکر شده در جدول ۱۳.۲۰ حداقل ۵ مقدار نمونه قرار گیرد از این واقعیت ناشی می شود که به ازای مقدارمتهای n متغیر تصادفی تنها تقریباً یک توزیع مجذور کی خواهد داشت. اثبات این مطلب در مرجع [H۴]، ضمیمه ۱، یافت می شود. اگر نمونه کوچکتر از آن باشد که نیاز ما را برآورده کند، می توان آزمون را ادامه داد، ولی باید با دقت بیشتری نتیجه را مورد استفاده قرار داد.

مثال ۱. آزمون نرمال بودن

نرمال بودن جامعه ای را که نمونه مندرج در جدول ۲۰.۲۰، بخش ۲۰.۲۰، از آن گرفته شده است آزمون کنید. برآوردهای درست نمایی ماکزیمم در مورد μ و σ^2 عبارتند از $\bar{x} = 36.47$ و $\bar{\sigma}^2 = 71.29$. با توجه به محاسبات جدول ۱۴.۲۰ داریم $\alpha \cdot \chi_0^2 = 27.79$ را برابر ۵٪ انتخاب می کنیم. چون $K=10$ و $r=2$ پارامتر را برآورد کرده ایم، باید از جدول A۱۲، ضمیمه ۴، با $7 = K - r - 1$ درجه آزادی استفاده کنیم و جواب معادله $P(\chi^2 \leq c) = 95\%$ را برابر $c = 14.07$ به دست آوریم. چون $\chi_0^2 < c$ ، فرض نرمال بودن جامعه را رد نمی کنیم.

مسائل بخش ۱۸.۲۰

۱. در یکی از آزمایشهای کلاسیک جی. مندل تعداد ۳۵۵ نخود زرد و ۱۲۳ نخود سبز به

جدول ۱۴.۲۰

محاسبات مربوط به مثال ۱

x_j	$\frac{x_j - ۳۶۴۷}{۲۶۷}$	$\Phi\left(\frac{x_j - ۳۶۴۷}{۲۶۷}\right)$	$c_j = 100p_j$	b_j	جملات موجود در (۱)
$-\infty \dots ۳۲۵$	$-\infty \dots -۱۷۹$	$۰.۰۰۰۰ \dots ۰.۰۰۶۸۱$	۶۸۱	۶	۰.۰۰۹۶
$۳۲۵ \dots ۳۳۵$	$-۱۷۹ \dots -۱۷۱$	$۰.۰۰۶۸۱ \dots ۰.۰۱۳۳۵$	۶۸۴	۶	۰.۰۰۴۵
$۳۳۵ \dots ۳۴۵$	$-۱۷۱ \dots -۰.۷۴$	$۰.۰۱۳۳۵ \dots ۰.۰۲۲۹۶$	۹۶۱	۱۱	۰.۰۲۰۱
$۳۴۵ \dots ۳۵۵$	$-۰.۷۴ \dots -۰.۳۶$	$۰.۰۲۲۹۶ \dots ۰.۰۳۵۹۴$	۱۲۹۸	۱۴	۰.۰۰۸۰
$۳۵۵ \dots ۳۶۵$	$-۰.۳۶ \dots ۰.۰۰$	$۰.۰۳۵۹۴ \dots ۰.۰۵۰۰۰$	۱۴۰۶	۱۶	۰.۰۲۶۸
$۳۶۵ \dots ۳۷۵$	$۰.۰۰ \dots ۰.۳۹$	$۰.۰۵۰۰۰ \dots ۰.۰۶۵۱۷$	۱۵۱۷	۱۵	۰.۰۰۰۲
$۳۷۵ \dots ۳۸۵$	$۰.۳۹ \dots ۰.۷۶$	$۰.۰۶۵۱۷ \dots ۰.۰۷۷۶۴$	۱۲۴۷	۸	۱.۶۰۲
$۳۸۵ \dots ۳۹۵$	$۰.۷۶ \dots ۱.۱۳$	$۰.۰۷۷۶۴ \dots ۰.۰۸۷۰۸$	۹۴۴	۱۰	۰.۰۰۳۳
$۳۹۵ \dots ۴۰۵$	$۱.۱۳ \dots ۱.۵۱$	$۰.۰۸۷۰۸ \dots ۰.۰۹۳۴۵$	۶۳۷	۸	۰.۰۴۱۷
$۴۰۵ \dots \infty$	$۱.۵۱ \dots \infty$	$۰.۰۹۳۴۵ \dots ۱.۰۰۰۰۰$	۶۵۵	۶	۰.۰۰۴۶

$$\chi^2 = ۲۷۷۹۰$$

دست آمده است. آیا این با نظریهٔ مندل که بنا بر آن نسبت نخودهای زرد به نخودهای سبز باید ۳ به ۱ باشد مطابقت دارد.

۲. بین ساعات ۱ تا ۲ بعد از ظهر ۵ روز متوالی (دوشنبه تا جمعه) یکی از تعمیرگاهها به ترتیب دارای ۸۲، ۵۰، ۵۶، ۸۰ و ۵۲ مراجع بوده است. این فرض را که تعداد مورد انتظار مراجعین در آن ساعت در روزهای یاد شده یکسان است آزمون کنید (از $\alpha = 5\%$ استفاده کنید).

۳. سه نمونهٔ ۲۰۰ نایی میخ پرچ از میان تولیدات سه ماشین انتخاب می‌کنیم. تعداد میخهای معیوب در نمونه‌ها ۳، ۸ و ۴ بوده است. آیا این تفاضل معنی‌دار است؟ (از $\alpha = 5\%$ استفاده کنید).

۴. سکه‌ای را ۵۰ بار پرتاب کرده‌ایم. ۲۷ بار شیر آمده است. با استفاده از این نتیجه، این فرض را که احتمال آمدن خط و شیر یکسان است آزمون کنید.

۵. در نمونهٔ مذکور در مسئلهٔ ۴، حداقل تعداد شیرها (بزرگتر از ۲۵) که موجب رد کردن فرض می‌شود چقدر است، در صورتی که $\alpha = 5\%$ انتخاب شود؟

۶. نمونهٔ زیر مقادیر جرم پنبهٔ به‌کار رفته در یک پسارچه را (بر حسب گرم بر مترمربع) شامل می‌شود. این فرض را که جامعهٔ مربوط نرمال است آزمون کنید.

نمایندهٔ رده ۹۶ ۹۸ ۱۰۰ ۱۰۲ ۱۰۴ ۱۰۶ ۱۰۸ ۱۱۰ ۱۱۲

فراوانی مطلق رده ۱ ۰ ۱ ۲ ۸ ۱۹ ۲۸ ۳۰ ۴۱

نمایندهٔ رده ۱۱۴ ۱۱۶ ۱۱۸ ۱۲۰ ۱۲۲ ۱۲۴ ۱۲۶ ۱۲۸ ۱۳۰

فراوانی مطلق رده ۶۶ ۵۰ ۲۷ ۸ ۵ ۳ ۰ ۱ ۱

۷. آیا نمونهٔ مذکور در جدول ۴۰۲۰، بخش ۲۰۲، از یک جامعهٔ نرمال گرفته شده است؟

۸. نرمال بودن جامعه‌ای را که نمونهٔ زیر از آن گرفته شده است آزمون کنید. x [کیلوگرم بر میلیمتر مربع] استحکام کششی ورقه‌های فولادی با ضخامت ۳ میلیمتر است.

فراوانی	x	فراوانی	x
۲۲٫۵	۴۳٫۵ — ۴۴٫۰	۱۵	$< ۴۲٫۰$
۱۹٫۵	۴۴٫۰ — ۴۴٫۵	۱۱	۴۲٫۰ — ۴۲٫۵
۱۲	۴۴٫۵ — ۴۵٫۰	۱۵	۴۲٫۵ — ۴۳٫۰
۱۹	$> ۴۵٫۰$	۱۴	۴۳٫۰ — ۴۳٫۵

۹. با استفاده از نمونه داده شده، آزمون کنید که جامعه مربوطه دارای توزیع پواسن است یا نه. x تعداد ذرات آلفایی است که در فاصله‌های ۷۵ ثانیه‌ای توسط بی. راترفورد و اچ. گایگر در یکی از آزمایشهای کلاسیکشان در سال ۱۹۱۰ مشاهده شده است، و $f(x)$ فراوانی (= تعداد فواصل زمانی که طی آنها درست x ذره مشاهده شده) است.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
۰	۵۷	۵	۴۰۸	۱۰	۱۰
۱	۲۰۳	۶	۲۷۳	۱۱	۴
۲	۳۸۳	۷	۱۳۹	۱۲	۲
۳	۵۲۵	۸	۴۵	≥ 13	۰
۴	۵۳۲	۹	۲۷		

۱۰. این فرض را که جامعه‌ای که از آن نمونه ۱۰۰۰ تایی ورق کاغذ زیر گرفته شده است دارای توزیع پواسن است آزمون کنید. x تعداد لکه‌های تیره بر روی ورق و $\tilde{f}(x)$ فراوانی (تعداد ورقه‌های با x لکه) مشاهده شده است. (الف) $\alpha = 5\%$ ، (ب) $\alpha = 1\%$.

$\tilde{f}(x)$	x
۴۱۹	۰
۳۵۲	۱
۱۵۴	۲
۵۶	۳
۱۹	۴
۰	≥ 5

۱۹.۲۰ آزمونهای ناپارامتری

آزمونهای بخش ۱۵.۲۰ به جامعه‌های نرمال مربوط می‌شوند. در بسیاری از کار بردها جامعه‌ها نرمال نیستند. در آن صورت آزمونهای رابطه‌کار می‌بریم که به آزمونهای ناپارامتری یا آزمونهای آزاد توزیع موسومند؛ این آزمونها بر اساس آمارة ترتیبی بنانهاده شده‌اند و

بنابراین برای هر توزیع پیوسته‌ای معتبر هستند. این آزمون‌ها ساده هستند. با این حال در مورد توزیع نرمال آزمون‌های بخش ۱۵.۲۰ نتایج بهتری می‌دهند. برای تشریح ایده‌آسی آزمون ناپارامتری، به بررسی دو مثال نوعی می‌پردازیم.

مثال ۱. آزمون علامت در مورد میانه

میانه جواب $x = \tilde{\mu}$ معادله $F(x) = ۰.۵$ است، که در آن F تابع توزیع است. می‌خواهیم با استفاده از نمونه‌ی تفاضل‌های ذکر شده در مثال ۵، بخش ۱۵.۲۰، یعنی،

$$۱۶ \quad ۱۶ \quad ۲ \quad ۶ \quad ۰ \quad ۰ \quad ۱۳ \quad ۸,$$

فرض $\tilde{\mu} = ۰$ را آزمون کنیم، این فرض می‌گوید که بروندادهای مربوط به دو دسته شرایط کاری متفاوت به‌طور معنی‌داری تفاوت نمی‌کنند. فرض مقابل $\tilde{\mu} > ۰$ و سطح معنی‌دار بودن $\alpha = ۵\%$ را انتخاب می‌کنیم. اگر فرض درست باشد، p ، احتمال یافتن یک تفاضل مثبت برابر احتمال یافتن یک تفاضل منفی است. پس در این حالت، $p = ۰.۵$ ، و متغیر تصادفی

تعداد مقادیر مثبت در بین n مقدار X

دارای توزیعی دو جمله‌ای با $p = ۰.۵$ است. این نمونه دارای ۸ مقدار است. مقادیر صفر را که در تصمیم اثری ندارند حذف می‌کنیم در این صورت ۶ مقدار باقی می‌ماند، که همگی مثبت هستند. چون

$$P(X=۶) = \binom{۶}{۶} (۰.۵)^۶ (۰.۵)^۰ = ۰.۰۱۵۶ = ۱.۵۶\% < \alpha$$

فرض را رد می‌کنیم.

اگر یکی از این ۶ مقدار منفی بود، داشتیم

$$P(X \geq ۵) = \binom{۶}{۵} (۰.۵)^۵ (۰.۵)^۱ \times ۰.۵ + \binom{۶}{۶} (۰.۵)^۶ (۰.۵)^۰ = ۱.۰۹\%$$

و فرض را رد نمی‌کردیم.

مثال ۲. آزمون در مورد انحراف دلخواه

ماشینی برای بریدن سیمی به قطعات کوچکتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. ۵ قطعه که متوالیاً بریده شده‌اند دارای طول‌های

$$۲۹ \quad ۳۱ \quad ۲۸ \quad ۳۰ \quad ۳۲$$

هستند. با استفاده از نمونه‌ی مزبور، این فرض را که انحراف وجود نداشته باشد، یعنی ماشین

متماایل به تولید قطعات طولانی و طولانیتر نیز نباشد را آزمون کنید. فرض کنید نوع ماشین طوری است که حدس می‌زنیم فرض مقابل وجود انحراف مثبت است، یعنی انتظار داریم قطعات طولانیتر از قطعات قبل از خود باشند.

تعداد ترانهشها را در نمونه می‌شماریم، یعنی تعداد دفعاتی را که مقدار بزرگتری قبل از مقدار کوچکتر روی می‌دهد.

۲۹ جلوتر از ۲۸ روی می‌دهد (۱ ترانهش)،

۳۱ جلوتر از ۲۸ و ۳۰ روی می‌دهد (۲ ترانهش)،

سه مقدار نمونه بعدی صعودی هستند پس در نمونه فوق $3 = 2 + 1$ ترانهش موجود است. حال به بررسی متغیر تصادفی

تعداد ترانهشها $T =$

می‌پردازیم. اگر فرض درست باشد (انحراف وجود نداشته باشد)، آنگاه هر يك از $5! = 120$ جایگشت ۵ عنصر ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ دارای احتمال $(1/120)$ است. این جایگشتها را مطابق تعداد ترانهشهای آنها مرتب می‌کنیم:

$T=0$	$T=1$	$T=2$	$T=3$
۱ ۲ ۳ ۴ ۵	۱ ۲ ۳ ۵ ۴	۱ ۲ ۴ ۵ ۳	۱ ۲ ۵ ۴ ۳
	۱ ۲ ۴ ۳ ۵	۱ ۲ ۵ ۳ ۴	۱ ۳ ۴ ۵ ۲
	۱ ۳ ۲ ۴ ۵	۱ ۳ ۲ ۵ ۴	۱ ۳ ۵ ۲ ۴
	۲ ۱ ۳ ۴ ۵	۱ ۳ ۴ ۲ ۵	۱ ۴ ۲ ۵ ۳
		۱ ۴ ۲ ۳ ۵	۱ ۴ ۳ ۲ ۵
		۲ ۱ ۳ ۵ ۴	۱ ۵ ۲ ۳ ۴
		۲ ۱ ۴ ۳ ۵	۲ ۱ ۴ ۵ ۳
		۲ ۳ ۱ ۴ ۵	۲ ۱ ۵ ۳ ۴
		۳ ۱ ۲ ۴ ۵	۲ ۳ ۱ ۵ ۴
			۲ ۳ ۴ ۱ ۵
			۲ ۴ ۱ ۳ ۵
			۳ ۱ ۲ ۵ ۴
			۳ ۱ ۴ ۲ ۵
			۳ ۲ ۱ ۴ ۵
			۴ ۱ ۲ ۳ ۵

و غیره. بنا بر این خواهیم داشت

$$P(T \leq 3) = \frac{1}{120} + \frac{4}{120} + \frac{9}{120} + \frac{15}{120} = \frac{29}{120} = \%24$$

در نتیجه فرض را رد نمی‌کنیم.

مقادیر تابع توزیع T درحالی که انحراف وجود نداشته باشد در جدول $A14$ ، ضمیمه ۴، آمده است. این روش و مقادیری که به کار رفت به توزیعهای پیوسته مربوط می‌شوند. به طور نظری می‌توان انتظار داشت که همه مقادیر نمونه متفاوت باشند. عملاً، ممکن است به علت گرد کردن هنوز برخی از مقادیر نمونه با هم مساوی باشند. اگر m مقدار نمونه با هم برابر باشند، $m(m-1)/4$ (میانگین ترانهشها در جایگشت m عنصر)، یعنی $1/2$ را به ازای هر دو عضو برابر، $2/3$ به ازای هر سه عضو برابر اضافه می‌کنیم.

مسائل بخش ۱۹۰۲۰

۱. آزمون علامت را در مورد نمونه ذکر شده در مسئله ۱ (داده‌ها از ماهواره تل استار)، بخش ۱۵۰۲۰ به کار برید.
۲. تحت چه شرایطی می‌توان آزمون علامت را به عنوان آزمون میانگین یک توزیع پیوسته مورد استفاده قرار داد؟
۳. آزمون علامت را در مورد مسئله ۴، بخش ۱۵۰۲۰، به کار برید. (مقادیر لازم توزیع دو جمله‌ای در جدول $A6$ ، ضمیمه ۴، نیامده‌اند و باید محاسبه شوند.)
۴. به دو گروه ده نفری از بیماران دوسمکن مختلف A و B داده شده است. اثر این داروها در جدول زیر آمده است (افزایش زمان خواب بر حسب ساعت).

A	۱۲۹	۵۰۸	۱۰۱	۵۰۱	— ۵۰۱	۴۰۴	۵۰۵	۱۰۶	۴۰۶	۳۰۴
B	۵۰۷	— ۱۰۶	— ۵۰۲	— ۱۰۲	— ۵۰۱	۳۰۴	۳۰۷	۵۰۸	۵۰۵	۲۰۵
تفاضل	۱۰۲	۲۰۴	۱۰۳	۱۰۳	۵۰۵	۱۰۵	۱۰۸	۵۰۸	۴۰۶	۱۰۴

با استفاده از آزمون علامت تحقیق کنید که آیا تفاضل معنی‌دار است؟

۵. با فرض آنکه جامعه‌های متناظر با نمونه‌های ذکر شده در مسئله ۴ نرمال هستند، آزمون ارائه شده در مثال ۳، بخش ۱۵۰۲۰، را به کار برید.
۶. یک کلید ترموستاتیکی را که درست در 20° درجه گذاشته شده است در مقابل فرض دیگر که جریانی خیلی پایین است آزمون کنید. یک نمونه ۸ مقداری را مورد استفاده قرار دهید که ۷ تای آنها کمتر از 20° سانتیگراد و یکی بیشتر از 20° سانتیگراد باشد.

۷. جدولی شبیه جدول ذکر شده در مثال ۲ به ازای $n=4$ تشکیل دهید.

۸. فرض آنکه نمونه‌ای معین از ولت‌متر، که ولتاژ روی ولت‌متر مستقل از درجه حرارت T می‌باشد در مقابل فرض دیگر که ولتاژ روی ولت‌متر با افزایش درجه حرارت افزایش می‌یابد آزمون کنید. نمونه‌ای از مقادیر به دست آمده با به کار بردن ولتاژ ثابت را مورد استفاده قرار دهید:

درجه حرارت T بر حسب سانتیگراد	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
ولتاژ روی ولت‌متر بر حسب ولت	۹۹٫۸	۱۰۱٫۰	۱۰۰٫۴	۱۰۰٫۸	۱۰۱٫۵

۹. آزمون ذکر شده در مثال ۲ را با داده‌های زیر به کار ببرد (x = محتوی دی‌سولفید موجود در یک نمونه مشخص از بشم، که بر حسب درصد محتوی تارهای کاهش نیافته اندازه گرفته شده است؛ y = محتوی آب موجود در بشم که بر حسب درصد اندازه گرفته شده است).

x	۱۰	۱۵	۳۰	۴۰	۵۰	۵۵	۸۰	۱۰۰
y	۵۰	۴۶	۴۳	۴۲	۳۶	۳۹	۳۷	۳۳

۱۰. آیا مقدار کود سبب افزایش محصول گندم، X [کیلوگرم بر قطعه زیر کشت] می‌گردد؟ به این منظور از نمونه‌ی مقادیر زیر که با توجه به افزایش مقدار کود حاصل شده است استفاده کنید.

۱۵٫۲ ۱۶٫۸ ۱۳٫۲ ۱۶٫۶ ۱۷٫۲ ۱۷٫۵ ۱۷٫۳ ۱۸٫۱

۲۰.۲۰ زوجهای اندازه گیری.

برآوردن خطوط مستقیم

اکنون آزمایشهایی را مورد بحث قرار می‌دهیم که طی آنها به مشاهده یا اندازه گیری همزمان دو کمیت می‌پردازیم. در عمل بین دو نوع آزمایش به شرح زیر تفاوت می‌گذاریم.

۱. در تحلیل همبستگی، هر دو کمیت متغیرها تصادفی هستند و ماایل هستیم روابط بین آنها را بدانیم. (ما این شاخه از آمار را مورد بررسی قرار نخواهیم داد).

۲. در تحلیل رگرسیونی، یکی از متغیرها که آن را x می‌نامیم به صورت یک متغیر معمولی در نظر گرفته می‌شود، یعنی آن را بدون خطای محسوس می‌توان اندازه گرفت. y ، متغیر دوم، یک متغیر تصادفی است. x متغیر مستقل (برخی اوقات متغیر کنترل شده) نامیده می‌شود، و می‌خواهیم وابستگی متغیر y به x را بدانیم. مثالهای نوعی عبارتند

از وابستگی فشارخون Y به x ، سن شخص، یا همان طور که خواهیم دید، رگرسیون Y بر حسب x ، رگرسیون Y ، افزایش وزن نوع معینی از حیوانات، بر حسب x ، غذای روزانه آنها، رگرسیون Y ، رسانایی گرمایی چوب پنبه بر حسب x ، وزن مخصوص چوب پنبه.

در آزمایش، آزمایشگر نخست n مقدار $x_1, \dots, x_n$ از مقادیر x را جدا کرده و سپس به مشاهده Y به ازای این مقادیر x می پردازد، به این ترتیب مشاهده گر نمونه ای به صورت $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ به دست می آورد. در تحلیل رگرسیونی فرض می شود که میانگین μY به x بستگی دارد، یعنی آن را تابعی مانند $\mu = \mu(x)$ ، با مفهوم عادی تابع، در نظر می گیریم. منحنی $\mu(x)$ را منحنی رگرسیون Y بر حسب x می نامند. در این بخش ساده ترین حالت را بررسی می کنیم، یعنی حالتی را که $\mu(x)$ تابعی خطی مانند $\mu(x) = \alpha + \beta x$ است. ممکن است بخواهیم مقادیر نمونه را به صورت n نقطه در صفحه xy مشخص کرده خط راستی به آنها بپرازانیم، و این خط را برای برآورد $\mu(x)$ به ازای مقادیر مفروض x مورد استفاده قرار دهیم به طوری که به ازای هر مقدار معین x بتوانیم مقدار Y مورد انتظار را تعیین کنیم. اگر نقاط پراکنده باشند، برازاندن «با چشم» قابل اطمینان نیست و به روش ریاضی برای برازاندن خطوط نیاز داریم که نتیجه حاصل از آن یکتا بوده و تنها به نقاط بستگی داشته باشد. شیوه ای از این نوع که به طور گسترده مورد استفاده قرار می گیرد روش کمترین مربعات است که توسط گاوس ابداع شده است. این روش را در بحث حاضر می توان به شرح زیر فرمول بندی کرد.

خط مستقیم باید طوری به نقاط داده شده برازنده شود که مربعات فواصل نقاط از آن مینیمم باشد، فاصله نقاط از خط در جهت قائم اندازه گرفته شود (در جهت y).

فرض کلی (A۱)

$x_1, \dots, x_n$ ، مقادیر x نمونه $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ همگی برابر نیستند.

نمونه $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ را که حجم آن n است در نظر می گیریم. فاصله قائم (فاصله ای که در جهت y اندازه گرفته می شود) مقدار نمونه (x_j, y_j) از خط راست $y = a + bx$ برابر است با $|y_j - a - bx_j|$ ؛ به شکل ۳۹۶ مراجعه کنید. بنا بر این مجموع مربعات این فواصل عبارت است از

$$(۱) \quad q = \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_j)^2.$$

در روش حداقل مربعات a و b را طوری انتخاب می کنیم که q مینیمم شود. q وابسته a و b است و شرط لازم برای مینیمم شدن q عبارت است از

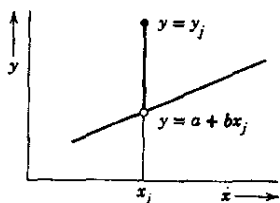
$$(۲) \quad \frac{\partial q}{\partial b} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial q}{\partial a} = 0.$$

با توجه به این شرط فرمول زیر به دست می آید:

$$(۳) \quad y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$$

که در آن

$$(۴) \quad \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n) \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$



شکل ۳۹۶. فاصله قائم نقطه (x_j, y_j) از خط $y = a + bx$

(۳) خط رگرسیون مقادیر y نمونه بر حسب مقادیر x نمونه نامیده می شود. b ، ضریب زاویه این خط، ضریب رگرسیون y نسبت به x نامیده می شود، و خواهیم دید که

$$(۵) \quad b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

در این رابطه

$$(۶) \quad s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^n x_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right]$$

و

$$(۷) \quad s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^n x_j y_j - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right) \right]$$

s_{xy} کوواریانس نمونه نامیده می شود. واضح است که، خط رگرسیون (۳) از نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ می گذرد.

برای رسیدن به (۳)، با به کار بردن (۱) و (۲) می یابیم

$$\frac{\partial q}{\partial a} = -2 \sum (y_j - a - bx_j) = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial b} = -2 \sum x_j (y_j - a - bx_j) = 0$$

(که در آن جمع دوی z از ۱ تا n صورت می پذیرد). بنابراین

$$na + b \sum x_j = \sum y_j$$

$$a \sum x_j + b \sum x_j^2 = \sum x_j y_j$$

باتوجه به فرض (A۱)، دترمینان این دستگاه معادلات خطی،

$$n \sum x_j^2 - (\sum x_j)^2 = n(n-1)s_1^2$$

[ر. ک. (۶)] مخالف صفر است، و دستگاه دارای جواب منحصر بفرد

$$(۸) \quad b = \frac{n \sum x_j y_j - \sum x_i \sum y_i}{n(n-1)s_1^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

است [ر. ک. (۴)، (۶)، (۷)]. از اینجا (۳) حاصل می شود با b بی که توسط (۵) تا (۷) داده شده است.

محاسبات دستی را با کد گذاری می توان ساده تر انجام داد، این کار را با انتخاب

$$(۹) \quad y_j = c_2 y_j^* + l_2, \quad x_j = c_1 x_j^* + l_1$$

انجام می دهیم و مقادیر ثابت c_1, c_2, l_1, l_2 را طوری برمی گزینیم که مقادیر تبدیل شده x_j^* و y_j^* هر چه ممکن است ساده باشند. نخست به محاسبه مقادیر $\bar{x}^*, \bar{y}^*, s_1^{*2}, s_{xy}^*$ متناظر با مقادیر تبدیل شده می پردازیم

$$\bar{y} = c_2 \bar{y}^* + l_2, \quad \bar{x} = c_1 \bar{x}^* + l_1$$

(۱۰)

$$s_{xy} = c_1 c_2 s_{xy}^*, \quad s_1^2 = c_1^2 s_1^{*2}.$$

مثال ۱. خط رگرسیون

کاهش حجم y [%] چرم به ازای مقادیر مشخصی از فشار بالای x [اتمسفر] اندازه گرفته شده است. نتایج در ستون اول جدول ۱۵۰۲ آمده اند. خطر گرسون y بر حسب x را پیدا کنید. ملاحظه می کنیم که $n=4$ و مقادیر $\bar{x} = 28000/4 = 7000$ و $\bar{y} = 1900/4 = 475$ ،

$$s_1^2 = \frac{1}{3} \left(216000000 - \frac{28000^2}{4} \right) = \frac{20000000}{3}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{3} \left(1484000 - \frac{28000 \times 1900}{4} \right) = \frac{15400}{3}$$

را به دست می آوریم. در نتیجه $b = ۱۵۴۰۰ / ۲۰۰۰۰۰۰۰ = ۰.۰۰۰۰۷۷$ و خطر گرسبون عبارت است از

$$\Delta \quad y = ۰.۰۰۰۰۷۷x - ۰.۰۶۴ \quad \text{یا} \quad y - ۰.۰۶۴ = ۰.۰۰۰۰۷۷(x - ۷۰۰۰)$$

فرض (A۲)

به ازای هر مقدار مشخص x متغیر تصادفی Y نرمال با میانگین

$$(۱۱) \quad \mu(x) = \alpha + \beta x$$

و واریانس σ^2 است، ضمناً σ^2 مستقل از x است.

فرض (A۳)

n آزمایش که نمونه $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ را از آنها به دست می آوریم مستقل هستند (د. لک. صفحه)

β ، در (۱۱)، ضریب رگرسیون جامعه نامیده می شود. زیرا می توان نشان داد که با در نظر گرفتن فرضهای (A۱) تا (A۳) بر آورد درست نمایی ماکزیم A برابر b ، ضریب رگرسیون نمونه (۵)، است.

جدول ۱۵.۲۰

رگرسیون کاهش حجم y [%]

چرم تحت فشار x [اتمسفر]

مقادیر مفروض		مقادیر کمکی	
x_j	y_j	x_j^2	$x_j y_j$
۴۰۰۰	۲۰۳	۱۶۰۰۰۰۰۰	۹۲۰۰
۶۰۰۰	۴۰۱	۳۶۰۰۰۰۰۰	۲۴۰۶۰۰
۸۰۰۰	۵۰۷	۶۴۰۰۰۰۰۰	۴۰۵۶۰۰
۱۰۰۰۰	۶۰۹	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۶۰۹۰۰۰
۲۸۰۰۰	۱۹۰۰	۷۸۴۰۰۰۰۰۰	۵۳۲۰۰۰

جدول ۱۶.۲۰

تعیین فاصله اطمینان برای β (ارائه شده در (۱۱)) با فرضهای (A۱) الی (A۳)مرحله اول. سطح اطمینان γ (۹۵٪، ۹۹٪ و غیره) را انتخاب می‌کنیم.مرحله دوم. جواب c ی معادله

$$(12) \quad F(c) = \frac{1}{\gamma} (1 + \gamma)$$

را از جدول توزیع t با $n-2$ درجه آزادی (جدول A۱۱، ضمیمه ۴: $n =$ حجم نمونه) تعیین می‌کنیم.مرحله سوم. با استفاده از نمونه‌ای مانند $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ، مقدار s_1^2 را از (۶)، و s_{xy} را از (۷) و b را از (۵) به دست می‌آوریم،

$$(13) \quad (n-1)s_1^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \quad \text{و}$$

$$(14) \quad q_0 = (n-1)(s_1^2 - b^2 s_1^2).$$

مرحله چهارم. $k = c \sqrt{q_0 / (n-2)(n-1)s_1^2}$ را محاسبه می‌کنیم. فاصله اطمینان عبارت است از

$$(15) \quad \text{CONF} \{b-k \leq \beta \leq b+k\}.$$

با فرضهای (A۱) تا (A۳) می‌توان فاصله اطمینانی برای β به دست آورد (جدول

۱۶.۲۰).

مثال ۲. فاصله اطمینانی برای ضریب رگرسیون

با استفاده از نمونه ذکر شده در جدول ۱۵.۲۰، باروش ذکر شده در جدول ۱۶.۲۰ فاصله اطمینانی برای β تعیین کنید.مرحله اول. $\gamma = 0.95$ را انتخاب می‌کنیم.مرحله دوم. معادله (۱۲) به صورت $F(c) = 0.975$ در می‌آید، و از جدول A۱۱ با $n-2 = 2$ درجه آزادی نتیجه می‌شود $c = 4.30$.مرحله سوم. از مثال ۱ داریم $3s_1^2 = 20000000$ و $b = 0.000077$. از جدول ۱۵.۲۰ به دست می‌آوریم.

$$q_0 = 11995 - 20000000 \times 0.000077^2 = 0.092$$

$$3s_1^2 = 10222 - \frac{19^2}{4} = 11995.$$

مرحله چهارم. بنا بر این داریم: $k = 4.30 \sqrt{0.092 / 2 \times 20000000} = 0.000206$ و

$$\text{CONF} \{0.000056 \leq \beta \leq 0.000098\}.$$

مسائل بخش ۲۰.۲۰

۱. به کمک چشم خط مستقیمی برآزانیید. فاصله لازم برای توقف پس از ترمز را در مورد اتومبیلی که با سرعت ۳۵ مایل در ساعت حرکت می کند برآورد کنید.

$x =$ سرعت (مایل در ساعت)	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
$y =$ فاصله لازم برای توقف (فوت)	۵۰	۹۵	۱۵۰	۲۱۰

۳. نتایج حاصل از مثال ۱ را با کدگذاری به دست آورید؛ به این منظور فرض کنید $x_j = 4000x_j^* + 2000$ ، $y_j = 0.1y_j^* + 5$.

در هر يك از مسائل زیر خط رگرسیون y بر حسب x رایافته و آن را رسم کنید.

۳. $(1, 1), (2, 1.7), (3, 3)$.

۴. نمونه ذکر شده در مسئله ۹، بخش ۱۹.۲۰.

۵. مرگ و میر y [%] موریانه ها (*Reticulitermes lucifugus* Rossi) به صورت تابعی از تمرکز x [%] کلروفتالین

x	۵۰۵۴	۵۰۱۵	۵۰۳۰	۱۰۰۰	۲۰۰۰
y	۳	۱۶	۱۳	۷۰	۹۰

۶. تعداد دور x (دردقیقه) و توان y (hp) يك موتور دیزلی

x	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۷۵۰
y	۵۸۰	۱۰۳۰	۱۴۲۰	۱۸۸۰	۲۱۰۰

۷. تغییر شکل x (میلی متر) و سختی بر نیلی y [کیلوگرم بر میلی متر مربع] نوعی فولاد

x	۶	۹	۱۱	۱۳	۲۲	۲۶	۲۸	۳۳	۳۵
y	۶۸	۶۷	۶۵	۵۳	۴۴	۴۰	۳۷	۳۴	۳۲

در هر مورد برای ضریب رگرسیون B يك فاصله اطمینان ۹۵٪ بیابید، با استفاده از نمونه داده شده و اینکه فرضهای $(A2)$ و $(A3)$ صادقند.

۸. $x =$ میزان رطوبت هوا (درصد)، $y =$ انبساط ژلاتین (درصد)

x	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
y	۵۰۸	۱۰۶	۲۰۳	۲۰۸

۹. $(1, 1), (2, 2+p), (3, 3)$ ، که p ثابت است.

۱۰. نمونه ذکر شده در مسئله ۷.

ضمیمه ۱: مراجع

A مراجع عمومی

- [A1] Abramowitz, M., and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1965.
- [A2] Buck, R. C., *Advanced Calculus*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [A3] Courant, R., *Differential and Integral Calculus*. 2 vols. New York: Interscience, 1964, 1956.
- [A4] Courant, R., and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*. 2 vols. New York: Interscience, 1953, 1962.
- [A5] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, 3 vols. New York: McGraw-Hill, 1953, 1955.
- [A6] Fletcher, A., J. C. P. Miller, L. Rosenhead, and L. J. Comrie, *An Index of Mathematical Tables*. Oxford: Blackwell, 1962.
- [A7] Fulks, W., *Advanced Calculus*. 2nd ed. New York: Wiley, 1969.
- [A8] Jahnke, E., F. Emde, and F. Lösch, *Tables of Higher Functions*. 7th ed. Stuttgart: Teubner, 1966.
- [A9] Knopp, K., *Infinite Sequences and Series*. New York: Dover, 1956.
- [A10] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis With Applications*. New York: Wiley, 1978.
- [A11] Magnus, W., F. Oberhettinger, and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. 3rd ed. New York: Springer, 1966.
- [A12] Protter, M. H., and C. B. Morrey, Jr., *Modern Mathematical Analysis*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964.
- [A13] Rainville, E. D., *Special Functions*. New York: Macmillan, 1960.
- [A14] Thomas, G. B., *Calculus and Analytic Geometry*. 4th ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.
- [A15] Whittaker, E. T., and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*. 4th ed. Cambridge: Harvard University Press, 1927 (reprinted 1965).

B معادلات دیفرانسیل معمولی (فصلهای ۱-۵)

- [A4], [A5], [A11], [A13], [A15]
- [B1] Birkhoff, G., and G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*. 3rd ed. New York: Wiley, 1978.
- [B2] Carslaw, H. S., and J. C. Jaeger, *Operational Methods in Applied Mathematics*. New York: Dover, 1963.
- [B3] Churchill, R. V., *Operational Mathematics*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1958.
- [B4] Coddington, E. A., and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955.
- [B5] Collatz, J., *Numerical Treatment of Differential Equations*. 3rd ed. New York: Springer, 1960.
- [B6] Director, S. W., *Circuit Theory*. New York: Wiley, 1975.
- [B7] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*. 2 vols. New York: McGraw-Hill, 1954.

- [B8] Fox, L., *Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
- [B9] Hahn, W., *Stability of Motion*. New York: Springer, 1967.
- [B10] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley, 1964.
- [B11] Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover, 1956.
- [B12] Kamke, E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. New York: Chelsea, 1948. (This extremely useful book contains a systematic list of more than 1500 differential equations and their solutions.)
- [B13] Kaplan, W., *Operational Methods for Linear Systems*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
- [B14] McLachlan, N. W., *Ordinary Non-Linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences*. 2nd ed. Oxford: Clarendon, 1956.
- [B15] Minorsky, N., *Nonlinear Oscillations*. New York: Van Nostrand, 1962.
- [B16] Robinson, P. D., *Fourier and Laplace Transforms*. New York: Dover, 1968.
- [B17] Stern, T. E., *Theory of Nonlinear Networks and Systems*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965.
- [B18] Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.
- [B19] Widder, D. V., *The Laplace Transform*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1941.

C جبر خطی: بردارها و ماتریسها. محاسبات برداری (فصلهای ۶-۹)

- [C1] Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [C2] Bodewig, E., *Matrix Calculus*. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland Pub. 1959.
- [C3] Faddeev, D. K., and V. N. Faddeeva, *Computational Methods of Linear Algebra*. San Francisco: Freeman, 1963.
- [C4] Frazer, R. A., W. J. Duncan, and A. R. Collar, *Elementary Matrices*. Cambridge: University Press, 1938 (reprinted 1963).
- [C5] Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*. 2 vols. New York: Chelsea, 1959.
- [C6] Gel'fand, I. M., *Lectures on Linear Algebra*. New York: Interscience, 1961.
- [C7] Hohn, F. E., *Elementary Matrix Algebra*. 2nd ed. New York: Macmillan, 1964.
- [C8] Kreyszig, E., *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry*. Toronto: University of Toronto Press, 1975.
- [C9] Lamb, H., *Hydrodynamics*. 6th ed. New York: Dover, 1945.
- [C10] McDuffee, C. C., *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea, 1946.
- [C11] Milne, E. A., *Vectorial Mechanics*. London: Methuen, 1948.
- [C12] Nering, E. D., *Linear Algebra and Matrix Theory*. 2nd ed. New York: Wiley, 1970.
- [C13] Schreier, O., and E. Spencer, *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*. 2nd ed. New York: Chelsea, 1959.
- [C14] Schwerdtfeger, H., *Introduction to Linear Algebra and the Theory of Matrices*. Groningen: Noordhoff, 1950.
- [C15] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Clarendon, 1965.
- [C16] Wilkinson, J. H., and C. Reinsch, *Linear Algebra*. New York: Springer, 1971.

D سری و انتگرال فوریه (فصل ۱۰)

- [D1] Carslaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*. 3rd ed. London: Macmillan, 1930.
- [D2] Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1963.

- [D3] Davis, H. F., *Fourier Series and Orthogonal Functions*. Boston: Allyn and Bacon, 1963.
- [D4] Rogosinski, W., *Fourier Series*. New York: Chelsea, 1959.
- [D5] Sneddon, I. N., *Fourier Transforms*. New York: McGraw-Hill, 1951.
- [D6] Szegő, G., *Orthogonal Polynomials*. 3rd ed. New York: American Mathematical Society, 1967.
- [D7] Titchmarsh, E. C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. 2nd ed. Oxford: Clarendon, 1948.
- [D8] Tolstov, G. P., *Fourier Series*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1962.
- [D9] Zygmund, A., *Trigonometric Series*. 2 vols. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1959.
- [D10] Zygmund, A., *Trigonometrical Series*. New York: Dover, 1955.

E معادلات دیفرانسیل جزئی (فصل ۱۱)

[A4], [A5], [B8], [D3]

- [E1] Bateman, H., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Cambridge: University Press, 1944 (reprinted 1964).
- [E2] Bergman, S., and M. Schiffer, *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*. New York: Academic Press, 1953.
- [E3] Duff, G. F. D., *Partial Differential Equations*. Toronto: University of Toronto Press, 1956.
- [E4] Duff, G. F. D., and D. Naylor, *Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: Wiley, 1966.
- [E5] Forsythe, G. E., and W. R. Wasow, *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. New York: Wiley, 1960.
- [E6] Garabedian, P. R., *Partial Differential Equations*. New York: Wiley, 1964.
- [E7] Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem*. New York: Dover, 1952.
- [E8] Kellog, O. D., *Foundations of Potential Theory*. New York: Dover, 1953.
- [E9] Mitchell, A. R., *Computational Methods in Partial Differential Equations*. New York: Wiley, 1969.
- [E10] Petrovsky, I. G., *Lectures on Partial Differential Equations*. New York: Interscience, 1954.
- [E11] Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*. 2 vols. New York: Dover, 1945.
- [E12] Sagan, H., *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*. New York: Wiley, 1961.
- [E13] Sneddon, I. N., *Elements of Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1957.
- [E14] Sommerfeld, A., *Partial Differential Equations in Physics*. New York: Academic Press, 1949.
- [E15] Webster, A. G., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. 2nd ed. New York: Hafner, 1947.

F آنالیز مختلط (فصلهای ۱۲-۱۸)

[A15]

- [F1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [F2] Bieberbach, L., *Conformal Mapping*. New York: Chelsea, 1964.
- [F3] Dettmar, J. W., *Applied Complex Variables*. New York: Macmillan, 1965.
- [F4] Hayman, W. K., *Meromorphic Functions*. Oxford: Clarendon Press, 1975.
- [F5] Hillé, E., *Analytic Function Theory*. 2 vols. Boston: Ginn, 1959, 1962.
- [F6] Knopp, K., *Theory of Functions*. 2 vols. New York: Dover, 1945.
- [F7] Nehari, Z., *Conformal Mapping*. New York: McGraw-Hill, 1952.

- [F8] Nevanlinna, R., *Analytic Functions*. New York: Springer, 1970.
- [F9] Rothe, R., F. Ollendorf, and K. Pohlhausen, *Theory of Functions as Applied to Engineering Problems*. New York: Dover, 1961.
- [F10] Springer, G., *Introduction to Riemann Surfaces*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957.
- [F11] Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*. 2nd ed. London: Oxford University Press, 1939 (reprinted 1975).

G آنالیز عددی (فصل ۱۹)

- [B5], [B8], [C3], [C15], [C16], [E5], [E9]
- [G1] Alt, F. L., *Electronic Digital Computers*. New York: Academic Press, 1958.
- [G2] Buckingham, R. A., *Numerical Methods*. London: Pitman, 1957.
- [G3] Forsythe, G. E., and P. C. Rosenbloom, *Numerical Analysis and Partial Differential Equations*. New York: Wiley, 1958.
- [G4] Henrici, P., *Elements of Numerical Analysis*. New York: Wiley, 1964.
- [G5] Hartree, D. R., *Numerical Analysis*. 2nd ed. London: Oxford University Press, 1958.
- [G6] Hildebrandt, F. B., *Introduction to Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1956.
- [G7] Hull, T. E., and D. D. F. Day, *Computers and Problem Solving*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1970.
- [G8] Isaacson, E., and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*. New York: Wiley, 1966.
- [G9] Kopal, Z., *Numerical Analysis*. 2nd ed. London: Chapman and Hall, 1961.
- [G10] McCracken, D. D., and W. S. Dorn, *Numerical Methods and FORTRAN Programming*. New York: Wiley, 1964.
- [G11] Milne, W. E., *Numerical Calculus*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1949.
- [G12] National Physical Laboratory, *Modern Computing Methods*. 2nd ed. London: Her Majesty's Stationery Office, 1961.
- [G13] Noble, B., *Numerical Methods*. 2 vols. New York: Interscience, 1964.
- [G14] Rivlin, T. J., *An Introduction to the Approximation of Functions*. Waltham, Mass.: Blaisdell, 1969.
- [G15] Sard, A., and S. Weintraub, *A Book of Splines*. New York: Wiley, 1971.
- [G16] Todd, J., *Numerical Analysis*. In: Condon, E. U., and H. Odishaw, *Handbook of Physics*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [G17] Todd, J., *Survey of Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1962.
- [G18] Truitt, T. D., and A. E. Rogers, *Basics of Analog Computers*. New York: Rider, 1960.
- [G19] Varga, R. S., *Matrix Iterative Analysis*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1962.
- [G20] Willers, F. A., *Practical Analysis*. New York: Dover, 1948.

H احتمال و آمار (فصل ۲۰)

- [J2], [J6], [J8]-[J10], [J13]-[J15]
- [H1] Cochran, W. G., *Sampling Techniques*. 2nd ed. New York: Wiley, 1963.
- [H2] Cochran, W. G., and G. M. Cox, *Experimental Designs*. 2nd ed. New York: Wiley, 1957.
- [H3] Cox, D. R., *Planning of Experiments*. New York: Wiley, 1958.
- [H4] Cramér, H., *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton: Princeton University Press, 1946.

- [H5] Feller, W., *An Introduction to Probability and Its Applications*. Vol. I. 2nd ed. New York: Wiley, 1957.
- [H6] Fisher, R. A., *Statistical Methods for Research Workers*. 13th ed. New York: Hafner, 1958.
- [H7] Fishman, G. S., *Concepts and Methods in Discrete Event Digital Simulation*. New York: Wiley, 1973.
- [H8] Fraser, D. A. S., *Nonparametric Methods in Statistics*. New York: Wiley, 1957.
- [H9] Grant, E. L., *Statistical Quality Control*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1952.
- [H10] Huff, D., *How to Lie with Statistics*. New York: Norton, 1954.
- [H11] IRCCRAND, The Ohio State University Random Number Generator Package. Department of Statistics, The Ohio State University. Columbus, Ohio, 1974.
- [H12] Kreyzig, E., *Introductory Mathematical Statistics. Principles and Methods*. New York: Wiley, 1970.
- [H13] Parzen, E., *Modern Probability Theory and Its Applications*. New York: Wiley, 1960.
- [H14] Rice, W. B., *Control Charts in Factory Management*. New York: Wiley, 1947.
- [H15] Scheffé, H., *The Analysis of Variance*. New York: Wiley, 1959.
- [H16] Wald, A., *Statistical Decision Functions*. New York: Wiley, 1950.
- [H17] Wilks, S. S., *Mathematical Statistics*. New York: Wiley, 1962.

J جداول

[A6], [A8], [B7]

- [J1] *Barlow's Tables of Squares, Cubes, Square Roots, Cube Roots, and Reciprocals*. 4th ed. London: Spon, 1941 (10th impression 1965).
- [J2] British Association for the Advancement of Science, *Mathematical Tables*. Vol. VII. *The Probability Integral*. Cambridge: University Press, 1939 (reissued 1968).
- [J3] C.R.C. *Standard Mathematical Tables*. 19th ed. Cleveland, Ohio: Chemical Rubber Co., 1971.
- [J4] C.R.C. *Handbook of Tables for Mathematics*. 4th ed. Cleveland, Ohio: Chemical Rubber Co., 1975.
- [J5] Davis, H. T., *Tables of the Mathematical Functions*. 3 vols. Bloomington, Ind.: Principia Press, 1962-1963.
- [J6] Dodge, H. F., and H. G. Romig, *Sampling Inspection Tables*. 2nd ed. New York: Wiley, 1959.
- [J7] Dwight, H. B., *Mathematical Tables*. 3rd ed. New York: Dover 1961.
- [J8] Fisher, R. A., and F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural, and Medical Research*. 6th ed. London: Oliver and Boyd, 1963.
- [J9] Hald, A., *Statistical Tables and Formulas*. New York: Wiley, 1952.
- [J10] Harvard Computation Laboratory, *Tables of the Cumulative Binomial Probability Distribution*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1955.
- [J11] National Bureau of Standards, *Tables of the Error Function and Its Derivative*. Washington, D.C.: US Gov. Printing Office, 1954.
- [J12] National Bureau of Standards, *Tables of Lagrangian Interpolation Coefficients*. New York: Columbia University Press, 1944.
- [J13] National Bureau of Standards, *Tables of Normal Probability Functions*. Washington, D.C.: US Gov. Printing Office, 1953.
- [J14] Pearson, E. S., and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*. Vol. I. 3rd ed. Cambridge: University Press, 1966.
- [J15] Rand Corporation, *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*. Glencoe: Free Press, 1955.

ضمیمه ۲: جواب مسائل با شماره فرد

بخش ۱۰.۱، صفحه ۱۰

۱. مرتبه اول ۰.۳ مرتبه دوم

۵. مرتبه اول $y = -e^{-x} + c$ ۱۱

۱۳. $y = -\frac{1}{12} \cos 2x + c_1 x + c_2$ ۱۵. $y' + y = e^{-x}$

۱۷. $y = (x^2 - 22)/3$ ۱۹. $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\pi}{2}$

۲۱. $c = -1/8$ ۲۵. ۰۰۴۱۷ مایل

۲۷. ۷۴۲ کیلومتر = ۴۶۱ مایل ۲۹. $P(h) = P_0 \exp(-0.000116 h)$

بخش ۲۰.۱، صفحه ۱۴

۱۹. منحنیهای جواب در بالای $y=3$ و $y=0$ نزولی یکنوا هستند و وقتی که $x \rightarrow \infty$ به ترتیب به ۳ و $-\infty$ میل می کنند.

بخش ۳۰.۱، صفحه ۲۸

۳. فرض کنید که $\tilde{c}$ را در (۴) فراموش کرده، نوشته اید $-x^2$ ، $\ln|y|$ ، این رابطه را به $y = e^{-x^2}$ تبدیل کرده و بعد از آن ثابت c را اضافه کرده اید. در این صورت دارید $y = e^{-x^2} + c$ که جواب $y' = -2x y$ نیست.

۵. $x^2 + y^2 = c$ ۷. $y = c \ln|x|$

۹. $y = ce^{-ax} - b/a$ ۱۱. $y = 1 + (\ln|x| + c)^2$

۱۳. $y = c / \cosh^2 x$ ۱۵. $I = I_0 e^{-(R/L)t}$

۱۷. $y = \arcsin x$ ۱۹. $y = y_0 \exp(-x^2)$

$$r = 2 \sin^2 \theta. ۲۳$$

$$y = 4 \ln|x| / \ln 3. ۲۱$$

$$۱۰۵۴ \text{ کیلومتر بر ثانیه} . ۲۵$$

۲۷. ثابت $pV = c$. این قانونی است که بویل (۱۶۶۲) و ماریوت (۱۶۷۶) از راه تجربه بدان دست یافتند.

۲۹. $\Delta A = -kA \Delta x$ مقدار نور، برخوردکننده، ΔA نور جذب شده، Δx ضخامت و k ضریب تناسب هستند). اگر $\Delta x \rightarrow 0$ در این صورت $A' = -kA$. بنابراین $A(x) = A_0 e^{-kx}$ برابر است با مقدار نور در لایه ضخیم در عمق x از سطح برخورد.

۳۳. $\omega(t) = (\sqrt{\omega_0} - (k/2I)t)^2$ ، که در آن $I(d\omega/dt) = -k\omega^{1/2}$ ، $t_1 = 2I\sqrt{\omega_0}/k$ ، $t_1 = 2I\sqrt{\omega_0}(1 - 2^{-1/2})/k$

۳۵. $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = kA = 4k\pi r^2$: ۵۷ ماه.

۳۷. $t = 632 \text{ min}$ ، $k = \ln 2$ می‌دهد $T(1) = 19$ ، $T(t) = 23 - 8e^{-kt}$

۳۹. $dh/dt = -127h^{-2/3}$ ، $r^2 = h^2 \tan^2 30^\circ = h^2/3$ ، $B(h) = \pi r^2$ ، $t = c/127 = 3150 \text{ s} \approx 53 \text{ min}$ ، $c = 4 \times 10^4$ ، $0.4h^{5/3} = c - 127t$

۴۱. (الف) ۱۲۱ متر. (ب) $\dot{v} = g - (\bar{b}/m)v = -0.10(v - 98)$ و بنابراین وقتی $v(t) = 98 + ce^{-0.10t} \rightarrow 98 \text{ m/s}$ ، $t \rightarrow \infty$ دیگر مدل مناسب نیست.

۴۳. به دست می‌آوریم

$$v(t) = 37.19(1 - e^{-0.1089t}),$$

$$s(t) = 37.19[t - 9.183(1 - e^{-0.1089t})],$$

$$s(2.22) = 9.2 \text{ m}$$

۴۵. $f(t) = \exp(b-a)kt$ در آن $y(t) = (b-acf)/(1-cf)$ ، که

۴۷. هذلولی ثابت $k^2 x^2 - y^2 =$

۴۹. شیب نرمال $y = ax$ برابر است با $a = y/x$ و شیب مماس $y' = -1/a = -x/y$ ، بنابراین $xyy' + x = 0$ ، $y^2 + x^2 = c$ (دایره‌ها)

$$y^2 - x^2 = c. ۵۳$$

$$y = cx. ۵۱$$

$$y = x + c. ۵۵$$

بخش ۴.۱، صفحه ۳۶

$$y = x + x/(c - \ln|x|) \quad ۳. \quad y = x(\ln|x| + c) \quad ۱.$$

$$y = x \arcsin(x + c) \quad ۵.$$

$$\ln(x^x + y^y) + 2 \arctan \frac{y}{x} = \ln 2 + \frac{\pi}{2} \quad ۷.$$

$$y = x + \frac{1 + ce^{x^2}}{1 - ce^{x^2}} \quad ۱۱. \quad y = x + x(\delta - x^2)^{-1/2} \quad ۹.$$

$$(y - x)^2 - 2y = c \quad ۱۵. \quad y = x^{-1} \ln|x + c| \quad ۱۳.$$

$$y = ax, \quad y/x = a = \text{ثابت}, \quad y' = g(a) = \text{ثابت} \quad ۱۷.$$

$$2xy^x + xy' = y, \quad y^{-x}(y dx - x dy) = 2x dx, \quad x/y = x^x + c, \quad ۱۹. \quad y = x/(x^x + 1)$$

بخش ۵.۱، صفحه ۴۰

$$du = (y dx + x dy) e^{xy} \quad ۳. \quad du = 8x dx + 18y dy \quad ۱.$$

$$(3x^x y - 2 \sin 2x) dx + x^x dy = 0 \quad ۵.$$

$$e^{-2xy} [(1 - 2xy) dx - 2x^x dy] = 0 \quad ۷.$$

$$y/x = c \quad ۱۱. \quad xy^x = c \quad ۹.$$

$$x^x \ln|y| = c \quad ۱۳.$$

۱۵. از (۴) داریم $-x + k'(y) = x$ که يك تناقض است. با تفكيك متغيرها به دست می آوریم $y = cx$.

$$\cosh x \cos y = c, \quad \text{بلی}, \quad ۱۹. \quad y = 1/(3 \ln|x| + c), \quad \text{خیر}, \quad ۱۷.$$

$$x^x/a^x + y^y/b^y = c \quad ۲۳. \quad \ln|x| \cos 2y = c, \quad \text{بلی}, \quad ۲۱.$$

$$x^x + y/x = c \quad ۲۵.$$

۲۹. $g = ky + c_1, h = kx + c_2$ که در آنها c_1, c_2 و k ثابت هستند.

۳۳. هذلولی $(x - 3)(y - 1) = 1$ $۳۱. \quad x^x y^x = ۱۶$

$$y = 1/(ce^{-x^{1/2}} - x^2 + 2) \quad .۱۱$$

$$y = 1/(1 + ce^x) \quad .۹$$

$$y = \left(\frac{1}{y} x e^x + c x e^{-x} \right)^{1/2} \quad .۱۳$$

$$u' + \left(f + \frac{a'}{a} \right) u = \frac{1}{a} (r - f b - b') \quad .۱۵$$

۱۶. پیوستگی f و r وجود انتگرالهای (۴) را ایجاب می کند، بنابراین (۴)، به طور کامل y را معین می کند و در آن c به طور یکتا با $y(x_0) = y_0$ مشخص می شود.

۱۹. $y' = -f(x)y + r(x)$ و در (x_0, y_0) برابر می شود با $-f(x_0)y_0 + r(x_0)$ ، و $\eta - y_0 = (\xi - x_0)[r(x_0) - f(x_0)y_0]$ نمایش خطی است که از (x_0, y_0) با آن شیب می گذرد. به همین ترتیب $\eta - y_1 = (\xi - x_0)[r(x_0) - f(x_0)y_1]$ نمایش دهنده خطی است که از (x_0, y_1) می گذرد و شیب آن برابر است با مقدار y' در (x_0, y_1) که از (۱) به دست می آید. مختصات نقطه تقاطع این دو خط (ξ, η) است و چون این مختصات به y بستگی ندارند حکم ثابت شده است.

بخش ۹.۱، صفحه ۶۲

$$\tau_L = 0.025 \text{ sec}, t = 0.02 \text{ sec} \quad .۷ \quad t = \tau_L \ln 100 = 0.009 \text{ [sec]} \quad .۵$$

$$I(0) = -E_0 \omega L / (R^2 + \omega^2 L^2) \quad .۹$$

$$Q(t) = E_0 C (1 - e^{-t/RC}), RQ' + Q/C = E_0 \quad .۱۵$$

$$V(t) = Q(t)/C = 12(1 - e^{-0.05t})$$

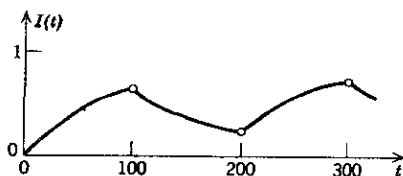
$$I(t) = \omega E_0 C [1 + (\omega RC)^2]^{-1/2} (\cos \omega t + \omega RC \sin \omega t - e^{-t/RC}) \quad .۱۷$$

$$I = I_1 = 1 - e^{-0.01t} (0 \leq t \leq 100), (\Delta^*) \quad .۱۹$$

$$I_1(100) = I_2(100) \text{ و } I = I_2 = c_2 e^{-0.01(t-100)} (100 \leq t \leq 200)$$

$$I = I_3 = 1 + c_3 e^{-0.01(t-200)} (200 \leq t \leq 300), c_3 = 1 - e^{-1} \approx 0.63$$

از اینکه $I_2(200) = I_3(200)$ نتیجه می شود که $-0.77 \approx c_3 = (1 - e^{-1})e^{-1} - 1$ و به همین ترتیب. (شکل را ببینید)



بخش ۱۰۰، صفحه ۶۹

 ۱. خطوط مستقیم و موازی با شیب $۱/۳$.

۳. هذلولیهایی که مجانبهای آنها محورهای مختصاتند.

۵. سهمیهای همنهشت.

$$x^x/c^x + y^x/(c^x + 1) - 1 = 0 \quad ۹.$$

$$y + 1 - C(x - 4) = 0 \quad ۷.$$

$$y' = y \quad ۱۳.$$

$$y' = 3y/x \quad ۱۱.$$

$$y = \ln|x| + c^* \quad ۱۷.$$

$$y' = xy/(x^x - 1) \quad ۱۵.$$

$$y = \sqrt{c^* - 2x} \quad ۲۱.$$

$$۱۹. بیضی‌های $c^* = x^x + 3y^x$$$

$$۲۵. منحنیهای به شکل زنگک $x = c^* e^{-y^x}$$$

$$۲۳. $xy = c^*$$$

$$e^x \cos y = c^* \quad ۲۹.$$

$$۲۷. $2x^x + 3y^x = c^*$$$

$$۳۱. $y = c^* e^{-2x}$$$

۳۳. از $dv = 0$ نتیجه می‌شود $dy/dx = -v_x/v_y$ و این باید برابر u_y/u_x باشد (ر. ک. مسئله ۳۲).

$$x^x - y^x = c^* \quad ۳۹.$$

$$۳۵. $y' = -x/y, x^x + y^x = c^*$$$

بخش ۱۱۰، صفحه ۷۵

$$۱. $y_n = 1 + 2 \int_0^x y_{n-1}(t) dt, y_0 = 1, y_1 = 1 + 2x,$$$

$$y_2 = 1 + 2x + (2x)^2/2!, \text{ غیره}, y = e^{2x}$$

$$۳. $y_n = \int_0^x y_{n-1}^2(t) dt + 4x, y_0 = 0, y_1 = 4x, y^x = 4x + \frac{16}{3}x^2, \dots,$$$

$$y = 2 \tan 2x$$

$$۵. $y_n = 1 + \int_0^x [t + y_{n-1}(t)] dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x y_{n-1}(t) dt,$$$

$$\text{فیره}, y_0 = 1, y_1 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2, y_2 = 1 + x + x^2 + \frac{1}{6}x^3,$$

$$y = 2e^x - x - 1$$

$$۹. $y_1(1) = 2, y_2(1) = 2.5, y_3(1) = 2.667$$$

بخش ۱۲.۱، صفحه ۸۱

۳. $y = cx^4$ (c دلخواه است) ۵. هیچکدام

۷. اگر می‌داشتند یکتایی نقض می‌شد (چرا؟)

۹. $1/2$ ، بزرگترین مقدار $b/(1+b^2)$ که در آن $1+b^2$ کوچکترین K است.

۱۱. $\alpha = 1/4$

۱۳. بلی، با $M=1$ ، بر روی محور x ها ($y=0$).

۱۵. $y \equiv 0$ ، $y = (x-1)^2$ نه بر روی محور x ها ($y=0$).

بخش ۱۰.۲، صفحه ۸۷

۵. $(y_1 + y_2)'' + f(y_1 + y_2)' + g(y_1 + y_2) =$
 $(y_1'' + f y_1' + g y_1) + (y_2'' + f y_2' + g y_2) = 2r$

۷. $(y_1 + y_2)'' + f(y_1 + y_2)' + g(y_1 + y_2) =$
 $(y_1'' + f y_1' + g y_1) + (y_2'' + f y_2' + g y_2) = r + 0 = r$

۹. $y = c_1 \sinh x + c_2$ ۱۱. $y = c_1 e^{-x} + \frac{1}{4} x^2 + c_2$

۱۳. $y = c_1 x^{-1} + c_2$

۱۵. $y = c_1 e^t + c_2, c_1 + c_2 = 1, c_1 = 2, y = 2e^t - 1, y(5) = 2e^5 - 1 = 296 \text{ m},$
 $\dot{y}(5) = 297 \text{ m/s}$

۲۱. $x = \frac{1}{\delta} e^{ix} + c_1 y + c_2$ ۱۷. $y = e^x - 1$

۲۳. $y = x^4$

بخش ۲.۲، صفحه ۹۱

۱. e^x, e^{-x} ۳. e^{-2x}, e^x

۵. $1, e^x$ ۷. e^{3x}, e^{-3x}

۹. $e^{-(2+i)x}, e^{-(2-i)x}$

۱۱. از قضیه بنیادی ۱، بخش ۱۰.۲، استفاده کنید.

۱۳. (الف) ۱، e^{-4x} ؛ (ب) $c_1 e^{-4x} + c_2$ ۱۵. $y'' + 2y' - 3y = 0$

$$y'' - 2y' = 0 \quad ۱۷$$

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad ۱۹$$

بخش ۳.۲، صفحه ۹۷

$$۱. \text{ مستقل}$$

$$۳. \text{ مستقل}$$

$$۵. \text{ وابسته}$$

$$۷. \text{ مستقل}$$

$$۹. \text{ وابسته}$$

$$۱۱. \text{ وابسته}$$

$$۱۳. \text{ مستقل}$$

$$۱۹. c_1 e^{\delta x} + c_2 e^{-\delta x}$$

$$۲۱. c_1 e^{3x} + c_2$$

$$۲۳. c_1 e^{3x} + c_2 e^{-\delta x}$$

$$۲۵. y = e^{3x} - 2e^x$$

$$۲۷. y = 2 \cosh x$$

$$۲۹. y = \cosh 2x$$

$$۳۱. y = e^{-x/2}$$

۳۳. اگر $y \neq 0$ ، $y(A) = y(B) = 0$ و y_1 در (۱) و (۵) صدق می کند. همچنین است در مورد y_1 و $y_2 = y_1 + y$ و $y_2 \neq y_1$. بالعکس اگر y_1 و y_2 جوابهای (۱) و (۵) باشند در این صورت $y = y_1 - y_2 \neq 0$ جواب (۱) بوده و $y(A) = y(B) = 0$.

$$۳۷. y'' + \omega^2 y = 0$$

$$۳۹. y'' + 6y' + 10y = 0$$

بخش ۴.۲، صفحه ۱۰۴

$$۱. y = A \cos x + B \sin x$$

$$۳. y = e^{-2x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

$$۵. y = e^x(A \cos 3x + B \sin 3x)$$

$$۷. y = A \cos \pi x + B \sin \pi x$$

$$۹. y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$$

$$۱۱. y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-2x}$$

$$۱۳. y = (c_1 + c_2 x) e^{x/2}$$

$$۱۵. y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x/4}$$

$$۱۷. y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$۱۹. y'' - 8y' + 16y = 0$$

$$۲۱. y'' - 9y = 0$$

$$۲۳. y'' - 4y' = 0$$

$$۲۹. y'' + 2y' + 5y = 0, y = -2e^{-2x} \sin x$$

$$۳۱. y'' - 2y' + (\pi^2 + 1)y = 0, y = e^x (\cos \pi x - \sin \pi x)$$

$$۳۵. y = (2 + 2x) e^{3x}$$

$$۳۳. y = 2e^{3x}$$

$$۳۹. y = e^{3x} - 2e^x$$

$$۳۷. y = e^{-2x}(\cos x - \sin x)$$

بخش ۵.۲، صفحه ۱۰۸

$$-16x^2 + 20x - 3, 0, 2\sin x - 5\cos x \quad ۱.$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \quad ۹. \quad 0, 2e^{2x}, -2e^{-x} \quad ۳.$$

$$y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x/2} \quad ۱۳. \quad y = e^{-x}(A \cos 2\pi x + B \sin 2\pi x) \quad ۱۱.$$

بخش ۶.۲، صفحه ۱۱۷

$$۱. \text{ مستقل. } 0.7 = 1/\sqrt{2} \text{ برابر بسامد اصلی}$$

$$۳. \quad 1/2\pi, 1/\pi, 3/2\pi, 2/\pi$$

$$y = y_0 \cos \omega_0 t + (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t = (y_0^2 + v_0^2/\omega_0^2)^{1/2} \cos(\omega_0 t - \arctan(v_0/y_0 \omega_0)) \quad ۵.$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \approx -mg\theta \quad (w = mg \text{ مؤلفه مماسی}), \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad ۹. \quad \omega_0^2 = g/l. \text{ جواب } \sqrt{g/l}/2\pi$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + (k_1 + k_2)l}} \quad ۱۱.$$

۱۳. $m\ddot{y} = -a\gamma y$ که در آن $m = 1 \text{ kg}$, $a\gamma = \pi \times 0.01^2 \times 2y$ برابر حجم آبی است که نیروی برگرداننده $a\gamma y$ با 9800 N ، $\gamma = 9800 \text{ (متر مکعب/وزن)}$ را باعث می شود. $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$, $\omega_0^2 = a\gamma/m = a\gamma = 0.000628\gamma$, $\omega_0/2\pi = 0.4 (\text{sec}^{-1})$

۱۷. هرگاه c_1 و c_2 هم علامت باشند.

$$۲۳. \text{ جوابهای مثبت } \tan t = 1, \text{ یعنی } \pi/4, \text{ (ماکزیمم)}, 5\pi/4, \text{ (مینیمم) و غیره.}$$

۲۵. هرگاه ماکزیمم در t_0 باشد بعدی آن در $t_0 + 2\pi/\omega^*$ است. بنابراین سینوس و کسینوس (۱۱) دارای دوره تناوب $2\pi/\omega^*$ هستند، نسبت آنها می شود $\tan t = -1; \exp(-\alpha t_0)/\exp(-\alpha t_1) = \exp(2\pi\alpha/\omega^*) \times \Delta = 2\pi$ نتیجه می شود $t_{\min} = 3\pi/4$ و $t_{\max} = 7\pi/4$ و غیره.

$$y = [(v_0 + \alpha y_0)t + y_0]e^{-\alpha t} \quad ۲۷.$$

$$c_1 = v_0 + \alpha y_0 \text{ که در آن } y = c_1 e^{-\alpha t/\omega_0}/\alpha \quad ۲۹.$$

بخش ۷.۲، صفحه ۱۲۳

$$۱. \text{ با قراردادن } y_1'' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1, y_1' = uy_1' + u'y_1, y_1 = uy_1 \text{ در (۱)}$$

داریم $(x^r y_1'' + ax y_1' + by_1)u + (2x^r y_1' + ax y_1)u' + x^r u'' y_1 = 0$ چون y_1 در (۱) صدق می کند عامل u صفر است. چون در حالت بحرانی $y_1' = mx^{m-1}$ و $a = 1 - 2m$ عبارت باقیمانده می شود $u' + xu'' = 0$. بنا بر این $u' = 1/x$ ، $y_1 = x^m \ln x$ ، $u = \ln x$

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x \quad ۷ \quad y = c_1 x + c_2 x^2 \quad ۵$$

$$y = c_1 + c_2 \ln x \quad ۱۱ \quad y = c_1 + c_2 x^2 \quad ۹$$

$$2z - 3 = x, y = c_1(2z - 3)^{-2} + c_2(2z - 3)^{-1/2} \quad ۱۳$$

$$y = x - x^2 \quad ۱۷ \quad y = (1 - \ln x)x^2 \quad ۱۵$$

$$y + (a - 1)y' + by = 0 \quad t = \ln x, x = e^t, \ddot{y} + (a - 1)\dot{y} + by = 0 \quad ۱۹$$

$$\ddot{y} = y''x^2 + y'x, y''x^2 + y'x + (a - 1)y'x + by = 0; \dot{y} = y'x = y'x$$

بخش ۸۰۲، صفحه ۱۳۱

$$W = qe^{px} \quad ۳ \quad W = (\lambda_1 - \lambda_2)\exp(\lambda_1 x + \lambda_2 x) \quad ۱$$

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad ۷ \quad W = (m_2 - m_1)x^{m_1 + m_2 - 1} \quad ۵$$

$$xy'' - y' = 0 \quad ۱۱ \quad x^2 y'' - 1.5xy' + y = 0 \quad ۹$$

$$y'' + \beta^2 y = 0 \quad ۱۵ \quad y'' + 2y' + 2y = 0 \quad ۱۳$$

$$۱۹. مستقل \quad ۱۷. وابسته$$

$$۲۳. خیر \quad ۲۱. وابسته$$

۲۵. قضیه ۲ را به کار برید.

بخش ۹۰۲، صفحه ۱۳۵

$$۷. وابسته \quad ۹. وابسته \quad ۱۱. وابسته \quad ۱۳. مستقل$$

بخش ۱۰۰۲، صفحه ۱۳۸

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x \quad ۳$$

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x \quad ۵$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad ۷$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \quad ۹$$

$$y^v - 5y''' + 4y' = 0 \quad .13$$

$$y^{iv} - 6y''' + 9y'' = 0 \quad .11$$

$$y = (c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x})x \quad .19$$

$$y = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x^2 \quad .17$$

بخش ۱۱.۲، صفحه ۱۴۱

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x e^x \quad .7$$

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x + 3x \cos 2x \quad .9$$

$$y = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{1/2} \ln x + \cos(x/2) \quad .13 \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \cos x \quad .11$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} + (x \arctan x - 0.5 \ln(x^2 + 1)) e^{-2x} \quad .15$$

بخش ۱۲.۲، صفحه ۱۴۷

$$D(D-s)y = kx^n, \quad D^{n+1}(D-s)y = kD^{n+1}[x^n] = 0, \quad .1$$

$$y = K_0 + K_1 x + \dots + K_{n+1} x^{n+1} + ce^{sx} \quad .3$$

$$1.5x^5 - 5x^4 + 9.5x^3 - 11x + 6 \quad .5 \quad x^5 + x - 2 \quad .3$$

$$-x \cos x \quad .9 \quad -5 \cos 2x + \sin 2x \quad .7$$

$$A \cos x + B \sin x - x^5 - x + 2 \quad .13 \quad 2x^5 - 3x^3 + 15x - 8 \quad .11$$

$$A \cos x + B \sin x - 0.5x \cos x \quad .17 \quad A \cos 2x + B \sin 2x + 0.2e^{-x} \quad .15$$

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 0.5x e^{2x} \quad .19$$

$$ce^{-x} + x^6 - 2x^5 + 12x^4 - 24x + 24 \quad .21$$

$$3e^x + 2x^5 \quad .25 \quad y = 5 \cos 5x - \sin 5x + 0.2x \quad .23$$

$$e^{-2x} \cos 2x + \sin x \quad .29 \quad e^{-x} - e^{2x} + x e^{2x} \quad .27$$

بخش ۱۳.۲، صفحه ۱۵۵

$$y = A \cos t + B \sin t - \cos 2t \quad .1$$

$$y = A \cos 2t + B \sin 2t + (\cos t - \sin t)/15 \quad .3$$

$$y = -5 \cos 3t + 2 \sin 3t + 2 \cos t - \sin t \quad .5$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \sin t - 3 \cos t \quad .7$$

$$y = e^{-t}(A \cos t + B \sin t) + 6 \sin 2t - 7 \cos 2t \quad .9$$

$$y = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t) + 0.1 \cos t - 0.2 \sin t. ۱۱$$

$$y = \cos 5t + \sin t. ۱۳$$

$$y = (y_0 - (1 - \omega^2)^{-1}) \cos t + v_0 \sin t + (1 - \omega^2)^{-1} \cos \omega t. ۱۵$$

$$\text{خیر. } y_0 = 1/(1 - \omega^2), v_0 = 0. ۱۷$$

$$y = e^{-\delta t} \cos 2t + \sin t. ۲۱$$

$$y = e^{-t} \sin t - 0.5 \sin 2t. ۲۳$$

$$y = \begin{cases} (1 + 2/\pi^2)(1 - \cos t) - t^2/\pi^2 & 0 \leq t \leq \pi \text{ هرگاه} \\ -(1 + 4/\pi^2) \cos t + (2/\pi) \sin t & t > \pi \text{ هرگاه} \end{cases}. ۲۵$$

$$\text{بخش ۱۴.۲، صفحه ۱۶۲}$$

$$R > R_{\text{crit}} = 2\sqrt{L/C} \text{ حالت I است، و به همین ترتیب.} ۳$$

$$S = 0 \text{ یعنی } C = 1/\omega^2 L. ۵$$

$$I = -0.75 \cos 1.5t + 0.6 \sin 1.5t. ۷$$

$$I = e^{-t}(A \cos t + B \sin t) + 5 \cos t + 10 \sin t. ۹$$

$$I = (c_1 + c_2 t)e^{-t} + 12 \cos 2t + 9 \sin 2t. ۱۱$$

$$I = 60 \sin 2t - 30 \sin t. ۱۳$$

$$I = 5e^{-2t} \sin t. ۱۵$$

$$I = e^{-2t}(3 \sin 2t - 4 \cos 2t) + 4 \cos 5t. ۱۷$$

$$I = \begin{cases} I_1 \equiv A_1 \cos t + B_1 \sin t + 1 & 0 < t < a \text{ وقتی} \\ I_2 \equiv A_2 \cos t + B_2 \sin t & t > a \text{ وقتی} \end{cases}. ۱۹$$

از اینکه $I(0) = 0$ ، $Q(0) = 0$ ، $E(0) = 0$ نتیجه می‌شود $\dot{I}(0) = 0$ ،
 $A_1 = -1$ ، $B_1 = 0$ و $\dot{I}_1 = 1 - \cos t$. از روی این بدست می‌آوریم
 $\dot{I}_2(a) = \dot{I}_1(a) = \sin a$ ، بنابراین $\dot{I}_2(a) = \dot{I}_1(a) - a = -a + \sin a$
 $A_2 \cos a + B_2 \sin a = 1 - \cos a$ یعنی $\dot{I}_2(a) = \dot{I}_1(a) - a = -a + \sin a$
 $-A_2 \sin a + B_2 \cos a = -a + \sin a$ بنابراین $A_2 = \cos a + a \sin a - 1$ و $B_2 = \sin a - a \cos a$

$$I = \begin{cases} 1 - \cos t & \text{وقتی } 0 < t < a \\ \cos(t-a) - a \sin(t-a) - \cos t & \text{وقتی } t > a \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}(e^{-t} - \cos t + \sin t) & \text{وقتی } 0 < t < \pi \\ -\frac{1}{\gamma}(1 + e^{-\pi}) \cos t + \frac{1}{\gamma}(3 - e^{-\pi}) \sin t & \text{وقتی } t > \pi \end{cases} \quad ۲۱$$

$$I = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{وقتی } t < a \\ [(1-a)e^a - 1]e^{-t} & \text{وقتی } t > a \end{cases} \quad ۲۵$$

بخش ۱۵.۲، صفحه ۱۶۷

$$I_p = \text{Re}[(-0.1 - 0.2i)(\cos 2t + i \sin 2t)] = -0.1 \cos 2t + 0.2 \sin 2t \quad ۱$$

$$I_p = (360 \sin 3t - 300 \cos 3t) / 61 \quad ۳$$

$$I_p = (50 \sin 4t - 110 \cos 4t) / 73 \quad ۵$$

$$y_p = 2 \sin 4t \quad ۷$$

$$y_p = 0.1008 \sin 10t - 0.2006 \cos 10t \quad ۹$$

بخش ۱۶.۲، صفحه ۱۷۰

$$y = A \cos x + B \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x| + x \quad ۱$$

$$y = (c_1 + c_2 x - \cos x)e^{-x} \quad ۵ \quad y = (c_1 + c_2 x + x \ln x - x)e^{x^2} \quad ۳$$

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{x}{35} x^{7/2}\right) e^x \quad ۷$$

$$y = e^{-x}(A \cos x + B \sin x - 0.5 \cos 2x / \cos x) \quad ۹$$

۱۱. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x - 4$. دقت کنید که در (۸) داریم $r = 4/x^2$ (نه ۴)، زیرا معادله داده شده را باید بر x^2 تقسیم کنیم تا این که به صورت (۱) از آنچه (۸) از روی آن به دست آمد برسیم.

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{14} x^{-2} \quad ۱۵ \quad y = C_1 x + c_2 x^2 + x^4 / 6 \quad ۱۳$$

$$y = c_1 + c_2 x^2 + (2x - 2)e^x \quad ۱۹ \quad y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{1}{44} x^{-4} \quad ۱۷$$

بخش ۱۰۳، صفحه ۱۷۹

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, y = c_1 e^t - c_2 e^{-t} \quad ۱.$$

$$x = \frac{1}{\gamma}(\sin t - \cos t) + c_1, y = \frac{1}{\gamma}(\sin t + \cos t) + c_2 \quad ۳.$$

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t - t, \quad ۵.$$

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t - 1$$

$$x = 2e^{5t} - e^{-5t}, y = e^{5t} + 2e^{-5t} \quad ۷.$$

$$x = e^{5t} - \frac{5}{3}e^{2t}, y = e^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t} \quad ۹.$$

$$I_1 = -\frac{200}{3}e^{-2t} + \frac{125}{3}e^{-0.8t} + 25, I_2 = -\frac{100}{3}e^{-2t} + \frac{100}{3}e^{-0.8t} \quad ۱۳.$$

$$I_1 = 2 - 2e^{-200t}, I_2 = 2 + e^{-200t}, \text{ جریانهای حالت پایدار } 2 \text{ آمپر و } 2 \text{ آمپر هستند.} \quad ۱۵.$$

بخش ۲۰۳، صفحه ۱۸۵

$$\sqrt{A^2 + B^2} \quad ۱.$$

$$y = A \cos \frac{1}{\gamma} t + B \sin \frac{1}{\gamma} t; \text{ بیضیهای ثابت } y^2 + 4v^2 = \quad ۳.$$

$$r = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \text{ هذلولیهای ثابت } y^2 - v^2 = \quad ۵.$$

$$v = y + c \text{ خطوط مستقیم و موازی} \quad ۷.$$

$$yv = \text{هذلولیهای ثابت} \quad ۹.$$

بخش ۳۰۳، صفحه ۱۹۴

$$y = (B/A^2)x^2, y = Be^{2t}, x = Ae^t \quad ۳.$$

محور y ها. افقی، قائم.

$$y = (At + B)e^{-t}, x = Ae^{-t} \quad ۷.$$

$$\ddot{x} = -x, \text{ ثابت } x^2 + y^2 =, \text{ جهت عقربه ساعت.} \quad ۹.$$

بخش ۲۰۴، صفحه ۲۰۹

$$۳.۱۵ \quad ۱.۱۳ \quad ۳.۱۱ \quad \infty \quad ۰.۹ \quad ۱ \quad ۰.۷ \quad \infty \quad ۰.۵ \quad ۱ \quad ۰.۳ \quad ۳ \quad ۱.$$

$$c_0 = 0, c_1 = 2, c_m = c_{m-1}/(m-2), y = 2x + c_2 x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right). ۱۷$$

$$= c_2 x^2 e^x + 2x$$

$$y = c_1(x + x^2). ۱۹$$

$$y = c_0 + c_1 x + \left(\frac{3}{2}c_1 - c_0\right)x^2 + \left(\frac{5}{6}c_1 - c_0\right)x^3 + \dots. ۲۱$$

با قرار دادن $y = Ae^x + Be^{2x}$ به دست می آوریم $c_1 = A + 2B$ و $c_0 = A + B$ این چنین می نماید که حتی اگر جواب يك معادله تابعی معلوم باشد روش سری توانی ممکن است به صورت معمولی به این نتیجه نرسد.

$$y = c_1 x + c_0 \left(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^8 - \dots\right). ۲۳$$

از معادله $(n=1)$ است که آن را در قسمت بعدی بررسی می کنیم.

$$y = c_0 \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 - \frac{3}{6!}x^6 - \frac{3 \times 5}{8!}x^8 - \dots\right) + c_1 x. ۲۵$$

$$(t+1)y - y = t+1, y = c_0(1+t) + (1+t)\left(t - \frac{t^2}{2} + \dots\right). ۲۷$$

$$= c_0 x + x \ln x$$

$$y = c_0 \left(1 + \frac{t^2}{2!} + \dots\right) + c_1 \left(t + \frac{t^3}{3!} + \dots\right) = A \cosh x + B \sinh x. ۲۹$$

(که در آن $A = c_0 \cosh 1 - c_1 \sinh 1$ ، $B = c_1 \cosh 1 - c_0 \sinh 1$)

بخش ۳۰۴، صفحه ۲۱۵

$$p_9(x) = \frac{1}{16} (231x^9 - 315x^7 + 105x^5 - 5). ۱$$

بخش ۴۰۴، صفحه ۲۳۱

$$y_1 = \frac{c_0}{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) = c_0 \frac{\cos x}{x^2}, y_2 = c_0^* \frac{\sin x}{x^2}. ۱$$

$$y_1 = \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{2 \times 5} + \frac{x^6}{2^2 \times 2! \times 7} - \frac{x^8}{2^3 \times 3! \times 9} + \dots, y_2 = \frac{1}{x}. ۳$$

$$y_1 = x^{-2} \sin x^2, y_2 = x^{-2} \cos x^2. ۵$$

$$y_1 = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \times 4)^2} + \frac{x^6}{(2 \times 4 \times 6)^2} + \dots \quad ۹$$

$$y_2 = y_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{8 \times 16} - \dots$$

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x^{-2} \quad ۱۱$$

$$y_1 = x^{-2} \sinh 2x, \quad y_2 = x^{-2} \cosh 2x \quad ۱۲$$

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^x \ln x \quad ۱۵$$

$$۲۳ \quad \frac{y_1}{y_2} \text{ يك ثابت نيست. اين مطلب استقلال خطی را ايجاب می كند.}$$

$$y = C_1 F\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; x\right) + C_2 x^{3/2} F\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}; x\right) \quad ۳۱$$

$$y = C_1 F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; t-1\right) + C_2 (t-1)^{1/2} \quad ۳۳$$

$$y = C_1 F\left(2, -2, -\frac{1}{2}; t-2\right) + C_2 (t-2)^{3/2} F\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; t-2\right) \quad ۳۵$$

بخش ۵-۴، صفحه ۲۳۸

$$۵ \quad J_0(1) = 1 - \frac{1}{2^2(1!)^2} + \frac{1}{2^4(2!)^2} - \frac{1}{2^6(3!)^2} + \dots$$

R_n این سری حداکثر برابر است با قدرمطلق جمله اول R_n ؛ نتیجه ای از آزمون آشنای لیبینتز (همچنین ر. ک بخش ۴-۱۵)، و به دلیل دقت مورد نظر باید داشته باشیم

$$|R_n| < 10^{-5} \quad \text{حال} \quad \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} < 10^{-5}, \quad 2^{2n}(n!)^2 > 10^5 \quad \text{به ازای} \quad n=4 \quad \text{صادق}$$

است. از این رو مجموع جملات صریح بالا به مقدار تقریبی مورد نظر منجر می شود.

$$\ln 2 \approx \ln(1+1) \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{1000000}$$

منجر می شود و ما به ۱۰۰۰۰۰۰ جمله نیاز داریم.

۹. حاصل ضرب مشتقهای (۲۰) و (۲۱) را به کار ببرید. معادله اول را در x^{-v} معادله دوم را در x^v ضرب کرده و به ترتیب بر حسب J_{v+1} و J_{v-1} حل کنید و جمع نمایید.

$$۱۳ \quad J_2(x) = 2x^{-1}J_1(x) - J_0(x) \quad [v=1 \text{ با } (۲۲)]$$

$$- {}_2J_1(x) - J_0(x) + c. ۱۷$$

$$- x^{-2} J_2(x) + c. ۱۹$$

$$y = (A \cos x + B \sin x) / \sqrt{x}. ۲۵$$

بخش ۶.۴، صفحه ۲۴۵

$$AJ_1(x) + BY_1(x) \quad ۳ \quad ۱۱۱$$

$$AJ_n(\lambda x) + BY_n(\lambda x) \quad ۷ \quad AJ_0(\sqrt{x}) + BY_0(\sqrt{x}) \quad ۵$$

$$x^n (AJ_n(x^n) + BY_n(x^n)) \quad ۱۱ \quad x (AJ_1(x) + BY_1(x)) \quad ۹$$

$$\sqrt{x} \left[AJ_{1/2} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + BY_{1/2} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right] \quad ۱۳$$

۱۷. از (۱۲) بخش ۵.۴ استفاده کنید.

بخش ۷.۴، صفحه ۲۵۲

$$1/\sqrt{2\pi}, (\cos x)/\sqrt{\pi}, (\cos 2x)/\sqrt{\pi}, \dots \quad ۱$$

$$\sin \pi x, \sin 2\pi x, \dots \quad ۳$$

$$1/\sqrt{T}, \sqrt{2/T} \cos(2\pi n x/T) (n=1, 2, \dots) \quad ۵$$

$$P_0/\sqrt{2}, \sqrt{\frac{2}{\gamma}} P_1(x), \sqrt{\frac{5}{\gamma}} P_2(x), \sqrt{\frac{7}{\gamma}} P_3(x) \quad ۷$$

$$x = ct + k \quad \text{قرار دهید} \quad ۹$$

بخش ۸.۴، صفحه ۲۵۷

$$\lambda = ((2n+1)\pi/2l)^2, n=0, 1, \dots; y_n(x) = \sin((2n+1)\pi x/2l) \quad ۵$$

$$\lambda = (n\pi/l)^2, n=0, 1, \dots; y_n(x) = \cos(n\pi x/l) \quad ۷$$

$$\lambda = n^2\pi^2, n=1, 2, \dots; y_n(x) = \sin(n\pi \ln|x|) \quad ۹$$

$$\lambda = n^2, n=1, 2, \dots; y_n(x) = e^{-x} \sin nx \quad ۱۱$$

۱۳. تعداد لایتهای

$$y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y'(\pi) = 0. ۱۵$$

$$x^{\gamma} = \frac{1}{\gamma} P_0(x) + \frac{\gamma}{\gamma} P_{\gamma}(x), \quad x^{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} P_1(x) + \frac{\gamma}{\delta} P_{\gamma}(x), \quad .1$$

$$x^{\gamma} = \frac{1}{\delta} P_0(x) + \frac{\gamma}{\gamma} P_{\gamma}(x) + \frac{\delta}{\gamma \delta} P_{\gamma}(x)$$

$$\gamma(-P_0(x) + P_1(x) - P_{\gamma}(x) + P_{\gamma}(x)) \quad .3$$

$$P_0(x)/\gamma + P_1(x)/\gamma + \delta P_{\gamma}(x)/16 + \dots \quad .5$$

$$P_0(x)/\gamma + \delta P_{\gamma}(x)/8 + \dots \quad .7$$

۱۱. از فرمولی که چند جمله‌ای هرمیت را تعریف می‌کند مشتق بگیرد.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^k L_n(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx \quad .19$$

$$= -\frac{k}{n!} \int_0^{\infty} x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx$$

$$= \dots = (-1)^k \frac{k!}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) dx$$

$$n > k \text{ وقتی که } = 0$$

$$x = \cos \theta \text{ قرار دهید. } v(\theta) = \cos n\theta \text{ در } d^{\gamma} v / d\theta^{\gamma} + n^{\gamma} v = 0 \text{ صدق می‌کند.} \quad .21$$

$$.25 \quad (20) \text{ بخش ۴-۵ و به‌ازای } 1, v =$$

$$c_m = \frac{\gamma}{R^{\gamma} J_{\gamma}(\alpha_{m_0})} \int_0^R x J_0\left(\frac{\alpha_{m_0}}{R} x\right) dx = \frac{\gamma}{\alpha_{m_0}^{\gamma} J_{\gamma}(\alpha_{m_0})} \int_0^{\alpha_{m_0}} w J_0(w) dw$$

$$= \frac{\gamma}{\alpha_{m_0} J_1(\alpha_{m_0})}, \quad f = \gamma \left(\frac{J_0(\lambda_{1_0} x)}{\alpha_{1_0} J_1(\alpha_{1_0})} + \frac{J_0(\lambda_{\gamma_0} x)}{\alpha_{\gamma_0} J_1(\alpha_{\gamma_0})} + \dots \right)$$

$$C_m = \frac{\gamma J_{\gamma}(\alpha_{m_0})}{\alpha_{m_0}^{\gamma} J_{\gamma}(\alpha_{m_0})} \quad .29$$

$$c_m = \frac{\gamma a k J_1(\alpha_{m_0} a / R)}{\alpha_{m_0} R J_1(\alpha_{m_0})} \quad .27$$

$$c_m = \frac{\gamma R^{\gamma}}{\alpha_{m_0} J_1(\alpha_{m_0})} \left[1 - \frac{\gamma J_{\gamma}(\alpha_{m_0})}{\alpha_{m_0} J_1(\alpha_{m_0})} \right] \quad .31$$

$$x^{\gamma} = 16 \left[\frac{J_{\gamma}(\alpha_{1\gamma} x / \gamma)}{\alpha_{1\gamma} J_{\gamma}(\alpha_{1\gamma})} + \frac{J_{\gamma}(\alpha_{\gamma\gamma} x / \gamma)}{\alpha_{\gamma\gamma} J_{\gamma}(\alpha_{\gamma\gamma})} + \dots \right] \quad .35$$

بخش ۱۰۵، صفحه ۲۷۴

$$-e^{-s}/s + (1 - e^{-s})/s^2 \quad .۳$$

$$k(1 - e^{-cs})/s \quad .۱$$

$$a/s + b/s^2 + c/s^2 \quad .۷$$

$$1/s^2 + 2/s \quad .۵$$

$$(\omega \cos \theta + \sin \theta)/(s^2 + \omega^2) \quad .۱۱$$

$$as/(s^2 + 4) \quad .۹$$

$$a_1 + a_2 t + a_3 t^2/2 \quad .۱۵$$

$$\frac{1}{3} \sin 3t \quad .۱۳$$

$$\sin(2\pi m t/T) \quad .۱۹$$

$$2 \cosh 4t + \sinh 4t \quad .۱۷$$

$$\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}, e^{-t} - e^{-2t} \quad .۲۱$$

$$T\left(\frac{5}{r}\right) = \frac{3}{r} T\left(\frac{3}{r}\right) = \frac{3}{r} T\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{زیر } t^{3/2}/T\left(\frac{1}{r}\right) \quad .۲۳$$

بخش ۲۰۵، صفحه ۲۸۰

$$\mathcal{L}(f') = 0 = s\mathcal{L}(f) - 0 - (1 - 0)e^{-s} - (0 - 1)e^{-2s}, f' \equiv 0 \quad .۱۳$$

$$(e^{-s} - e^{-2s})/s$$

$$\frac{1}{r} e^{rt} - \frac{1}{r} \quad .۱۷$$

$$(1 - e^{-s})/s^2 - e^{-2s}/s \quad .۱۵$$

$$2(1 - e^{-t}) - t \quad .۲۱$$

$$\cosh t - 1 \quad .۱۹$$

$$\frac{r}{3} \sin 3t \quad .۲۵$$

$$2e^{3t} - 9t^2 - 6t - 2 \quad .۲۳$$

$$y = 2e^{3t} - e^{-3t} \quad .۲۹$$

$$y = -e^{-t} + 2e^{3t} \quad .۲۷$$

بخش ۳۰۵، صفحه ۲۹۲

$$[A(s + \alpha) + B\beta]/[(s + \alpha)^2 + \beta^2] \quad .۳$$

$$m\pi/[s + 2)^2 + n^2\pi^2] \quad .۱$$

$$e^{3t} \left(\frac{1}{r} t^2 + \frac{1}{24} t^4 \right) \quad .۱۱$$

$$e^{-t} (\cos t + 2 \sin t) \quad .۹$$

$$y = e^{-t} \sin 3t \quad .۱۵$$

$$y = e^{-t} (2 \cos 2t - \sin 2t) \quad .۱۳$$

$$1/s(1 + e^{-s}) \quad .۱۹$$

$$k(e^{-as} - e^{-bs})/s \quad .۱۷$$

$$(e^{-s} - e^{-2s})/s^2 \quad .۲۳$$

$$1/s(1 - e^{-s}) \quad .۲۱$$

$$f(t) = -1 \quad \text{هرگاه } 1 < t < 2 \quad .۲۷$$

$$q(t) = CV_0 e^{-t/RC} (t \geq 0) \quad .۲۵$$

۲۹. $f(t) = t - 1, 2t - 3, 6 - t$ به ازای $1 < t < 2, 2 < t < 3, 3 < t < 6$ و در غیر این حالات صفر.

$$e^{-s}/s^2 \cdot 31 \quad -se^{-\pi s}/(s^2 + 1) \cdot 33$$

$$e^a (k-s)/(s-k) \cdot 35 \quad K\omega(1 + e^{-\pi s/\omega})/(s^2 + \omega^2) \cdot 37$$

$$s^{-1} - (s+1)^{-1} - e^{-\pi s}(s^{-1} - e^{-\pi}(s^{-1})) \cdot 39$$

$$u_T(t) \cdot 41 \quad 2s^{-2} - e^{-s}(2s^{-2} + 2s^{-2} + s^{-1}) \cdot 41$$

$$e^{T(t-1)}u_1(t) \cdot 47 \quad e^{T(t-2)}u_T(t) \cdot 45$$

$$-e^{\pi-t} \sin t \cdot 49 \quad t > \pi \text{ و در غیر این صورت صفر.}$$

$$i' + \int_0^t i(\tau) d\tau = t[1 - u_a(t)] = t - (t-a)u_a(t) - au_a(t) \cdot 51$$

$$i = 1 - \cos t \quad 0 < t < a \text{ به ازای}$$

جواب

$$i = \cos(t-a) - a \sin(t-a) - \cos t \quad t > a \text{ به ازای}$$

$$i = \frac{1}{\pi}(e^{-t} - \cos t + \sin t) \quad 0 < t < \pi \text{ به ازای} \cdot 53$$

$$i = -\frac{1}{\pi}(1 + e^{-\pi}) \cos t + \frac{1}{\pi}(2 - e^{-\pi}) - \sin t \quad t > \pi \text{ به ازای}$$

۵۵. $\tilde{f}$ را به صورت $\tilde{f}(t) = f(t+a)$ تعریف کنید. در این صورت $f(t) = \tilde{f}(t-a)$ و بنا به (۲)،

$$\mathcal{L}\{f(t)u_a(t)\} = \mathcal{L}\{\tilde{f}(t-a)u_a(t)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{\tilde{f}(t)\}e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

بخش ۴۰۵، صفحه ۲۹۸

$$\frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^2} \cdot 5 \quad \frac{6s}{(s^2+9)^2} \cdot 3 \quad \frac{1}{(s-1)^2} \cdot 1$$

$$t \sin t \cdot 11 \quad \frac{2(s+2)}{(s^2+4s+5)^2} \cdot 9 \quad \frac{s^2+2s+5}{(s^2+2s-3)^2} \cdot 7$$

$$(e^{-bt} - e^{-at})/t \cdot 17 \quad (e^t - 1)/t \cdot 15 \quad e^{-t}(\sin t)/t \cdot 13$$

بخش ۵۰۵، صفحه ۳۰۳

$$te^t \cdot 3 \quad t \cdot 1$$

$$\frac{2}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \cdot 7 \quad (e^{at} - 1)/a^2 - t/a \cdot 5$$

$$e^{at}t^2/2 \cdot ۱۱$$

$$\frac{t}{2} \sin t \cdot ۹$$

$$\frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) \cdot ۱۵$$

$$(1 - \cos \omega t)/\omega^2 \cdot ۱۳$$

$$\frac{1}{2}(\sin t + t \cos t) \cdot ۱۷$$

$$d\tau = -d\sigma, \tau = t - \sigma \text{ می دهد } t - \tau = \sigma \cdot ۱۹$$

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\sigma)f(t-\sigma)(-d\sigma)$$

$$1/s = \mathcal{L}(1), (f^*1)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \cdot ۲۲$$

$$y = \frac{3}{\lambda} \sin t - \frac{1}{\lambda} \sin 3t \cdot ۲۵$$

$$\frac{1}{2}(\cos \sqrt{2}(t-1) - \cos \sqrt{2}t), 0 < t < 1 \text{ اگر } y = \frac{1}{2}(1 - \cos \sqrt{2}t) \cdot ۲۷$$

$$t > 1 \text{ اگر}$$

$$y = \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t \cdot ۲۹$$

$$\text{بخش ۶.۵، صفحه ۳۱۶}$$

$$2 \cos 2t + \sin 2t \cdot ۵$$

$$(e^{at} - e^{bt})/(a-b) \cdot ۳$$

$$2e^{2t} + te^t \cdot ۹$$

$$(1-t)e^{-t} \cdot ۷$$

$$e^t(\cos t + t \sin t) \cdot ۱۳$$

$$te^{2t}(\cos t - \sin t) \cdot ۱۱$$

$$y = 5e^{2t} - 2t^2 \cdot ۲۱$$

$$y = 2e^{2t} + e^{-t} \cdot ۱۹$$

$$y_1 = \cos t, y_2 = \sin t \cdot ۲۵$$

$$y = (2t + 3)e^{-t} + \sin t \cdot ۲۳$$

$$y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}, y_3 = e^t - e^{-t} \cdot ۲۹$$

$$y_1 = e^t + e^{2t}, y_2 = e^{2t} \cdot ۲۷$$

$$\text{بخش ۷.۵، صفحه ۳۲۵}$$

$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \frac{\pi s}{2\omega} \cdot ۵$$

$$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(e^{\pi s/\omega} - 1)} \cdot ۳$$

$$\frac{e^{\pi}(1-s)^{\pi}-1}{(1-s)(1-e^{-\pi s})} \cdot 9 \quad \frac{1}{s^2+\omega^2} \left(s + \frac{\omega}{\sinh \pi s / 2\omega} \right) \cdot 7$$

۱۱. در مسئله ۵ بگذارید $\omega = \frac{1}{\tau}$ و در K ضرب کنید

$$\left[\frac{\pi}{s} e^{-\pi s} (e^{-\pi s} - 1) + \frac{1}{s^2} (e^{-\pi s} - 1)^2 \right] / (1 - e^{-\pi s}) \cdot 13$$

$$\left[\frac{1}{s^2} (1 - e^{-\pi s}) - \frac{\pi}{s} e^{-\pi s} \right] / (1 - e^{-\pi s}) \cdot 15$$

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = v(t), RI + \frac{I}{Cs} = \frac{1 - e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} \cdot 17$$

به ازای $0 < t < 1$ $i = C(1 - e^{-t/RC})$

به ازای $t > 1$ $i = ((C - R^{-1})e^{1/RC} - C)e^{-t/RC}$

$$i(t) = \begin{cases} a \cos \omega t + b \sin \omega t - a e^{-t/RC} & 0 < t < \pi/\omega \\ -a(1 + e^{\pi/RC})e^{-t/RC} & t > \pi/\omega \end{cases} \cdot 19$$

که در آن $a = \omega CK$ ، $b = \omega^2 RC^2 K$ ، $K = 1/[1 + (\omega RC)^2]$

$$i(t) = \begin{cases} \frac{V_0}{\omega^* L} e^{-\alpha t} \sin \omega^* t & 0 < t < a \\ \frac{V_0}{\omega^* L} [e^{-\alpha t} \sin \omega^* t - e^{\alpha(t-a)} \sin \{\omega^*(t-a)\}] & t > a \end{cases} \cdot 23$$

که در آن $\omega^* = \frac{1}{LC} - \alpha^2$ ، $\alpha = \frac{R}{2L}$

$$i = e^{-t/10} \left(\tau \cos \frac{\tau}{5} t + \sin \frac{\tau}{5} t \right) \text{ جریانی اولیه } \tau \text{ آمپر، بار اولیه صفر،} \cdot 25$$

$$y = \frac{P}{K} [1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}] \cdot 33$$

۳۵. به جای عبارت P - در مسئله ۳۴ حالا داریم $P[1 - u_1(t)]$ - به ازای $0 < t < 1$

جواب همانند مسئله ۳۴ است. اگر این جواب را v_1 بنماییم جواب v به ازای $t > 1$ عبارت است از

$$\begin{aligned} v &= v_1 + \frac{P(t-1)}{M_1 + M_2} - \frac{P}{k(M_1 + M_2)} \sin[k(t-1)] \\ &= \omega - \frac{P}{M_1 + M_2} + \frac{P}{k(M_1 + M_2)} [\sin kt - \sin(k(t-1))] \end{aligned}$$

بخش ۲.۶، صفحه ۳۴۱

$$۲, ۳, ۱, |v| = \sqrt{14} \cdot ۵ \quad ۱, ۱, ۱, |v| = \sqrt{3} \cdot ۳ \quad ۲, ۰, ۱, |v| = \sqrt{5} \cdot ۱$$

$$Q: (۷, ۴, ۵) \cdot ۱۱ \quad ۰, ۰, ۰, |v| = ۰ \cdot ۹ \quad ۰, -۱, ۰, |v| = ۱ \cdot ۷$$

$$Q: (۳, ۸, -۱) \cdot ۱۷ \quad Q: (۰, ۰, ۰) \cdot ۱۵ \quad Q: \left(-\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}, -۱\right) \cdot ۱۳$$

$$Q: (-۳, -۲, -۲) \cdot ۱۹$$

بخش ۳.۶، صفحه ۳۴۶

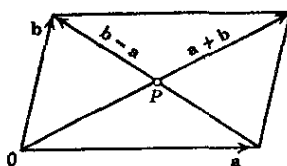
$$-۲i - ۴j + ۶k, \frac{1}{۲}i + j - \frac{۳}{۲}k, ۳i + ۶j - ۹k \cdot ۱$$

$$-i + j - ۷k, i - j + ۷k, ۲i + ۶j + ۴k \cdot ۳$$

$$۳i - ۲j + k \cdot ۹ \quad -۳i + ۳j - ۲۱k \cdot ۷ \quad \sqrt{۵۹}, \sqrt{۱۴} - ۵ \cdot ۵$$

$$p = -۳j + ۲k \cdot ۱۳ \quad ۶i + ۲j \cdot ۱۱$$

۱۵. بردار r از ۰ تا P به صورت $r = k(a+b)$ است. همچنین $r = a + l(b-a)$. از این رو $ka + kb = (1-l)a + lb$ ؛ از این رو $k = l$ ، $k = 1-l$ ؛ از این جا $k = \frac{1}{۲}$ ، $k = \frac{1}{۲}$ و اثبات کامل است.



مسئله ۱۵

بخش ۴.۶، صفحه ۳۵۱

$$۲; i, j + k \cdot ۳ \quad ۲; j, k \cdot ۱$$

$$۵. (1, ۰, \dots, ۰), (۰, ۱, ۰, \dots, ۰), \dots, (۰, \dots, ۰, ۱)$$

$$۷. \cos x, \sin x \cdot ۲ \quad ۹. \text{صفحه } xy$$

۱۱. با فرض $a = c_1 e_{(1)} + \dots + c_n e_{(n)} = q_1 e_{(1)} + \dots + q_n e_{(n)}$ به دست می آوریم $(c_1 - q_1)e_{(1)} + \dots + (c_n - q_n)e_{(n)} = ۰$ به ازای هر j زیرا $c_j - q_j = ۰$ به طور خطی مستقل است.

بخش ۵.۶، صفحه ۳۵۸

$$\begin{array}{ll}
 ۵.۱ \quad ۵, ۵ & ۰.۳ \quad -۱۱, -۱۱ \\
 ۰.۵ \quad \sqrt{۴۱}, \sqrt{۴۳} & ۰.۷ \quad \sqrt{۱۸}, \sqrt{۱۴} + \sqrt{۲۶} \\
 ۰.۹ \quad ۲۷ & ۰.۱۱ \quad ۲, ۰, -۲ \\
 ۰.۱۳ \quad ۳ & ۰.۱۵ \quad ۲ \\
 ۰.۱۷ \quad ۰ & ۰.۱۹ \quad a_1 = -۸/۳
 \end{array}$$

$$p_{(1)} \cdot d + p_{(2)} \cdot d = (p_{(1)} + p_{(2)}) \cdot d \quad ۰.۲۱$$

۰.۲۳. اگر و تنها اگر هر چهار گوشه برابر باشند.

 ۰.۲۷. زاویه β مثلث BCD زاویه بین بردارهای $c = -2i$ از B تا A و $a = -2i + 2j$ از B تا C است، بنابراین $1/\sqrt{2}$ ، $\cos \beta = a \cdot c / |a| |c| = 1/\sqrt{2}$ ، $\beta = \pi/4$ ، و غیره.

$$۰.۲۹ \quad -23/26 \quad ۰.۳۱ \quad \sqrt{3}/2 \quad ۰.۳۳ \quad -5 \quad ۰.۳۵ \quad 2$$

$$۰.۳۷ \quad |a-b|^2 = (a-b) \cdot (a-b) = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos \gamma, \text{ و غیره}$$

$$۰.۳۹ \quad |a+b|^2 = (a+b) \cdot (a+b) \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

بخش ۸.۶، صفحه ۳۶۹

$$۰.۱ \quad 6i - 2j, -6i + 2j \quad ۰.۳ \quad 2i + 2j + 2k, \sqrt{27}, 1$$

$$۰.۵ \quad -12i + 6j - 6k, 12i - 6j + 6k \quad ۰.۷ \quad 21i + 2j + 4k$$

$$۰.۹ \quad 2i - 6j - 2k, -2i + 6j + 2k$$

$$۰.۱۱ \quad 6i - 2j \quad ۰.۱۵ \quad 2 \quad ۰.۱۷ \quad \sqrt{186} \quad ۰.۱۹ \quad ۲$$

$$۰.۲۱ \quad 11 \quad ۰.۲۳ \quad 1/2 \quad ۰.۲۵ \quad \sqrt{266}/2 \quad ۰.۲۷ \quad \sqrt{18}$$

$$۰.۲۹ \quad \sqrt{26} \quad ۰.۳۱ \quad \text{متعامد} \quad ۰.۳۳ \quad \text{متعامد} \quad ۰.۳۵ \quad \text{موازی}$$

$$۰.۳۷ \quad k, -k \quad ۰.۳۹ \quad \pm (2j + 2k)/\sqrt{13}$$

$$۰.۴۱ \quad \pm i \quad ۰.۴۳ \quad \pm (2i - j - k)/\sqrt{6}$$

$$۰.۴۵ \quad p = i - j + k \text{ و } n = 2i + 2j + 2k \text{ بردارهای نرمال بر صفحه هستند و}$$

$$v = n \times p = 2i + 2j - 2k$$

$$۰.۴۹ \quad ۰$$

$$۰.۴۷ \quad k$$

بخش ۹.۶، صفحه ۳۷۵

$$\begin{array}{llll}
 ۱. ۰.۱ & ۰.۳ - ۱ & ۰.۵ ۳ & ۰.۷ - ۱۲ \\
 ۱۱. مستقل & ۱۳. مستقل & ۱۵. وابسته & ۱۷. مستقل \\
 \lambda = ۵, \mu = ۱۰. ۲۱ & ۲۳. ۳ & ۲۴. ۲ & ۲۷. ۲۰ \\
 ۲۹. ۷/۳ & ۳۱. ۱/۶ & ۳۳. ۹ & ۳۷. ۱۷i - ۲۶j - ۲۷k \\
 ۳۹. ۵i + ۵j - ۳k, ۳۷. ۶i + ۳j - ۲k, ۳۷. ۱۷i - ۲۶j - ۲۷k & & & \\
 ۴۹. [a \cdot (b \times (c \times d))] = (a \times b) \cdot (c \times d) \text{ برابری است با } (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c) & & &
 \end{array}$$

و نیز

بخش ۱۰.۷، صفحه ۳۸۷

$$\begin{array}{ll}
 ۱. \begin{pmatrix} ۰ & ۴ \\ ۱ & ۷ \end{pmatrix} & ۳. \begin{pmatrix} ۱۲ & ۲ \\ -۲ & ۴ \end{pmatrix} \\
 ۵. \begin{pmatrix} ۰ & ۴ \\ ۱ & ۷ \end{pmatrix} & ۷. \text{خیر}
 \end{array}$$

۹. A بلی، B خیر

$$\begin{array}{ll}
 ۱۱. \begin{pmatrix} ۴ & ۱ & ۴ \\ ۷ & ۱ & ۰ \\ ۶ & -۵ & ۱ \end{pmatrix} & ۱۳. \begin{pmatrix} ۱۰ & ۲ & ۸ \\ ۱۳ & ۳ & ۰ \\ ۱۵ & -۱۴ & ۲ \end{pmatrix} \\
 ۱۵. \begin{pmatrix} ۰ & -۹ & ۰ \\ -۱ & ۱ & -۳ \\ -۴ & ۰ & -۱ \end{pmatrix} & ۱۷. \text{خیر، خیر، بلی، بلی؛}
 \end{array}$$

۲۳. د. ک. قضیه ۱ بخش ۲.۷ برای ماتریسهای متقارن

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

۲۵. $n \cdot n(n+1)/۲$ ماتریس با قطر اصلی ۱ و تمام عناصر دیگر صفر، و ماتریسهای متقارن با ... و بقیه عناصر صفر

$$۲۷. \begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .۲۹$$

بخش ۴.۷، صفحه ۴۰۱

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 12 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad .۳ \quad A^T B = (4-2), \quad B^T A = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad .۱$$

$$B B^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} \quad .۵$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 12 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} -35 & -3 & -15 \\ 60 & -32 & -21 \\ -48 & -20 & -11 \end{pmatrix} \quad .۷$$

$$C^T - 3C^T + 2I = \begin{pmatrix} -36 & 6 & -6 \\ 24 & -42 & -30 \\ -48 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A^T C A = (5) \quad .۹ \quad .۱۱ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و غیره.}$$

۱۵. از قیاس و فرمولهای جمع توابع سینوس و کسینوس استفاده کنید

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad .۱۷$$

بخش ۵.۷، صفحه ۴۱۱

$$x = 1/7, \quad y = -1/7 \quad .۳$$

$$x = 1, \quad y = 2 \quad .۱$$

$$x = 2, \quad y = -1, \quad z = 0 \quad .۷$$

$$x = z, \quad y = -z \quad .۵$$

$$x = -2, y = 0, z = 4.11$$

$$x = -1, y = 2z.9$$

$$x = 3y + 2, z = 0.15$$

$$x = y + 1, z = 1.13$$

$$w = 2x + 1, y = 1, z = 2.19$$

$$y = w - 5x + 9, z = 0.17$$

$$I_1 = 1, I_2 = 3, I_3 = 4 \text{ آمپر}.23$$

$$w = 0, x = 3z, y = 2z + 1.21$$

$$I_1 = \frac{R_F E_1 + R_\delta (E_1 + E_T)}{(R_1 + R_T + R_F)(R_F + R_\delta) + R_F R_\delta}, \text{ و غیره}.25$$

$$P = 4, D = S = 5.29$$

بخش ۶.۷، صفحه ۴۱۸

$$2.7$$

$$2.5$$

$$1.3$$

$$1.1$$

$$3.9$$

۱۳. بردارهای سطری بريك خط قرار دارند. بردارهای سطری هم صفحه‌اند.

۱۷. وابسته خطی

۱۵. مستقل خطی

۲۱. وابسته خطی

۱۹. وابسته خطی

۲۵. k دلخواه

۲۳. $k = 6$

بخش ۸.۷، صفحه ۴۲۹

۳. از (۱) استفاده کنید و در آن به جای A بگذارید C و قرار دهید $C = A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 0.2 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.1 \\ -0.1 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}.7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.5$$

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 \end{pmatrix}.11$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.9$$

$$x = 19x^* + 2y^* - 9z^*$$

$$x = x^* + 2y^* + 5z^*$$

$$y = -4x^* - y^* + 2z^*.15$$

$$y = -y^* + 2z^*.13$$

$$z = -2x^* + z^*$$

$$z = 2x^* + 4y^* + 11z^*$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T. ۱۹$$

۱۷. از (۷) استفاده کنید.

بخش ۹.۷، صفحه ۴۳۷

$$۰.۵ \quad ۲۲$$

$$۱.۳$$

$$۱۴.۱$$

$$۰.۹$$

$$۱+a^2+b^2+c^2$$

بخش ۱۰.۷، صفحه ۴۵۰

$$۳.۳ \quad ۴a^2b^2c^2$$

$$۹۰.۱$$

بخش ۱۱.۷، صفحه ۴۵۷

$$x=1, y=2.۷$$

$$۲.۵$$

$$۱.۳$$

$$۲.۱$$

$$x=2, y=1, z=-2.۱۱$$

$$x=2, y=2.۹$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}.۱۷$$

$$\begin{pmatrix} -3/13 & 5/13 \\ 2/13 & 1/13 \end{pmatrix}.۱۵$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 1/b & 0 \\ 1/c & 0 & 0 \end{pmatrix}.۱۹$$

۲۵. ثابت کنید $\sum_{k=1}^n a_{jk}A_{ik} = 0 (i \neq j)$ ، $\sum_{k=1}^n a_{jk}A_{jk} = \det \mathbf{A}$ و آنها را به کار ببرید.

بخش ۱۲.۷، صفحه ۴۶۵

۱. $\mathbf{A} = \mathbf{H} + \mathbf{S}$ که در آن $\mathbf{H} = (\mathbf{A} + \bar{\mathbf{A}}^T)/2$ هرمیتی است و $\mathbf{S} = (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)/2$ ضد هرمیتی است.

۳. $\mathbf{C}^T$ باید با $-\mathbf{C}$ برابر باشد و این بدان معنی است که a و b حقیقی اند.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.۷$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.۵$$

$$۲.۱۵$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.۹$$

$$-|x_1|^2 + 10 \operatorname{Re} \bar{x}_1 x_2 - 2 \operatorname{Im} \bar{x}_1 x_2 + 2|x_2|^2. ۱۷$$

$$2i|x_1|^2 + 8i \operatorname{Im} \bar{x}_1 x_2. ۲۳ \quad ۰.۲۹ \quad ۲.۱۹$$

$$S = \alpha + i\beta = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \bar{S} = \alpha - i\beta = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{x}}. ۲۵$$

$$= -(\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x})^T = -S = -\alpha - i\beta.$$

بخش ۱۳.۷، صفحه ۴۷۳

$$۱. \text{ خیر} \quad ۳. \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, ۴, ۶, ۵. ۰, \text{ هر بردار غیر صفر}$$

$$۷. \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, ۹. \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, ۲۵, -۲۵,$$

$$۱۱. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, -۱, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, ۱۳. a, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$۱۵. ۳۰, ۲۵, ۲۰$$

۱۹. از این واقعیت نتیجه می‌شود که صفرهای يك چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی، حقیقی یا جفت مزدوجهای مختلط، هستند.

۲۵. از $\mathbf{A} \mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j$ ($\mathbf{x}_j \neq 0$) و مسائل ۲۳ و ۲۴، $k_n \mathbf{A}^n \mathbf{x}_j = k_n \lambda_j^n \mathbf{x}_j$ (عدد صحیح $n \geq 0$)، $k_p \mathbf{A}^p \mathbf{x}_j = k_p \lambda_j^p \mathbf{x}_j$ ($n \geq 0$, $p \geq 0$)، با جمع کردن طرفین می‌بینیم که $k_n \mathbf{A}^n + k_p \mathbf{A}^p$ دارای مقادیر ویژه $k_n \lambda_j^n + k_p \lambda_j^p$ است. از روی این حکم ثابت می‌شود.

بخش ۱۴.۷، صفحه ۴۷۸

۵. دوران حول محور x_3 در فضا

$$۷. \lambda = \pm 1, \begin{pmatrix} 1 \\ i - i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i + i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

۹. فرض کنید $\mathbf{A}$ یکنانی است. قرار دهید $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$. در این صورت

$$\mathbf{B}^T = (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\bar{\mathbf{A}}^{-1})^{-1} = \bar{\mathbf{B}}^{-1}$$

۱۱. فرض کنید $Ax = \lambda x$ ($x \neq 0$) ، $Ay = \mu y$ ($y \neq 0$) ، پس $\lambda x^T y = x^T Ay = x^T \mu y = \mu x^T y$. از این رو $(Ax)^T = x^T A^T = x^T A = \lambda x^T y$ ، بنابراین ، اگر $\lambda \neq \mu$ ، که خود اثبات متعامد بودن است.

$$17. \text{ زیرا } \text{tr} \tilde{A} = \text{tr}[T^{-1}(AT)] = \text{tr}[(AT)T^{-1}] = \text{tr}(ATT^{-1}) = \text{tr} A$$

$$\text{tr} AB = \text{tr} BA$$

$$19. Ax = \lambda x$$
 ($x \neq 0$) . بنابراین (الف) $T^{-1}Ax = \lambda T^{-1}x = \lambda y$. حال داریم $\tilde{A}y = \lambda y$ می شود (الف) و $T^{-1}Ax = T^{-1}ATy = \tilde{A}y$

$$23. |a| = |b| = |c|$$

$$25. (97000 \quad 103000), (94210 \quad 105790)$$

بخش ۱۵.۷، صفحه ۴۸۹

$$1. \text{ مقادیر ویژه } 3 \text{ و } 2 \text{ بردارهای ویژه } x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \text{ جواب:}$$

$$y = x_1 e^{3t} + x_2 e^{2t}$$

$$3. y_1 = e^{3t}, y_2 = e^{3t}$$

$$5. y_1 = 2e^{3t}, y_2 = -10e^{3t}, y_3 = -22e^{3t}$$

$$9. y_1 = -2 \cos \sqrt{18} t, y_2 = \cos \sqrt{18} t$$

$$13. \lambda_1 = -k, \lambda_2 = -3k, x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y = x_1 \cos \sqrt{k} t + x_2 \sin \sqrt{3k} t$$

بخش ۱۰.۸، صفحه ۴۹۶

$$11. 0 < y < \sqrt{3}|x| \text{ و } y < -\sqrt{3}|x|$$

$$13. T = 3y - 4y^3 \quad 15. \text{ صفحه های موازی} \quad 17. \text{ کره های متحد المرکز}$$

$$19. \text{ سهمی گون دوران} \quad 21. \text{ بیضی گون دوران}$$

$$23. \text{ بیضی های ثابت } 3x^2 + y^2 = \text{ثابت}, x/y = \text{ثابت} \quad 25. \text{ بیضی گونه ها}$$

$$33. y = cx^2, \text{ ثابت } x^2 + y^2 = \text{ثابت}$$

بخش ۲۰.۸، صفحه ۵۰۱

$$1. u' = b, u'' = 0$$

$$\mathbf{u}' = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}, \mathbf{u}'' = -\mathbf{u}, |\mathbf{u}'| = 1 \quad ۳.$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}, \mathbf{u}'' = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k} \quad ۵.$$

$$e^t \mathbf{i} - e^{-t} \mathbf{j}, \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}, e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}, \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} \quad ۷.$$

$$r \cos 3t (\mathbf{i} + \mathbf{j}), 3\sqrt{r} |\cos 3t|, -4 \sin 3t (\mathbf{i} + \mathbf{j}), 4\sqrt{r} |\sin 3t| \quad ۹.$$

$$-10t^4 \mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 4t^3 \mathbf{k} \quad ۱۱.$$

$$-(4t^3 + 5t^4)\mathbf{i} + (4t^3 + 14t^4)\mathbf{j} - (12t^5 - 2t)\mathbf{k} \quad ۱۳.$$

$$1 + 3t^2 + 12t^3 \quad ۱۵.$$

$$2xi + 2y\mathbf{j} + 2x\mathbf{j} \quad ۱۷.$$

$$z\mathbf{j} + y\mathbf{k}, z\mathbf{i} + x\mathbf{k}, y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad ۱۹.$$

$$2xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{k}, x^2\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j}, y^2\mathbf{j} + 2zx\mathbf{k} \quad ۲۱.$$

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})'' = \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'' \quad ۲۵.$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})'' = \mathbf{u}'' \times \mathbf{v} + 2\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' + \mathbf{u} \times \mathbf{v}''$$

بخش ۳.۸، صفحه ۵۰۵

$$\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + (1 + 2t)\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad ۳.$$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad ۱.$$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad ۵.$$

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (5 - 2t)\mathbf{j} + (3 - 4t)\mathbf{k} \quad ۷.$$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad ۱۱.$$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad ۹.$$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad ۱۵.$$

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} \quad ۱۳.$$

$$\mathbf{r}(t) = (-1 + \cos t)\mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} \quad ۱۷.$$

۱۹. دایره واقع در صفحه xy ، منحنی سینوسی در صفحه yz ، منحنی کسینوسی در صفحه

xz

بخش ۴.۸، صفحه ۵۰۸

$$\lambda(\sqrt{1000} - 1)/27 \quad ۳.$$

$$\sinh 1 \quad ۱.$$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j} \quad ۷.$$

$$\pi^2/2 \quad ۵.$$

$$\lambda a \quad ۱۳.$$

$$\sqrt{2}(e^\pi - 1) \quad ۱۱.$$

بخش ۵۰۸، صفحه ۵۱۳

$$q(w) = (-1/\sqrt{r} + w)i + (1/\sqrt{r} + w)j \quad ۱.$$

$$q(w) = i + wj + (\pi + 2w)k \quad ۳.$$

$$\cos \alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = c/\sqrt{a^2 + c^2} = \text{ثابت} \quad ۵.$$

$$\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}/s, \mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}}/s^2 + \dots, \mathbf{r}''' = \dddot{\mathbf{r}}/s^3 + \dots \quad ۱۵.$$

$$\tau = (\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''')/\kappa^2 = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})^2}{\dot{s}^2} \frac{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})^2}{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})^2}$$

که در آنها نقاط معرف جملاتی هستند که بعداً با اعمال قواعد آشنایی که در مورد ساده کردن دترمینان داریم حذف می‌شوند.

بخش ۶۰۸، صفحه ۵۱۹

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}, |\mathbf{v}| = 1, \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad ۱.$$

$$\mathbf{v} = (2 - 2t)\mathbf{i}, |\mathbf{v}| = |2 - 2t|, \mathbf{a} = -2\mathbf{i} \quad ۳.$$

$$\text{جزء } 1 \leq y \leq -1 \text{ بر روی محور } y, |\cos t|, \cos t \mathbf{j}, -\sin t \mathbf{j} \quad ۵.$$

$$-2\sin t^2 \mathbf{i} + 2t \cos t^2 \mathbf{j}, 2t \quad \text{دایره}, \quad ۷.$$

$$(-2\sin t^2 - 2t^2 \cos t^2)\mathbf{i} + (2\cos t^2 - 2t^2 \sin t^2)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{مارپیچ مستدیر}, \quad ۹.$$

$$\mathbf{a} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}, |\mathbf{v}| = \sqrt{2}$$

$$|a| = \omega^2 R = (2\pi/2.36 \times 10^6)^2 \times 3.85 \times 10^8 = 0.0027 \text{ m/s}^2 \quad ۱۱.$$

برابر شتاب جاذبه، g ، است.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 t^2/2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \quad \text{بردارهای ثابتند}, \quad ۱۳.$$

مسیر تغییری نمی‌کند اما راه حرکت بر روی مسیر تغییر می‌کند.

بخش ۷۰۸، صفحه ۵۲۴

$$-t(1+t^2)^{-3/2} \quad ۷. \quad (g'h - gh')/h^2 \quad ۳. \quad 2t + 1/t \quad ۱.$$

$$e^{2u} \sin 2v, e^{2u} \cos 2v \quad ۱۱. \quad 2, 0 \quad ۹.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x), r_x = x/r, \theta_x = -y/r^2, r_{xx} = y^2/r^3 \quad ۱۵.$$

و غیره

$$w_{xx} = x^2 r^{-2} w_{\tau\tau} - 2xyr^{-2} w_{\tau\theta} + y^2 r^{-2} w_{\theta\theta} + y^2 r^{-2} w_{\tau\tau} + 2xyr^{-2} w_{\theta\theta}$$

و غیره

بخش ۸۰۸، صفحه ۵۳۲

$$\cos x \cosh y \mathbf{i} + \sin x \sinh y \mathbf{j} \quad ۳. \quad 2\mathbf{i} - \mathbf{j} \quad ۱.$$

$$\begin{array}{ll}
 ۲(xi+yj)/(x^۲+y^۲) \cdot ۵ & yzi+xzj+xyk \cdot ۷ \\
 ۲xi+۲yj+۲zk \cdot ۹ & (yzi+xzj+xyk)e^{xyz} \cdot ۱۱ \\
 ۲i-۳j \cdot ۱۳ & yi+xj \cdot ۱۵ \\
 ۱۸xi+۲yj \cdot ۱۷ & i-j \cdot ۱۹ \\
 ۳i-j \cdot ۲۱ & ۴۸i+۱۶j \cdot ۲۳ \\
 i+j+k \cdot ۲۵ & ۲i+۲j-k \cdot ۲۷ \\
 ۲i+۲k \cdot ۲۹ & x-y+z \cdot ۳۱
 \end{array}$$

$$\frac{1}{y} \ln(x^۲+y^۲) \cdot ۳۵ \quad \frac{1}{y}x^۲+y^۲+\frac{1}{y}z^۲ \cdot ۳۳$$

$$۴, ۲/\sqrt{۲}, ۴, ۰, -۴, -۴/\sqrt{۲}, -۴, ۰ \cdot ۳۷$$

$$۰ \cdot ۴۱ \quad ۳ \cdot ۴۹$$

$$۸/\sqrt{۵} \cdot ۴۳$$

بخش ۹۰۸، صفحه ۵۳۸

$$۰۳ \quad c_{۱۱}=c_{۲۲}=c_{۳۳}=۱, b_۳=۲, b_۲=۵, b_۱=-۱, \text{بقیه تماماً صفر}$$

$$۰۵ \quad c_{۱۲}=c_{۲۱}=c_{۳۳}=۱, \text{بقیه تماماً صفر}$$

$$۰۷ \quad c_{۱۲}=c_{۲۳}=c_{۳۱}=۱, \text{بقیه تماماً صفر}$$

بخش ۱۰۰۸، صفحه ۵۴۴

$$۰۱ \quad ۲x \cdot ۳ \quad yz+zx+xy \cdot ۵$$

$$-x^۲ \cdot ۷ \quad ۹ \quad \text{خیر، زیرا (۱) شامل مختصات می شود}$$

$$۰۱۵ \quad ۲۷۲ \cdot ۱۹$$

بخش ۱۱۰۸، صفحه ۵۴۷

$$۰۱ \quad -۲k \cdot ۳ \quad ۲yi+۲zj+۲xk \cdot ۵ \quad yi+xj$$

$$۰۷ \quad \text{div } v=۲, \text{curl } v=۰, \text{تراکم پذیر, } r=c_۱e^t i+c_۲e^t j+c_۳k$$

$$۰۹ \quad \text{div } v=۰, \text{curl } v=-۳y^۲k, \text{تراکم ناپذیر, } r=(c_۲^۲t+c_۱)i+c_۲j+c_۳k$$

$$o, z(x-y)i+x(y-z)j+y(z-x)k. ۱۷$$

۱۹. a_1, a_2, a_3 و a_1^*, a_2^*, a_3^* را به ترتیب مؤلفه‌های ∇curl نسبت به مختصات دکارتی راست‌گرد x_1, x_2, x_3 و x_1^*, x_2^*, x_3^* بگیرید. با استفاده از (۵') بخش ۹.۸، قاعدهٔ زنجیری توابع چند متغیره، و (۹) بخش ۹.۸ درمی‌یابیم.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \sum_{m=1}^3 \left(c_{m2} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_3} - c_{m3} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_2} \right) \\ &= \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(c_{m2} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_l^*} \frac{\partial x_l^*}{\partial x_3} - c_{m3} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_l^*} \frac{\partial x_l^*}{\partial x_2} \right) \\ &= \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^3 (c_{m2} c_{l3} - c_{m3} c_{l2}) \frac{\partial v_m^*}{\partial x_l^*} \\ &= (c_{22} c_{23} - c_{23} c_{22}) \left(\frac{\partial v_2^*}{\partial x_3^*} - \frac{\partial v_2^*}{\partial x_3^*} \right) + \dots \end{aligned}$$

$= (c_{22} c_{23} - c_{23} c_{22}) a_1^* + (c_{12} c_{23} - c_{13} c_{22}) a_2^* + (c_{22} c_{13} - c_{23} c_{12}) a_3^*.$
با استفاده از (۳) بخش ۹.۸، اتحاد لاگرانژ (بخش ۹.۶) و $\mathbf{k}^* \times \mathbf{j}^* = -\mathbf{i}^*$ ، $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ به دست می‌آوریم

$$c_{22} c_{23} - c_{23} c_{22} = (\mathbf{k}^* \times \mathbf{j}^*) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i} = c_{11}$$

از این رو $a_1 = c_{11} a_1^* + c_{12} a_2^* + c_{13} a_3^*$ که به صورت (۵') بخش ۹.۸ است. به طریقی مشابه می‌توان فرمولهای متناظری برای a_2 و a_3 پیدا کرد. اگر مختصات x_1, x_2, x_3 چپ‌گرا باشند، در این صورت $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = +\mathbf{i}$ ، اما در آن صورت يك علامت منها در جلو درمیان (۱) هست. قضیه ثابت است.

بخش ۲۰۹، صفحه ۵۵۸

$$\ln 2 \quad .7 \quad \frac{5}{3} \quad .5 \quad 4\pi \quad .3 \quad \frac{5}{3} \sqrt{5} \quad .1$$

$$8.15 \quad \frac{7}{5} \quad .13 \quad 0.11 \quad -\frac{48}{5} \quad .9$$

$$|W| \leq 2, W = \frac{5}{6} \quad .19 \quad -\frac{25}{2} \quad .17$$

بخش ۳۰۹، صفحه ۵۶۸

$$\frac{2}{8} \quad .3 \quad \frac{2}{3} \quad .1$$

$$\frac{1}{6} \cdot 7 \quad 5. \frac{67}{120}$$

$$\bar{x}=1, \bar{y}=2.11 \quad 9. \frac{16}{3}$$

$$I_x=bh^3/12, I_y=b^3h/4.15 \quad 13. \frac{8}{3}, \frac{4}{3}$$

$$I_x=(a+b)h^3/24, I_y=h(a^3-b^3)/48(a-b).17$$

$$32\pi/3.21 \quad 18.19$$

$$1.25 \quad 1.23$$

بخش ۴.۹، صفحه ۵۷۵

$$1/3.5 \quad 3. -1 \quad 1. 0$$

$$0.11 \quad \pi(\cosh 1-1).9 \quad 7. 2$$

$$0.17 \quad 9/2.15 \quad 13. \pi ab$$

۱۹. در قضیه گرین بگیریم $f = -ww_x$ و $g = ww_y$ که در آنها اندیسه‌های زیر نمایش مشتقات جزئی است. در این صورت $gx - f_y = w_x^2 + w_y^2$ زیرا $\nabla^2 w = 0$ و
 $f dx + g dy = (-ww_y x' + ww_x y') ds = w \text{grad } w \cdot (y' i - x' j) ds$

$$= w(\text{grad } w) \cdot n ds = w \frac{\partial w}{\partial n} ds$$

که در آنها پریمها نمایش مشتق نسبت به s است

$$1.25 \quad 2\pi.23 \quad 21. -(e^2-1)/2$$

بخش ۵.۹، صفحه ۵۷۹

۱. صفحه xy ، خطوط مستقیم موازی

۳. استوانه دوار $x^2 + y^2 = 1$ ، خطوط مستقیم، دایر

۵. استوانه بیضی گون $x^2 + 16y^2 = 16$ ، خطوط مستقیم، بیضیها

۷. مخروط دوار $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، دایر، خطوط مستقیم

$$r = ui + vj + (1-u-v)k.11 \quad 9. r = ui + vk$$

$$x^y/a^y + y^y/b^y + z^y/c^y - 1 = 0.15$$

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^y\mathbf{k}.13$$

$$(vi + uj - k)/\sqrt{1 + u^y + v^y}.19$$

$$x^y/a^y - y^y/b^y - z = 0.17$$

بخش ۶.۹، صفحه ۵۸۸

$$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}) \cdot \text{grad } f = 0, \mathbf{n} = \text{grad } f / |\text{grad } f|.3$$

$$4x^* - z^* = 4.7$$

$$x^* + y^* - z^* = 1.5$$

$$du^y + dv^y.11$$

$$4x^* + 2y^* - z^* = 5.9$$

$$a^y \cos^y v du^y + a^y dv^y.13$$

$$(1 + v^y) du^y + 2uv du dv + (1 + u^y) dv^y.15$$

۱۷. Γ_v و Γ_u بر منحنیها مماسند. قضیه ۱ بخش ۵.۶ را به کار ببرید.

$$\pi\sqrt{2}.25$$

$$\pi(\sqrt{125} - 1)/6.21$$

$$2\pi.19$$

بخش ۷.۹، صفحه ۵۹۵

$$(3^{5/2} - 2^{7/2} + 1)/15.3$$

$$6\pi.1$$

$$0.7$$

$$(10^{2/2} - 1)/9.5$$

$$2\pi h.13$$

$$(5^{2/2} - 1)/2.9$$

$$2\pi^y ab(4a^y + 4ab + 5b^y).17$$

$$2\pi^y ab(2a^y + 3b^y).15$$

بخش ۹.۹، صفحه ۶۰۷

$$\frac{1}{\lambda}.5$$

$$\pi/2.3$$

$$1.1$$

$$\pi h^5/10.11$$

$$2c^5/3.9$$

$$\frac{1}{120}.7$$

۱۳. در (۳) بخش ۸.۹ به ترتیب u را xi ، yj ، zk بگیريد

$$12.23$$

$$0.21$$

$$3.19$$

۲۷. از مسئله ۲۶ استفاده كنيد

۲۵. در (۹) قرار دهيد $f = 1$

بخش ۱۱.۹، صفحه ۶۱۶

$$\pm 3\pi/2.3$$

$$\pm 1.1$$

۵. نمایش پارامتریک C را به کار ببرید. $۷. -18\pi\sqrt{2}$

۹. $\frac{1}{3}$ ۱۱. ۰

۱۳. ۰ ۱۵. ۰

بخش ۱۲.۹، صفحه ۶۲۶

۱. بلی ۳. خیر

۵. بلی ۷. بلی

۹. $u = (x^2 - y^2 - z^2)/2$ ۱۱. $u = x + yz$

۱۳. $u = \sin x - y^2z$ ۱۵. $\frac{1}{2}$

۱۷. ۵ $e^2 - 5$

بخش ۱۰.۱، صفحه ۶۳۰

۱. ۱، ۱، ۲، ۲، π ، π ، 2π ، 2π

۱۷. $\pi/2$ ($n=0$)، π (n زوج)، ۰، $1/n$ ($n=1, 5, 9, \dots$)، $1/n$ ($n=3, 7, 11, \dots$)

۱۹. ۰

۲۱. 0 ($n=0$)، $2\pi/n$ ($n=1, 3, \dots$)، $2\pi/n$ ($n=2, 4, \dots$)

۲۳. $\pi^2/3$ ($n=0$)، π^2/n^2 ($n=1, 2, \dots$)، $(-1)^n$

۲۵. $n[(-1)^n e^{-\pi} - 1]/(1+n^2)$

بخش ۲۰.۱، صفحه ۶۳۳

۱. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$

۳. $\frac{2}{\pi} \left(\sin x - \frac{2}{3} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin 7x + \dots \right)$

۵. $2 \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$

$$2 \left[\left(\frac{\pi^{\gamma}}{1} - \frac{\rho}{1^{\gamma}} \right) \sin x - \left(\frac{\pi^{\gamma}}{\gamma} - \frac{\rho}{\gamma^{\gamma}} \right) \sin 2x + \left(\frac{\pi^{\gamma}}{\gamma^2} - \frac{\rho}{\gamma^{\gamma}} \right) \sin 3x - + \dots \right] \cdot \gamma$$

$$\frac{\rho}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{q} \cos 2x + \frac{1}{\gamma \Delta} \cos \Delta x + \dots \right) \cdot 9$$

$$\frac{\rho}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{\gamma} \cos 2x + \frac{1}{\Delta} \cos \Delta x - + \dots \right) \cdot 11$$

$$\frac{\gamma}{\pi} \sin x + \frac{1}{\gamma} \sin 2x - \frac{\gamma}{q\pi} \sin 2x - \frac{1}{\gamma} \sin 2x + \frac{\gamma}{\gamma \Delta \pi} \sin \Delta x + \dots \cdot 13$$

$$a_0 = \pi^{\gamma}/\rho, a_n = (-1)^n \gamma/n^{\gamma}, b_n = \{ \gamma [(-1)^n - 1]/n^{\gamma} \pi \} - \{ \pi (-1)^n/n \} \cdot 15$$

بخش ۳۰۱، صفحه ۶۴۳

$$\frac{\gamma}{\pi} + \cos 100 \pi t \quad \cdot 3$$

$$+ \frac{\rho}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot \gamma} \cos 200 \pi t - \frac{1}{\gamma \cdot \Delta} \cos 400 \pi t + \frac{1}{\Delta \cdot \gamma} \cos 600 \pi t - + \dots \right)$$

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\pi} \left(\cos \frac{\pi t}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \cos \frac{2\pi t}{\gamma} + \frac{1}{\Delta} \cos \frac{\Delta \pi t}{\gamma} - + \dots \right) \cdot 5$$

$$\frac{\gamma}{\pi} \left(\sin \pi t - \frac{1}{\gamma} \sin 2\pi t + \frac{1}{\gamma} \sin 2\pi t - + \dots \right) \cdot 7$$

$$- \frac{\rho}{\pi^{\gamma}} \left(\cos \pi t + \frac{1}{q} \cos 2\pi t + \frac{1}{\gamma \Delta} \cos \Delta \pi t + \dots \right) \cdot 9$$

$$+ \frac{\gamma}{\pi} \left(\sin \pi t + \frac{1}{\gamma} \sin 2\pi t + \dots \right)$$

$$\frac{1}{\pi} \left(\sin 2t - \frac{1}{q} \sin 2t + \frac{1}{\gamma \Delta} \sin 2t - \frac{1}{\gamma q} \sin 2t + \dots \right) \cdot 11$$

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{\rho}{\pi^{\gamma}} \left(\cos \pi t - \frac{1}{\gamma} \cos 2\pi t + \frac{1}{q} \cos 2\pi t - \frac{1}{\gamma \Delta} \cos 2\pi t + \dots \right) \cdot 13$$

$$a_0 = \frac{1}{\gamma} (\gamma - e^{-\gamma}), a_n = \frac{\gamma k_n}{l_n}, b_n = \frac{n \pi k_n}{l_n} (n = 2, 3, \dots),$$

$$b_n = \frac{n \pi k_n}{l_n} - \frac{\gamma}{n \pi} (n = 1, 2, \dots), \text{ و } k_n = 1 - (-1)^n e^{-\gamma},$$

$$l_n = \gamma + n^{\gamma} \pi^{\gamma}$$

۹۷. قرار دهید $x = \pi t$

۹۹. قرار دهید $x = \pi t/2$. سری را در $2/\pi$ ضرب کنید (چرا؟).

بخش ۴۰۱۰، صفحه ۶۴۷

۳. زوج: $|x|^2$ ، $x^2 \cos nx$ ، $\cosh x$ ، فرد: $x \cos nx$ ، $\sinh x$ ، $x|x|$

۵. فرد ۷. نه زوج نه فرد

۹. زوج ۱۱. فرد

۱۳. نه زوج نه فرد

۱۵. $|f(-x)| = |-f(x)| = |f(x)|$ ، $f^2(-x) = (-1)^2 f^2(x) = f^2(x)$

۲۱. $\cosh x + \sinh x$ ۲۳. $x^2(1-x^2)^{-1} + x(1-x^2)^{-1}$

۲۵. ر. ک. مسئله ۵ بخش ۲۰۱۰ ۲۷. ر. ک. مسئله ۷ بخش ۲۰۱۰

۲۹. $\frac{x}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - + \dots \right)$

۳۱. $-\pi - \frac{x}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \dots \right) + 2 \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right)$

بخش ۵۰۱۰، صفحه ۶۵۳

۱. $f(t) = 1$

۳. $\frac{1}{2} + \frac{x}{\pi} \left(\cos \frac{\pi t}{l} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi t}{l} - + \dots \right)$

۵. $\frac{1}{2} + \frac{x}{\pi} \left(\cos \frac{\pi t}{l} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi t}{l} + \dots \right)$

۷. $\frac{l^2}{x} + \frac{6l^2}{\pi^2} \left[\left(\frac{4}{\pi^2} - 1 \right) \cos \frac{\pi t}{l} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi t}{l} + \left(\frac{4}{3^2\pi^2} - \frac{1}{3^2} \right) \cos \frac{3\pi t}{l} + \dots \right]$

۹. $\frac{2}{\pi} - \frac{x}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos \frac{2\pi t}{l} + \frac{1}{3 \times 5} \cos \frac{4\pi t}{l} + \frac{1}{5 \times 7} \cos \frac{6\pi t}{l} + \dots \right)$

$$\frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi t}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi t}{l} + \dots \right) \quad ۱۱$$

$$\frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi t}{l} + \frac{2}{3} \sin \frac{2\pi t}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi t}{l} + \frac{2}{6} \sin \frac{6\pi t}{l} + \dots \right) \quad ۱۳$$

$$\frac{2l^2}{\pi} \left[\left(1 - \frac{2}{\pi^2} \right) \sin \frac{\pi t}{l} - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{l} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3^3\pi^2} \right) \sin \frac{3\pi t}{l} - \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi t}{l} + \dots \right] \quad ۱۵$$

بخش ۶۰۱۰، صفحه ۶۵۹

۱۵. خیر

بخش ۷۰۱۰، صفحه ۶۶۶

۱. $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2 - 1} \sin t$ جمله
آخر عبارتند از

ω	۰٫۵	۰٫۷	۰٫۹	۱٫۱	۱٫۵	۲٫۰	۱۰٫۰
$A(\omega)$	-۱٫۳۳	-۰٫۲۲۰	-۰٫۲۳	۴٫۸	۰٫۸	۰٫۳۳	۰٫۰۱

۳. $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + B_1 \sin t + B_2 \sin 2t + B_3 \sin 3t$ که در آن

ω	0.5	0.9	1.1	2.0	2.9	3.1	4.0	4.9	5.1	6.0	8.0
$B_1 = 1/(\omega^2 - 1)$	-1.33	-5.3	4.8	0.33	0.13	0.12	0.07	0.04	0.04	0.03	0.02
$B_2 = 1/9(\omega^2 - 9)$	-0.013	-0.014	-0.014	-0.02	-0.19	0.18	0.02	0.01	0.01	0.004	0.002
$B_3 = 1/25(\omega^2 - 25)$	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.003	-0.004	-0.04	0.04	0.004	0.001

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\pi^2}{12\omega^2} - \frac{1}{\omega^2 - 1} \cos t + \frac{1}{4(\omega^2 - 4)} \cos 2t - + \dots \quad ۵$$

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad .7$$

$$+ \frac{1}{2\omega^2} - \frac{1}{1 \times 3(\omega^2 - 4)} \cos 2t - \frac{1}{3 \times 5(\omega^2 - 16)} \cos 4t - \dots$$

$$y = -\frac{K}{c} \cos t \quad .9$$

$$y = \frac{1-n^2}{D} a_n \cos nt + \frac{nc}{D} a_n \sin nt, \quad D = (1-n^2)^2 + n^2 c^2 \quad .11$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n c}{n^2 D_n} \cos nt - \frac{(-1)^n (1-n^2)}{n^2 D_n} \sin nt \right] \quad .13$$

$$D_n = (1-n^2)^2 + n^2 c^2$$

$$A_n = \frac{\lambda^2 (1-n^2)}{\pi n^2 D_n}, \quad I = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \quad .15$$

$$D_n = (1-n^2)^2 + 100n^2, \quad B_n = 0 \text{ (زوج } n), \quad A_n = 0, \quad B_n = \frac{\lambda^2}{\pi n D_n} \text{ (فرد } n)$$

بخش ۸.۱۰، صفحه ۶۷۱

$$F = \frac{\pi}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{N} \sin Nx \right] \quad (N) \text{ فرد} \quad .1$$

$$F = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi}{4} \left(\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 3x - \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{N^2} \cos Nx \right) \quad .5$$

$$E^* = \frac{\pi^2}{6} - \pi \left(\frac{\pi^2}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{144} + \dots \right)$$

بخش ۹.۱۰، صفحه ۶۷۴

$$\frac{\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{a \sin aw}{w} + \frac{\cos aw - 1}{w^2} \right] \cos xw dw \quad .9$$

$$\frac{\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2+w^2}{4+\delta w^2+w^2} xw dw \quad .11$$

$$\frac{\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left(a^2 - \frac{\pi}{w^2} \right) \sin aw + \frac{2a}{w} \cos aw \right] \frac{\cos wx}{w} dw \quad .13$$

$$f(ax) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(w) \cos axw dw \quad .15$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A\left(\frac{p}{a}\right) \cos xp \frac{dp}{a} \quad wa = p \quad \text{که در آن}$$

بخش ۱۰۱۱، صفحه ۶۸۶

$$u = f(y) \quad .23 \quad \text{با انتگرالگیری} \quad u = 3 \ln(x^2 + y^2) / \ln 4 \quad .21$$

$$u = axy + bx + cy + k \quad .27 \quad u_x = f(y), \quad u = xf(y) + g(y) \quad .25$$

$$u = ax + by + c \quad .29$$

$$f(x) = \int Adx \quad \text{که در آن} \quad u = \int p dx = f(x)e^x + g(y), \quad p = A(x)e^x, \quad p_y - p = 0 \quad .31$$

$$u = B(x)e^{-x} - \frac{1}{4}x^2 - xy + C(y) \quad .33$$

بخش ۳۰۱۱، صفحه ۶۹۱

۱. بسامد عبارت است از $C/\lambda l = \sqrt{T}/\lambda l \sqrt{\rho}$ ، می بینیم که برای کشش تابعی صعودی و در مورد ρ و l تابعی نزولی است.

$$u = \frac{2k}{a(\pi - a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2} \cos nt \sin nx \quad .5 \quad u = k \cos 2t \sin 2x \quad .3$$

$$u = \frac{\lambda k}{\pi^2} \left[(2 - \sqrt{2}) \cos t \sin x - \frac{2 + \sqrt{2}}{9} \cos 3t \sin 3x \right. \\ \left. + \frac{2 + \sqrt{2}}{75} \cos 5t \sin 5x - \dots \right] \quad .7$$

$$u = 0.12 \left(\cos t \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2t \sin 2x \right. \quad .9$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 3t \sin 3x - \dots \right)$$

$$u = e^{k(x+y)} \quad .13 \quad 27, 960/\pi^6 \approx 0.9986 \quad .11$$

$$u = ke^{x^2+y^2+c(x-y)} \quad .17 \quad u = x^k y^k \quad .15$$

$$u = (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) (A \cos ky + B \sin ky) \quad .19 \quad \text{و غیره}$$

۲۳. این از فرمول اولیه نتیجه می‌شود؛ توجه کنید که t صرفاً نقش يك پارامتر را بازی می‌کند و سری عبارت است از سری سینوس فوریه تابع ثابت ۱ ضربدر $A \sin \omega t$

۲۵. در $u(x, t)$ مسئله ۲۱ قرار دهیم $G_n(t)$ [مسئله ۲۴] و شرایط اولیه داده شده را به کار برید. در این صورت

$$G_n(0) = B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$G_n(0) = \lambda_n B_n + \frac{2A\omega(1 - \cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2 - \omega^2)} = 0.$$

بخش ۴.۱۱، صفحه ۷۰۰

$$u = x f_1(x+y) + f_2(x+y) \quad ۱۱ \quad u = f_1(x) + f_2(x+y) \quad ۹$$

$$y'^2 - 2y' + 1 = (y' - 1)^2 = 0, \quad y = x + c, \quad \Psi(x, y) = x - y, \quad v = x, \quad ۱۵$$

$$z = x - y$$

$$F_n = \sin(n\pi x/l), \quad G_n = a_n \cos(cn^2\pi^2 t/l^2) \quad ۱۷$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0 \quad ۱۹$$

بخش ۵.۱۱، صفحه ۷۰۵

۱. جوابهای معادله موج بر حسب t دوره‌ای است.

۵. چون دمای دواتها ثابت نگاهداشته شده است، دما به توزیع حالت تعادل (مستقل از زمان) $u_1(x)$ میل می‌کند وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، و $u_1 = U_1 + (U_2 - U_1)x/l$

جواب (۱) با $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ در شرایط مرزی صدق می‌کند.

$$u = \sin 0.1\pi x e^{-0.001752\pi^2 t/100} \quad ۷$$

$$u = \frac{40}{\pi^2} \left(\sin 0.1\pi x e^{-0.001752\pi^2 t} - \frac{1}{9} \sin 0.3\pi x e^{-0.001752(3\pi)^2 t} + \dots \right) \quad ۹$$

$$u = \frac{100}{\pi^2} \left(\sin 0.1\pi x e^{-0.001752\pi^2 t} + \frac{1}{3^2} \sin 0.3\pi x e^{-0.001752(3\pi)^2 t} + \dots \right) \quad ۱۱$$

$$u = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x e^{-t} - \frac{1}{4} \cos 2x e^{-4t} + \frac{1}{9} \cos 3x e^{-9t} - \dots \right) \quad ۱۵$$

$$u = \frac{\pi}{\lambda} + \left(1 - \frac{\gamma}{\pi}\right) \cos x e^{-t} - \frac{1}{\pi} \cos 2x e^{-4t} - \left(\frac{1}{3} + \frac{\gamma}{4\pi}\right) \cos 3x e^{-9t} + \dots \quad ۱۷$$

بخش ۶۰۱۱، صفحه ۷۱۱

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(a-x)/\tau}^{(b-x)/\tau} e^{-w^2} dw - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(a+x)/\tau}^{(b+x)/\tau} e^{-w^2} dw \quad ۱۳$$

بخش ۸۰۱۱، صفحه ۷۱۹

۱. C و نیز بسامد افزایش می یابند.

$$۵. \quad c\pi\sqrt{260} \quad (\text{مقادیر ویژه متناظر } F_{16,14}, F_{4,16}), \text{ و غیره.}$$

$$۹. \quad B_{mn} = \frac{-\lambda}{m n \pi^2} ((-1)^m k_n + (-1)^n l_m) \quad \text{که در آن}$$

$$l_m = \begin{cases} 0 & (m \text{ زوج}) \\ b & (m \text{ فرد}) \end{cases} \quad , \quad k_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ زوج}) \\ a & (n \text{ فرد}) \end{cases}$$

$$۱۱. \quad B_{mn} = \frac{64 a^2 b^2}{\pi^2 m^2 n^2} \quad (n, m \text{ هر دو فرد}), \quad B_{mn} = 0 \quad (m \text{ یا } n \text{ زوج})$$

$$۱۵. \quad u = \frac{0.64}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ m, n \text{ فرد}}}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2} \cos(\pi l \sqrt{m^2 + n^2}) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

$$۱۷. \quad u = k \cos \pi \sqrt{\delta} t \sin \pi x \sin 2\pi y$$

بخش ۹۰۱۱، صفحه ۷۲۸

$$۵. \quad a^2 u_{x^* x^*} + c^2 u_{y^* y^*}$$

بخش ۱۰۱۱، صفحه ۷۳۱

$$۱. \quad u_r: r = \alpha_1 / \alpha_r = 0.43565, \quad u_r: r = \alpha_1 / \alpha_r = 0.27789, \quad r = 0.63788$$

$$۱۹. \quad u = 4k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_m)}{\alpha_m J_1(\alpha_m)} \cos \alpha_m t J_0(\alpha_m r)$$

بخش ۱۱۰۱۱، صفحه ۷۳۷

$$۱. \quad a^2 u_{x^* x^*} + b^2 u_{y^* y^*} + c^2 u_{z^* z^*}$$

$$۱۹. \quad \frac{u_1 - u_0}{\ln \frac{r_1}{r_0}} \ln r + \frac{u_0 \ln r_1 - u_1 \ln r_0}{\ln \frac{r_1}{r_0}}$$

بخش ۱۲۰۱۱، صفحه ۷۴۲

$$۵. \quad u = 1$$

$$u = \frac{r}{r_0} P_1(\cos \phi) + \frac{1}{r} = r^2 \left(\cos^2 \phi - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{r} \quad \cdot ۷$$

$$\cos 2\phi = 2\cos^2 \phi - 1, \quad 2x^2 - 1 = \frac{r^2}{r_0^2} P_2(x) - \frac{1}{r}, \quad u = \frac{r^2}{r_0^2} P_2(\cos \phi) - \frac{1}{r} \quad \cdot ۹$$

$$u = 2r^2 P_2(\cos \phi) - 2r^2 P_1(\cos \phi) + r P_1(\cos \phi) - 2 \quad \cdot ۱۱$$

بخش ۱۳.۱۱، صفحه ۷۴۷

$$U(x, s) = \frac{c(s)}{x^2} + \frac{x}{s^2(s+1)}, \quad U(0, s) = 0, \quad c(s) = 0, \quad \cdot ۵$$

$$u(x, t) = x(t-1+e^{-t})$$

۹. قرار دهید $z^2/4c^2\tau = z^2$ را به عنوان متغیر جدیدی برای انتگرالگیری به کار ببرد. از $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ استفاده کنید.

بخش ۱۰.۱۲، صفحه ۷۵۶

$$-1/5 \quad \cdot ۷ \quad 7/50 - (13/25)i \quad \cdot ۵ \quad 7/29 + (26/29)i \quad \cdot ۳$$

$$(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) \quad \cdot ۱۳ \quad 2/25 \quad \cdot ۱۱ \quad 2x^2y - 2xy^2 \quad \cdot ۹$$

$$\operatorname{Re}(\bar{iz}) = -\operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Im}(\bar{iz}) = -\operatorname{Re} z \quad \cdot ۲۵$$

بخش ۲۰.۱۲، صفحه ۷۶۲

$$\sqrt{\frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}} \quad \cdot ۵ \quad 1 \quad \cdot ۳ \quad 2 \quad \cdot ۱$$

$$-\pi/2 \quad \cdot ۱۱ \quad \pi/4 \quad \cdot ۹ \quad 1 \quad \cdot ۷$$

$$\Delta \cos \pi \quad \cdot ۱۳$$

$$\frac{1}{5} \left[\cos \left(-\arctan \frac{3}{4} \right) + i \sin \left(-\arctan \frac{3}{4} \right) \right] \quad \cdot ۱۵$$

۱۹. در نظر بگیرید $c = a + ib = z_1/(z_1 + z_2)$ ، فرض کنید $z_1 + z_2 \neq 0$. از (۱۲) داریم $|a| + |a-1| \leq |c| + |c-1|$ و $|a-1| \leq |c-1|$ ، $|a| \leq |c|$ از این رو $|a| + |a-1| \leq |c| + |c-1|$ و نامساوی آخری می شود:

$$1 \leq |c| + |c-1| = \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right|.$$

با ضرب کردن در $|z_1 + z_2|$ به (۱۵) می‌رسیم

۴۹. هر دو طرف نامساوی را به توان دو برسانید.

بخش ۳۰۱۲، صفحه ۷۶۶

$$y \geq -1 \quad ۱.$$

۳. نواحی راست شاخه راست و نواحی چپ شاخه چپ هذلولی $x^2 - y^2 = 1$

۵. نوار قائم با کرانه‌های $x = \pi$ و $x = -\pi$

$$(x - \frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9} \quad ۷. \quad \text{محور } y$$

۹۹. داخل دایره به شعاع $\frac{1}{4}$ و به مرکز $(\frac{1}{4}, 0)$

۱۳. پاره خط مستقیم با نقاط انتهایی z_1, z_2

بخش ۴۰۱۲، صفحه ۷۷۰

$$11 + 13i, -27 + 3i, 41 - 23i \quad ۱.$$

$$2 - i, (4 - 3i)/5, (8 - i)/13 \quad ۳.$$

$$(1 - x)/[(1 - x)^2 + y^2], y/[(1 - x)^2 + y^2] \quad ۵.$$

$$\operatorname{Re} w \geq 0 \quad ۱۱. \quad |w| > 1 \quad ۹. \quad \operatorname{Re} w > 0 \quad ۷.$$

۱۵. خیر، زیرا $[f(0)] = 0 \rightarrow f(z)$ وقتی که $z \rightarrow 0$ حول محور y ، اما $[f(0) \neq 1] \rightarrow f(z)$ وقتی که $z \rightarrow 0$ حول محور x مثبت.

۱۷. بلی، زیرا به ازای $z \neq 0$ ، $|z| \leq |x| \leq x^2/\sqrt{x^2 + y^2} = |f(z)|$ ، و، بنابراین، $|f(z)| \rightarrow 0$ وقتی که $|z| \rightarrow 0$ $[f(0)]$

$$4z(z^2 + 1) \quad ۲۱. \quad (2 - 2z^2)/(z^2 + 1)^2 \quad ۳۳.$$

$$(6 - 8i)/25 \quad ۲۵. \quad -1 - 3i \quad ۲۷.$$

۳۹. خارج قسمت در (۴) عبارت است از $\Delta x/\Delta z$ ، که وقتی $\Delta x = 0$ برابر صفر می‌شود و اگر $\Delta y = 0$ برابر ۱ است و بنابراین وقتی $\Delta z \rightarrow 0$ حدی ندارد.

بخش ۵۰۱۲، صفحه ۷۷۶

$$a \quad ۱. \quad -1/z^2 \quad ۳. \quad 1 - 1/z^2 \quad ۵.$$

۱۱. بلی ۱۳. خیر ۱۵. بلی، جز در $z=1$
 ۱۷. خیر ۱۹. خیر ۲۳. z

$$\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad ۲۷ \quad -iz^2/2 \quad ۲۵$$

$$b = -3k, c = -3a \text{ بنابراین } u = ax^2 - 3kxy - 3axy^2 + ky^3 \quad ۲۹$$

۲۳. بگیرد $f = u + iv$ و $|f| = c$. در این صورت $u^2 + v^2 = c^2$. بامشتغیری داریم
 $uu_x + vv_x = 0, uu_y + vv_y = 0$ ، بنابه (۵)، $uu_x - vv_x = 0, uu_y - vv_y = 0$
 از این دو

$$(uu_x - vv_x)^2 + (uu_y - vv_y)^2 = (u^2 + v^2)(u_x^2 + u_y^2) = c^2(u_x^2 + u_y^2) = 0$$

هر گاه $c = 0$ ، در این صورت $u = v = 0$. هر گاه $c \neq 0$ ، در آن صورت
 $u_x^2 + u_y^2 = 0$ یعنی $u_x = u_y = 0$ و بنابه (۵)، $v_x = 0, v_y = 0$. بنابراین
 u ، ثابت، v ، ثابت

۲۵. فرض کنید $f = u + iv$. بنابه (۳)، $f' = u_x + iv_x = 0$ ، از این دو $u_x = 0$ ،
 $v_x = 0$ ، بنا به (۴) یا (۵)، $u_y = 0, v_y = 0$. از این دو ثابت u ، ثابت v ،
 $f = u + iv = \text{ثابت}$

بخش ۶۰۱۲، صفحه ۷۸۳

$$-1, (1 \pm i\sqrt{3})/2 \quad ۵ \quad 2i, -2i \quad ۳ \quad \pm(1+i)/\sqrt{2} \quad ۱$$

$$\pm(1+i)/\sqrt{2}, \pm(-1+i)/\sqrt{2} \quad ۹ \quad i, (\pm\sqrt{3}-i)/2 \quad ۷$$

$$\pm(\sqrt{3}+i)/2 \pm i, \pm(\sqrt{3}-i)/2 \quad ۱۱$$

$$3(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2} \quad ۱۵ \quad ۳, 3(-1 \pm i\sqrt{3})/2 \quad ۱۳$$

$$\pm(1+i)/\sqrt{2} \quad ۱۹ \quad ۰۰۱۷$$

$$۳+2i, ۲-i \quad ۲۵ \quad i, -1-i \quad ۲۳ \quad \pm(2+2i) \quad ۲۱$$

$$z^4 = 4 + 4i, z = \sqrt[4]{32}(\cos \beta + i \sin \beta), \beta = \pi/16, 9\pi/16 \quad ۲۷$$

$$(z^2 - z\sqrt{2} + 1)(z^2 + z\sqrt{2} + 1) \quad ۲۹$$

بخش ۷۰۱۲، صفحه ۷۸۸

$$e(\cos 1 + i \sin 1) \quad ۵ \quad (1+i)/\sqrt{2} \quad ۳$$

$$e^{x^2-y^2} \cos 2xy, e^{x^2-y^2} \sin 2xy \quad ۹ \quad e^{2x} \cos 2y, e^{2x} \sin 2y \quad ۷$$

$$\sqrt{1/e} e^{-\pi i/4} \quad ۱۳ \quad e^{\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, e^{3\pi i/4}, e^{-\pi i/4} \quad ۱۱$$

$$\ln 2 \pm (2n+1)\pi i \quad (n=0, 1, \dots) \cdot 17 \qquad \pm 2n\pi i \quad (n=0, 1, \dots) \cdot 15$$

$$-e^{xy} \sin\left(\frac{1}{y}x^y - \frac{1}{y}y^y\right) \cdot 23 \qquad \text{Re } z > 0 \cdot 21 \qquad z \text{ ہمہ مقادیر} \cdot 19$$

$$\arg z = \pi \text{ کہ } e^z \rightarrow 0 \text{ حلی ندارد، } e^z \rightarrow \infty \text{ وقتی کہ } \arg z = 0 \cdot 25$$

بخش ۸۰۱۲، صفحه ۷۹۱

$$\sqrt{\frac{\sin^y x + \sinh^y y}{\cos^y x + \sinh^y y}} \cdot 9 \qquad \sqrt{\cos^y x + \sinh^y y} \cdot 7$$

$$17175i \cdot 13 \quad \sin x \cos x / (\sin^y x + \sinh^y y) \cdot 11$$

$$17960 + 37166i \cdot 17 \qquad 27033 - 37052i \cdot 15$$

$$\pm (2n+1)\pi i / 2, n=0, 1, \dots \cdot 21 \qquad \pm 2n\pi \pm 2729i \cdot 19$$

$$\pm (\pi/2)i \pm 2n\pi i, n=0, 1, \dots \cdot 23$$

بخش ۹۰۱۲، صفحه ۷۹۵

$$i\left(\frac{1}{y}\pi \pm 2n\pi\right), n=0, 1, \dots \cdot 7 \qquad \pm 2n\pi i, n=0, 1, \dots \cdot 5$$

$$1 + \left(\frac{1}{y}\pi \pm 2n\pi\right)i, n=0, 1, \dots \cdot 9$$

$$-i \cdot 13 \qquad (1 \pm 2n\pi)i, n=0, 1, \dots \cdot 11$$

$$0693 - 17571i \cdot 17 \qquad -e \cdot 15$$

$$1+i \cdot 21 \qquad 17946 + 37142i \cdot 19$$

$$\sqrt{y}e^{\pi/y} \left[\cos\left(\frac{1}{y}\pi - \ln \sqrt{y}\right) + i \sin\left(\frac{1}{y}\pi - \ln \sqrt{y}\right) \right] \cdot 23$$

$$37350 + 17189i \cdot 27 \qquad 27[\cos(\ln 3) - i \sin(\ln 3)] \cdot 25$$

$$\cosh w = \frac{1}{y}(e^w + e^{-w}) = z, (e^w)^y - 2ze^w + 1 = 0, e^w = z + \sqrt{z^2 - 1} \cdot 31$$

$$\sin(\pi - w) = \sin w \text{ و } \sin(w \pm 2n\pi) = \sin w \text{ نتیجه} \cdot 35$$

بخش ۱۰۱۳، صفحه ۸۰۲

$$v = -u + 2x - 2, v = -u - 2, -u, -u + 2, -u + 4 \cdot 1$$

$$|w - 2i| \leq 2\sqrt{2} \quad ۳.$$

$$۵. \quad v=0 \text{ و } u \leq 0 \text{ و } v=2\sqrt{1-u}, u \leq 1 \text{ و غیره.}$$

$$۷. \quad u = x^2 - y^2, v = 2xy \text{ وقتی که } y = x + 1 \text{ داریم } u = -2x - 1,$$

$$v = 2x(x+1) \text{ از این دو } x = -\frac{1}{2}(u+1) \text{ و } v = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$$

$$۹. \quad u = -1 \quad |w| \leq 16.۱۱$$

$$۱۳. \quad \text{ناحیه بین سهمی های } v^2 = 4(1-u) \text{ و } v^2 = 16(4-u)$$

$$۱۵. \quad -\pi/2 < \arg w < \pi \quad u = -\frac{1}{2}.۱۷$$

$$۱۹. \quad v = -\frac{1}{2} \quad \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.۲۱$$

$$۲۳. \quad \text{تصویر با دوایر } \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \text{ و } \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \text{ کراندار است.}$$

$$۲۷. \quad 0 \leq \arg w \leq \pi/2, \pi/2 \leq \arg w \leq 3\pi/2, -\pi/2 \leq \arg w \leq -\pi/2,$$

$$0 \leq \arg w \leq \pi/2, \pi/2 \leq \arg w \leq \pi, \pi \leq \arg w \leq 3\pi/2, \\ -\pi/2 \leq \arg w \leq 0, 0 \leq \arg w \leq 3\pi/2$$

$$۲۹. \quad w = z + 2 + i$$

بخش ۲۰۱۳، صفحه ۸۱۰

۳. خیر، اندازه زاویه را حفظ می کند، ولی جهت زاویه را عوض می کند

$$۵. \quad z(t) = t + i/t \quad ۷. \quad z(t) = \cosh t + i \sinh t$$

$$۹. \quad z(t) = 1 + 2\cos t - 2i + 2i \sin t \quad ۱۱. \quad z(t) = (2n+1)\pi/2, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$۱۳. \quad z = 0 \quad ۱۵. \quad z = -a/2$$

بخش ۳۰۱۳، صفحه ۸۱۶

$$۱. \quad z = 0 \quad ۳. \quad z = 0, 1$$

$$۵. \quad z = 0, \pm 1 \quad ۷. \quad z = \pm i$$

$$۹. \quad z = \pm i \quad ۱۱. \quad w = -1/z$$

۱۵. کلیه انتقالها

$$w = (az + b)/(a - bz) \quad ۱۳$$

بخش ۴۰۱۳، صفحه ۸۱۹

$$w_1 = iz, w_2 = w_1 + 4, w_3 = 1/w_2, w_4 = 5iw_3, w = w_4 - i \quad ۱$$

$$w = (4z - i)/(-iz - 4) \quad ۷ \quad w = -2i \frac{1}{z+i} + 1 \quad ۵$$

$$w = 1/(z+1) \quad ۱۱ \quad w = 1/z \quad ۹$$

$$w = (z+1)/(z-i) \quad ۱۵ \quad w = (z-i)/(z+i) \quad ۱۳$$

$$w = az/(cz+d) \quad ۱۹ \quad w = (z+3)/(2z-1) \quad ۱۷$$

۲۱. بجز موردی که عامل مشترك مختلط داشته باشند باید چهار ضریب حقیقی باشند.

$$w = (z^2 - i)/(-iz^2 + 1) \quad ۲۵ \quad w = -(z^2 + i)/(iz^2 + 1) \quad ۲۳$$

بخش ۵۰۱۳، صفحه ۸۲۵

$$1 < |w| < e, 0 < \arg w < 1 \quad ۳ \quad e^{-1} < |w| < e, |\arg w| < \pi/2 \quad ۱$$

$$e^{-2} \leq |w| \leq e^2, -\pi \leq \arg w \leq -\pi/2 \quad ۵$$

۷. $t = z^2$ ناحیه مورد نظر را بر روی نوار $0 < \operatorname{Im} t < \pi$ و $w = e^t$ این نوار را بر روی نیم صفحه فوقانی می نگارد. جواب $w = e^{z^2}$

۹. ناحیه واقع در نیم صفحه فوقانی که توسط بیضیهایی

$$\frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{u^2}{\cosh^2 2} + \frac{v^2}{\sinh^2 2} = 1$$

محدود شده است.

۱۱. طوق بیضی شکلی که توسط بیضیهای مذکور در مسئله ۹ محدود شده و توسط ددر امتداد محور موهومی مثبت بریده شده است.

$$\cosh z = \cos(iz) = \sin\left(iz + \frac{1}{2}\pi\right) \quad ۱۳$$

$$T = T_0 + \frac{1}{\pi}(T_1 - T_0) \arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2} = T_0 + \frac{2}{\pi}(T_1 - T_0) \arctan \frac{y}{x} \quad ۱۵$$

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2 - 1} \quad ۱۹ \quad T = \frac{100}{\pi/4} \arctan \frac{y}{x} \quad ۱۷$$

بخش ۶.۱۳، صفحه ۸۳۴

۱. w طول دایره یکه $|w|=1$ را طی می کند.

۳. به ترتیب ورقه های ۴ و ۵، نقطه شاخه ای در $z=0$

۵. داخل بیضی $1 = \frac{u^2}{(5/2)^2} + \frac{v^2}{(3/2)^2}$. داخل همان بیضی در ورقه دیگر، حلقه محدود شده توسط بیضی فوق و بیضی

$$\frac{u^2}{(10/3)^2} + \frac{v^2}{(8/3)^2} = 1$$

۹. ۲ ورقه، نقطه شاخه ای در $z=0$

۱۱. سه ورقه، نقطه شاخه ای مرتبه دوم در $z=i$

۱۳. $\pm i$ ، ۲ ورقه a, b ، ۲ ورقه

۱۷. a ، تعداد نامتناهی ورقه

۱۹. ندارد، ورقه، که همبند نیستند؛ در واقع، $\sqrt{e^z}$ دو تابع $e^{z/2}$ ، $e^{z/2}$ را نمایش می دهد.

بخش ۱۰.۱۴، صفحه ۸۴۲

۱. $z=(1+2i)t$ ، $0 \leq t \leq 1$

۳. $z=1+i+(2-5i)t$ ، $0 \leq t \leq 1$

۵. $z=-2+i+it$ ، $0 \leq t \leq 3$ ۷. $z=1-2i+3e^{it}$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$

۹. $z=3\cos t + i \sin t$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$

۱۱. $z=t+i/t$ ، $1 \leq t \leq 4$ ۱۳. پارکس مستقیم از 1 تا $3-i$

۱۵. قسمت فوقانی دایره $x^2+(y-3)^2=9$

۱۷. $y=3x^2$ از $(-1, 3)$ تا $(2, 12)$

۱۹. $-8i$ ۲۱. $-115-26i$ ۲۳. 0

۲۵. $1+2i$ ۲۷. $(\text{الف}) 2\pi i$ ، $(\text{ب}) -2\pi i$

۲۹. i (الف)، $2i$ (ب)، $2i$ (ج)

بخش ۲۰۱۴، صفحه ۸۴۹

$$-1+ie \quad .9 \quad \frac{4}{3} \quad .7 \quad 2b(1+i) \quad .5$$

$$1 - \cosh 1 \quad .13 \quad i(\sinh 2\pi - \sinh \pi) \quad .11$$

$$5.19 \quad 5e^x \quad .17 \quad i \sin 1 \quad .15$$

بخش ۳۰۱۴، صفحه ۸۵۲

۳. هرگاه $z=0$ واقع در خارج C باشد.

$$0, \infty \quad .9 \quad -\pi, \text{خیر} \quad .7 \quad 0, \infty \quad .5$$

$$0, 2\pi i \quad .17 \quad \text{خیر} \quad .11 \quad (الف) \quad 2\pi i, (ب) \quad 2\pi i, \text{خیر} \quad .15$$

$$0, -2\pi i \quad .23 \quad 0, 2\pi i \quad .19 \quad 0, 2\pi i \quad .21$$

$$0.25$$

بخش ۴۰۱۴، صفحه ۸۶۱

$$(e^{-1}-1)/2 \quad .7 \quad -2e \quad .5 \quad (10-2i)/3 \quad .3 \quad 2+2i \quad .1$$

$$\left(\pi - \frac{1}{y} \sinh 2\pi\right)i \quad .13 \quad -\frac{1}{y} \sin \pi^2 \quad .11 \quad i \sinh \pi \quad .9$$

$$0.19 \quad \cos 2 - 1 \quad .17 \quad i \sin 3 \quad .15$$

بخش ۵۰۱۴، صفحه ۸۶۴

$$2\pi i \quad .9 \quad \pi/2 \quad .7 \quad \pi i/2 \quad .5 \quad 0 \quad .3 \quad \pi \quad .1$$

$$2\pi i \quad .19 \quad 0 \quad .17 \quad 2\pi i \quad .15 \quad 0 \quad .13 \quad \pi i/2 \quad .11$$

بخش ۶۰۱۴، صفحه ۸۶۸

$$\pi i \quad .7 \quad \pi i/8 \quad .5 \quad 3\pi/8 \quad .3 \quad \pi i/2 \quad .1$$

$$2\pi i \quad .11 \quad \pi(\pi+4i)(1-i)/32\sqrt{2} \quad .9$$

$$2\pi i \quad .15 \quad (-1)^n 2\pi i / (2n)! \quad .13$$

بخش ۱۰۱۵، صفحه ۸۷۴

$$\dots, \frac{1}{64}, -i/27, -\frac{1}{8}, i \quad .3 \quad \dots, \frac{4}{7}, \frac{3}{6}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4} \quad .1$$

$$5. \dots, \frac{-9i}{3+i} = \frac{-9-27i}{10}, \frac{-4}{2+i} = \frac{-8+4i}{5}, \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{2}$$

$$7. \dots, -i/8, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, i/2, 1$$

$$9. \text{ کراندار، همگرا، حد } 0$$

$$11. \text{ غیر کراندار، واگرا}$$

$$13. \text{ کراندار، واگرا}$$

$$\text{بخش ۳۰۱۵، صفحه ۸۸۲}$$

$$1. \text{ خیر، خیر، موجود نیست}$$

$$3. \text{ بلی، خیر، } 1, -1$$

$$5. \text{ بلی، خیر، } i, -1, -i, 1$$

$$7. \text{ خیر، خیر، موجود نیست}$$

$$9. \text{ بلی، بلی (حد ۰)}$$

$$11. \text{ بلی، بلی، (حد صفر)}$$

$$13. \text{ بلی، خیر، } 1, 2 \text{ و } 3$$

$$15. \text{ بلی، خیر، } 1, i, -1, -i$$

$$\text{بخش ۴۰۱۵، صفحه ۸۸۷}$$

$$1. \text{ کراندار، همگرا، حد } 0, \text{ یکنوا}$$

$$3. \text{ غیر کراندار، واگرا، یکنوا}$$

$$5. \text{ کراندار، واگرا، غیر یکنوا، } 1, 2$$

$$7. \text{ کراندار، همگرا، حد صفر، غیر یکنوا}$$

$$9. \text{ کراندار، همگرا، حد صفر، وقتی که } \frac{1}{2} \leq c \leq 1$$

$$11. \text{ همگرا}$$

$$13. \text{ واگرا (بنا به قضیه ۳، بخش ۲۰۱۵)}$$

$$15. 6 \text{ جمله}$$

$$17. 5 \text{ جمله}$$

$$19. 2 \text{ جمله}$$

$$\text{بخش ۵۰۱۵، صفحه ۸۹۱}$$

$$1. \text{ واگرا}$$

$$3. \text{ واگرا (با سری همساز مقایسه کنید)}$$

$$5. \text{ همگرا}$$

$$7. \text{ واگرا}$$

$$9. \text{ همگرا}$$

$$11. \text{ همگرا}$$

$$13. \text{ واگرا}$$

$$15. \text{ همگرا}$$

$$17. \text{ همگرا}$$

$$19. 4, 8, 16, 32$$

$$\text{بخش ۱۰۱۶، صفحه ۹۰۷}$$

$$3. 1$$

$$5. 3$$

$$7. \infty$$

$$9. \infty$$

$$11. \frac{1}{4}$$

$$13. \infty$$

$$15. \frac{1}{6}$$

$$17. \frac{1}{9}$$

$$\text{بخش ۲۰۱۶، صفحه ۹۱۷}$$

$$5. 5$$

$$7. \frac{1}{4}$$

$$9. 1$$

بخش ٢٠١٦، صفحة ٩٢٨

$$1 - \frac{(yz)^2}{2!} + \frac{(yz)^4}{4!} - + \dots, R = \infty \quad .5$$

$$1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + - \dots, R = \infty \quad .7$$

$$-1 - (z - \pi i) - \frac{1}{2!}(z - \pi i)^2 - \frac{1}{3!}(z - \pi i)^3 - \dots, R = \infty \quad .9$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(z + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2!} \left(z + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(z + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^3 + \dots \right], R = \infty \quad .11$$

$$-1 - (z + 1) - (z + 1)^2 - (z + 1)^3 - \dots, R = 1 \quad .13$$

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1 + \cos 2z) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2^2}{2!} z^2 + \frac{2^4}{4!} z^4 - + \dots \right], R = \infty \quad .15$$

$$z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{15} z^5 + \dots, R = \frac{\pi}{2} \quad .17$$

$$1 - \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{45} z^5 - \frac{2}{945} z^7 - \dots, R = \pi \quad .19$$

$$\frac{z}{2!1} - \frac{z^3}{4!3} + \frac{z^5}{6!5} - + \dots, R = \infty \quad .21$$

$$z - \frac{z^3}{3!3} + \frac{z^5}{5!5} - \frac{z^7}{7!7} + - \dots, R = \infty \quad .23$$

$$z - \frac{z^5}{2!5} + \frac{z^9}{4!9} - \frac{z^{13}}{6!13} + - \dots, R = \infty \quad .25$$

بخش ٥٠١٦، صفحة ٩٣١

$$1 - z^2 + z^4 - z^{12} + - \dots, |z| < 1 \quad .1$$

$$1 - z^2 + z^6 - + \dots, |z| < 1 \quad .3$$

$$1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + - \dots, |z| < 1 \quad .5$$

$$1 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{12}}{6!} + - \dots \quad .7$$

$$1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^{12}}{3!} + \dots \quad ۹$$

$$z^2 + z^4 + \frac{z^6}{3} + \dots \quad ۱۱$$

$$e \left[1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{13}{6} z^3 + \dots \right], |z| < ۱ \quad ۱۳$$

$$e \left[1 + z + z^2 + \frac{5}{6} z^3 + \dots \right] \quad ۱۵$$

$$\frac{1}{1-3i} + \frac{3}{(1-3i)^2} [z - (1+i)] + \frac{3^2}{(1-3i)^3} [z - (1+i)]^2 + \dots \quad ۱۷$$

$$|z - (1+i)| < \frac{1}{3} \sqrt{10}$$

$$\frac{i}{r} \left(1 - (1+i)(z+i) + \frac{3}{r} (1+i)^2 (z+i)^2 - \frac{(1+i)^3}{r} (z+i)^3 + \dots \right) \quad ۱۹$$

$$|z+i| < \sqrt{r}$$

$$1 + 2\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots, \left|z - \frac{\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{4} \quad ۲۱$$

بخش ۶.۱۶، صفحه ۹۳۶

۱. این موضوع از قضیه ۱ نتیجه می‌شود.

۳. این موضوع از قضیه ۱ به علت آنکه شعاع همگرایی ۴ است نتیجه می‌شود.

$$\sum 2^{-n}, |\sin n|z| \leq ۱ \quad ۵$$

$$\sum (1/n^2) \text{ و } |\cos^n|z| \leq ۱ \quad ۷$$

۱۱. همگرایی از قضیه ۱، بخش ۵.۱۵ نتیجه می‌شود. فرض می‌کنیم $R_n(z)$ و R_n^* به

ترتیب باقیمانده‌های (۱) و (۵) باشند. چون (۵) همگرا است، به‌ازای $\varepsilon > 0$

مفروض می‌توان $N(\varepsilon)$ ی یافت به‌طوری که به‌ازای هر $n > N(z)$ داریم $R_n^*(\varepsilon)$.

نظر به اینکه به‌ازای هر z واقع در G ، $|f_n(z)| \leq M_n$ ، داریم $|R_n(z)| \leq R_n^*$

و بنابراین به‌ازای هر $n > N(\varepsilon)$ و هر z واقع در G ، $|R_n(z)| < \varepsilon$. این

موضوع ثابت می‌کند که همگرایی (۱) در ناحیه G یکنواخت است.

$$f_n = s_n - s_{n-1} = x/(nx+1) - [(n-1)x+1] \quad ۱۳$$

۱۷. مجموع $s = \lim s_n = \lim x^n$ در $x=1$ ناپیوسته است. از قضیه ۲ استفاده کنید.

بخش ۷۰۱۶، صفحه ۹۴۶

$$1. \quad \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{24} - + \dots, \quad R=\infty$$

$$3. \quad \frac{1}{z^2} - 2 + \frac{2}{3}z^2 - \frac{4}{45}z^4 + - \dots, \quad R=\infty$$

$$5. \quad \frac{1}{z^2} + 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots, \quad R=1$$

$$7. \quad \frac{3}{z^2} + \frac{9}{2} + \frac{81}{20}z^2 + \dots, \quad R=\infty$$

$$9. \quad \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + 3 - 4z + - \dots, \quad R=1$$

۱۱. خیر، زیرا $z=0$ يك نقطه حدى نقاط $z_n = 2/(2n+1)\pi$ است كه در آن نقطه $\tan(1/z)$ تحليلی نیست.

$$13. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} (z-1)^n, \quad |z-1| < 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} \frac{1}{(z-1)^{n+4}}, \quad |z-1| > 1$$

$$15. \quad - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} (z-i)^{n-1}, \quad 0 < |z-i| < 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+2}} |z-i| > 2$$

$$17. \quad (1-4z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}, \quad |z| < 1, \quad \left(\frac{4}{z^2} - \frac{1}{z^4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{4n}}, \quad |z| > 1$$

$$19. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (z-1)^{n-2}, \quad |z-1| > 0$$

بخش ۸۰۱۶، صفحه ۹۵۳

۱. خیر ۳. خیر ۵. خیر

۷. خیر، خیر ۹. خیر، خیر ۲۱. ± 1 (ساده)

۲۳. $-i$ (مرتبه سوم) ۲۵. $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (مرتبه سوم)

$$۰.۲۷ \pi i / ۲, (\pm ۱, \pm ۲, \dots, (2n+1) \pi i / ۲) \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ (مرتبه دوم)}$$

$$۰.۲۹ \pm 2n\pi i \quad n=0, 1, \dots \text{ (ساده)}$$

$$۰.۳۱ \text{ بنا به فرض, } f(z) = (z-a)^n g(z) \text{ که در آن } g(a) \neq 0 \text{ در نتیجه,} \\ f(z)^2 = (z-a)^{2n} g(z)^2 \text{, و غیره.}$$

$$۰.۳۳ -a \text{ (قطب مرتبه سوم)}$$

$$۰.۳۵ \infty, 0 \text{ (تکینهای ویژه)}$$

$$۰.۳۷ 0 \text{ (قطب مرتبه پنجم), } \infty \text{ (تکین ویژه)}$$

$$۰.۳۹ 0 \text{ (تکین ویژه)}$$

بخش ۱۰۱۷، صفحه ۹۶۳

$$۰.۱ \quad ۰.۳$$

$$۰.۵ -\frac{1}{4} \text{ (در } z=-1), \frac{1}{4} \text{ (در } z=1)$$

$$۰.۷ -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \text{ (در } z=1, -1, i, -i)$$

$$۰.۹ -1 \text{ (در } z=\pm 2n\pi i)$$

$$۰.۱۱ 1 \text{ (در } z=\pm n\pi)$$

$$۰.۱۳ -3/4, 3/4, 3i/4, -3i/4 \text{ (در } z=1, i, -1, -i)$$

$$۰.۱۵ -2 \text{ (در } z=0) \quad ۱/۱۷.۱۷ \text{ (در } z=-1)$$

$$۰.۱۹ 2\pi i \quad ۰.۲۱ 2\pi i$$

$$۰.۲۳ 2\pi i \quad ۰.۲۵ 0$$

$$۰.۲۷ -\pi i \quad ۰.۲۹ -2\pi i$$

بخش ۲۰۱۷، صفحه ۹۶۸

$$۰.۱ 2\pi i \quad ۰.۳ 0 \quad ۰.۵ 3\pi i \quad ۰.۷ 2\pi i / 2$$

$$۰.۹ -\pi i \quad ۰.۱۱ 0 \quad ۰.۱۳ 2\pi i / 9 \quad ۰.۱۵ -16\pi i / 9$$

$$۰.۱۷ -4i \quad ۰.۱۹ -4i \quad ۰.۲۱ -2\pi i / 5 \quad ۰.۲۳ 0$$

$$- \pi \sin \frac{1}{\gamma} \cdot ۲۷ \quad - ۲\pi/۳ \cdot ۲۵$$

بخش ۳۰۱۷، صفحه ۹۷۱

$$\frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}} \cdot ۳ \quad \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot ۱$$

$$\cdot ۷ \quad \frac{\pi}{2} \cdot ۵$$

$$\frac{8\pi}{3} \cdot ۹$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \cdot ۱۱$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{26 - 10 \cos 2\theta} d\theta = -\frac{1}{20i} \int_C \frac{(z^2+1)^2}{z \left(z^2 - \frac{1}{5} \right) (z^2 - 5)} dz = \frac{\pi}{20}$$

$$2\pi/3 \cdot ۱۵ \quad \pi \cdot ۱۳$$

$$\cdot ۱۹ \quad 3\pi/8 \cdot ۱۷$$

$$\pi/2 \cdot ۲۳ \quad \pi/12 \cdot ۲۱$$

۲۵. انتگرالها برای صفر هستند زیرا توابع انتگرالگیری فرد هستند.

بخش ۴۰۱۷، صفحه ۹۷۶

$$\pi e^{-3}/2 \cdot ۵ \quad \pi/e \cdot ۳$$

$$\pi e^{-1/\sqrt{2}} [\sin(1/\sqrt{2}) + \cos(1/\sqrt{2})] / \sqrt{2} \cdot ۷$$

بخش ۱۰۱۸، صفحه ۹۸۴

$$u(r) = 100 \ln r / \ln 5 = 62.13 \ln r \cdot ۱$$

$$u(r) = 100 (\ln r + \ln 5) / \ln 10 \cdot ۳$$

$$(x - 1/2c)^2 + y^2 = 1/4c^2 \cdot ۵$$

$$u = c \operatorname{Re} \ln(z^2 - a^2) = c \ln |z^2 - a^2| \cdot ۷$$

$$z = x + iy = \cosh(u + iv) = \cosh u \cos v + i \sinh u \sin v \cdot ۹$$

هستند. $x^2/\cosh^2 u + y^2/\sinh^2 u = 1$ ؛ خطوط هم پتانسیل ثابت u بیضی‌های هم‌کانون

بخش ۲۰۱۸، صفحه ۹۸۸

$$V = V_1 = K, \text{ ثابت } y, K, \text{ ثابت } V \quad ۱.$$

$$V = -i, \text{ جریان موازی در جهت } y \text{ منفی}, \quad ۵.$$

$$V = 1 - i, y = -x \text{ جریان موازی در جهت } x, \quad ۷.$$

$$y = -x \text{ و } y = x \text{ روی } V_1 = 0, V = -6xy + 3i(y^2 - x^2) \quad ۹.$$

$$F(z) = -[\ln(z-a)]/2\pi \quad ۱۳.$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a} \text{ خطوط جریان دوا بر هستند.} \quad ۱۵.$$

$$z = -1 \text{ و } z = 1 \text{ در } V = 1 - \bar{z}^2 = 0 \quad ۱۹.$$

بخش ۳۰۱۸، صفحه ۹۹۷

۳. از یکنو بودن $|e^x| = e^x$ در x استفاده کنید.

بخش ۴۰۱۸، صفحه ۱۰۰۱

$$u = r^3 \sin 3\theta \quad ۵. \quad u = r \sin \theta \quad ۳.$$

$$u = 3r \sin \theta - r^3 \sin 3\theta \quad ۷.$$

$$u = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(r \sin \theta + \frac{r^3}{3} \sin 3\theta + \frac{r^5}{5} \sin 5\theta + \dots \right) \quad ۹.$$

$$u = \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) r \sin \theta - \frac{r^3}{2} \sin 3\theta + \dots \quad ۱۱.$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi} \right) r^3 \sin 3\theta - \frac{r^5}{4} \sin 5\theta + \dots$$

بخش ۱۰۱۹، صفحه ۱۰۱۰

$$۰.۳۸۱۸ \times ۱۰^{۵۲} \quad ۱.$$

$$a_1 = 1, a_1^* = ۱.۱, |d^* - d| = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \leq \beta_1 + \beta_2 = \beta \quad ۳.$$

$$|\varepsilon| = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \text{ می‌دهد } a_2^* = ۰.۹, a_2 = 1$$

$$\frac{a_1^*}{a_2^*} = \frac{a_1 + \varepsilon_1}{a_2 + \varepsilon_2} = \frac{a_1 + \varepsilon_1}{a_2} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{a_2} + \frac{\varepsilon_2^2}{a_2^2} - \dots \right) \approx \frac{a_1}{a_2} + \frac{\varepsilon_1}{a_2} - \frac{\varepsilon_2}{a_2} \cdot \frac{a_1}{a_2}, \quad ۵.$$

$$\left(\frac{a_1^*}{a_2^*} - \frac{a_1}{a_2}\right) / \frac{a_1}{a_2} \approx \frac{\varepsilon_1}{a_1} - \frac{\varepsilon_2}{a_2}$$

۷. $|\varepsilon_r(x_1)| \leq 0.0005/39995$ و $x_2 = 2/x_1$ بنا بر مسئله ۵ چون $|\varepsilon_r(x_2)| = |\varepsilon_r(x_1)|$ چون x_1 گرد شده به ۴۵ است. از این رو

$$|\varepsilon(x_2)| = |\varepsilon_r(x_2) \cdot x_2| = |\varepsilon_r(x_1) \cdot x_2| \leq (0.0005/39995) \times 0.0005006 < 0.000001$$

۱۱. گرد کردن يك ۵ در مکان آخر می تواند موجب خطاهایی شود زیرا رقمهای دیگری داده نشده اند. این خطاها هرگاه جدول با پنج مکان مورد استفاده قرار گیرد بیشتر می شود.

$$2776175.13 \leq s \leq 2776065$$

بخش ۲۰۱۹، صفحه ۱۰۱۶

$$1. \quad x_1 = 199 \quad (\text{درست } 199)$$

۳. مماس بر منحنی $f(x)$ در $x=1$ محور x را در $x=199$ قطع می کند. به عنوان مثال x_0 را برابر ۱۲۲ انتخاب کنید.

$$0.5557 \quad 0.7 \quad -13, -14$$

$$\dots, x_3 = -0.200323, x_2 = -0.20032, x_1 = -0.2011$$

۱۳. همگرا به ریشه نزدیک به ۰.۲ -

$$0.0000000, 0.0000043, 0.0013932, 0.0236068 \quad 15. \quad \text{خطاها}$$

$$0.17 \quad \alpha < 1, x \geq \sqrt{2/(1+2\alpha)}$$

$$x_{n+1} = (1-k^{-1})x_n + k^{-1}cx_n^{1-k}, f(x) = x^k - c \quad 19.$$

$$0.21, 0.260, 17260$$

۲۵. این موضوع از قضیه مقدار میانی حساب دیفرانسیل و انتگرال حاصل می شود.

بخش ۴۰۱۹، صفحه ۱۰۳۳

$$0.25753 \quad 3.$$

$$0.25827 \quad 5. \quad (\text{الف}) \quad 0.25827, (\text{ب}) \quad 0.25827$$

$$f(x) \approx 0.566106 + 0.496098x - 0.036022x^2 \quad 9.$$

$$36, 8x^2 - 15x + 9 \quad 11.$$

۱۳. کمتر از مقدار واقعی (خطا ۱ واحد رقم آخر).

بخش ۵.۱۹، صفحه ۱۰۴۱

۷. این موضوع از قضیه ۱ حاصل می‌شود.

$$g(x) = -2x^2/\pi^2 + 3x/\pi \quad ۹.$$

بخش ۶.۱۹، صفحه ۱۰۴۷

$$\varepsilon = -۰.۰۰۰۵, ۰.۰۲۴۵ \quad ۱۱.$$

$$M_f = ۲۲, M_f^* = ۰.۰۷۵, \ln 2 \approx ۰.۶۹۳۲۵ (۵D \text{ مقدار واقعی}) \quad ۱۳.$$

$$۰.۶۹۲۷۲ < \ln 2 < ۰.۶۹۳۲۲ \text{ یا } ۰.۰۰۰۰۰۱۶ < \varepsilon_i < ۰.۰۰۰۰۵۳$$

$$۰.۹۴۶۶ (۰.۹۴۶۱ \text{ مقدار واقعی } 4D) \quad ۱۵.$$

$$۰.۹۴۵۸ \quad ۱۷.$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{4} \quad ۱۹. \text{ قاعده دوزنقه}$$

$$f'(۰.۰۲) = ۰.۰۲۵۶ \text{ مقدار واقعی: } ۰.۰۲۵۶, ۰.۰۱۷۶, ۰.۰۳۲۰, ۰.۰۰۸۰ \quad ۲۳.$$

$$۰.۰۵۲, ۰.۰۵۸۰, ۰.۰۳۰۴, ۰.۰۲۵۶ \text{ (مقدار واقعی: } ۰.۰۲۵۶) \quad ۲۵.$$

بخش ۷.۱۹، صفحه ۱۰۵۸

$$y = e^{z^2} \int_0^z e^{-t^2} dt \text{ جواب واقع } ۰.۳, ۰.۱, ۰.۰۲۰۲, ۰.۰۳۱۰۰۸, ۰.۰۴۲۸۶۹ \text{ و غیره.} \quad ۳.$$

$$y = \tan x \quad ۱۱.$$

بخش ۹.۱۹، صفحه ۱۰۷۶

$$x = -۲, y = ۳ \quad ۳.$$

$$y = ۲, x = ۱ \quad ۱.$$

$$z = ۱, x = y + ۱ \quad ۷.$$

$$z = ۲x, y = ۳x \quad ۵.$$

$$z = ۳y + ۱, x = ۲y, w = ۰ \quad ۱۱.$$

$$z = ۰, x = ۳y + ۲ \quad ۹.$$

بخش ۱۰.۱۹، صفحه ۱۰۸۲

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰.۰۲۵ & ۰.۰۲۵ & ۰ \\ ۰ & ۰.۰۰۶۲۵ & ۰.۰۰۶۲۵ & ۰.۰۲۵ \\ ۰ & ۰.۰۰۶۲۵ & ۰.۰۰۶۲۵ & ۰.۰۲۵ \\ ۰ & ۰.۰۰۳۱۲۵ & ۰.۰۰۳۱۲۵ & ۰.۰۱۲۵ \end{pmatrix} \quad ۳.$$

۵. مقدار واقعی ۲، ۳، ۲ ۷. مقدار واقعی ۲، ۲، ۲

$$9. \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx (-0.0748), \lambda^2 + \lambda/3 + \frac{2}{3} = 0$$

هر سه مقدار ویژه است، و λ_1 و λ_2 مزدوج هستند:
 زیرا جمله ثابت $\frac{2}{3}$ برابر ۱- ضرب در $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\frac{2}{3}/0.0748} = 0.94$

$$11. X_{(1)} = \begin{pmatrix} 0.49 & -0.1 & 0.51 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.51 & 0.3 & -0.47 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.5 & 0.3 & -0.5 \end{pmatrix}$$

بخش ۱۱.۱۹، صفحه ۱۰۸۸

۱. -0.0002

$$5. BA = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ -10 & -9 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

بخش ۱۲.۱۹، صفحه ۱۰۹۲

$$3. y = -80.5 + 12.1x \quad 1. y = -10.8 + 0.84x$$

$$5. y = 2.44 + 0.77x$$

$$7. y = 0.127 + 8.822x \text{ [متر بر ثانیه]} \text{ سرعت } 8.822$$

$$\sum x_i^4 = 1569, \sum x_i^2 = 289, \sum x_i^3 = 57, \sum x_i = 13, n = 5. ۹$$

$$\sum x_i^2 y_i = 161, \sum x_i y_i = 29, \sum y_i = 9$$

$$y = 22825159 - 22049040x + 0.3777398x^2$$

$$C = (c_{jk}), c_{jk} = x_j^k, \mathbf{b}^T = (b_0 \dots b_m). ۱۳$$

$$a^* = \ln b_0, y^* = \ln y \text{ که در آن } y^* = a^* + bx. ۱۵$$

بخش ۱۳.۱۹، صفحه ۱۰۹۷

$$۱/\sqrt{2}, ۱/\sqrt{2} \text{ شعاعها } ۳, ۳, -۳, ۳. ۱$$

$$\sqrt{50}. ۷ \text{ شعاعها } ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱. ۵$$

$$\sqrt{247}. ۱۱ \quad \sqrt{112}. ۹$$

$$۱۷. \text{ قوسهای مستدیر} \quad \lambda = 5, 4 \leq \lambda \leq 6. ۱۵$$

بخش ۱۴.۱۹، صفحه ۱۱۰۳

$$q = 499172, m_7 = 31736, m_1 = 6412, m_0 = 1304. ۱$$

$$|e| \leq \sqrt{2433374 - 2431788} \approx 0.398$$

$$|e| \leq \sqrt{5}, q = 3. ۳$$

$$|e| \leq \frac{\sqrt{101}}{9} \approx 0.12, q = \frac{14}{9} \cdot |e| \leq \frac{\sqrt{11}}{9} \approx 0.83, q = \frac{5}{9}. ۷$$

$$۹. A \text{ دارای مقدار ویژه } ۱ \text{ یا } -۱ \text{ (یا هر دو) است.}$$

$$q = m_1/m_0 = -437787/10943 = -40198. ۱۵$$

واقعی $\lambda_3 \approx -422 + 439 = 0.7 (\lambda_3 = 0)$ در حالت کلی «معنی می‌دهد» می‌دهد مشروط بر آنکه ما شانس x_0 عمود بر یک بردار ویژه (مجهول) متناظر با λ_3 انتخاب نکنیم.

بخش ۱۵.۱۹، صفحه ۱۱۰۷

$$۱. (۱) \text{ را به کار برید.}$$

$$\text{ci}(x) \sim \sin x \left(-\frac{1}{x} + \frac{2!}{x^3} - \frac{4!}{x^5} + \dots \right) ۳$$

$$+ \cos x \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} + \dots \right)$$

$$۵. c(x) \sim -A(x) \sin x^2 + B(x) \cos x^2 \text{ که در آن}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1 \times 3}{2x^3} + \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{16x^5} - + \dots \right),$$

$$B(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1 \times 3 \times 5}{8x^4} + - \dots \right).$$

$$Q(\alpha, x) \sim x^\alpha e^{-x} \left[\frac{1}{x} - \frac{1-\alpha}{x^2} + - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(1-\alpha)(2-\alpha) \dots (n-1-\alpha)}{x^n} + \dots \right]. \quad ۷$$

$$C(x) \sim \pi^{1/2} x^{-3/2} + A(x) \sin x^2 - B(x) \cos x^2 \quad ۹$$

مسئله ۵.

$$y' = x^{-1}(1-\alpha+x)y - 1. \quad ۱۳$$

بخش ۳۰۲۰، صفحه ۱۱۲۹

$$۰.۱ \quad s^2 = 2998, \bar{x} = 3247 \quad ۳. \quad s^2 = 323, \bar{x} = 3 \quad ۵. \quad 0.02$$

$$۷. \quad 30, 380, 450 \quad ۹. \quad 100, 1000, 10000$$

$$۱۵. \quad s^2 = 2347, \bar{x} = 992; \text{ گروه بندی شده: } s^2 = 2547, \bar{x} = 994$$

بخش ۴۰۲۰، صفحه ۱۱۳۴

۳. فضای تمام سه تاییهای مرتب اعداد صحیح نامنفی.

۵. $A \cup B$ فقط و فقط وقتی روی می دهد که $A \cap B$ یا $A \cap B^C$ یا $A^C \cap B$ روی دهد. این سه پیش آمد دوی دو ناسازگارند. فرض می کنیم n_1, n_2, n_3 فراوانیهای مطلق مربوط به نمونه باشند. آنگاه $f(A) = (n_1 + n_2)/n$, $f(B) = (n_1 + n_3)/n$, $f(A \cap B) = n_1/n$, $f(A \cup B) = (n_1 + n_2 + n_3)/n$. با توجه به این، (۱) حاصل می شود.

بخش ۵۰۲۰، صفحه ۱۱۴۰

$$۰.۱ \quad \frac{31}{32}$$

$$۳. \quad (الف) 72.9\% = 0.093, (ب) 72.65\% = \frac{11}{99} \times \frac{19}{100} \times \frac{90}{100}$$

$$۵. \quad (الف) 24.75\%, (ب) 50.5\%, (ج) 24.75\%, (د) 6.6\%$$

$$۷. \quad 10.7\%$$

$$P(E_B|E_A) = P(E_A \cap E_B) / P(E_A) = 0.02 / 0.10 = 20\% \quad ۹.$$

$$0.04 / 0.09 = 0.44.11$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C) = B \cup (A \cap B^C).15$$

$$P(A \cap B^C) \geq 0 \text{ زیرا } P(A) = P(B) + P(A \cap B^C) \geq P(B)$$

بخش ۶.۲۰، صفحه ۱۱۴۶

$$\begin{matrix} ۱۵, ۱۵ & ۰.۷ & \binom{100}{3} = 161700 & ۰.۵ & \binom{10}{3} = 120 & ۰.۳ \end{matrix}$$

۹. روش اثبات مثل قضیه ۱ است، ولی به جای پر کردن n مکان هم اکنون ما باید k مکان را پر کنیم. هرگاه تکرار مجاز باشد، n عضو برای پر کردن هر یک از k مکان داریم.

$$۱\%, ۴۰۰, ۳۹۹۰۲, ۲\%, ۰.۵, ۲۳.۵.11$$

$$15. b^r \text{ دارای ضریب } \binom{p+q}{r} \text{ در طرف راست و } \sum \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} \text{ در طرف چپ است.}$$

بخش ۷.۲۰، صفحه ۱۱۵۲

$$F(x) = \begin{cases} 0 & k = 1/2000 \\ x/4000 - 0.5 & 2000 \leq x < 6000 \\ 1 & x \geq 6000 \end{cases}$$

$$۰.۷ \quad f(4) = \frac{3}{216}, f(3) = \frac{1}{216} \text{، و غیره.}$$

$$P(x > 1200) = \int_{12}^{\infty} 6[0.25 - (x - 1.5)^2] dx = 0.896.11$$

$$\text{جواب } 0.896^2 = 72\%$$

$$.X > c \text{ یا } X \leq b, X > c \text{ یا } X < b, X \leq c, X < c, X \geq b, X > b.13$$

بخش ۸.۲۰، صفحه ۱۱۵۹

$$1. \mu = \int_{-\infty}^c t f(t) dt + \int_c^{\infty} t f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= -\int_{-\infty}^0 (c-x)f(c-x)dx + \int_0^{\infty} (c+x)f(c+x)dx \\
 &= 2c \int_0^{\infty} f(c+x)dx = c
 \end{aligned}$$

برای يك توزیع گسسته اثبات به همین نحو است.

$$0.5 \quad (x - 4/3)/\sqrt{2/9}$$

$$0.7 \quad \text{در (۵) و (۶) قرار دهید } c_1 = 1/\sigma \text{ و } c_2 = -\mu/\sigma$$

$$0.9 \quad \sigma^2 = 0.0002, \mu = 1, k = 750$$

$$0.11 \quad \sigma^2 = 1/20, \mu = 1/2$$

$$0.15 \quad E(X - \mu) = E(X) - \mu E(1) = \mu - \mu = 0$$

$$0.17 \quad \sigma^2 = 1/18, E(X^k) = 2/(k+2)$$

$$0.21 \quad E(X^k) = 1/(k+1)$$

$$0.23 \quad \text{با انتگرالگیری به روش جزء جزء } \sigma^2 = 2, \gamma = 4/2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

بخش ۹.۲۰، صفحه ۱۱۶۶

$$0.1 \quad f(x) = \binom{n}{x} 0.5^n, \mu = 0.5n, \sigma^2 = 0.25n$$

$$0.3 \quad \frac{5}{256}, \text{ یعنی، در حدود } 2\% \quad 0.5 \quad 0.9991^{\circ} \approx 99.94\%$$

$$0.7 \quad 1 - e^{-0.12} = 1 - 0.88187 = 0.11813$$

$$(1 - 0.9991^{100} = 1 - 0.88186 = 0.11814, p = 0.0002 \text{ واقعی})$$

$$0.9 \quad f(0) + f(1) = e^{-0.15}(1.0 + 0.15) = 0.91, f(x) = 0.5^x e^{-0.5}/x! \quad \text{جواب } 9\%$$

$$0.11 \quad 265 \text{ ر.ك. جدول AV ضمیمه ۴}$$

۱۳. هر گاه يك بسته از $N = 100$ کالا درست شامل $M = 10$ کالای معیوب باشد، آنگاه احتمال آنکه ۱۰ کالای کشیده شده که بدون جایگذاری انتخاب می‌شوند دارای هیچ يك از کالاهای معیوب نباشد عبارت است

$$f(0) = \binom{10}{0} \binom{90}{10} = \frac{100 \times 99 \times \dots \times 91}{100 \times 99 \times \dots \times 91} = 33\%$$

جواب ۶۷٪، بنابراین این روش نامناسب است.

۱۵. فرض می‌کنیم X تعداد پیچهای معیوب در یک نمونه n تایی باشد. هر گان $X \geq 1$ آنگاه فرآیند متوقف می‌شود، کارخانه‌دار می‌خواهد n طوری باشد که به ازای

$$P(X=0) = q^n = 0.9^n \approx 0.095 \text{، بنابراین } P(X \geq 1) \approx 0.905 \text{، } p = 0.91$$

$$\text{و } n = 2874 \text{، } n \ln 0.9 \approx \ln 0.055$$

$$\text{جواب } n = 28 \text{ یا } n = 29$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{20!}{x_1! x_2! (20 - x_1 - x_2)!} \times 0.003^{x_1} 0.005^{x_2} \times 0.992^{20 - x_1 - x_2} \quad ۱۷$$

$$۱۹. \text{الف) } 0 \text{، (ب) } 1/2 \text{، (ج) } 3/4 \text{، (د) } 3/8 \text{، (ه) } 5/8$$

$$G''(t) = \mu e^t [G(t) + G'(t)] \text{، } G'(t) = e^{-t} \exp[\mu e^t] = \mu e^t G(t) \text{، } G(0) = 1 \quad ۲۳$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \mu \text{، } E(X^2) = G''(0) = \mu + \mu^2$$

$$۲۵. \text{از } x \binom{M}{x} = M \binom{M-1}{x-1} \text{ و (۱۴) بخش } ۶.۲۰ \text{ با } p = M - 1$$

$$r - k = n - x \text{، } q = N - M \text{، } k = x - 1 \text{ استفاده کنید.}$$

بخش ۱۰۰۲۰، صفحه ۱۱۷۳

$$۳. 0.01587 \text{، } 0.05 \text{، } 0.06915 \text{، } 0.06247$$

$$۵. \sigma = 0.012 \text{، } 0.003 / \sigma = 2.576 \text{، } \Phi\left(\frac{0.003}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-0.003}{\sigma}\right) = 99\%$$

۷. در حدود ۱۶۰

$$۹. \Phi\left(\frac{4040 - 2020 + 0.5}{\sqrt{1010}}\right) - \Phi\left(\frac{2048 - 2020 - 0.5}{\sqrt{1010}}\right) = 19.3\%$$

$$۱۳.۱\% \cdot ۹۳$$

$$۱۱. ۸۷۶ \text{ کیلوگرم}$$

$$۱۵. P = \sum_{x=0}^{10} \binom{1000}{x} 0.01^x \times 0.99^{1000-x}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{10-10+0.05}{\sqrt{9.9}}\right) - \Phi\left(\frac{0-10-0.05}{\sqrt{9.9}}\right) = 0.0564$$

(واقعی ۰.۰۵۸۳)

$$\begin{aligned}\Phi^2(\infty) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} e^{-v^2/2} du dv \quad ۱۷ \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 1\end{aligned}$$

$$(u = r \cos \theta, v = r \sin \theta, du dv = r dr d\theta)$$

۱۹. قرارداد هید $x^* = c_1 x + c_2$ ، آنگاه $(x - \mu)/\sigma = (x^* - \mu^*)/\sigma^*$ ، و، به ازای $c_1 > 0$ ،

$$F(x^*) = P(x^* \leq x^*) = P(X \leq x) = \Phi((x - \mu)/\sigma) = \Phi((x^* - \mu^*)/\sigma^*).$$

برای وارد کردن مورد $c_1 < 0$ ، توجه کنید که $X^* = -X$ نرمال با میانگین $-\mu$ و واریانس σ^2 است چون

$$F(x^*) = P(X^* \leq x^*) = P(X \geq -x^*) = 1 - \Phi\left(\frac{-x^* - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x^* + \mu}{\sigma}\right)$$

بخش ۱۱.۲۰، صفحه ۱۱۸۲

۱. (X, Y) مقداری را در A, B, C یا D (د. ک. به شکل) با احتمال $F(b_1, b_2)$ ، مقداری را در A یا C با احتمال $F(a_1, b_2)$ ، مقداری را در c یا D با احتمال $F(b_1, a_1)$ ، مقداری را در R با احتمال $F(a_1, a_2)$ اختیار می کند، از این رو مقداری در B دارای احتمالی برابر طرف راست (۲) است

$Y = b_2$	A	B
$Y = a_2$	C	D
	$X = a_1$	$X = b_1$

مسئله ۱

۵. ۲۰۰۲۰۰، در حدود ۰.۰۰۰۷ ۷. ۵۰٪

۹. (الف) مستقل، $f_1(x) = 0.1e^{-0.1x}$ هرگاه $x > 0$ و $f_2(y) = 0.1e^{-0.1y}$ هرگاه $y > 0$ (ج) ۳۶.۸٪

۱۱. توزیع در مسئله ۱۰ و در آزمایش قبل از (ع)

$$۲۵\%, f_v(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, f_1(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, k=1/\pi. ۱۳$$

بخش ۱۲۰۲۰، صفحه ۱۱۹۲

$$۱. \text{ کلاهای } ۳۸, ۶۹, ۵۲, ۴۹, ۲۳, ۵۲, ۷۳, ۲۹, ۵۹, ۵۵$$

$$۵. \text{ نمائیده فراوانیها } ۱, ۵, ۷, ۶, ۱$$

بخش ۱۳۰۲۰، صفحه ۱۱۹۴

$$۳. \hat{\theta} = n / \sum x_j = 1/\bar{x}$$

$$۵. \partial \ln l / \partial p = 0 \text{ و } k/l = p^k(1-p)^{n-k} \text{ برابر تعداد موفقیتها در يك نمونه } n \text{ تایی و } p = k/n \text{ نتیجه می دهد}$$

بخش ۱۴۰۲۰، صفحه ۱۲۰۰

$$۱. \text{ CONF}\{17784 \leq \mu \leq 18796\} \quad ۳. \text{ CONF}\{1272 \leq \mu \leq 1676\}$$

$$۵. \text{ CONF}\{4725 \leq \mu \leq 4749\} \quad ۷. \text{ CONF}\{5726 \leq \mu \leq 5751\}$$

$$۹. \text{ CONF}\{5105 \leq \mu \leq 5107\}; \text{ خطا به طور تقریب عبارت است از } 0.001 \text{ (مقدار واقعی } 0.0008)$$

$$۱۱. \text{ CONF}\{0.05 \leq \sigma^2 \leq 10\}$$

$$۱۳. c_7 = 17079, c_1 = (\sqrt{253} - 258)^2/2 = 8878$$

$$\text{CONF}\{142 \leq \sigma^2 \leq 275\}$$

$$۱۵. \text{ توزیعهای نرمال بامیانگینهای } ۱۲, -۲۴, ۴۷ \text{ و واریانسهای } ۲۵ \text{ و } ۱۵۰ \text{ و } ۴۰۰$$

$$۱۷. Z = X + Y \text{ نرمال بامیانگین } ۱۰۵ \text{ و واریانس } ۱۲۵ \text{ است. جواب}$$

$$P(104 \leq Z \leq 106) = 6\%$$

$$۱۹. D_2 - \text{نرمال بامیانگین } -\mu_2 \text{ و واریانس } \sigma_2^2 \text{ است، ر.ك. به قضیه ۱، بخش}$$

$$۱۰.۲۰. \text{ از این رو } D = D_1 - D_2 \text{ نرمال بامیانگین } \mu = \mu_1 - \mu_2 = 501 \text{ و}$$

$$\text{واریانس } \sigma = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 50002 \text{ يك درپوش يك سوراخ را می پوشاند اگر و}$$

فقط اگر D دارای مقدار مثبت باشد. جواب

$$P(D > 0) = P(0 < D < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{0 - 501}{\sqrt{500002}}\right) \approx 76\%$$

بخش ۱۵۰۲۰، صفحه ۱۲۱۲

۱. $c = 1.992 (\alpha = 5\%) = 0.18 < t = \sqrt{7}(0.286 - 0) / 4.31 = 0.18$ فرض رد نمی شود.

۳. هرگاه فرض $p = 0.05$ درست باشد، $X =$ تعداد شیرها در ۴۰۴۰ آزمایش تقریباً توزیع نرمال؛ $\mu = 2020$ ، $\sigma^2 = 1010$ (بخش ۱۰۰۲۰).
 $c = 2072 > 2048$ ، $P(X \leq c) = \Phi([c - 2020] / \sqrt{1010}) = 0.95$
 فرض رد نمی شود.

۵. مقابل $\mu \neq 500$ ، $c = -2.26 < t = \sqrt{10}(496 - 500) / 5 = -2.26$ ، $\mu = 500$ گرم رد نمی شود.
 ر. ک. به جدول A11، ۹۰ درجه آزادی).

۹. $\bar{x} = 376.3$ ، $\bar{y} = 335.3$ ، $s_1^2 = 1009.3$ ، $s_2^2 = 869.3$ ، $c = 213 < t_0 = 1.64$ ، $(\alpha = 5\%)$ ، ۴ درجه آزادی، فرض رد نمی شود.

۱۳. فرض H_0 : بهتر نیست. مقابل H_1 : بهتر. تحت H_0 متغیر تصادفی $X =$ تعداد مواد ناجود در ۲۰۰ مود به طور تقریب نرمال با $\mu = np = 140$ ، $\sigma^2 = npq = 42$ است، و مقدار $\alpha = 5\%$ می دهد $c = 164.5$ ، $c = 150.65 > 148$ ، $(c - 140) / \sqrt{42} = 1.645$ ، H_0 رد نمی شود.

۱۵. $v_0 = 679 / 254 = 2.67$ ، انتخاب می کنیم $\alpha = 5\%$. جدول A13 ضمیمه ۴ شامل مقادیری متناظر با (۵، ۱۱) درجه آزادی نیست، بلکه مقادیر نزدیک به جدول نشان می دهد که آن باید بزرگتر از v_0 باشد، از این رو فرض رد نمی شود.

بخش ۱۶۰۲۰، صفحه ۱۲۲۶

۱. $LCL = 1 - 2.58 \times 0.02 / 2 = 0.974$ ، $UCL = 1.026$

۳. $LCL = 272.17$ ، $UCL = 277.83$ ، $2.58 \sqrt{0.024 / 2} = 0.283$

۷. LCL و UCL با سطح معنی دار α ، که در حالت کل، مساوی ۱٪ نیست، متناظر است.

۹. $CL = np = 0.7$ ، $UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)} = 0.7 + 2.42 \approx 3$
 $LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)}$

بخش ۱۷۰۲۰، صفحه ۱۲۳۲

۱. $(1 - \theta)^2$

۳. ۰۰۹۹۵۳، ۰۰۹۸۲۵، ۰۰۹۳۸۴، و غیره

۵. ۰۰۰۲۸ (در $\theta = 0.054$)

$$P(A; \theta) = \binom{N - N\theta}{\delta} / \binom{N}{\delta} \approx \theta^\delta (1 - \theta)^{\delta - \delta} = (1 - \theta)^\delta, \quad ۷.$$

$$AOQ(\theta) \approx \theta(1 - \theta)^\delta$$

$$\theta_1 \approx ۰.۰۳۷, \theta_0 \approx ۰.۰۰۱ \quad ۹.$$

۱۱. $\alpha = ۵\%$ ، $\beta = ۴۴\%$ ، که به طور غیر رضایت بخشی بزرگ است.

$$۰.۰۰۳.۱۵$$

$$۹.۱۳$$

بخش ۱۸.۲۰، صفحه ۱۲۳۹

$$e_1 = ۴۷۸ \times \frac{۳}{۴} = ۳۵۸.۵, n = ۳۵۵ + ۱۲۳ = ۴۷۸, k = ۲ \quad ۱.$$

$$e_2 = ۴۷۸ \times \frac{1}{۴} = ۱۱۹.۵$$

$$X_0^2 = \frac{(۳۵۵.۵ - ۳۵۸.۵)^2}{۳۵۸.۵} + \frac{(۱۲۳.۵ - ۱۱۹.۵)^2}{۱۱۹.۵} = ۰.۱۳۷$$

انتخاب می کنیم $\alpha = ۵\%$. آنگاه $c = ۳۸۴$ (درجه آزادی). از این رو $X_0^2 < c$ ، یعنی، اظهار می کنیم که انحراف نسبت در نمونه از نسبت به طور نظری ۱:۳ بر حسب نوسان متغیر تصادفی است.

۳. H_0 : تعداد مهره های معیوب برای ۳ ماشین یکی هستند. تخمین می زنیم $P = ۱۵/۶۰۰ = ۲.۵\%$ آنگاه

$$X_0^2 = \frac{1}{\delta} (۲^2 + ۳^2 + ۱^2) = ۲.۲۸ < ۳.۸۴$$

($\alpha = ۵\%$ ، درجه آزادی). جواب - خیر

۵. $a = ۳۲$ زیرا وقتی که $a \geq ۳۲$ (یا $a \leq ۱۸$)

$$X_0^2 = \frac{1}{۲۵} [(a - ۲۵)^2 + (۵۰ - a - ۲۵)^2] > c = ۳.۸۴$$

$$۷. \bar{\sigma} = ۱۵۸۸, \bar{x} = ۹۹۹۴$$

(نقاط انتهایی $-\infty, ۸۵, ۹۵, ۱۰۵, ۱۱۵, \infty$ ، $K = ۵$)

($\alpha = ۵\%$) $c = ۵۹۹$ فرض رد می شود. $X_0^2 = ۰.۰۷$

۹. با در نظر گرفتن سه سطر آخر با هم، داریم $K - r - ۱ = ۹$ ، که در آن $r = ۱$ چون

میانگین تخمین زده شده بود. $X_0^2 = ۱۲.۸ < c = ۱۶.۹۲$ ($\alpha = ۵\%$) فرض رد

نمی شود

بخش ۱۹.۲۰، صفحه ۱۲۴۴

$$۱. P(X \leq 2) = 0.05^6(1 + 6 + 15) = 34\% \text{ فرض } \mu = 0 \text{ رد نمی شود.}$$

$$۳. P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{13} \binom{13}{x} 0.05^{13} = 4.6\% < \alpha, \alpha = 5\% \text{ فرض رد می شود.}$$

$$۵. \text{فرض } \mu = 0 \text{ . مقابل } \mu > 0, \bar{x} = 1.58$$

$$t = \sqrt{10} \times 1.58 / 1.23 = 4.06 > c = 1.82 (\alpha = 5\%) \text{ فرض رد می شود}$$

$$۹. ۲ \text{ تقدم وتأخر، } n = 8, P(T \leq 2) = 0.1\% \text{ فرض را رد می کنیم و اظهار می کنیم که تمایل منفی موجود است.}$$

بخش ۲۰.۲۰، صفحه ۱۲۴۸

$$۱. \text{در حدود } ۱۲۰ \text{ یا } y = x - 0.1$$

$$۵. y - 28.4 = 45.7(x - 0.70)$$

$$۷. y - 48.89 = -1.32(x - 2.033)$$

$$۹. q_0 = 2p^2/3, 2s_y^2 = 2 + 2p^2/3, b = 1, 2s_{xy} = 2, 2s_1^2 = 2$$

$$\text{CONF}\{1 - 7.3p \leq \beta \leq 1 + 7.3p\}, k = 12.7p/\sqrt{3} = 7.3p (\gamma = 95\%)$$

ضمیمه ۳: فرمولهایی در مورد توابع خاص

برای جدولهای مقادیر عددی ضمیمه ۴ را ببینید.

تابع نمایی e^x (شکل ۳۹۷)

$$e = ۲۷۱۸۲۸ \ ۱۸۲۸۴ \ ۵۹۰۴۵ \ ۲۳۵۳۶ \ ۰۲۸۷۴ \ ۷۱۳۵۳$$

$$(۱) \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad e^x / e^y = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

لگاریتم طبیعی (شکل ۳۹۸)

$$(۲) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln(x/y) = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$$\ln x \text{ معکوس } e^x \text{ است، و } e^{\ln x} = x, \quad e^{-\ln x} = e^{\ln(1/x)} = \frac{1}{x}$$

لگاریتم با پایه ده $\log_{10} x$ یا به صورت ساده $\log x$

$$(۳) \quad \log x = M \ln x, \quad M = \log e = ۰٫۴۳۴۲۹ \ ۴۴۸۱۹ \ ۰۳۲۵۱ \ ۸۲۷۶۵$$

$$۱۱۲۸۹ \ ۱۸۹۱۷$$

$$(۴) \quad \ln x = \frac{1}{M} \log x,$$

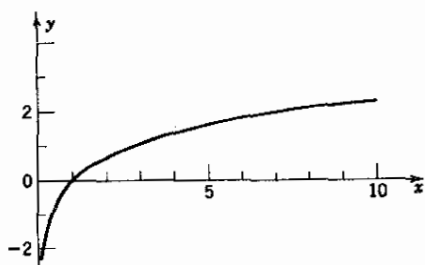
$$\frac{1}{M} = ۲٫۳۰۲۵۸ \ ۵۰۹۲۹ \ ۹۴۰۲۵ \ ۶۸۴۰۱ \ ۷۹۹۱۴ \ ۵۴۶۸۴$$

$$\log x \text{ معکوس } ۱۰^x \text{ است، و } ۱۰^{\log x} = x \text{ و } ۱۰^{-\log x} = \frac{1}{x}$$

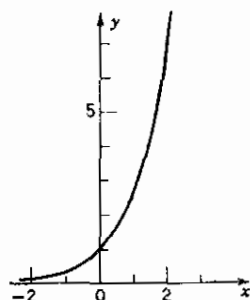
توابع سینوسی و کسینوسی (شکلهای ۳۹۹، ۴۰۰). در حساب دیفرانسیل و انتگرال، زوایا با رادیان اندازه گرفته می‌شوند، به طوری که $\sin x$ و $\cos x$ با دوره ۲π هستند.

$\sin x$ فرد است، $\sin(-x) = -\sin x$ و $\cos x$ زوج است، $\cos(-x) = \cos x$

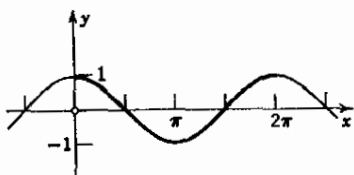
رادیان $1^\circ = 0.017453292519943$



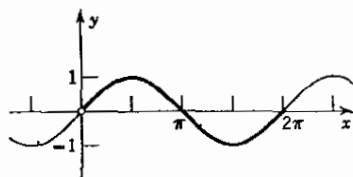
شکل ۳۹۸. لگاریتم طبیعی $\ln x$



شکل ۳۹۷. تابع نمایی e^x



شکل ۴۰۰. $\cos x$



شکل ۳۹۹. $\sin x$

$$1 \text{ رادیان} = 57^\circ 17' 44.80625''$$

$$= 57.2957795131^\circ$$

$$(5) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(6) \quad \begin{cases} \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{cases}$$

$$(7) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(8) \quad \begin{cases} \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

$$(۹) \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$(۱۰) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$(۱۱) \quad \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{cases}$$

$$(۱۲) \quad \begin{cases} \sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \cos v - \cos u = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

$$(۱۳) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \pm \delta), \quad \tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{B}{A}$$

$$(۱۴) \quad A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \pm \delta),$$

$$\tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \pm \frac{A}{B}$$

توانزانت، کوانزانت، سکانت، کسکانت (شکلهای ۴۰۱ و ۴۰۲)

$$(۱۵) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(۱۶) \quad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

توابع هذلولی (سینوس هذلولی و غیره؛ (شکلهای ۴۰۳، ۴۰۴)

$$(۱۷) \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(۱۸) \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$(۱۹) \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}, \quad \cosh x + \sinh x = e^x$$

$$(۲۰) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$(۲۱) \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$$

$$(۲۲) \quad \begin{cases} \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \end{cases}$$

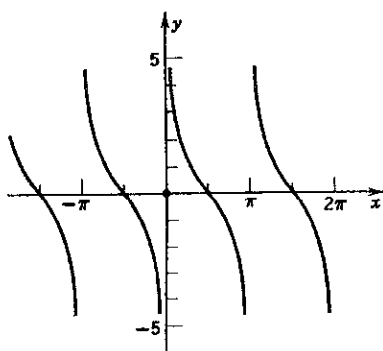
$$(۲۳) \quad \tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

تابع گاما (ر. ک. شکل ۴۰۵ و جدول A۳ ضمیمه ۴). تابع گاما $\Gamma(\alpha)$ با فرمول

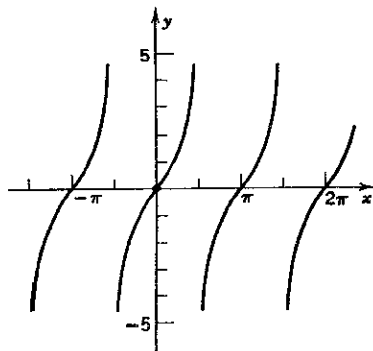
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

تعریف می شود، و وقتی دارای معنی است که $\alpha > 0$ ، یا اگر α را مختلط در نظر بگیریم، α هایی مورد نظر ما است که قسمت حقیقی شان مثبت است. انتگرال گیری به روش جزء به جزء رابطه تابعی مهم تابع گاما را به صورت زیر نتیجه می دهد.

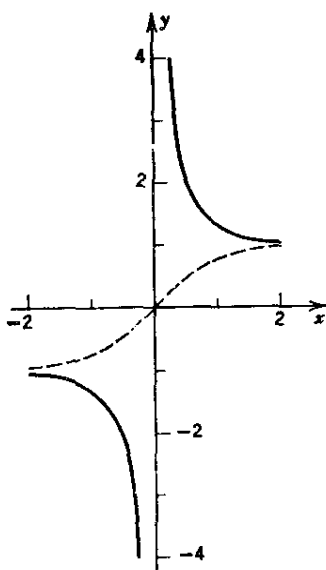
$$(۲۴) \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$



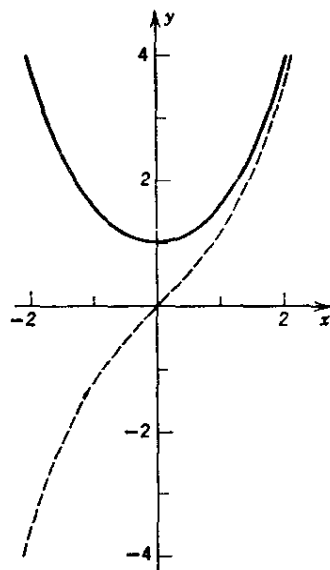
شکل ۴۰۲ $\cot x$



شکل ۴۰۱ $\tan x$



شکل ۴۰۴ $\tanh x$ (خط چین)
و $\coth x$



شکل ۴۰۳ $\sinh x$ (خط چین)
و $\cosh x$

بنا به (۲۴) به سادگی نتیجه می شود $\Gamma(1) = 1$ ؛ از این رو هر گاه α عدد صحیح مثبتی، مثل k ، باشد، آنگاه با تکرار رابطه (۲۵) به دست می آوریم

$$\Gamma(k+1) = k! \quad (K = 0, 1, \dots) \quad (26)$$

این موضوع نشان می دهد که تابع گاما را می توان به صورت تعمیمی از تابع فاکتوریل مقدماتی تصویر نمود. [بعضی اوقات نماد $(\alpha-1)!$ را برای $\Gamma(\alpha)$ ، حتی برای مقادیر غیر صحیح α ، مورد استفاده قرار می دهند، و تابع Γ را تابع فاکتوریل نیز می نامند.]

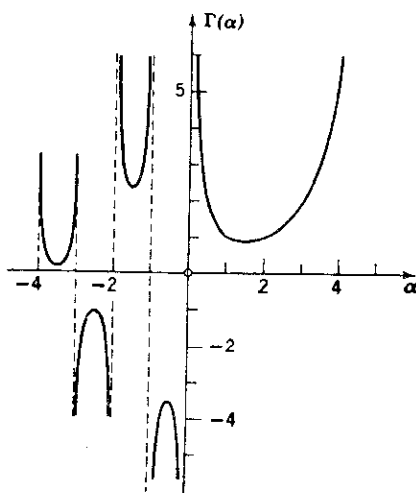
با کاربرد مکرر (۲۵) به دست می آوریم

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} = \frac{\Gamma(a+2)}{a(a+1)} = \dots = \frac{\Gamma(a+k+1)}{a(a+1)(a+2)\dots(a+k)},$$

و ما می توانیم از رابطه

$$(۲۷) \quad \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots)$$

برای تعریف تابع گاما به ازای α منفی ($\neq -1, -2, \dots$) با انتخاب k به عنوان کوچکترین عدد صحیحی که نامساوی $\alpha+k+1 > 0$ برقرار باشد، مورد استفاده قرار دهیم. این موضوع به علاوه (۱)، تعریفی برای $\Gamma(\alpha)$ به ازای همه مقادیر α غیرصفر یا غیرمنفی می باشد (شکل ۴۰۵).



شکل ۴۰۵ تابع گاما

می توان نشان داد که تابع گاما را می توان به صورت حد يك حاصلضرب نوشت، یعنی، با فرمول زیر نمایش داد

$$(۲۸) \quad \Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)} \quad (\alpha \neq 0, -1, \dots)$$

با توجه به (۲۷) یا (۲۸) مشاهده می کنیم که، به ازای عدد مختلط α ، تابع $\Gamma(\alpha)$ يك تابع هلورديخت است که دارای قطبهای ساده در $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ است. يك تابع تقریب برای تابع گاما به ازای α های مثبت و بزرگ از روی فرمول استرلینگ به دست می آید

$$(۲۹) \quad \Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha}$$

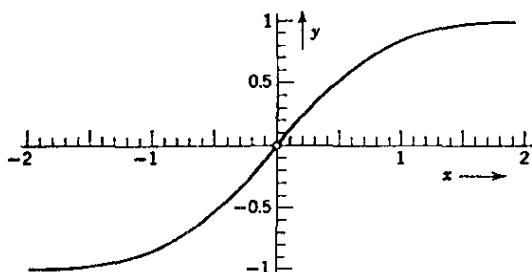
که در آن e پایه لگاریتم طبیعی است. در پایان مقدار خاص زیر را متذکر می شویم

$$(۳۰) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

توابع گامای غیر کامل

$$(۳۱) \quad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad (\alpha > 0)$$

$$(۳۲) \quad \Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$



شکل ۴۰۶ تابع خطا

تابع بتا

$$(۳۳) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x) > 0, \quad (y) > 0.$$

$$(۳۴) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \text{نمایش بر حسب توابع گاما}$$

تابع خطا (ر. ک. به شکل ۴۰۶ و جدول A۵ ضمیمه ۴)

$$(۳۵) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$(۳۶) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1! \times 3} + \frac{x^5}{2! \times 5} - \frac{x^7}{3! \times 7} + \dots \right)$$

 $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ ، تابع خطای مکمل

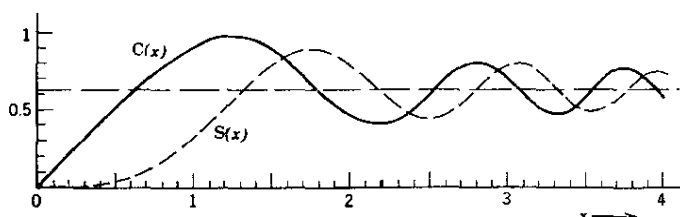
$$(۳۷) \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

انتگرالهای فرنل ۱ (شکل ۴۰۷)

۱. اوگوستن فرنل (Augustin Fresnel)، ۱۸۲۷-۱۷۸۸، فیزیکدان و ریاضیدان فرانسوی
برای جدولها مراجعه [A۶]، [A۸] را ببینید؛ همچنین ر. ک. به

Acta mathematica, Vol 85, (1951), P. 180, Vol 89, (1953), P. 130

$$(۳۸) \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$



شکل ۴۰۷ انتگرالهای فرنل

$$C(\infty) = \sqrt{\pi/8}, \quad S(\infty) = \sqrt{\pi/8}$$

$$(۳۹) \quad c(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2) dt$$

$$s(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2) dt$$

انتگرال سینوسی (ر. ک. شکل ۴۵۸ و جدول A۵ ضمیمه ۴)

$$(۴۰) \quad \text{si}(x) = \int_\infty^x \frac{\sin t}{t} dt$$

تابع مکمل $\text{si}(\infty) = \pi/2$

$$(۴۱) \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

انتگرال کسینوسی (ر. ک. جدول A۵ ضمیمه ۴)

$$(۴۲) \quad \text{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

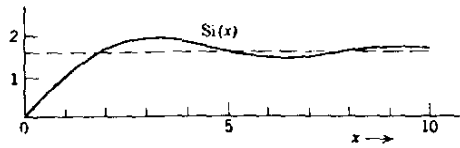
انتگرال نمایی (ر. ک. بخش ۱۵۰۱۹)

$$(۴۳) \quad \text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

انتگرال لگاریتمی

(۴۴)

$$\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$



شکل ۴۰۸. انتگرال سینوسی

ضمیمه ۲ جدولها

جدولهای تبدیل لاپلاس در بخش ۸.۵ آمده‌اند.

جدول A1

برخی توابع مقدماتی

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	e^x	$\sinh x$	$\cosh x$
0.0	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
0.1	0.09983	0.99500	0.10033	1.10517	0.10017	1.00500
0.2	0.19867	0.98007	0.20271	1.22140	0.20134	1.02007
0.3	0.29552	0.95534	0.30934	1.34986	0.30452	1.04534
0.4	0.38942	0.92106	0.42279	1.49182	0.41075	1.08107
0.5	0.47943	0.87758	0.54630	1.64872	0.52110	1.12763
0.6	0.56464	0.82534	0.68414	1.82212	0.63665	1.18547
0.7	0.64422	0.76484	0.84229	2.01375	0.75858	1.25517
0.8	0.71736	0.69671	1.02964	2.22554	0.88811	1.33743
0.9	0.78333	0.62161	1.26016	2.45960	1.02652	1.43309
1.0	0.84147	0.54030	1.55741	2.71828	1.17520	1.54308
1.1	0.89121	0.45360	1.96476	3.00417	1.33565	1.68852
1.2	0.93204	0.36236	2.57215	3.32012	1.50946	1.81066
1.3	0.96356	0.26750	3.60210	3.66930	1.69838	1.97091
1.4	0.98545	0.16997	5.79788	4.05520	1.90430	2.15090
1.5	0.99749	0.07074	14.10142	4.48169	2.12928	2.35241
1.6	0.99957	-0.02920	-34.23253	4.95303	2.37557	2.57746
1.7	0.99166	-0.12884	-7.69660	5.47395	2.64563	2.82832
1.8	0.97385	-0.22720	-4.28626	6.04965	2.94217	3.10747
1.9	0.94630	-0.32329	-2.92710	6.68589	3.26816	3.41773
2.0	0.90930	-0.41615	-2.18504	7.38906	3.62686	3.76220

x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$
1.0	0.00000	2.0	0.69315	3.0	1.09861	5	1.60944
1.1	0.09531	2.1	0.74194	3.1	1.13140	7	1.94591
1.2	0.18232	2.2	0.78846	3.2	1.16315	11	2.39790
1.3	0.26236	2.3	0.83291	3.3	1.19392	13	2.56495
1.4	0.33647	2.4	0.87547	3.4	1.22378	17	2.83321
1.5	0.40547	2.5	0.91629	3.5	1.25276	19	2.94444
1.6	0.47000	2.6	0.95551	3.6	1.28093	23	3.13549
1.7	0.53063	2.7	0.99325	3.7	1.30833	29	3.36730
1.8	0.58779	2.8	1.02962	3.8	1.33500	31	3.43399
1.9	0.64185	2.9	1.06471	3.9	1.36098	37	3.61092

$\frac{y}{x}$	$\arctan \frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\arctan \frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\arctan \frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\arctan \frac{y}{x}$
0.0	0.00000	1.0	0.78540	2.0	1.10715	4.0	1.32582
0.1	0.09967	1.1	0.83298	2.2	1.14417	4.5	1.35213
0.2	0.19740	1.2	0.87606	2.4	1.17601	5.0	1.37340
0.3	0.29146	1.3	0.91510	2.6	1.20362	5.5	1.39094
0.4	0.38051	1.4	0.95055	2.8	1.22777	6.0	1.40565
0.5	0.46365	1.5	0.98279	3.0	1.24905	7.0	1.42890
0.6	0.54042	1.6	1.01220	3.2	1.26791	8.0	1.44644
0.7	0.61073	1.7	1.03907	3.4	1.28474	9.0	1.46014
0.8	0.67474	1.8	1.06370	3.6	1.29985	10.0	1.47113
0.9	0.73282	1.9	1.08632	3.8	1.31347	11.0	1.48014

جدول A۲

توابع بسل

برای جدولهای بزرگتر مرجع [A۸] ضمیمه ۱ را ببینید.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	3.0	-0.2601	0.3391	6.0	0.1506	-0.2767
0.1	0.9975	0.0499	3.1	-0.2921	0.3009	6.1	0.1773	-0.2559
0.2	0.9900	0.0995	3.2	-0.3202	0.2613	6.2	0.2017	-0.2329
0.3	0.9776	0.1483	3.3	-0.3443	0.2207	6.3	0.2238	-0.2081
0.4	0.9604	0.1960	3.4	-0.3643	0.1792	6.4	0.2433	-0.1816
0.5	0.9385	0.2423	3.5	-0.3801	0.1374	6.5	0.2601	-0.1538
0.6	0.9120	0.2867	3.6	-0.3918	0.0955	6.6	0.2740	-0.1250
0.7	0.8812	0.3290	3.7	-0.3992	0.0538	6.7	0.2851	-0.0953
0.8	0.8463	0.3688	3.8	-0.4026	0.0128	6.8	0.2931	-0.0652
0.9	0.8075	0.4059	3.9	-0.4018	-0.0272	6.9	0.2981	-0.0349
1.0	0.7652	0.4401	4.0	-0.3971	-0.0660	7.0	0.3001	-0.0047
1.1	0.7196	0.4709	4.1	-0.3887	-0.1033	7.1	0.2991	0.0252
1.2	0.6711	0.4983	4.2	-0.3766	-0.1386	7.2	0.2951	0.0543
1.3	0.6201	0.5220	4.3	-0.3610	-0.1719	7.3	0.2882	0.0826
1.4	0.5669	0.5419	4.4	-0.3423	-0.2028	7.4	0.2786	0.1096
1.5	0.5118	0.5579	4.5	-0.3205	-0.2311	7.5	0.2663	0.1352
1.6	0.4554	0.5699	4.6	-0.2961	-0.2566	7.6	0.2516	0.1592
1.7	0.3980	0.5778	4.7	-0.2693	-0.2791	7.7	0.2346	0.1813
1.8	0.3400	0.5815	4.8	-0.2404	-0.2985	7.8	0.2154	0.2014
1.9	0.2818	0.5812	4.9	-0.2097	-0.3147	7.9	0.1944	0.2192
2.0	0.2239	0.5767	5.0	-0.1776	-0.3276	8.0	0.1717	0.2346
2.1	0.1666	0.5683	5.1	-0.1443	-0.3371	8.1	0.1475	0.2476
2.2	0.1104	0.5560	5.2	-0.1103	-0.3432	8.2	0.1222	0.2580
2.3	0.0555	0.5399	5.3	-0.0758	-0.3460	8.3	0.0960	0.2657
2.4	0.0025	0.5202	5.4	-0.0412	-0.3453	8.4	0.0692	0.2708
2.5	-0.0484	0.4971	5.5	-0.0068	-0.3414	8.5	0.0419	0.2731
2.6	-0.0968	0.4708	5.6	0.0270	-0.3343	8.6	0.0146	0.2728
2.7	-0.1424	0.4416	5.7	0.0599	-0.3241	8.7	-0.0125	0.2697
2.8	-0.1850	0.4097	5.8	0.0917	-0.3110	8.8	-0.0392	0.2641
2.9	-0.2243	0.3754	5.9	0.1220	-0.2951	8.9	-0.0653	0.2559

 $J_0(x) = 0$ for $x \approx 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, 14.931, \dots$ $J_1(x) = 0$ for $x \approx 0, 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, \dots$

جدول A۲ (ادامه)

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0.0	$(-\infty)$	$(-\infty)$	2.5	0.498	0.146	5.0	-0.309	0.148
0.5	-0.445	-1.471	3.0	0.377	0.325	5.5	-0.339	-0.024
1.0	0.088	-0.781	3.5	0.189	0.410	6.0	-0.288	-0.175
1.5	0.382	-0.412	4.0	-0.017	0.398	6.5	-0.173	-0.274
2.0	0.510	-0.107	4.5	-0.195	0.301	7.0	-0.026	-0.303

جدول A۳

تابع گاما (ر. ک. (۲۴) ضمیمه ۳)

α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$
1.00	1.000 000	1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384
1.02	0.988 844	1.22	0.913 106	1.42	0.886 356	1.62	0.895 924	1.82	0.936 845
1.04	0.978 438	1.24	0.908 521	1.44	0.885 805	1.64	0.898 642	1.84	0.942 612
1.06	0.968 744	1.26	0.904 397	1.46	0.885 604	1.66	0.901 668	1.86	0.948 687
1.08	0.959 725	1.28	0.900 718	1.48	0.885 747	1.68	0.905 001	1.88	0.955 071
1.10	0.951 351	1.30	0.897 471	1.50	0.886 227	1.70	0.908 639	1.90	0.961 766
1.12	0.943 590	1.32	0.894 640	1.52	0.887 039	1.72	0.912 581	1.92	0.968 774
1.14	0.936 416	1.34	0.892 216	1.54	0.888 178	1.74	0.916 826	1.94	0.976 099
1.16	0.929 803	1.36	0.890 185	1.56	0.889 639	1.76	0.921 375	1.96	0.983 743
1.18	0.923 728	1.38	0.888 537	1.58	0.891 420	1.78	0.926 227	1.98	0.991 708
1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384	2.00	1.000 000

جدول A۴

تابع فاکتوریل

n	$n!$	$\log(n!)$	n	$n!$	$\log(n!)$	n	$n!$	$\log(n!)$
1	1	0.000 000	6	720	2.857 332	11	39 916 800	7.601 156
2	2	0.301 030	7	5 040	3.702 431	12	479 001 600	8.680 337
3	6	0.778 151	8	40 320	4.605 521	13	6 227 020 800	9.794 280
4	24	1.380 211	9	362 880	5.559 763	14	87 178 291 200	10.940 408
5	120	2.079 181	10	3 628 800	6.559 763	15	1 307 674 368 000	12.116 500

جدول A۵

تابع خطا، انتگرالهای سینوسی و کسینوسی (ر. ک. (۳۵)، (۴۰)، (۴۲) ضمیمه ۳)

x	$\operatorname{erf} x$	$\operatorname{Si}(x)$	$\operatorname{ci}(x)$	x	$\operatorname{erf} x$	$\operatorname{Si}(x)$	$\operatorname{ci}(x)$
0.0	0.0000	0.0000	∞	2.0	0.9953	1.6054	-0.4230
0.2	0.2227	0.1996	1.0422	2.2	0.9981	1.6876	-0.3751
0.4	0.4284	0.3965	0.3788	2.4	0.9993	1.7525	-0.3173
0.6	0.6039	0.5881	0.0223	2.6	0.9998	1.8004	-0.2533
0.8	0.7421	0.7721	-0.1983	2.8	0.9999	1.8321	-0.1865
1.0	0.8427	0.9461	-0.3374	3.0	1.0000	1.8487	-0.1196
1.2	0.9103	1.1080	-0.4205	3.2	1.0000	1.8514	-0.0553
1.4	0.9523	1.2562	-0.4620	3.4	1.0000	1.8419	0.0045
1.6	0.9763	1.3892	-0.4717	3.6	1.0000	1.8219	0.0580
1.8	0.9891	1.5058	-0.4568	3.8	1.0000	1.7934	0.1038
2.0	0.9953	1.6054	-0.4230	4.0	1.0000	1.7582	0.1410

جدول A۶
توزیع دو جمله‌ای

تابع احتمال $f(x)$ (ر. ک. (۲) بخش ۹.۲۰) و تابع توزیع $F(x)$

n	x	p = 0.1		p = 0.2		p = 0.3		p = 0.4		p = 0.5	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
1	0	0.9000	0.9000	0.8000	0.8000	0.7000	0.7000	0.6000	0.6000	0.5000	0.5000
	1	0.1000	1.0000	0.2000	1.0000	0.3000	1.0000	0.4000	1.0000	0.5000	1.0000
2	0	0.8100	0.8100	0.6400	0.6400	0.4900	0.4900	0.3600	0.3600	0.2500	0.2500
	1	0.1800	0.9900	0.3200	0.9600	0.4200	0.9100	0.4800	0.8400	0.5000	0.7500
	2	0.0100	1.0000	0.0400	1.0000	0.0900	1.0000	0.1600	1.0000	0.2500	1.0000
3	0	0.7290	0.7290	0.5120	0.5120	0.3430	0.3430	0.2160	0.2160	0.1250	0.1250
	1	0.2430	0.9720	0.3840	0.8960	0.4410	0.7840	0.4320	0.6480	0.3750	0.5000
	2	0.0270	0.9990	0.0960	0.9920	0.1890	0.9730	0.2880	0.9360	0.3750	0.8750
	3	0.0010	1.0000	0.0080	1.0000	0.0270	1.0000	0.0640	1.0000	0.1250	1.0000
4	0	0.6561	0.6561	0.4096	0.4096	0.2401	0.2401	0.1296	0.1296	0.0625	0.0625
	1	0.2916	0.9477	0.4096	0.8192	0.4116	0.6517	0.3456	0.4752	0.2500	0.3125
	2	0.0486	0.9963	0.1536	0.9728	0.2646	0.9163	0.3456	0.8208	0.3750	0.6875
	3	0.0036	0.9999	0.0256	0.9984	0.0756	0.9919	0.1536	0.9744	0.2500	0.9375
	4	0.0001	1.0000	0.0016	1.0000	0.0081	1.0000	0.0256	1.0000	0.0625	1.0000
5	0	0.5905	0.5905	0.3277	0.3277	0.1681	0.1681	0.0778	0.0778	0.0313	0.0313
	1	0.3281	0.9185	0.4096	0.7373	0.3602	0.5282	0.2592	0.3370	0.1563	0.1875
	2	0.0729	0.9914	0.2048	0.9421	0.3087	0.8369	0.3456	0.6826	0.3125	0.5000
	3	0.0081	0.9995	0.0512	0.9933	0.1323	0.9692	0.2304	0.9130	0.3125	0.8125
	4	0.0005	1.0000	0.0064	0.9997	0.0284	0.9976	0.0768	0.9898	0.1563	0.9688
	5	0.0000	1.0000	0.0003	1.0000	0.0024	1.0000	0.0102	1.0000	0.0313	1.0000
6	0	0.5314	0.5314	0.2621	0.2621	0.1176	0.1176	0.0467	0.0467	0.0156	0.0156
	1	0.3543	0.8857	0.3932	0.6554	0.3025	0.4202	0.1866	0.2333	0.0938	0.1094
	2	0.0984	0.9841	0.2458	0.9011	0.3241	0.7443	0.3110	0.5443	0.2344	0.3438
	3	0.0146	0.9987	0.0819	0.9830	0.1852	0.9295	0.2765	0.8208	0.3125	0.6563
	4	0.0012	0.9999	0.0154	0.9984	0.0595	0.9891	0.1382	0.9590	0.2344	0.8906
	5	0.0001	1.0000	0.0015	0.9999	0.0102	0.9993	0.0369	0.9959	0.0938	0.9844
	6	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0007	1.0000	0.0041	1.0000	0.0156	1.0000
7	0	0.4783	0.4783	0.2097	0.2097	0.0824	0.0824	0.0280	0.0280	0.0078	0.0078
	1	0.3720	0.8503	0.3670	0.5767	0.2471	0.3294	0.1306	0.1586	0.0547	0.0625
	2	0.1240	0.9743	0.2753	0.8520	0.3177	0.6471	0.2613	0.4199	0.1641	0.2266
	3	0.0230	0.9973	0.1147	0.9667	0.2269	0.8740	0.2903	0.7102	0.2734	0.5000
	4	0.0026	0.9998	0.0287	0.9953	0.0972	0.9712	0.1935	0.9037	0.2734	0.7734
	5	0.0002	1.0000	0.0043	0.9996	0.0250	0.9962	0.0774	0.9812	0.1641	0.9375
	6	0.0000	1.0000	0.0004	1.0000	0.0036	0.9998	0.0172	0.9984	0.0547	0.9922
	7	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0002	1.0000	0.0016	1.0000	0.0078	1.0000
8	0	0.4305	0.4305	0.1678	0.1678	0.0576	0.0576	0.0168	0.0168	0.0039	0.0039
	1	0.3826	0.8131	0.3355	0.5033	0.1977	0.2553	0.0896	0.1064	0.0313	0.0352
	2	0.1488	0.9619	0.2936	0.7969	0.2965	0.5518	0.2090	0.3154	0.1094	0.1445
	3	0.0331	0.9950	0.1468	0.9437	0.2541	0.8059	0.2787	0.5941	0.2188	0.3633
	4	0.0046	0.9996	0.0459	0.9896	0.1361	0.9420	0.2322	0.8263	0.2734	0.6367
	5	0.0004	1.0000	0.0092	0.9988	0.0467	0.9887	0.1239	0.9502	0.2188	0.8555
	6	0.0000	1.0000	0.0011	0.9999	0.0100	0.9987	0.0413	0.9915	0.1094	0.9648
	7	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0012	0.9999	0.0079	0.9993	0.0313	0.9961
	8	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0007	1.0000	0.0039	1.0000

تابع احتمال $f(x)$ (ر.ك. (۵) بخش ۹.۲۰) و تابع توزیع $F(x)$

x	$p = 0.1$		$p = 0.2$		$p = 0.3$		$p = 0.4$		$p = 0.5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0048	0.9048	8187	0.8187	7408	0.7408	6703	0.6703	6065	0.6065
1	0905	0.9953	1637	0.9825	2222	0.9631	2681	0.9384	3033	0.9098
2	0045	0.9998	0164	0.9989	0333	0.9964	0536	0.9921	0758	0.9856
3	0002	1.0000	0011	0.9999	0033	0.9997	0072	0.9992	0126	0.9982
4	0000	1.0000	0001	1.0000	0003	1.0000	0007	0.9999	0016	0.9998
5							0001	1.0000	0002	1.0000

[illegible][illegible]

مقادير تابع توزيع $\Phi(z)$ (ر.ك. (٤) بخش ١٠.٢٥)

$$\Phi(0) = 0.5000, \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.01	0.9778	2.51	0.9940
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.02	0.9783	2.52	0.9941
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.03	0.9788	2.53	0.9943
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.04	0.9793	2.54	0.9945
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.05	0.9798	2.55	0.9946
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.06	0.9803	2.56	0.9948
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.07	0.9808	2.57	0.9949
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.08	0.9812	2.58	0.9951
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.09	0.9817	2.59	0.9952
0.10	0.5398	0.60	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	2.10	0.9821	2.60	0.9953
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	2.11	0.9826	2.61	0.9955
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	2.12	0.9830	2.62	0.9956
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	2.13	0.9834	2.63	0.9957
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	2.14	0.9838	2.64	0.9959
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	2.15	0.9842	2.65	0.9960
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	2.16	0.9846	2.66	0.9961
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	2.17	0.9850	2.67	0.9962
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	2.18	0.9854	2.68	0.9963
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	2.19	0.9857	2.69	0.9964
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.70	0.9554	2.20	0.9861	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	2.21	0.9864	2.71	0.9966
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	2.22	0.9868	2.72	0.9967
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	2.23	0.9871	2.73	0.9968
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	2.24	0.9875	2.74	0.9969
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	2.25	0.9878	2.75	0.9970
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	2.26	0.9881	2.76	0.9971
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	2.27	0.9884	2.77	0.9972
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	2.28	0.9887	2.78	0.9973
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	2.29	0.9890	2.79	0.9974
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	2.30	0.9893	2.80	0.9974
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649	2.31	0.9896	2.81	0.9975
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656	2.32	0.9898	2.82	0.9976
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664	2.33	0.9901	2.83	0.9977
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671	2.34	0.9904	2.84	0.9977
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678	2.35	0.9906	2.85	0.9978
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686	2.36	0.9909	2.86	0.9979
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693	2.37	0.9911	2.87	0.9979
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699	2.38	0.9913	2.88	0.9980
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706	2.39	0.9916	2.89	0.9981
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713	2.40	0.9918	2.90	0.9981
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719	2.41	0.9920	2.91	0.9982
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726	2.42	0.9922	2.92	0.9982
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732	2.43	0.9925	2.93	0.9983
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738	2.44	0.9927	2.94	0.9984
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744	2.45	0.9929	2.95	0.9984
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750	2.46	0.9931	2.96	0.9985
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756	2.47	0.9932	2.97	0.9985
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761	2.48	0.9934	2.98	0.9986
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767	2.49	0.9936	2.99	0.9986
0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772	2.50	0.9938	3.00	0.9987

جدول A۹
توزیع نرمال

مقادیر z به ازای مقادیر $\Phi(z)$ (ر.ك. (۴) بخش ۱۰.۲۰ و $D(z) = \Phi(z) - \Phi(-z)$
مثال: وقتی که $\Phi(z) = ۰.۶۱$ ، $z = ۰.۲۷۹$ و وقتی که $D(z) = ۰.۰۸۶۰$ ؛ $z = ۰.۲۷۹$

%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$
1	-2.326	0.013	41	-0.228	0.539	81	0.878	1.311
2	-2.054	0.025	42	-0.202	0.553	82	0.915	1.341
3	-1.881	0.038	43	-0.176	0.568	83	0.954	1.372
4	-1.751	0.050	44	-0.151	0.583	84	0.994	1.405
5	-1.645	0.063	45	-0.126	0.598	85	1.036	1.440
6	-1.555	0.075	46	-0.100	0.613	86	1.080	1.476
7	-1.476	0.088	47	-0.075	0.628	87	1.126	1.514
8	-1.405	0.100	48	-0.050	0.643	88	1.175	1.555
9	-1.341	0.113	49	-0.025	0.659	89	1.227	1.598
10	-1.282	0.126	50	0.000	0.674	90	1.282	1.645
11	-1.227	0.138	51	0.025	0.690	91	1.341	1.695
12	-1.175	0.151	52	0.050	0.706	92	1.405	1.751
13	-1.126	0.164	53	0.075	0.722	93	1.476	1.812
14	-1.080	0.176	54	0.100	0.739	94	1.555	1.881
15	-1.036	0.189	55	0.126	0.755	95	1.645	1.960
16	-0.994	0.202	56	0.151	0.772	96	1.751	2.054
17	-0.954	0.215	57	0.176	0.789	97	1.881	2.170
18	-0.915	0.228	58	0.202	0.806	98	2.054	2.326
19	-0.878	0.240	59	0.228	0.824	99	2.326	2.576
20	-0.842	0.253	60	0.253	0.842			
21	-0.806	0.266	61	0.279	0.860	99.1	2.366	2.612
22	-0.772	0.279	62	0.305	0.878	99.2	2.409	2.652
23	-0.739	0.292	63	0.332	0.896	99.3	2.457	2.697
24	-0.706	0.305	64	0.358	0.915	99.4	2.512	2.748
25	-0.674	0.319	65	0.385	0.935	99.5	2.576	2.807
26	-0.643	0.332	66	0.412	0.954	99.6	2.652	2.878
27	-0.613	0.345	67	0.440	0.974	99.7	2.748	2.968
28	-0.583	0.358	68	0.468	0.994	99.8	2.878	3.090
29	-0.553	0.372	69	0.496	1.015	99.9	3.090	3.291
30	-0.524	0.385	70	0.524	1.036			
31	-0.496	0.399	71	0.553	1.058	99.91	3.121	3.320
32	-0.468	0.412	72	0.583	1.080	99.92	3.156	3.353
33	-0.440	0.426	73	0.613	1.103	99.93	3.195	3.390
34	-0.412	0.440	74	0.643	1.126	99.94	3.239	3.432
35	-0.385	0.454	75	0.674	1.150	99.95	3.291	3.481
36	-0.358	0.468	76	0.706	1.175	99.96	3.353	3.540
37	-0.332	0.482	77	0.739	1.200	99.97	3.432	3.615
38	-0.305	0.496	78	0.772	1.227	99.98	3.540	3.719
39	-0.279	0.510	79	0.806	1.254	99.99	3.719	3.891
40	-0.253	0.524	80	0.842	1.282			

جدول A10
اعداد تصادفی

تعداد سطرها	تعداد ستونها									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	87331	82442	28104	26432	83640	17323	68764	84728	37995	96106
1	33628	17364	01409	87803	65641	33433	48944	64299	79066	31777
2	54680	13427	72496	16967	16195	96593	55040	53729	62035	66717
3	51199	49794	49407	10774	98140	83891	37195	24066	61140	65144
4	78702	98067	61313	91661	59861	54437	77739	19892	54817	88645
5	55672	16014	24892	13089	00410	81458	76156	28189	40595	21500
6	18880	58497	03862	32368	59320	24807	63392	79793	63043	09425
7	10242	62548	62330	05703	33535	49128	66298	16193	55301	01306
8	54993	17182	94618	23228	83895	73251	68199	64639	83178	70521
9	22686	50885	16006	04041	08077	33065	35237	02502	94755	72062
10	42349	03145	15770	70665	53291	32288	41568	66079	98705	31029
11	18093	09553	39428	75464	71329	86344	80729	40916	18860	51780
12	11535	03924	84252	74795	40193	84597	42497	21918	91384	84721
13	35066	73848	65351	53270	67341	70177	92373	17604	42204	60476
14	57477	22809	73558	96182	96779	01604	25748	59553	64876	94611
15	48647	33850	52956	45410	88212	05120	99391	32276	55961	41775
16	86857	81154	22223	74950	53296	67767	55866	49061	66937	81818
17	20182	36907	94644	99122	09774	29189	27212	79000	50217	71077
18	83687	13123	01133	41432	54542	60204	81618	09586	34481	87683
19	81315	12390	46074	47810	90171	36313	95440	77583	28506	38808
20	87026	52826	58341	76549	04105	66191	12914	55348	07907	06978
21	34301	76733	07251	90524	21931	83695	41340	53581	64582	60210
22	70734	24337	32674	49508	49751	90489	63202	24380	77943	09942
23	94710	31527	73445	32839	68176	53580	85250	53243	03350	00128
24	76462	16987	07775	43162	11777	16810	75158	13894	88945	15539
25	14348	28403	79245	69023	34196	46398	05964	64715	11330	17515
26	74618	89317	30146	25606	94507	98104	04239	44973	37636	88866
27	99442	19200	85406	45358	86253	60638	38858	44964	54103	57287
28	26869	44399	89452	06652	31271	00647	46551	83050	92058	83814
29	80988	08149	50499	98584	28385	63680	44638	91864	96002	87802
30	07511	79047	89289	17774	67194	37362	85684	55505	97809	67056
31	49779	12138	05048	03535	27502	63308	10218	53296	48687	61340
32	47938	55945	24003	19635	17471	65997	85906	98694	56420	78357
33	15604	06626	14360	79542	13512	87595	08542	03800	35443	52823
34	12307	27726	21864	00045	16075	03770	86978	52718	02693	09096
35	02450	28053	66134	99445	91316	25727	89399	85272	67148	78358
36	57623	54382	35236	89244	27245	90500	75430	96762	71968	65838
37	91762	78849	93105	40481	99431	03304	21079	86459	21287	76566
38	87373	31137	31128	67050	34309	44914	80711	61738	61498	24288
39	67094	41485	54149	86088	10192	21174	39948	67268	29938	32476
40	94456	66747	76922	87627	71834	57688	04878	78348	68970	60048
41	68359	75292	27710	86889	81678	79798	58360	39175	75667	65782
42	52393	31404	32584	06837	79762	13168	76055	54833	22841	98889
43	59565	91254	11847	20672	37625	41454	86861	55824	79793	74575
44	48185	11066	20162	38230	16043	48409	47421	21195	98008	57305
45	19230	12187	86659	12971	52204	76546	63272	19312	81662	96557
46	84327	21942	81727	68735	89190	58491	55329	96875	19465	89687
47	77430	71210	00591	50124	12030	50280	12358	76174	48353	09682
48	12462	19108	70512	53926	25595	97085	03833	59806	12351	64253
49	11684	06644	57816	10078	45021	47751	38285	73520	08434	65627

تعداد ستونها	تعداد سطرها									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
50	12896	36576	68686	08462	65652	76571	70891	09007	04581	01684
51	59090	05111	27587	90349	30789	50304	70650	06646	70126	15284
52	42486	67483	65282	19037	80588	73076	41820	46651	40442	40718
53	88662	03928	03249	85910	97533	88643	29829	21557	47328	36724
54	69403	03626	92678	53460	15465	83516	54012	80509	55976	46115
55	56434	70543	38696	98502	32092	95505	62091	39549	30117	98209
56	58227	62694	42837	29183	11393	68463	25150	86338	95620	39836
57	41272	94927	15413	40505	33123	63218	72940	98349	57249	40170
58	36819	01162	30425	15546	16065	68459	35776	64276	92868	07372
59	31700	66711	26115	55755	33584	18091	38709	57276	74660	90392
60	69855	63699	36839	90531	97125	87875	62824	03889	12538	24740
61	44322	17569	45439	41455	34324	90902	07978	26268	04279	76816
62	62226	36661	87011	66267	78777	78044	40819	49496	39814	73867
63	27284	19737	98741	72531	52741	26699	98755	19657	08665	16818
64	88341	21652	94743	77268	79525	44769	66583	30621	90534	62050
65	53266	18783	51903	56711	38060	69513	61963	80470	88018	86510
66	50527	49330	24839	42529	03944	95219	88724	37247	84166	23023
67	15655	07852	77206	35944	71446	30573	19405	57824	23576	23301
68	62057	22206	03314	83465	57466	10465	19891	32308	01900	67484
69	41769	56091	19892	96253	92808	45785	52774	49674	68103	65032
70	25993	72416	44473	41299	93095	17338	69802	98548	02429	85238
71	22842	57871	04470	37373	34516	04042	04078	35336	34393	97573
72	55704	31982	05234	22664	22181	40358	28089	15790	33340	18852
73	94258	18706	09437	96041	90052	80862	20420	24323	11635	91677
74	74145	20453	29657	98868	56695	53483	87449	35060	98942	62697
75	88881	12673	73961	89884	73247	97670	69570	88888	58560	72580
76	01508	56780	52223	35632	73347	71317	46541	88023	36656	76332
77	92069	43000	23233	06058	82527	25250	27555	20426	60361	63525
78	53366	35249	02117	68620	39388	69795	73215	01846	16983	78560
79	88057	54097	49511	74867	32192	90071	04147	46094	63519	07199
80	85492	82238	02668	91854	86149	28590	77853	81035	45561	16032
81	39453	62123	69611	53017	34964	09786	24614	49514	01056	18700
82	82627	98111	93870	56969	69566	62662	07353	84838	14570	14508
83	61142	51743	38209	31474	96095	15163	54380	77849	20465	03142
84	12031	32528	61311	53730	89032	16124	58844	35386	45521	59368
85	31313	59838	29147	76882	74328	09955	63673	96651	53264	29871
86	50767	41056	97409	44376	62219	35439	70102	99248	71179	26052
87	30522	95699	84966	26554	24768	72247	84993	85375	92518	16334
88	74176	19870	89874	64799	03792	57006	57225	36677	46825	14087
89	17114	93248	37065	91346	04657	93763	92210	43676	44944	75798
90	53005	11825	64608	87587	05742	31914	55044	41818	29667	77424
91	31985	81539	79942	49471	46200	27639	94099	42085	79231	03932
92	63499	60508	77522	15624	15088	78519	52279	79214	43623	69166
93	30506	42444	99047	66010	91657	37160	37408	85714	21420	80996
94	78248	16841	92357	10130	68990	38307	61022	56806	81016	38511
95	64996	84789	50185	32200	64382	29752	11876	00664	54547	62597
96	11963	13157	09136	01769	30117	71486	80111	09161	08371	71749
97	44335	91450	43456	90449	18338	19787	31339	60473	06606	89788
98	42277	11868	44520	01113	11341	11743	97949	49718	99176	42006
99	77562	18863	58515	90166	78508	14864	19111	57183	85808	59385

جدول A11
توزیع t

مقادیر z به ازای مقادیر مفروض تابع توزیع $F(z)$ (ر. ک. صفحه ۹۰۲)
مثال: برای ۹ درجه آزادی وقتی که $F(z) = ۰.۹۵$ ، $z = ۱.۸۳$

$F(z)$	تعداد درجه آزادی									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.33	0.29	0.28	0.27	0.27	0.27	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.73	0.62	0.58	0.57	0.56	0.55	0.55	0.55	0.54	0.54
0.8	1.38	1.06	0.98	0.94	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.88
0.9	3.08	1.89	1.64	1.53	1.48	1.44	1.42	1.40	1.38	1.37
0.95	6.31	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.90	1.86	1.83	1.81
0.975	12.7	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26	2.23
0.99	31.8	6.97	4.54	3.75	3.37	3.14	3.00	2.90	2.82	2.76
0.995	63.7	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17
0.999	318.3	22.3	10.2	7.17	5.89	5.21	4.79	4.50	4.30	4.14

$F(z)$	تعداد درجه آزادی									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.53	0.53	0.53	0.53
0.8	0.88	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.86	0.86	0.86	0.86
0.9	1.36	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.33	1.33
0.95	1.80	1.78	1.77	1.76	1.75	1.75	1.74	1.73	1.73	1.73
0.975	2.20	2.18	2.16	2.15	2.13	2.12	2.11	2.10	2.09	2.09
0.99	2.72	2.68	2.65	2.62	2.60	2.58	2.57	2.55	2.54	2.53
0.995	3.11	3.06	3.01	2.98	2.95	2.92	2.90	2.88	2.86	2.85
0.999	4.03	3.93	3.85	3.79	3.73	3.69	3.65	3.61	3.58	3.55

$F(z)$	تعداد درجه آزادی									
	22	24	26	28	30	40	50	100	200	∞
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.25	0.25	0.25
0.7	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.52
0.8	0.86	0.86	0.86	0.86	0.85	0.85	0.85	0.85	0.84	0.84
0.9	1.32	1.32	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28
0.95	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.68	1.68	1.66	1.65	1.65
0.975	2.07	2.06	2.06	2.05	2.04	2.02	2.01	1.98	1.97	1.96
0.99	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33
0.995	2.82	2.80	2.78	2.76	2.75	2.70	2.68	2.63	2.60	2.58
0.999	3.51	3.47	3.44	3.41	3.39	3.31	3.26	3.17	3.13	3.09

جدول A۱۲
توزیع مربع کی

مقادیر z به ازای مقادیر تابع توزیع $F(z)$ (ر.ک. صفحه ۹۰۴)
مثال: برای ۳ درجه آزادی وقتی که $F(z) = ۰.۹۹$ ، $z = ۱۱.۳۴$

$F(z)$	تعداد درجه آزادی									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.96	23.59	25.19

$F(z)$	تعداد درجه آزادی									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.005	2.60	3.07	3.57	4.07	4.60	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43
0.01	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26
0.025	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59
0.05	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85
0.95	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41
0.975	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17
0.99	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57
0.995	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00

$F(z)$	تعداد درجه آزادی									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	8.0	8.6	9.3	9.9	10.5	11.2	11.8	12.5	13.1	13.8
0.01	8.9	9.5	10.2	10.9	11.5	12.2	12.9	13.6	14.3	15.0
0.025	10.3	11.0	11.7	12.4	13.1	13.8	14.6	15.3	16.0	16.8
0.05	11.6	12.3	13.1	13.8	14.6	15.4	16.2	16.9	17.7	18.5
0.95	32.7	33.9	35.2	36.4	37.7	38.9	40.1	41.3	42.6	43.8
0.975	35.5	36.8	38.1	39.4	40.6	41.9	43.2	44.5	45.7	47.0
0.99	38.9	40.3	41.6	43.0	44.3	45.6	47.0	48.3	49.6	50.9
0.995	41.4	42.8	44.2	45.6	46.9	48.3	49.6	51.0	52.3	53.7

$F(z)$	تعداد درجه آزادی							> 100 (Approximation)
	40	50	60	70	80	90	100	
0.005	20.7	28.0	35.5	43.3	51.2	59.2	67.3	$\frac{1}{2}(h - 2.58)^2$
0.01	22.2	29.7	37.5	45.4	53.5	61.8	70.1	$\frac{1}{2}(h - 2.33)^2$
0.025	24.4	32.4	40.5	48.8	57.2	65.6	74.2	$\frac{1}{2}(h - 1.96)^2$
0.05	26.5	34.8	43.2	51.7	60.4	69.1	77.9	$\frac{1}{2}(h - 1.64)^2$
0.95	55.8	67.5	79.1	90.5	101.9	113.1	124.3	$\frac{1}{2}(h + 1.64)^2$
0.975	59.3	71.4	83.3	95.0	106.6	118.1	129.6	$\frac{1}{2}(h + 1.96)^2$
0.99	63.7	76.2	88.4	100.4	112.3	124.1	135.8	$\frac{1}{2}(h + 2.33)^2$
0.995	66.8	79.5	92.0	104.2	116.3	128.3	140.2	$\frac{1}{2}(h + 2.58)^2$

درستون آخر ، $h = \sqrt{2m-1}$ که در آن m تعداد درجات آزادی است.

مقادیر z که به‌ازای آنها تابع توزیع $F(z)$ (ر.ك. (۱۳)، بخش ۱۵.۲۰) دارای مقدار ۰.۹۵ است.

مثال : به‌ازای (ν, γ) درجه آزادی وقتی که $F(z) = ۰.۹۵$ ، $z = ۶.۰۹$

n	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
32	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

جدول A۱۳

توزیع F با (m, n) درجه آزادی (ادامه)

مقادیر z که به ازای آنها تابع توزیع $F(z)$ (ر.ک. (۱۳) بخش ۱۵.۲۰) دارای مقدار ۹۵ است.

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	∞
1	242	246	248	250	251	252	253	254
2	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.79	8.70	8.66	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.96	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.74	4.62	4.56	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.98	2.85	2.77	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.46	2.40
12	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.19	2.13
15	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.07	2.01
17	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.02	1.96
18	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99	1.97	1.91	1.84
22	2.30	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.85	1.78
24	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.80	1.73
26	2.22	2.07	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76	1.69
28	2.19	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.73	1.65
30	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.70	1.62
32	2.14	1.99	1.91	1.82	1.77	1.74	1.67	1.59
34	2.12	1.97	1.89	1.80	1.75	1.71	1.65	1.57
36	2.11	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.62	1.55
38	2.09	1.94	1.85	1.76	1.71	1.68	1.61	1.53
40	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.59	1.51
50	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.60	1.52	1.44
60	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48	1.39
70	1.97	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.45	1.35
80	1.95	1.79	1.70	1.60	1.54	1.51	1.43	1.32
90	1.94	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.41	1.30
100	1.93	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.39	1.28
150	1.89	1.73	1.64	1.53	1.48	1.44	1.34	1.22
200	1.88	1.72	1.62	1.52	1.46	1.41	1.32	1.19
1000	1.84	1.68	1.58	1.47	1.41	1.36	1.26	1.08
∞	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.24	1.00

مقادیر z که به ازای آنها تابع توزیع $F(z)$ (ر.ک. (۱۳) بخش ۱۵۰۲۰) دارای مقدار ۹۹٫۵ است.

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
2	98.5	99.0	99.2	99.3	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.79
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
70	7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64
90	6.93	4.85	4.01	3.54	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
150	6.81	4.75	3.92	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

توزیع F با (m, n) درجه آزادی (ادامه)

مقادیر z که به ازای آنها تابع توزیع $F(z)$ (ر.ك. (۱۳) بخش ۱۵۰۲۰) دارای مقدار ۹۹٫۵ است.

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	∞
1	6056	6157	6209	6261	6287	6300	6330	6366
2	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	27.2	26.9	26.7	26.5	26.4	26.4	26.2	26.1
4	14.5	14.2	14.0	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	10.1	9.72	9.55	9.38	9.29	9.24	9.13	9.02
6	7.87	7.56	7.40	7.23	7.14	7.09	6.99	6.88
7	6.62	6.31	6.16	5.99	5.91	5.86	5.75	5.65
8	5.81	5.52	5.36	5.20	5.12	5.07	4.96	4.86
9	5.26	4.96	4.81	4.65	4.57	4.52	4.42	4.31
10	4.85	4.56	4.41	4.25	4.17	4.12	4.01	3.91
11	4.54	4.25	4.10	3.94	3.86	3.81	3.71	3.60
12	4.30	4.01	3.86	3.70	3.62	3.57	3.47	3.36
13	4.10	3.82	3.66	3.51	3.43	3.38	3.27	3.17
14	3.94	3.66	3.51	3.35	3.27	3.22	3.11	3.00
15	3.80	3.52	3.37	3.21	3.13	3.08	2.98	2.87
16	3.69	3.41	3.26	3.10	3.02	2.97	2.86	2.75
17	3.59	3.31	3.16	3.00	2.92	2.87	2.76	2.65
18	3.51	3.23	3.08	2.92	2.84	2.78	2.68	2.57
19	3.43	3.15	3.00	2.84	2.76	2.71	2.60	2.49
20	3.37	3.09	2.94	2.78	2.69	2.64	2.54	2.42
22	3.26	2.98	2.83	2.67	2.58	2.53	2.42	2.31
24	3.17	2.89	2.74	2.58	2.49	2.44	2.33	2.21
26	3.09	2.82	2.66	2.50	2.42	2.36	2.25	2.13
28	3.03	2.75	2.60	2.44	2.35	2.30	2.19	2.06
30	2.98	2.70	2.55	2.39	2.30	2.25	2.13	2.01
32	2.93	2.66	2.50	2.34	2.25	2.20	2.08	1.96
34	2.89	2.62	2.46	2.30	2.21	2.16	2.04	1.91
36	2.86	2.58	2.43	2.26	2.17	2.12	2.00	1.87
38	2.83	2.55	2.40	2.23	2.14	2.09	1.97	1.84
40	2.80	2.52	2.37	2.20	2.11	2.06	1.94	1.80
50	2.70	2.42	2.27	2.10	2.01	1.95	1.82	1.68
60	2.63	2.35	2.20	2.03	1.94	1.88	1.75	1.60
70	2.59	2.31	2.15	1.98	1.89	1.83	1.70	1.54
80	2.55	2.27	2.12	1.94	1.85	1.79	1.66	1.49
90	2.52	2.24	2.09	1.92	1.82	1.76	1.62	1.46
100	2.50	2.22	2.07	1.89	1.80	1.73	1.60	1.43
150	2.44	2.16	2.00	1.83	1.73	1.66	1.52	1.33
200	2.41	2.13	1.97	1.79	1.69	1.63	1.48	1.28
1000	2.34	2.06	1.90	1.72	1.61	1.54	1.38	1.11
∞	2.32	2.04	1.88	1.70	1.59	1.52	1.36	1.00

تابع توزیع $F(x) = P(T \leq x)$ متغیر تصادفی T بخش ۱۹.۲۰

وقتی که $n=4$ ، $F(4)=1-0.167=0.833$ ، $F(3)=1-0.375=0.625$ ،

[illegible]

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

absolute	مطلق
– frequency	فراوانی مطلق
– value	قدر مطلق
abstract concept	مفهوم مجرد
acceleration	شتاب
accumulation point	نقطه انباشتگی
addition	جمع
algebra	جبر
alternating current	جریان متناوب
alternative hypothesis	فرض مقابل
amplitude	دامنه
analytic	تحلیلی
– continuation	ادامه تحلیلی
– function	تابع تحلیلی
– line integrals	انتگرالهای روی خط تحلیلی
– mapping	نگاشت تحلیلی
– residue	مانده تحلیلی
angle	زاویه
annulus	طوق

approximate solution	جواب تقریبی
approximation	تقریب
arc	قوس
Archimedes' principle	اصل ارشمیدس
area	مساحت
Argand diagram	نمودار آرگان
augmented matrix	ماتریس افزوده
autonomous	خودگردان
auxiliary equation	معادله کمکی
average	متوسط
back ward differences	تفاضلهای پس رونده
bar chart	نمودار میله‌ای
basis	پایه
beam	میله
bijective mapping	نگاشت دوسویی
bilinear form	صورت دوخطی
binomial	دوجمله‌ای
bounded	کراندار
— sequence	دنباله کراندار
capacitance	ظرفیت
capacitor	خازن
cardioid	دلوار
cartesian coordinates	مختصات دکارتی
Cauchy	کشی
— integral formula	فرمول انتگرال کشی
Cayley transformation	تبدیل کیلی

centrifugal force	نیروی مرکز گرا
chain rule	قاعده زنجیری
characteristic polynomial	چند جمله ای مشخصه
chemical reaction	واکنش شیمیایی
circle	دایره
circuit	مدار
circulation	گردش
class frequency	فراوانی رده ای
coefficient	ضریب
cofactor	همسازه
coin	سکه
collinear	هم خط
commutative	جا به جایی
commutativity	جا به جایی بودن
comparison test	آزمون مقایسه
complement	مکمل
complementation rule	قاعده مکمل گیری
complex	مختلط
— function	تابع مختلط
— plane	صفحه مختلط
component	مؤلفه
compressible fluid	سیال تراکم پذیر
conditional probability	احتمال شرطی
conformal mapping	نگاشت همبسی
connected set	مجموعه همبند
continuation	ادامه
continuity	پیوستگی

continuous	پیوسته
convergence	همگرایی
— test	آزمون همگرایی
convolution	پیچش
coplanar	هم صفحه
correlation	همبستگی
covariance	کواریانس
Cramer's rule	قاعده کرامر
critical	بحرانی
— damping	میرایی بحرانی
cross product	ضرب خارجی
cubic spline	اسپلاین مکعبی
curvature	انحناء
curve	منحنی
cylindrical coordinates	مختصات استوانه‌ای
damped oscillation	نوسان میرا
decreasing sequence	دنباله نزولی
density	چگالی
derivative	مشتق
desk calculation	محاسبات دستی
determinant	دترمینان
diagonal matrix	ماتریس قطری
differentiable	مشتق پذیر
differential	دیفرانسیل
— equation	معادله دیفرانسیل
— operator	عملگر دیفرانسیل

differentiation	مشتقگیری
dimension	بعد
directed line segment	پاره خط جهت دار
discrete random variable	متغیر تصادفی گسسته
disjoint events	پیشامدهای جدا از هم
distribution	توزیع
divergence	دیورژانس
divergent	واگرا
domain	دامنه
driving force	نیروی محرك
echelon form	صورت پلکانی
eigenvalue	مقدار ویژه
eigenvector	بردار ویژه
electrical network	شبکه الکتریکی
electric circuit	مدار الکتریکی
electromotive force	نیروی محرکه الکتریکی
elementary function	تابع مقدماتی
elimination method	روش حذفی
ellipsoid	بیضی وار
elliptic	بیضی گون
empty event	پیشامد تهی
entire function	تابع تام
equation	معادله
equipotential	هم پتانسیل
error	خطا
essential singularity	تکین ضروری
estimate	برآورد

euclidean norm	نرم اقلیدسی
evaporation	تبخیر
even function	تابع زوج
event	پیشامد
existence theorem	قضیه وجود
experiment	آزمایش
explicit solution	جواب ضمنی
exponential growth	رشد نمایی
factorial function	تابع فاکتوریل
field	میدان
finite	متناهی
floating point	نقطه شناور
flux	شار
flywheel	چرخ طیار
forced motion	حرکت واداشته
forced oscillations	نوسانات واداشته
fortran	فرترن
forward differences	تفاضلهای پیش رونده
four-cusped hypocycloid	درونچرخزاد چهار گوش
four-terminal network	شبکه چهار سر
frequency	فراوانی
friction	اصطکاک
full wave rectification	یکسو شده تمام
function	تابع
fundamental	بنیادی
general solution	جواب عمومی

geometric series	سری هندسی
half-life time	نیم عمر
half-range fourier series	سری فوریه نیم دامنه
half-wave rectifier	یکسو کننده نیم موجی
harmonic	همساز
helix	مارپیچ
histogram	بافت نگار
holomorphic	هلوریمخت
homogeneous	همگن
hyperbolic	هذلولی گون
hyperboloid	هذلولی وار
hypergeometric	فوق هندسی
hypocycloid	درونچرخزاد
idempotent matrix	ماتریس خود توان
identity	اتحاد، همانی
ill-conditioned	بد طرح
image	نقش
imaginary	موهومی
impedance	امپدانس
implicit solution	جواب ضمنی
impossible event	پیشامد غیر ممکن
improper integral	انتگرال ناسره
increasing sequence	دنباله صعودی
independence	استقلال
indicial equation	معادله شاخصی
inductive time constant	ثابت زمانی القایی

inductor	القاء کننده
inequality	نامساوی
inertia	لختی
infinite sequence	دنباله نامتناهی
infinity	بینهایت
initial condition	شرط اولیه
injective mapping	نگاشت یک به یک
inner product	ضرب داخلی
input	ورودی
instantaneous current	شدت جریان لحظه ای
integral equations	معادلات انتگرالی
integrating factor	عامل انتگرال ساز
integration	انتگرال گیری
interpolation	درونیابی
interquartile range	برد میان چارکی
intersection	اشتراک
interval	فاصله
invariance	ناوردایی
inverse	معکوس
inversion	انعکاس
involute	گسترنده
irrotational	غیر دورانی
isocline	همشیب
isogonal trajectories	مسیرهای همزاویه
isolated singularity	تکینگی تنها
iteration	تکرار

latent root	ریشهٔ راکد
LC - circuit	مدار LC
least squares	حد اقل مربعات
left - hand derivative	مشتق چپ
level	تراز
likelihood function	تابع درست نمایی
limit	حد
linearity principle	اصل خطی بودن
line integral	انتهگرال روی خط
logarithm	لگاریتم
logistic law	قانون لوژیستیکی
machine language program	برنامه بد زبان دستگاه
mapping	نگاشت
marginal distribution	توزیع حاشیه‌ای
mass action	اثر جرم
mathematical expectation	امید ریاضی
matrix	ماتریس
mean value theorem	قضیهٔ مقدار میانگین
median	میان
membrane	غشاء
memory	حافظه
meromorphic function	تابع برخه‌ریخت
middle quartile	چارک میانی
minor	کهاد
mixed triple product	ضرب سه گانهٔ مختلط
mode	مد

modeling	مدلسازی
modular surface	سطح پیمانه‌ای
modulus	مدول
moment	گشتاور
monotone	یکنوا
M - test	M آزمون
multinomial distribution	توزیع چند جمله‌ای
multiple point	نقطه چند جمله‌ای
multiplication	ضرب
multiplicity	چند بارگی
multiply connected	همبند چند گانه
mutual inductance	القای متقابل
mutually exclusive events	پیشامدهای دوه‌دو ناسازگار
neighbourhood	همسایگی
network	شبکه
node	گره
nonorientable surface	سطح جهت ناپذیر
nonparametric test	آزمون ناپارامتری
norm	نرم
normal	نرمال [= قائم]
null	پوچ [= صفر]
nullity	پوچی
number sphere	کره عددی
observation	مشاهده
OC curve	منحنی OC [= منحنی مشخصه عمل کننده]
odd function	تابع فرد

one - sided test	آزمون يك طرفه
one - to - one mapping	نگاشت يك به يك
operator	عملگر
order	مرتبه
ordinary differential equation	معادله ديفرانسیل معمولی
orientable surface	سطح جهت پذیر
orthogonal	متعامد
— trajectories	مسیرهای متعامد
— triad	سه تایی متعامد
orthonormal	متعامدیکه
oscillation	ارتعاش [= نوسان]
osculating plane	صفحه بوسان
outcome	برآمد
output	خروجی
overdamping	میرایی شدید
paired comparison	مقایسه زوجی
paraboloid	سه می وار
parallelepiped	متوازی السطوح
parallelogram	متوازی الاضلاع
parametric representation	نمایش پارامتری
particular solution	جواب خصوصی
pendulum	آونگ
percentile	صده
permutation	جابجاشت
phase	فاز
piecewise continuous	پیوسته تکه ای
pilot program	برنامه راهنما

planimeter	مساحت سنج
polar	قطبی
pole	قطب
polynomial	چند جمله ای
position vector	بردار مکان
postmultiplication	پیش ضرب کردن
potential	پتانسیل
power	توان
predictor	پیشگو
premultiplication	پس ضرب کردن
primitive period	دوره اولیه
probability	احتمال
product	حاصلضرب [= ضرب]
projection	تصویر
proper node	گره سره
punch card	کارت منگنه شده
pure imaginary number	عدد موهومی محض
quadratic	درجه دوم
quality control	کنترل کیفیت
quartile	چارک
quotient	خارج قسمت
radiation	تشعشع
random	تصادفی
— variable	متغیر تصادفی
range	برد
rank	مرتبه

ratio test	آزمون نسبت
RC - circuit	مدار آر سی
reactance	راکتانس
real	حقیقی
rectifiable curve	منحنی راستی‌پذیر
rectifier	یکسوکننده
recurrence relation	رابطه بازگشتی
region	ناحیه
regression	رگرسیون
regular	منظم
relative	نسبی
relaxation	واهلش
remainder	باقیمانده
removable singularity	تکینگی برداشتی
representation	نمایش
residual	پس مانده
residue	مانده
resistance (→ resistor)	مقاومت
resistor (→ resistance)	مقاومت
resonance	تشدید
response	پاسخ
root	ریشه
rotation	دوران
row	سطر
rule	قاعده
saddle point	نقطه زینی
sample	نمونه

scalling	مقیاس گذاری
semicubical parabola	سه می نیم مکعبی
sequence	دنباله
series	سری
shifting theorems	قضایای انتقال
sign test	آزمون علامت
similarity transformation	تبدیل تشابه
simply connected	همبند ساده
simultaneous	همزمان
single sampling plane	طرح نمونه گیری تک
singular	تکین
singularity	تکینگی
skew - hermition	ضد هرمیتی
skewness	چاولگی
skew - symmetric matrix	ماتریس ضد متقارن
sliding vector	بردار لغزان
sparse system	دستگاه تنک
spectral radius	شعاع طیفی
spectrum	طیف
speed	تندی
sphere	کره
spiral point	نقطه حلزونی
spline	اسپلاین
stability	پایداری
stagnation point	نقطه رکود
staircase function	تابع پلکانی
standard deviation	خطای معیار

standardized variable	متغیر استاندارد شده
statistics	آمار
steady state	حالت مانا
step - by - step method	روش گام به گام
step function	تابع پله‌ای
stereographic projection	افکنش کنبجنگاری
stochastic variable	متغیر استوکاستیک
stream function	تابع جریان
subevent	زیرپیش آمد
submatrix	زیر ماتریس
subsidiary equation	معادله کمکی
successive	متوالی
superposition principle	اصل برهم نهی
surface	سطح
— integral	انتگرال روی سطح
surjective	پوششی
symmetric	متقارن
tally chart	جدول نمودار خط نشانی
tangent	مماس ، تانژانت
termwise integration	انتگرال گیری جمله به جمله
test	آزمون
tetrahedron	چهاروجهی
thermal conductivity	ضریب هدایت حرارتی
three - eight's rule	قاعده سه - هشت
three - sigma limits	حدود سه - سیگما
throwback	عقب گرد

torus	چنبیره
trace	اثر
tractrix	کشاننده
trajectory	مسیر
transformation	تبدیل
transient state	حالت گذرا
translation	انتقال
trapezoidal rule	قاعده دوزنقه‌ای
trend	انحراف [= گرایش]
triad	سه تایی
triangle inequality	نا برابری مثلثی
triangular matrix	ماتریس مثلثی
trihedron	سه وجهی
triple integral	انتگرال سه گانه
trivial solution	جواب بدیهی
torsion	تاب
truncation error	خطای قطع
tuning	تنظیم
twisted curve	منحنی پیچیده
unacceptable lot	توده ناپذیر فنی
undamped system	دستگاه غیر میرا
underdamping	میرایی خفیف
undetermined coefficients	ضرایب نامعین
uniform	یکنواخت
uniqueness	یکتایی
unit	یکه

unitary	یکانی
unstable	ناپایدار
upper quartile	چارک بالایی
variable	متغیر
variate	واریت
vector	بردار
velocity	سرعت
voltage drop	افت ولتاژ
volume	حجم
vortex point	نقطه گردابی
vorticity	چرخش
wave equation	معادله موج
well - conditioned	خوش طرح
zero	صفر

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

experiment	آزمایش
test	آزمون
M - test	M -
sign test	- علامت
comparison test	- مقایسه
nonparametric test	- ناپارامتری
ratio test	- نسبت
convergence test	- همگرایی
one - sided test	- یک طرفه
statistics	آمار
pendulum	آونگه
identity	اتحاد (← همانی)
trace	اثر
mass action	- جرم
probability	احتمال
conditional probability	- شرطی
continuation	ادامه
analytic continuation	- تحلیلی
oscillation	ارتعاش [← نوسان]

spline	اسپلاین
cubic spline	— مکعبی
independence	استقلال
intersection	اشتراک
friction	اصطکاک
principle	اصل
Archimedes' principle	— ارشمیدس
superposition principle	— برهم نهی
linearity principle	— خطی بودن
voltage drop	افت ولتاژ
stereographic projection	افکنش کُنچنگکاری
inductor	القاء کننده
mutual inductance	القای متقابل
impedance	امپدانس
mathematical expectation	امید ریاضی
translation	انتقال
integral	انتگرال
line integral	— زوی خط
surface integral	— روی سطح
triple integral	— سه گانه
improper integral	— ناسره
integration	انتگرال گیری
termwise integration	— جمله به جمله
analytic line integrals	انتگرالهای روی خط تحلیلی
trend	انحراف [— گرایش]
standard deviation	انحراف معیار
curvature	انحناء

inversion	انعکاس
histogram	بافت نگار
remainder	باقیمانده
critical	بحرانی
ill - conditioned	بد طرح
outcome	برآمد
estimate	برآورد
range	برد
interquartile range	- میان چارکی
vector	بردار
sliding vector	- لغزان
position vector	- مکان
eigenvector	- ویژه
program	برنامه
machine language program	- به زبان دستگاه
pilot program	- راهنما
dimension	بعد
fundamental	بنیادی
elliptic	بیضی گون
ellipsoid	بیضی وار
infinity	بینهایت
directed line segment	پاره خط جهت دار
response	پاسخ
stability	پایداری
basis	پایه
potential	پتانسیل

coin tossing	پرتاب سکه
premultiplication	پس ضرب کردن
residual	پس مانده
null	بوج [— صفر]
nullity	پوچی
surjective	پوششی
convolution	پیچش
event	پیشامد
empty event	— تهی
impossible event	— غیرممکن
disjoint events	— های جدا از هم
mutually exclusive events	— های دوه‌دو ناسازگار
post multiplication	پیش ضرب کردن
predictor	پیشگو
continuity	پیوستگی
continuous	پیوسته
piecewise continuous	— تکه‌ای
torsion	تاب
function	تابع
meromorphic function	— برخه‌ریخت
staircase function	— پلکانی
step function	— پله‌ای
entire function	— تام
analytic function	— تخیلی
stream function	— جریان
likelihood function	— درست نمایی
even function	— زوج

factorial function	- فاکتوریل
odd function	- فرد
complex function	- مختلط
elementary function	- مقدماتی
tangent	تانژانت [← مماس]
evaporation	تبخیر
transformation	تبدیل
similarity transformation	- تشابه
Cayley transformation	- کیلی
analytic	تحلیلی
level	تراز
resonance	تشدید
radiation	تشنشع
random	تصادفی
projection	تصویر
backward differences	تفاضلهای پس‌رونده
forward differences	تفاضلهای پیش‌رونده
approximation	تقریب
iteration	تکرار
singular	تکین
singularity	تکینگی
removable singularity	- برداشتی
isolated singularity	- تنها
essential singularity	- ضروری
speed	تندی
tuning	تنظیم
power	توان

unacceptable lot	توده ناپذیرفتنی
distribution	توزیع
multinomial distribution	- چند جمله‌ای
marginal distribution	- حاشیه‌ای
inductive time constant	ثابت زمانی القایی
commutative	جاب‌جایی
commutativity	جاب‌جایی بودن
permutation	جاب‌گشت
algebra	جبر
tally chart	جدول نمودار خط نشانی
alternating current	جریان متناوب
addition	جمع
solution	جواب
trivial solution	- بدیهی
approximate solution	- تقریبی
particular solution	- خصوصی
implicit solution	- ضمنی
general solution	- عمومی
quartile	چارک
upper quartile	- بالایی
middle quartile	- میانی
skewness	چاوالگی
vorticity	چرخش
flywheel	چرخ طیار
density	چگالی

torus	چنبره
multiplicity	چند بارگی
polynomial	چند جمله‌ای
characteristic polynomial	- مشخصه
tetrahedron	چهاروجهی
product	حاصلضرب [← ضرب]
memory	حافظه
state	حالت
transient state	- گذرا
steady state	- مانا
volume	حجم
limit	حد
least squares	حداقل مربعات
three - sigma limits	حدود سه - سیگما
forced motion	حرکت واداشته
real	حقیقی
quotient	خارج قسمت
capacitor	خازن
output	خروجی
error	خطا
truncation error	- ی قطع
autonomous	خودگردان
well - conditioned	خوش طرح
domain, amplitude	دامنه
circle	دایره

determinant	دترمینان
quadratic	درجه دوم
hypocycloid	درونچرخزاد
four-cusped hypocycloid	- چهار گوش
interpolation	درونیابی
system	دستگاه
sparse system	- تنك
undamped system	- غیر میرا
cardioid	دلوار
sequence	دنباله
increasing sequence	- صعودی
bounded sequence	- کراندار
infinite sequence	- نامتناهی
decreasing sequence	- نزولی
binomial	دوجمله‌ای
rotation	دوران
primitive period	دوره اولیه
divergence	دیورژانس
recurrence relation	رابطه بازگشتی
reactance	راکتانس
exponential growth	رشد نمایی
regression	رگرسیون
elimination method	روش حذفی
step - by - step method	روش گام به گام
root	ریشه
latent root	- را کد

angle	زاویه
subevent	زیرپیش‌آمد
submatrix	زیر ماتریس
velocity	سرعت
series	سری
half-range fourier series	- فوریه نیم دامنه
geometric series	- هندسی
surface	سطح
modular surface	- پیمانه‌ای
orientable surface	- جهت‌پذیر
nonorientable surface	- جهت‌ناپذیر
row	سطر
triad	سه‌تایی
orthogonal triad	- متعامد
semicubical parabola	سه‌می نیم مکعبی
paraboloid	سه‌می وار
trihedron	سه‌وجهی
compressible fluid	سیال تراکم‌پذیر
flux	شار
network	شبکه
electrical network	- الکتریکی
four-terminal network	- چهارسر
acceleration	شتاب
instantaneous current	شدت جریان لحظه‌ای
initial condition	شرط اولیه
spectral radius	شعاع طیفی

percentile	صداك
zero	صفر
null	صفر (← بوج)
plane	صفحه
osculating plane	- بوسان
complex plane	- مختلط
echelon form	صورت پلکانی
bilinear form	صورت دوخطی
skew - hermitian	ضد هر میتی
undetermined coefficients	ضرایب نامعین
multiplication, product	ضرب (← حاصلضرب)
cross product	- خارجی
inner product	- داخلی
mixed triple product	- سه گانه مختلط
coefficient	ضریب
thermal conductivity	- هدایت حرارتی
single sampling plan	طرح نمونه گیری تک
annulus	طوق
spectrum	طیف
capacitance	ظرفیت
integrating factor	عامل انتگرال ساز
pure imaginary number	عدد موهومی محض
throwback	عقب گرد
operator	عملگر

differential operator	— دیفرانسیل
membrane	غشاء
irrotational	غیردورانی
phase	فاز
interval	فاصله
frequency	فراوانی
class frequency	— رده‌ای
absolute frequency	— مطلق
fortran	فرترن
alternative hypothesis	فرض مقابل
Cauchy integral formula	فرمول انتگرال کشی
hypergeometric	فوق هندسی
normal	قائم (← نرمال)
rule	قاعده
trapezoidal rule	— دوزنقه‌ای
chain rule	— زنجیری
three - eight's rule	— سه - هشت
Cramer's rule	— کرامر
complementation rule	— مکمل گیری
logistic law	قانون لوژیستیکی
absolute value	قدر مطلق
shifting theorems	قضایای انتقال
theorem	قضیه
existence theorem	— وجود
pole	قطب

polar	قطبی
arc	قوس
punch card	کارت منگنه شده
bounded	کراندار
sphere	کره
number sphere	- عددی
tractrix	کشاننده
Cauchy	کشی
quality control	کنترل کیفیت
covariance	کوواریانس
minor	کهاد
trend	گرایش (← انحراف)
vortex	گردابی
circulation	گردش
node	گره
proper node	- سره
involute	گسترنده
moment	گشتاور
inertia	لختی
logarithm	لگاریتم
matrix	ماتریس
augmented matrix	- افزوده
idempotent matrix	- خود توان
skew - symmetric matrix	- ضد متقارن

diagonal matrix	— قطری
triangular matrix	— مثلثی
helix	مازیج
residue	مانده
analytic residue	— تحلیلی
orthogonal	متعامد
orthonormal	— یک‌که
variable	متغیر
standardized variable	— استاندارد شده
stochastic variable	— استوکاستیک
random variable	— تصادفی
discrete random variable	— تصادفی گسسته
symmetric	متقارن
finite	متناهی
parallelogram	متوازی الاضلاع
parallelepiped	متوازی السطوح
successive	متوالی
average	متوسط
connected set	مجموعه همبند
desk calculation	محاسبات دستی
coordinates	مختصات
cylindrical coordinates	— استوانه‌ای
cartesian coordinates	— دکارتی
complex	مختلط
mode	مد
circuit	مدار
RC - circuit	— آر سی

LC - circuit	LC -
electric circuit	- الکتریکی
modeling	مدلسازی
modulus	مدول
order, rank	مرتبه
area	مساحت
planimeter	مساحت سنج
trajectory	مسیر
orthogonal trajectories	- های متعامد
isogonal trajectories	- های همزاویه
observation	مشاهده
derivative	مشتق
left - hand derivative	- چپ
diffrentiable	مشتقپذیر
differentiation	مشتقگیری
absolute	مطلق
integral equations	معادلات انتگرالی
equation	معادله
differentiai equation	- دیفرانسیل
ordinary differential equation	- دیفرانسیل معمولی
indicial equation	- شاخصی
auxiliary equation, subsidiary equation	- کمکی
wave equation	- موج
inverse	معکوس
abstract concept	مفهوم مجرد
resistance [= resistor]	مقاومت
paired comparison	مقایسه زوجی

eigenvalue	مقدار ویژه
scaling	مقیاس گذاری
complement	مکمل
tangent	مماس (← تا نژانت)
curve	منحنی
twisted curve	— تابدار
rectifiable curve	— راستی پذیر
OC curve	منحنی OC [← منحنی مشخصه عمل کننده]
OC curv	منحنی مشخصه عمل کننده (← منحنی OC)
regular	منظم
component	مؤلفه
imaginary	موهومی
median	میان
field	میدان
damping	میرایی
critical damping	— بحرانی
underdamping	— خفیف
overdamping	— شدید
beam	میل
triangle inequality	نا برابری مثلثی
unstable	نا پایدار
region	ناحیه
inequality	نامساوی
invariance	ناوردایی
norm	نرم
euclidean norm	— اقلیدسی

normal	نرمال [← قائم]
relative	نسبی
image	نقش
point	نقطه
accumulation point	— انباشتگی
multiple point	— چند گانه
spiral point	— حلزونی
stagnation point	— رکود
saddle point	— زینی
floating point	— شناور
mapping	نگاشت
analytic mapping	— تحلیلی
bijective mapping	— دوسویی
conformal mapping	— هم‌مدیسی
injective mapping [=one - to - one mapping]	— یک به یک
representation	نمایش
parametric representation	— پارامتری
Argand diagram	نمودار آرگان
bar chart	نمودار میله‌ای
sample	نمونه
oscillation	نوسان (← ارتعاش)
damped oscillation	— میرا
forced oscillations	نوسانات واداشته
force	نیرو
driving force	— ی محرک
electromotive force	— ی محرکه الکتریکی
centrifugal force	— ی مرکز گرا

half - life time	نیم عمر
variate	واریت
chemical reaction	واکنش شیمیایی
divergent	واگرا
relaxation	واهلش
input	ورودی
hyperbolic	هذلولی گون
hyperboloid	هذلولی وار
holomorphic	هلوریکت
identity	همانی (← اتحاد)
correlation	همبستگی
connected	همبند
multiply connected	- چندگانه
simply connected	- ساده
equipotential	هم پتانسیل
collinear	هم خط
simultaneous	همزمان
harmonic	همساز
cofactor	همسازه
neighbourhood	همسایگی
isocline	همشیب
coplanar	هم صفحه
convergence	همگرایی
homogeneous	همگن
unitary	یکانی

uniqueness	یکتایی
full wave rectification	یکسو شده تمام
rectifier	یکسو کننده
half - wave rectifier	- نیم موجی
monotone	یکنوا
uniform	یکنواخت
unit	یکه

فهرست راهنما

آدرس ۱۰۱۳	آمبر ۵۶
آرگومان ۷۶۳	آوند ۷۶۳
آزاد توزیع ۱۲۴۴	آونگ ۱۱۷، ۱۹۳
آزمایش تصادفی ۱۱۳۴	
آزمون	اتحاد لاگرانژ ۳۷۴
— M وایر شتراس ۹۴۴	اثر جرم ۳۳
— دو طرفه ۱۲۱۵	اثر ماتریس ۴۷۹
— ریشه ۸۹۵، ۸۹۸	اجتماع پیشامدها ۱۱۳۶، ۱۱۳۷، ۱۱۳۸
— علامت ۱۲۴۵	احتمال ۱۱۴۰
— فرض ۱۲۱۲	— شرطی ۱۱۴۳
— لاینیتس ۸۸۹	ادامه تحلیلی ۹۲۸
— مربعی کی ۱۲۴۰	ادامه دوره ای ۶۵۴
— مقایسه ۸۹۱	ارقام محافظ ۱۰۱۲
— ناپارامتری ۱۲۴۴	اسپلین ۱۰۴۱
— نسبت ۸۹۳، ۸۹۷	— مکعبی ۱۰۴۲
— همگرایی ۸۸۹، ۸۹۱	استرات ۱۱۰۳
— يك طرفه ۱۲۱۵	استقلال از مسیر ۸۵۷، ۶۱۷
آلگون ۱۰۱۴	استقلال خطی ۹۳، ۱۳۳، ۳۴۹، ۴۱۸
آمار ۱۱۱۹	استنباط آماری ۱۱۲۱

اسکالر ۳۳۶، ۳۴۷	- دو گانه ۵۶۱، ۵۶۹
اسلنگ ۱۱۰	- روی خط ۵۵۱، ۵۶۹، ۶۱۰، ۸۲۳
اشتباه ۱۰۱۳	- تابع تحلیلی ۸۴۲
اشترک پیشامدها ۱۱۳۶، ۱۱۳۸	- مختلط ۸۴۱
اصطکاک ۳۲	- روی سطح ۵۹۰
اصل	- روی مرز ۸۵۹
- ارشمیدس ۱۱۸	- روی منحنی ۵۵۰
- برهم نهی ۸۶	- سه گانه ۵۹۶
- کانتور-ددکیند ۸۸۸	- سینوسی ۶۷۷، ۹۳۱
- ماکزیمم ۱۰۰۰	- مکمل ۱۳۳۹
- همگرایی ۸۸۵، ۸۸۶	- فرئل ۹۳۱
- - کوشی ۸۸۵، ۸۸۶	- فوریه ۶۷۷، ۷۱۳، ۹۷۶
اصول موضوعه احتمال ۱۱۴۱	- کسینوس ۱۱۱۷
اعداد	- مختلط ۶۸۳
- اوایلر ۹۳۵	- لگاریتمی ۱۳۴۰
- برنولی ۹۳۵	- مختلط ۸۴۱
- تصادفی ۱۱۹۳	- معین ۸۴۲
- مختلط مزدوج ۷۶۰	- ناسره ۹۷۲
اعمال مقدماتی ۴۱۰	- نامعین ۸۴۲
افت ولتاژ ۵۶	- نمایی ۱۱۱۶، ۱۳۳۹
افکنش کنجنگاری ۹۵۵	انتگرالگیری
القای متقابل ۳۲۹	- از سری ۹۱۹، ۹۴۲
الگوریتم گاوس ۴۰۵، ۱۰۷۷	- تبدیلات لاپلاس ۲۷۹، ۲۹۶
امپدانس مختلط ۱۶۶	- توابع مختلط ۸۴۲
امید ریاضی ۱۱۶۰، ۱۱۶۳، ۱۱۸۸	- جمله به جمله ۹۱۹، ۹۴۳
انتقال ۳۳۶، ۸۱۷	- سری توانی ۹۱۹
انتگرال	- سریهای مجانبی ۱۱۱۳

۱۰۴۷ - عددی	- میان چارکی ۱۱۳۳
۸۶۱ - نامین	- نمونه ۱۱۳۳
انتگرالهای لاپلاس ۶۸۱	بردار
انجمنی ۳۴۴	- پوچ ۳۴۵
انحراف معیار يك توزيع ۱۱۶۵	- سرعت ۵۱۴، ۳۶۹
انحراف معیار يك نمونه ۱۱۳۵	- صفر ۳۴۵
انحنا ۵۱۱	- قائم ۳۵۷، ۳۵۶
اندازه بردار ۳۳۷	- - اصلی يکه ۵۱۱
اندازه نمونه ۱۱۳۵	- - دوم يکه ۵۱۱
انعکاس ۸۵۷	- - يکه ۵۷۷، ۵۱۱
اهم ۵۶	- گشتاور ۳۶۸
	- لغزان ۳۳۸
بافت نگار ۱۱۲۵	- مقید ۳۳۸
باقیمانده سری ۸۸۱، ۲۵۴	- مکان ۳۴۵
بحرانی میرایی ۱۱۶	- مماس ۵۱۵
بخش اصلی ۹۵۷	- - يکه ۵۱۵
بخشپذیری ۳۴۷	- ویژه ۱۰۹۷، ۴۶۷
بدطرح ۱۵۸۸، ۱۵۲۲	- های سه تایی چپگرد ۳۴۶
برآمدن ۱۱۳۴	- های متعامد ۳۶۱، ۳۵۳، ۳۴۵
برآورد	برنامه به زبان دستگاه ۱۵۱۴
- پارامترها ۱۱۹۴	برنامه راهنمایی ۱۵۱۵
- فاصله ای ۱۲۵۵، ۱۱۹۵	بسامد طبیعی ۱۵۱
- نقطه ای ۱۱۹۴	بسط
برآیند نیروها ۳۴۲	- تابع ویژه ای ۲۵۶
برازاندن منحنی ۱۵۹۲	- حول مراکز مختلف ۹۲۷
برد	- مجانبی ۱۱۵۷
- تابع ۷۷۵	- نیم دامنه ای ۶۵۵

۴۲۲ پوچی	بعد ۳۴۹
۳۹۹ پوششی	بورد، ژ. س. ۲۲
۱۱۰ پوند	بوفون ۱۱۴۵
۲۹۹ پیچش	بویلر، ۲۹
۱۱۳۵ پیشامد	بیضی ۵۰۳
- نهی ۱۱۳۶	بیضی گون سهمی وار ۵۸۰
- غیرممکن ۱۱۳۶	بیضی وار ۵۸۰
- مستقل ۱۱۴۴	
- های دودوناسازگار ۱۱۳۸	پارامتر ۱۱۹۴
- های مجزا ۱۱۳۸	پاره خط جهت دار ۳۳۷
پیش ضرب کردن ۳۹۷	پاسخ ۴۹، ۱۴۹
پیش فضای هیلبرت ۳۶۰	پایداری ۴۸۷
پیشگو ۱۰۶۲	- آماری ۱۱۴۵
پیکار، ا. ۷۲	- فراوانیها ۱۱۴۵
پیوستگی	پایه ۹۴، ۱۳۴، ۳۴۹
- تابع برداری ۴۹۸	پتانسیل
- يك تابع دومتغیره ۵۲۰	- حقیقی ۷۳۸، ۵۳۵
- يك تابع مختلط ۷۷۱	- سرعت ۹۹۱
پیوسته ۴۹۸	- مختلط ۸۳۲، ۹۸۶، ۹۹۲
- تکه ای ۲۷۲	نظریه - ۷۳۸
- مشتقپذیر ۵۰۷	پدیده گیز ۶۷۸، ۶۷۹
	پرتاب سکه ۱۱۴۵
تابع	پرش ۶۵۹
- احتمال ۱۱۵۴، ۱۱۸۳	پرش کننده با چتر بسته ۲۵
- اسکالر ۴۹۴	پس ضرب کردن ۳۹۷
- بتا ۱۳۳۸	پس مانده ۱۰۲۳، ۱۰۸۵
- بتای اولر ۱۳۳۸	پل ویتستون ۴۱۳

برخه ریخت ۹۵۲	— — معکوس ۷۹۹
برداری ۴۹۴	— — مختلط ۷۶۸
پلکانی ۳۲۱، ۲۹۳	— — مشتق‌پذیر ۷۷۲
پله‌ای ۲۸۵	— — نمایی ۹۲۸، ۸۲۵، ۷۸۸
— — واحد ۲۸۵	— — مشخصه ۷۲۳، ۶۹۱، ۲۵۳
— — تحلیلی ۲۰۹	— — مقدماتی ۲۷۱
— — توان ۱۲۱۷	— — مولد ۲۱۶
— — توزیع ۱۱۸۳، ۱۱۵۴، ۱۱۲۶، ۱۱۲۵	— — نمایی ۹۲۸، ۸۲۵، ۷۸۸
— — تجمعی ۱۱۵۵	— — مختلط ۹۲۸، ۸۲۶، ۷۸۸
— — جریان ۹۹۲	— — نمونه ۱۱۲۴
— — حقیقی نمایی ۱۳۳۲،	— — نویمان ۲۴۴، ۲۴۳
— — خطا ۱۱۰۹، ۹۳۱، ۷۱۵	— — وزن ۲۵۱
— — ی مکمل ۱۳۳۸	— — ویژه‌ای مسئله استورم — لیوویل ۲۵۳
— — درست نمایی ۱۱۹۶	— — هانکل ۲۴۵
— — دوره‌ای ۳۱۷	— — همساز ۹۹۷، ۸۱۴، ۷۸۱، ۷۳۶، ۶۰۹
— — زوج ۶۴۷	— — مزدوج ۷۸۱
— — فاکتوریل ۱۱۴۹	— — تاب بک منحنی ۵۱۱
— — فراوانی تجمعی نمونه ۱۱۲۵	— — تأخیر فاز ۱۵۵
— — فرد ۶۴۷	— — تاس سالم ۱۱۴۲
— — کراندار ۷۷	— — تاو ۶۲۳، ۶۱۰، ۵۴۵
— — گاما ۲۳۵	— — تبخیر ۳۱
— — گویا ۷۸۴	— — تبدیل
— — لژاندار ۲۱۶، ۲۱۱	— — انتگرال ۶۱۰، ۵۹۷، ۵۶۹
— — لگاریتم ۹۳۰، ۸۲۶، ۷۹۵	— — با تابع مختلط ۸۰۲
— — متعامد ۲۵۱، ۲۴۷	— — تشابه ۴۷۹
— — یک ۲۵۱، ۲۴۸	— — خطی ۴۲۴، ۳۹۹
— — مثلثاتی ۹۲۹، ۸۲۷، ۷۹۱	— — فوریه ۶۸۳

۳۸۲ - ماتریسها	۸۱۹ - کسری خطی
۳۶۱، ۳۵۴ - متوازی الاضلاعی	۸۲۲ - کیلی
۳۱۳، ۳۰۱، ۱۵۲ - تشدید	۷۴۷، ۲۶۷ - لاپلاس
۳۰، ۷ - تشعشع رادیوم	۲۶۸ - معکوس
تصادفی	۴۷۶ - متعامد
۱۱۳۴ - آزمایش	۵۴۰ - مختصات
۱۱۹۳ - ارقام	۵۳۸ - دکارتی
۱۱۹۳ - اعداد	۴۲۲ - معکوس
۱۱۵۲ - متغیر	۸۱۶ - مویوس
۱۱۳۴ - مشاهده	۸۰۳ - همانی
۱۱۹۲ - نمونه گیری	۲۱ - تبرید
۱۰۱۰ - تصحیحات	۶۴۹ - تپه مستطیلی
۱۰۸۵ - متوالی	۱۲۴۸ - تحلیل همبستگی
۱۰۸۵ - همزمان	۹۵۴ - تحلیلی در بینهایت
۱۲۳۶ - تصفیه توده	۹۹۵ - تخلیه يك چشمه
۱۲۱۲ - تصمیم	تراز
۳۵۵ - تصویر	۱۲۰۱ - اطمینان
۲۶۰ - تعامد توابع بسل	۱۲۳۵ - کیفیت پذیرفتنی
۱۲۳۳ - تعداد مجاز معیوبها	۱۲۱۵ - معنی دار بودن
۲۰۹ - تعریف تابع تحلیلی	۵۴۴ - تراکم ناپذیر
۴۳۸، ۴۳۱ - تعریف درمیان	۳۸۵ - ترانها دما تریس
۴۴۲ - تعویض سطرها یا ستونها	۳۸۵ - ترانهش ماتریس
۱۰۷۹ - تعیین محل بر حسب اندازه	۱۰۱۴ - ترجمه خودکار
۱۶۸، ۵۳ - تغییر پارامترها	۳۴۸، ۱۳۳ - ترکیب خطی
۸۵۸ - تغییر شکل مسیر	تساوی
۳۸۴ - تفاضل ماتریسها	۷۵۶ - اعداد مختلط
تفاضلهای	۳۴۰، ۳۳۷ - بردارها

تکینى ۹۵۷، ۹۲۷	- اصلاح شده ۱۰۳۷
- برداشتی	- اولین ۱۰۲۶
- تابع تحلیلی ۹۵۷، ۹۲۷	- پس رونده ۱۰۲۸
- تنها ۹۵۶	- پیش رونده ۱۰۲۸
- ضروری ۹۵۸	- تقسیم شده ۱۰۳۷
تندی ۵۱۵	- دوم ۱۰۲۶
- زاویه ای ۵۱۹، ۳۶۹	- متاهی ۱۰۲۶
تنظیم ۱۶۲	- مرکزی ۱۰۲۷
توابع	تفریق اعداد مختلط ۷۵۸
- حقیقی هذلولی گون ۱۳۴۱، ۱۳۳۴	تفریق سریها ۹۰۰
- فوق هندسی ۲۳۲	تفکیک متغیرها ۱۷
- گامای غیر کامل ۱۳۳۸	تقاضا ۶۱۴
- لواندر ۲۱۷، ۲۱۱	تقریب
- متعامد ۲۵۸، ۲۴۸	- با چند جمله ای ۱۰۲۹
- مثلثاتی حقیقی ۱۳۴۱، ۱۳۳۲	- حداقل مربعات ۱۰۹۲
- مثلثاتی مختلط ۹۲۹، ۸۲۷، ۷۹۱	- مثلثاتی ۶۷۱
- مثلثاتی معکوس ۷۹۹	تقسیم اعداد مختلط ۷۵۷
- هذلولی گون ۸۲۸، ۷۹۳	تقلیل مرتبه ۱۳۹
- مختلط ۸۲۸، ۷۹۳	تکرار
- معکوس ۷۹۹	- پیکار ۷۲
- وابسته لواندار ۲۱۷	- ژاکوبی ۱۰۸۵
توابع بسل	- گاوس - سیدل ۱۰۸۳
- پیراسته ۲۴۷	- نبوتن ۱۰۲۰
- نوع اول ۲۶۰، ۲۳۶	- نبوتن - رفسون ۱۰۲۰
- نوع دوم ۲۴۴، ۲۴۳	تکه ای
- نویمان ۲۴۴، ۲۴۳	پیوسته - ←
- هانکل ۲۴۵	تکین در بینهایت ۹۵۴

توان عمومی ۷۹۸	- اویلر ۲۴۳
توده ناپذیر فنی ۱۲۳۵	- خازنی ۶۱
توزیع	- زمانی ۵۸، ۶۱
- احتمال ۱۱۵۴	- زمانی القایی ۵۸
- اف فیشر ۱۲۲۴	- فوریه ۲۵۰
- برنولی ۱۱۶۷، ۱۱۸۰	- میرایی ۱۱۳
- بواسن ۱۱۶۸	
- پیوسته ۱۱۵۳، ۱۱۸۴	جابه جایی ۳۹۶
- ای استودنت ۱۲۰۳	جابه جایی بودن ۳۴۴
- چند جمله ای ۱۱۷۲	جاذب ۱۸۷
- حاشیه ای ۱۱۸۵	جامعه ۱۱۲۰
- دوبعدی ۱۱۸۲	- نامتناهی ۱۱۷۰
- دو جمله ای ۱۱۶۷، ۱۱۸۰	جایگشت ۱۱۴۶
- فراوانی ۱۱۲۴	جبر ۴۰۳
- فوق هندسی ۱۱۶۹	- انجمنی ۴۰۳
- فیشر - اف ۱۲۲۴	- خطی ۳۳۵
- گاوس ۱۱۷۳	جدول تبدیلات لاپلاس ۳۳۱
- متقارن ۱۱۶۰	جدول نمودار خط نشانی ۱۱۲۲
- مربعی کی ۱۲۰۵	جدولهای
- مستطیلی ۱۱۶۱	- توابع ۱۳۴۱، ۱۳۵۶
- نرمال ۱۱۷۳، ۱۱۹۶، ۱۲۰۲	- توابع بسل ۱۳۴۲
- یکنواخت ۱۱۶۱، ۱۱۸۴	- کنترل ۱۰۳۰
تیلور	جریان سیالی ۷۱، ۹۸۸
سری - ۹۲۴	جریان گرما ۶۰۳، ۷۰۹
فرمول - ۹۲۴	جریان موازی ۹۹۴
	جزء خطی ۱۴
ثابت	جمع

چاولگی ۱۱۶۵	— اعداد مختلط ۷۵۶
چاهک ۶۰۳، ۹۹۱	— بردارها ۳۴۷، ۳۴۲
چبگرد ۳۶۴	— سریها ۹۰۰
چرخش ۹۹۰	— ماتریسها ۳۸۳
چرخ طیار ۳۰	— میانگینها ۱۱۸۹
چشمه ۶۰۳	— واریانسها ۱۱۹۰
— نقطه‌ای ۹۹۵	جواب
چگالی احتمال ۱۱۵۷	— بدیهی ۴۲۲
چلسکی ۱۰۷۹	— حالت مانا ۶۰
چذیره ۵۸۵	— خصوصی ۱۳۴، ۹۲، ۵
چند بارگی ۴۷۲	— دستگاه معادلات ۴۰۴
چند جمله‌ای	— ضمنی ۳
— چیشف ۲۶۴	— عمومی ۱۳۳، ۹۲، ۵
— لاگر ۲۶۳، ۲۹۸	— معادله دیفرانسیل ۱۳۲، ۸۵، ۲
— لزاندر ۲۱۱، ۲۵۸	— منفرد ۵
— مثلثاتی ۶۷۱	جواب تقریبی
— هریت ۲۶۲	— انتگرالگیری ۱۵
چند ضلعی فراوانی ۱۱۲۵	— مسائل با مقدار ویژه ۱۰۹۷
چهار وجهی ۳۷۳	— معادلات ۱۰۱۶
حاصلضرب	— دیفرانسیل ۱۴
— اعداد مختلط ۷۵۹	جهت يك بردار ۳۳۷
— برداری ۳۶۲	جهت يك منحنی ۸۱۱، ۵۰۷
— سری مجانبی ۱۱۱۱	چارک
— کشی ۹۱۴	— تحناتی ۱۱۳۳
— حافظه ۱۰۱۳	— فوقانی ۱۱۳۳
حالت بحرانی ۱۰۲	— میانی ۱۱۳۳
حالت گذر ۶۰، ۱۵۳	

حالت مانا ۵۹، ۱۵۳	خارج قسمت رابلی ۱۱۰۳
حجم ۵۶۳	خازن ۵۷
- نمونه ۱۱۲۱	خالی شدن يك خازن ۶۲
حد	خانواده منحنیها ۶۴
- اطمینان ۱۲۰۱	خروجی ۴۹، ۱۴۹، ۱۰۱۴
- بالای کنترل ۱۲۲۷	خط
- پایین کنترل ۱۲۲۷	- جریان ۹۸۹
- تابع برداری ۴۹۹	- رگرسیون ۱۲۵۰
- تابع مختلط ۷۷۱	- گرمی ۷۲۳
- چپ ۶۳۹	- مستقیم ۳۵۶
- دنباله ۴۹۸	خطای
- راست ۶۳۹	- آزمایشی ۱۰۱۰
- کیفیت خروجی متوسط ۱۲۳۷	- بلدینگ - آپ ۱۰۷۳
حدود سه - سیگما ۱۱۷۶	- قطع ۱۰۱۰
حدود کنترل ۱۲۲۷	- گرد کردن ۱۰۱۱
حذف گاوس - جلسکی ۱۰۷۹	- مربعی کل ۶۷۱
حذف مشق اول ۲۴۰	- مطلق ۱۰۱۰
حرکت آزاد ۱۴۹	- نسبی ۱۰۱۰
حرکت سقوطی ۱۱	- نوع I و II ۱۲۱۶
حرکت واداشته ۱۴۹	خطوط نیرو ۹۸۵
حل	خطوط هم پتانسیل ۹۸۵، ۹۹۲
- معادلات ۱۰۱۶	خودگردان ۱۸۱
- معادله درجه دوم ۱۰۱۲	خوش طرح ۱۰۸۸
- معادله دیفرانسیل به کمک سری ۱۹۷	دالامبر، ژ. ل. ۷۰۱۰
حلقه مستدیر ۷۶۷	دامنه ۱۵۱، ۵۲۱
خارج قسمت اعداد مختلط ۷۵۹	دایره ای ۷۶۷

دایره همگرایی ۹۱۰	- میرا ۱۱۲
دایره یکه ۷۶۸	- یکانی بردارها ۴۷۵
دترمینان	دستورالعملها ۱۰۱۳
- با مرتبه دلخواه ۴۳۸	دکارت، ر. ۷۵۸
- دستگاه معادلات ۴۵۳	دفع زباله‌های اتمی ۵۲
- حاصل ضرب ۴۴۴	دلتهای کروونکر ۵۳۷
- مشخصه ۴۷۰	دلوار ۵۷۴، ۵۰۹
- يك ماتریس ۴۴۴	دمو آور ۷۶۴
ددکیند، ر. ۸۸۸	دنباله
درجات آزادی ۱۲۰۳، ۱۲۰۵، ۱۲۲۳	- صعودی ۸۸۷
درصد اغماض معیوب توده ۱۲۳۵	- کراندار ۸۷۷
درونچرخزاد ۵۰۹	- نامتناهی ۸۷۴
- چهار گوش ۷۰۹	- نزولی ۸۸۷
درون یابی ۱۰۳۳	دوران ۵۴۶، ۳۶۹
- خطی ۱۰۳۳	دوره اولیه ۶۳۰
- درجه دوم ۱۰۳۳	دیفرانسیل ۳۷، ۶۱۷
- لاگرانژی ۱۰۳۸	- کامل ۳۷، ۶۱۶
- معکوس ۱۰۳۹	دین ۱۱۰
دستگاه	دیورژانس میدان برداری ۵۳۹، ۶۰۱، ۶۰۲
- بنیادی ۱۳۴، ۹۴	
- تنگ ۱۰۸۳	رابطه تك مقداری ۷۷۰
- غیر میرا ۱۱۱، ۱۵۱	راکتانسون ۱۵۹
- معادلات خطی ۴۰۳، ۱۰۷۶	رانسکی ۱۲۷
- معادلات دیفرانسیل ۱۷۴، ۳۱۴	راه ۱۸۶
۴۸۱	ردکردن ۱۲۱۲
- معادلات ناهمگن ۴۰۳، ۴۲۲	رده‌ای ۱۱۲۶
- معادلات همگن ۴۰۳، ۴۲۲	رشد نمایی ۳۰

رفسون ۱۰۲۰	- مختلط ۱۶۴
رقم معنی دار ۱۰۱۱	- مستقیم ۱۰۸۲
رگرسیون ۱۲۴۸	- نابجایی ۱۰۲۳
روش	- نیوتن ۱۰۲۰
- انتگرالگیری عددی ۱۰۴۷	- نیوتن - رفسون ۱۰۲۰
- اویلر - کشی ۱۰۶۰، ۱۰۶۲	- هیون ۱۰۶۲
- تکرار پیکار ۷۲	روشهای عددی
- تکرار در مورد معادلات ۱۰۱۶	- برای انتگرالگیری ۱۰۴۷
- تکرار در مورد مقادیر ویژه ۱۱۰۳	- برای معادلات ۱۰۱۶
- تکرار ژاکوبی ۱۰۸۵	- - خطی ۱۰۷۶
- تکرار گاوس - سایدل ۱۰۸۳	- - دیفرانسیل ۱۰۵۸، ۱۰۶۹
- توسعه یافته سری توانی ۲۱۷	- برای مقادیر ویژه ۱۰۹۷
- حداقل مربعات ۱۰۹۳، ۱۲۴۹	ریشه دوم ۷۸۵، ۱۰۲۰
- حذف گاوس ژردانی ۱۰۸۱، ۴۲۵	ریشه راکد ۴۶۷، ۱۰۹۷
- حذف گاوس ۴۰۵، ۱۰۷۷	ریمان
- حذفی ۴۰۵	رویه - ۸۳۴
- درست نمایی ماکزیمم ۱۱۹۵	کره عددی - ۹۵۵
- رونگه - کوتا ۱۰۶۵، ۱۰۷۱	معادلات - ۷۷۸
- سری توانی ۱۹۷	
- ضرایب نامعین ۱۴۲، ۱۹۹	زاویه
- عددی در مورد معادله دیفرانسیل	- بین بردارها ۳۵۳
۱۰۵۸، ۱۰۶۹	- بین منحنیها ۵۸۳، ۶۶
- عمومی ۱۶۸	- فاز ۱۵۵
- غیر مستقیم ۱۰۸۳	زبان مسئله ای ۱۰۱۴
- فرونیوس ۲۱۸	زیر پیشامد ۱۱۳۷
- گام به گام ۱۰۵۹	زیر فضا ۳۵۲
- گشتاورها ۱۱۹۵	زیر فضای برداری ۳۵۲

زیر ماتریس ۳۸۲	- مثلثاتی ۶۳۱
ژاکوبی ۸۱۳، ۵۶۶	- مجانبی ۱۱۰۸
ستون	- مختلط ۸۷۹
- بردار ۳۸۱	- مکلورن ۹۲۴
- دترمینان ۴۳۸	- نامتناهی ۸۷۹
- ماتریس ۳۸۱	- همساز ۸۸۰
سرعت گریز ۲۴	- همگرا ۸۷۹، ۲۰۴
سری	- هندسی ۹۲۸، ۹۰۸، ۸۹۲، ۲۰۶
- تعمیم یافته فوریه ۲۵۰	سطح ۵۷۷
- توابع بسل ۲۶۰	- پیمانه‌ای ۷۹۳
- توابع متعامد ۲۵۱	- تراز ۵۲۸، ۴۹۷
- توابع ویژه ۲۵۶	- جهت دار ۵۹۱
- توانی ۹۳۹، ۹۰۷، ۲۰۴، ۱۹۸	- جهت ناپذیر ۵۹۱
- تیلور ۹۲۴	- هموار ۵۷۸
- دو جمله‌ای ۹۳۲	سطوح هم پتانسیل ۹۸۴
- دو گانه ۷۲۵	سه تایی
- سینوسی فوریه ۶۴۸	- بردارها ۳۶۳
- فوریه ۶۹۳، ۶۳۶	- بنیادی ۳۴۵
- فوریه - بسل ۲۶۰	- راستگرد بردارها ۳۶۳
- فوریه تعمیم یافته ۲۵۰	- متعامد ۳۴۵
- فوریه دو گانه ۷۲۵	سه می نیم مکی ۵۰۸
- فوریه مختلط ۶۵۸	سه می وار ۵۸۰
- فوریه نیم دامنه ۶۵۵	- هذلولی گون ۵۸۰
- فوق هندسی ۲۳۲	سه وجهی ۵۱۱
- لوران ۹۵۷، ۹۲۶	سیال تراکم ناپذیر ۵۴۱
	سینوس متغیر حقیقی ۱۳۳۲
	سینوس متغیر مختلط ۹۲۹، ۸۲۷، ۷۹۲

شار ۵۴۲	— — توسعه یافته ۸۱۷، ۹۵۳
شبکه ۴۵۸، ۴۱۳، ۱۷۷	— — متناهی ۸۱۷
الکتريکي ۴۵۸، ۴۱۲، ۳۲۸، ۱۷۷	— — مماس ۵۸۱، ۵۲۹
چهار سر ۴۵۸	صفرهای تابع تحلیلی ۹۵۵
متعامد ۶۶	صفرهای توابع بسل ۱۳۴۲
شتاب ۵۱۴	صورت
— کوریولی ۵۱۹، ۵۱۶	— بنیادی ۵۸۳
— مرکز گرا ۵۱۵	— بنیادی اول ۵۸۳
شدت جریان لحظه‌ای ۵۶	— — درمختصات قطبی ۵۸۳
شرط	— — پلکانی ۴۰۸
— اولیه ۶۹۱، ۱۳۲، ۱۲۴، ۱۹	— — درجه دوم ۴۶۲
— کرانه‌ای ۶۹۱، ۶۸۷	— — دوخطی ۴۶۱
— گرما ۷۱۱، ۷۰۵، ۶۰۳	— — دیفرانسیلی ۶۱۷
— لپ شیتز ۸۰	— — صریح معادله دیفرانسیل ۱۳
شعاع طیفی ۱۰۸۴، ۴۶۷	— — ضد هرمیتی ۴۶۵
شعاع همگرایی ۹۱۰، ۲۰۵	— — نرمال هسه ۳۵۷
شکست ۱۱۶۷	— — هرمیتی ۴۶۳
شکل قطبی اعداد مختلط ۷۶۲	ضرایب
شکل مثلثاتی اعداد مختلط ۷۶۲	— — دستگاه معادلات ۴۰۳
صداک ۱۱۳۳	— — دو جمله‌ای ۱۱۵۰، ۱۰۳۵
صفحه	— — سری توانی ۱۹۸
— بوسان ۵۱۲	— — سری فوریه ۶۳۶
— راستگر ۵۱۲	— — فوریه ۶۶۳، ۶۴۳، ۶۳۶، ۲۵۱
— فاز ۱۸۲	— — مختلط فوریه ۶۵۸
— قائم ۵۱۲	— — معادله دیفرانسیل ۸۵
— مختلط ۷۵۷	— — نامعین ۹۳۴، ۱۹۹، ۱۴۲

ضرب	طول
- اسکالر ۳۵۲، ۳۶۰	- بردار ۳۳۷
- اعداد مختلط ۷۵۷	- قوس ۵۰۷
- بردارها ۳۴۴، ۳۵۲، ۳۶۲	- منحنی ۵۰۶، ۵۸۳
- برداری ۳۵۲، ۳۶۲، ۳۷۲	- طیف ۴۶۷
- خارجی ۳۶۲	
- داخلی ۳۵۲، ۳۶۰، ۴۷۶	- ظرفیت ۵۷
- دترمینانها ۴۴۴	
- در اسکالر ۳۴۷، ۳۸۴	- عامل انتگرال ساز ۴۲
- سریها ۹۱۴	- عامل ناپیوسته دیریکله ۶۷۸
- سریهای توانی ۹۱۵	- عدد پذیرش ۱۲۳۳
- سریهای مجانبی ۱۱۱۱	- عدد موهومی محض ۷۶۱
- سه گانه اسکالر ۳۷۲	- عقب گرد ۱۰۳۷
- سه گانه مختلط ۳۷۲	- عملگر ۱۰۶، ۳۹۸
- ماتریسها ۳۹۳	- لاپلاس ۵۳۱
- ماتریسی ۳۹۱	- های دیفرانسیل ۱۰۶
- میانگینها ۱۱۸۹	- عنصر
- نقطه ای ۳۵۲	- خطی ۵۰۸
- ضربان ۱۵۳	- دترمینان ۴۳۸
- ضریب	- صفر ۳۴۷
- اتفاقی ۵۷	- ماتریس ۳۸۱
- رگرسیون ۱۲۵۰، ۱۲۵۲	- مساحت ۵۸۴
- هدایت حرارتی ۶۰۳	
	- غشا ۷۱۷
- طرح نمونه گیری ۱۲۳۳، ۱۲۳۸	- غیر دورانی ۵۴۷
- تک ۱۲۳۳	- ی مرتعش ۷۱۵
- دو گانه ۱۲۳۸	- ی مستطیر ۷۳۱
- طوق ۷۶۵	

- ی مستطیلی ۷۱۹
- انتگرالگیری بسته ۱۰۵۵
- انتگرالگیری بواسن ۱۰۰۳
- اول گرین ۶۰۶
- فاصله
- اطمینان ۱۲۰۱
- باز ۹۳
- بسته ۹۳
- رده‌ای ۱۱۲۶
- همگرایی ۲۰۵
- فرآیند متناهی ۱۰۱۰
- فراوانی
- بافت نگار - ۱۱۲۵
- تجمعی ۱۱۲۲
- رده‌ای ۱۱۲۶
- نسبی ۱۱۲۶
- مطلق ۱۱۲۲
- نسبی ۱۱۲۲
- تجمعی ۱۱۲۲
- نوسان ۱۱۲
- فرترن ۱۰۱۴
- فرض ۱۲۱۲
- صفر ۱۲۱۴
- مقابل ۱۲۱۵
- دو طرفه ۱۲۱۵
- فرمول
- استرلینگ ۱۳۳۷، ۱۱۵۰
- انتگرال کشی ۸۶۴
- انتگرالگیری باز ۱۰۵۵
- فضای
- برداری ۳۸۵، ۳۴۷
- حقیقی ۳۴۷
- فرمولهای در مورد دیورژانس ۵۴۴
- فرمولهای در مورد کرل و دیورژانس ۵۴۷
- فروبنیوس، گ. ۲۱۸۰
- فشار اتمسفریک ۱۲

مختلط ۳۴۸ - -	- بویل - ماریوت برای گازهای
پوچ ۴۲۲ -	ایده آل ۲۹
خطی ۳۴۷ -	- پخش پذیری ۳۶۷
- حقیقی ۳۴۷ -	- تیرید ۲۱
- ضرب داخلی ۳۶۰	- نیوتن ۲۱ - -
- نمونه ۱۱۹۲، ۱۱۲۱	- توربچلی ۲۲
فوت ۱۱۰	- جاذبه نیوتن ۲۴، ۴۹۶
فوریه، ژ. ۶۲۹	- جذب ۳۰
فایم	- دوم نیوتن ۳۰، ۱۱۱
- اصلی ۵۱۱	- کولن ۵۳۲
- بر صفحه ۳۵۷	- کیرشهف ۵۷
- دوم ۵۱۱	- گرانش ۲۹۶
قاعده	- لوژیستیکی ۱۷
- دوزنقه ای ۱۰۴۸	- مالتوس ۱۲
- زنجیری ۵۲۰	- متوازی الاضلاع ۳۴۲
- سمپسون ۱۰۵۲	- میانگین ۵۲۲، ۵۶۲، ۶۰۱
- سه - هشت ۱۰۵۴	- هوک ۱۱۰
- ضرب ۱۱۴۴	قدرت چشمه ۹۹۵
- کرامر ۴۳۱، ۴۳۳، ۴۵۳	قرص ۷۶۷
- گرد کردن ۱۰۱۱	- باز ۸۶۶
- مستطیلی ۱۰۴۸	- بسته ۷۶۸
- مکمل گیری ۱۱۴۲	قسمت حقیقی ۷۵۶
- ودل ۱۰۵۴	قسمت موهومی ۷۵۶
قانون	فضایای
- اثر جرم ۳۳	- انتقال ۲۸۳، ۲۸۵
- اعداد بزرگ ۱۱۸۲	- انتگرال حقیقی ۵۶۹، ۵۹۷، ۶۰۵
	۶۱۰

انتگرال مختلط ۸۵۲، ۸۶۵ -	- سری فوریه ۶۳۹
قضیه	- معادلات دیفرانسیل ۱۲۴، ۱۲۳، ۱۶۰، ۱۳۲
- استوکس ۶۱۰	قطب ساده ۹۵۷، ۹۶۵
- اشتاینر ۵۹۶	قطر اصلی ۳۸۲، ۴۳۸
- انتگرال کشی ۸۵۲	قوانین کیرشهف ۵۷
- اول انتقال ۲۸۳	قوس ۵۰۴
- بنیادی جبر ۸۷۲	
- بولتسانو- وایرشراس ۸۸۴	کابل ۸۸
- پاپوس ۵۸۹	- آویخته ۸۸
- پیکار ۹۶۰	کار ۳۵۵، ۶۲۱
- حد ۱۱۷۹	کارت منگنه شده ۱۰۱۳
- - دموآور ۱۱۷۹	کاردانو ۷۵۶
- - لاپلاس ۱۱۷۹	کاغذ احتمال ۱۱۹۸
- - مرکزی ۱۲۰۹	- نرمال ۱۱۹۸
- دوم انتقال ۲۸۵	کلای معیوب ۱۱۲۰، ۱۲۳۳
- دیورژانس گاوس ۵۹۷	کلای نامعیوب ۱۱۲۰
- قدرمطلق ما کزیمم ۹۹۸	کثافت ۷۹۱
- فروبنیوس ۱۱۰۰	کدگذاری ۱۱۳۴
- کرامر ۴۵۳	- کامل ۱۱۳۴، ۱۲۵۱
- گرین ۵۶۹، ۶۰۶، ۶۱۴	کران خطا ۱۰۱۰، ۱۰۴۸
- لیوویل ۸۷۱	کراندار ۷۷
- مانده ۹۶۸	کرانه‌های مقادیر ویژه‌ای ۱۱۰۵
- مررا ۸۷۰	کره ۵۷۹
- مقدار میانگین ۵۲۲، ۵۶۲، ۶۰۱	- عددی ۹۵۵
قضیه وجود	- - ریمان ۹۵۵
- انتگرال فوریه ۶۷۷	- - مختلط ۹۵۵
- تبدیل لاپلاس ۲۷۲	کسر جزئی ۳۰۵

گشتاور

کسینوس

توزیع ۱۱۶۳ -	متغیر مختلط ۷۹۱، ۸۲۸، ۹۲۹ -
قطبی لختی ۵۶۴ -	هذلولی ۷۹۳ -
لختی ۵۹۰، ۵۶۳ -	يك متغیر حقیقی ۱۳۳۲ -
مرکزی ۱۱۶۳ -	کشاننده ۱۶ -
نیرو ۳۶۸ -	کشی، آ. ل. ۱۲۱ -
يك نمونه ۱۱۹۵ -	کلاتس، ل. ۱۱۰۰ -
گورسا، ۱. ۸۵۳ -	کمانش يك میله ۱۲۰ -
لاپلاس، ب. س. ۲۶۸ -	کمپیوتر خود کار ۱۰۱۳ -
لاگرانژ، ژ. ل. ۵۳ -	کنترل کیفیت ۱۲۲۶ -
لژاندر آ. م. ۲۱۱ -	کوتا ۱۰۶۵ -
لگاریتم طبیعی ۷۹۵، ۸۲۶، ۸۳۶ -	کولن ۵۷ -
لگاریتم مختلط ۷۹۵، ۸۲۶، ۸۳۶ -	کوواریانس ۱۱۹۰، ۱۲۵۰ -
لولهٔ توپ ۱۵۷ -	نمونه ۱۲۵۰ -
لیبنیتز، گ. و. ۲۱ -	کهاد ۴۳۵، ۴۳۸ -
لیوویل، ژ. ۲۵۳ -	کیفیت خروجی متوسط ۱۲۳۷ -
مانریس ۳۸۱ -	گرادیان ۵۲۶ -
اسکالر ۳۹۷ -	گرانش ۲۴، ۴۹۶، ۵۳۰، ۷۳۸ -
افزوده ۴۰۴ -	گردابی ۱۹۱ -
تکین ۴۲۴ -	گردش ۶۱۴، ۹۸۹، ۹۹۷ -
تلاقی خانهای ۳۹۰ -	گرشگورین ۱۰۹۷ -
حقیقی ۳۸۲ -	گروه بندی ۹۰۱، ۱۱۲۶ -
خود توان ۴۰۲ -	گره ۱۸۹ -
ستونی ۳۸۱ -	گریز از زمین ۲۴ -
سطری ۳۸۱ -	گسترش دوره ای ۶۵۴ -
	گسترنده ۵۰۹ -

۱۱۸۴، ۱۱۵۶ پیوسته -	- صفر ۳۸۳
۱۱۵۵ دوبعدی -	- ضد متقارن ۳۸۶، ۴۶۴
۱۱۸۳، ۱۱۵۳ گسته -	- ضد هرمیتی ۴۶۴، ۴۷۶
۱۱۸۷ مستقل -	- ضرایب ۴۰۴
۱۱۷۳ نرمال -	- قطری ۳۸۷
۱۱۸۷ وابسته -	- متعامد ۴۷۴
متوازی السطوح ۳۷۳	- متقارن ۳۸۶، ۴۷۸
مجانبی	- مثلثی ۳۸۷
۱۸۸ پایدار -	- مربعی ۳۸۲
۱۱۸۵ مساوی -	- ناتکین ۴۲۴
۱۲۱۰ نرمال -	- نرمال ۴۸۰
مجموع	- هرمیتی ۴۶۳، ۴۷۴
۷۵۶ اعداد مختلط -	- هیلبرت ۱۰۹۱، ۱۰۹۶
۲۰۴ جزئی -	- یکانی ۴۷۵
۳۸۳ مانرپها -	- بکه ۳۸۷
۱۲۵۶ متغیرهای نرمال -	مارپیچ ۵۰۳، ۵۰۸، ۵۱۱، ۵۸۱
۲۰۴ يك سری -	- مستدیر ۵۰۳، ۵۰۸، ۵۱۱
مجموعه	ماربوت، ۲۹.۱
۷۶۹ کراندار -	مافوق تن ۶۹۴
۷۶۸ نقاط -	مانده‌های تابع تحلیلی ۹۶۴
۷۶۸ باز -	مبدأ کارآمد ۱۱۳۳
۷۶۸ بسته -	متعامد بکه ۲۴۸، ۲۵۱
۷۶۹، ۵۲۱ همبند -	متغیر
۸۷۹، ۲۰۴ مجموعه‌های جزئی سری -	- استاندارد شده ۱۱۶۲
محور حقیقی ۷۵۷	- استوکاستیک ۱۱۵۲
محور موهومی ۷۵۷	- مختلط ۷۶۹
مختصات	متغیر تصادفی ۱۱۵۲

استوانه‌ای ۷۳۹ -	گرانیگاه ۵۶۳، ۵۹۵ -
چپگرد ۳۶۴ -	مساحت ۵۶۳، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۸۴ -
دکارتی ۷۵۸، ۳۳۹ -	سطح ۵۸۶ -
راستگرد ۳۶۴ -	مساحت سنج ۱۰۴۸ -
قطبی ۵۶۶، ۵۷۳، ۵۸۳ -	مسئله -
کروی ۷۴۰ -	استورم- لیوویل ۲۵۳ -
مد -	با مقدار اولیه ۱۹، ۹۶، ۱۲۴ -
بنیادی ۶۹۲ -	با مقدار مرزی ۹۶، ۲۵۳ -
نرمال ۶۹۴، ۷۳۴ -	تعقیب ۱۵ -
مدار -	دیریکله ۱۰۰۱ -
RL ۵۸ -	مستقل خطی ۹۳ -
RLC ۱۶۰ -	مسیر ۱۸۸، ۶۶ -
RC ۲۸۸، ۱۶۲، ۶۰ -	انتگرالگیری ۵۵۱، ۸۴۳ -
LC ۱۶۳ -	های متعامد ۶۶ -
الکتریکی ۵۶، ۱۵۷، ۲۸۸ -	های همزاویه ۷۲ -
مدل جمعیت ۱۲، ۱۷ -	مشابه دستگاه الکتریکی و مکانیکی ۱۵۹ -
مدلسازی ۱، ۱۰۹ -	مشاهده ۱۱۳۴ -
مدول ۷۶۰ -	تصادفی ۱۱۳۴ -
فتر ۱۱۰ -	مشتق -
مرتبه -	تابع برداری ۴۹۹ -
دترمینان ۴۳۸ -	تابع تحلیلی ۸۶۸، ۹۲۰ -
فرآیند تکرار ۱۰۲۲ -	تابع مختلط ۷۷۲، ۸۶۸، ۹۲۰ -
ماتریس ۴۱۴، ۴۵۲ -	جهتی ۵۲۵ -
مربعی ۳۸۲ -	چپ ۶۳۹ -
معادله دیفرانسیل ۲ -	راست ۶۳۹ -
مرکز -	مشتق‌پذیر ۴۹۹ -
سری توانی ۱۹۸ -	مشتقگیری -

- تریکومی ۷۰۱	- تبدیلات لاپلاس ۲۹۵، ۲۷۵
- درجهٔ دوم ۱۰۱۲	- توابع تحلیلی ۸۶۸
- شاخصی ۲۱۹	- توابع مختلط ۷۷۲
- فوق هندسی گاوس ۲۳۲	- جمله به جمله ۲۰۷
- کامل ۶۱۷، ۳۷	- سری ۹۴۳، ۹۱۹
- کشی ۲۳۱، ۱۳۹، ۱۲۱	- - توانی ۹۱۹
- کمکی ۲۸۲، ۱۲۱، ۹۰	- - مجانبی ۱۱۱۴
- گرما ۶۰۴	- عددی ۱۰۵۵
- ی يك بعدی ۷۰۳	- مشخصهٔ عمل کننده ۱۲۳۳، ۱۲۱۷
- لاپلاس ۶۰۶، ۶۰۵، ۵۳۱	- مصحح ۱۰۶۲
- مشخصه ۴۷۰، ۱۳۶، ۹۰	- معادلات
- موج ۷۱۹، ۶۹۰	- انتگرالی ۳۰۵
- - دو بعدی ۷۱۹	- تلگراف ۷۴۶
- يك بعدی ۶۹۰	- خط انتقال ۷۴۶
- واندربول ۱۸۳	- خط بالا فرکانس ۷۴۶
- وبر ۲۶۳	- خطی معادل ۴۱۰
- هلمهولتز ۷۴۱	- خطی همزمان ۴۰۳
- معادلهٔ دیفرانسیل	- ریمان ۷۷۸
- ارتعاشات غشا ۷۱۹	- کابل زیر دریایی ۷۴۶
- استورم - لیوویل ۲۵۲	- کشی - ریمان ۷۷۸، ۷۰
- اوپلر ۱۳۹، ۱۲۱	- نرمال ۱۰۹۳
- با ضرایب ثابت ۱۳۶، ۸۹	- معادلهٔ
- با مشتق جزئی ۶۸۶	- اوپلر ۱۳۹، ۱۲۱
- برنولی ۵۴	- برنولی ۵۴
- بسل ۲۵۹، ۲۳۴	- بسل ۲۵۹، ۲۳۴
- بیضی گون ۷۰۳	- پواسون ۶۸۶
- تفکیک پذير ۱۷	- پیوستگی ۵۴۳

مقایسه زوجی ۱۲۲۲	- پواسن ۶۸۶
مقدار	- خطی ۶۸۶، ۱۳۲، ۸۳، ۴۵
- اصلی کشی ۹۷۸، ۹۷۲	- سهمی گون ۷۰۱
- سری ۲۰۴	- غیرخطی ۱۳۲، ۸۴
- مشاهده شده ۱۱۵۳	- غیرهمگن ۱۴۰، ۱۳۲، ۸۴، ۴۵
- مشخصه ۴۶۷، ۲۵۳	- فوق هندسی ۲۳۲
- مطلق ۷۶۲	- قابل تحویل به معادله بسل ۲۴۶
- ممکن ۱۱۵۶	- کامل ۳۷
- نمونه ۱۱۲۲	- کشی ۲۳۱، ۱۳۹، ۱۲۱
مقدار میانگین	- کشی - ریمان ۷۷۸، ۷
- تابع ۹۸۹	- لاپلاس ۵۳۰، ۶۰۴، ۷۳۷، ۷۴۲
- تابع همساز ۹۹۹	۷۸۱
- توابع تحلیلی ۹۹۸	- لاگر ۲۹۹
- توزیع ۱۱۶۰	- لژاندر ۲۱۱، ۷۴۳
- نمونه ۱۱۲۹	- مدارها ۵۸، ۱۵۸
مقدار ویژه‌ای	- معمولی ۱
- غشای مرتعش ۷۲۳	- نخ مرتعش ۶۹۱
- مرتبه m ۴۷۰	- وبر ۲۶۳
- نخ مرتعش ۶۹۴	- هذلولی گون ۷۰۳
مقیاس گذاری ۱۰۷۹، ۱۰۱۲	- همگن ۱۳۲، ۸۴، ۴۵، ۳۵
مکانیسم کنترل ۳۳۰	معکوس ماتریس ۴۲۳، ۴۵۶، ۱۰۸۵
مکمل ۱۱۳۶، ۷۶۸	معین بودن ۴۶۵
مماس بر منحنی ۵۰۹	معین مثبت ۳۵۳، ۳۶۰، ۴۶۶
ممیز ثابت ۱۰۱۱	مفهوم مجرد ۳۴۸
ممیز شناور ۱۰۱۱	مقابل ۱۲۱۵
منحنی ۵۰۲	- يك طرفه ۱۲۱۵
۱۲۲۳، ۱۲۱۷ OC -	مقاومت هوا ۵۱

۲۹۶ - نیرو	۵۰۳ - تابدار
میرایی	۴۹۶ - تراز
۱۱۶ - بحرانی	۵۰۶ - راستی‌پذیر
۱۱۴ - خفیف	۵۰۸، ۸۸ - زنجیری
۱۱۴ - شدید	۱۱۷۳، ۷۱۶، ۱۹ - زنگی شکل
۱۵۴ - میزان تقویت	۵۰۴ - ساده
۷۰۳ - میله	۵۰۳ - صفحه‌ای
	۶۶ - های متعامد
۵۲۶ - نابلا	۸۱۱، ۵۵۰ - هموار
۱۸۸ - ناپایدار	۸۴۳ - تکه‌ای
ناحیه	۷۷۵ - منظم
۱۲۱۵ - بحرانی	۵۹۲ - مویوس
۵۶۰ - بسته	۳۲۰ - موج دندان‌اره‌ای
۵۶۰ - کراندار	۳۱۹ - موج مربعی
نامساوی	۱۱۶۷ - موقیت
۶۷۳ - بسل	۳۵۵، ۳۳۹ - مؤلفه
۱۰۹۹ - شور	۱۱۳۰ - میانگین نمونه
۸۷۱ - کشی	۱۲۲۵، ۱۱۳۳ - میانه
۷۶۵، ۳۶۱، ۳۵۴ - مثلثی	میدان
۵۴۰ - ناوردایی	۴۹۴ - اسکالر
۷۴۶، ۶۸۹ - نخ مرتش	۷۰ - الکتریکی
۲۷۶، ۳۶۱، ۲۵۱، ۲۲۸ (نر)	۴۹۴ - برداری
۵۸۲، ۵۲۹ - نرمال برسطح	۶۲۱، ۵۴۷، ۵۳۲ - پایستار
۱۲۰ - نزول	۱۴ - راستا
۱۲۰ - لگاریتمی	۴۹۵ - سرعت
۱۲۳۳ - نسبت معیوبها	۵۴۷ - غیردورانی
۷۳۸ - نظریهٔ پتانسیل	۵۳۰، ۴۹۵ - گرانشی

نمونه ۱۱۹۲، ۱۱۲۱	نظم آماری ۱۱۴۰
- تصادفی ۱۱۹۲، ۱۱۲۱	نقطه
نمونه گیری	- انباشتگی ۹۵۶
- با جایگذاری ۱۱۶۸، ۱۱۴۴	- تکین ۹۵۷، ۹۲۷
- بدون جایگذاری ۱۱۶۹، ۱۱۴۴	- تنها ۹۵۶
- برای پذیرش ۱۲۳۲	- ثابت ۱۰۱۷، ۸۱۸
نوار مویوس ۵۹۲	- چندگانه ۵۰۴
نوسانات	- حدی ۸۸۳
- آزاد ۲۸۴، ۱۰۹	- حلزونی ۱۹۱
- جسم متصل به قطر ۱۰۹، ۱۴۹، ۱۷۶	- در بینهایت ۸۱۷
۲۶۸، ۳۲۱، ۳۱۳، ۳۰۱، ۲۸۹، ۱۸۰	- دوگانه ۵۰۴
- خود تقویتی ۱۸۳	- رکود ۹۹۶
- غیرمیرا ۱۵۱، ۱۱۱	- زینی ۱۹۰
- میرا ۱۵۳، ۱۱۴	- شاخه‌ای ۸۳۵
- واداشته ۱۴۹، ۳۰۱، ۳۲۱، ۶۶۷	- کرانه‌ای ۷۶۹
- همساز ۱۱۲، ۱۸۲	- میان رده‌ای ۱۱۲۶
نیروی	نقش ۳۹۹
- فنر ۱۱۰	نگاشت ۳۹۸
- گرانشی ۷۴۱	- بر روی ۳۹۹
- محرك ۱۴۹	- تابع تحلیلی ۸۱۰
- محرکه الکتریکی ۵۶	- پوششی ۳۹۹
- ثابت ۵۸	- خطی ۳۹۹
- مرکز گرا ۵۱۵	- دوسویی ۸۰۲، ۳۹۹
- میرایی ۱۱۲	- همدیسی ۸۱۰
نیسترم ۱۰۷۱	- يك به يك ۳۹۹
نیکویی برازش ۱۲۳۹	نمایش پارامتری ۵۷۸، ۵۰۲
نیم عمر ۳۰	نمودار ون ۱۱۳۷

نیوتن، آ. ۱۱۰، ۲۱	همسازه ۴۳۵، ۴۳۸
وابستگی خطی ۹۳، ۱۳۳، ۳۴۸، ۳۷۴،	همسایگی ۴۹۸، ۵۲۰
۴۱۸	همشیب ۱۴
واحد	هم صفحه ۳۵۰
- حساب ۱۰۱۴	همگرایی
- کنترل ۱۰۱۳	- شرطی ۸۸۱
- موهومی ۷۵۶	- مطلق ۸۸۱، ۹۰۹
واریانس نمونه ۱۱۳۰	- يك دنباله ۴۸۸، ۸۷۴
واریانس توزیع ۱۱۶۰	- يك سری ۲۰۴، ۸۷۹
واریت ۱۱۵۲	- يك فرآیند تکراری ۱۰۱۷
واکنش شیمیایی ۳۳	- یکنواخت ۹۳۹
واگرا ۲۰۴	همگردان ۱۰۱۴
واهشی ۱۰۸۵	هموار تکه‌ای ۵۵۲، ۵۷۹
وجود معکوس ماتریس ۴۲۴	هندسه دیفرانسیل ۵۰۲
ورودی ۴۹، ۱۴۹، ۱۰۱۳	هوابر ژوکوفسکی ۸۳۸
وسل، ک. ۷۵۸	هون ۱۲۷
ولتاژ ۵۶	هیلبرت، د. ۳۶۰
هانری، ژ. ۵۶	یکتایی
هرتز، ه. ۱۱۲	- سری توانی ۹۱۸
هلوریخت ۷۷۳	- سری لوران ۹۵۰
همانی سریهای توانی ۹۱۸	- معادلات خطی ۴۲۱، ۴۵۴
همبند چندگانه ۸۵۲	- معادلات دیفرانسیل ۷۸، ۱۲۴،
همبند ساده ۶۲۳، ۸۵۲	۶۰۶، ۴۸۶، ۱۳۲
هم خط ۳۵۰	یکسو شده تمام موج ۳۲۵
همساز مزدوج ۷۸۱	یکسو کننده نیم موجی ۳۱۹، ۶۴۵
	یکنوا ۸۸۷