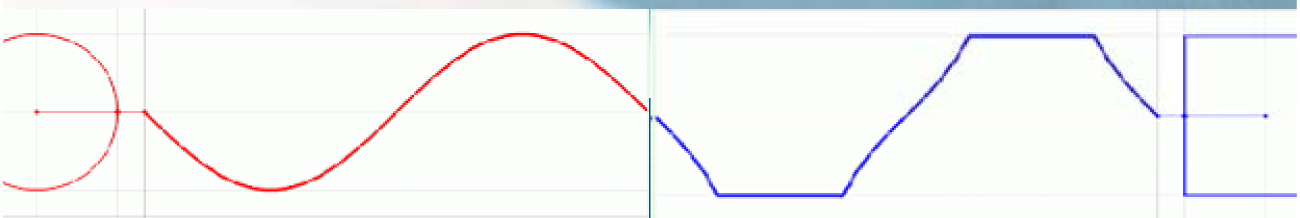


جزوه ریاضیات عمومی ۱ و ۲

مدرس عزت الله فریدنیا

مقطع کاردانی و کارشناسی

[Course title]

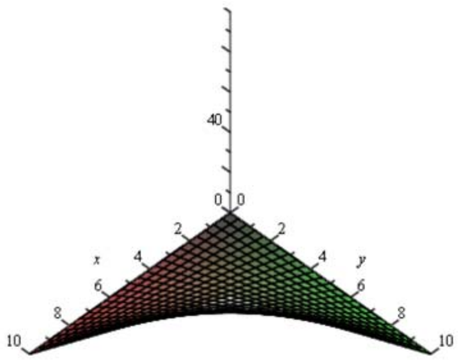
توابع چند متغیره :

پ۳۰۹: اغلب کمیت های فیزیکی در واقع به بیش از یک متغیر وابسته اند. به عنوان مثال ، حجم یک مکعب مستطیل به طول و عرض و ارتفاع آن و دمای نقطه ای از یک جسم به مختصات آن نقطه و احتمالا زمان بستگی دارد. متناظر با هر کمیتی که به چند متغیر وابسته باشد ، یک تابع با چند متغیر وجود دارد.

$$z = F(x, y)$$

Z متغیر وابسته و x,y متغیرهای مستقل

$plot3d(x \cdot y, x = 0..10, y = 0..10)$
$plot3d(x \cdot y, x = 0..10, y = 0..10, labels = ["X", "Y", "Z"])$



حد و پیوستگی توابع چند متغیره :

ک۱۲۳: فرض کنید F(x,y) یک تابع دو متغیره باشد. اگر وقتی نقطه (x,y) از هر مسیری در صفحه xy به نقطه (a,b) نزدیک شود، مقدار F(x,y) به عدد L نزدیک گردد ، گوئیم حد تابع F در نقطه (a,b) برابر L است و می نویسیم : $\lim_{(x,y)\to(a,b)} = L$

شکل: پ۳۲۴ و ۳۲۳

پ و ک: فرض کنیم F در درون دایره ای به مرکز (a,b) بجزء احتمالا در (a,b) تعریف شده باشد. در این صورت عدد L را در F در (a,b) می گوئیم اگر متناظر با $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر

$$|F(x,y) - L| < \varepsilon \quad \to 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

جهش ۲۸۲: گوئیم تابع دو متغیره F(x,y) در نقطه (a,b) دارای حد است اگر از هر مسیر در دامنه تعریف تابع ، به (a,b) نزدیک گردیم تابع به عدد ثابتی چون L به اندازه دلخواه نزدیک می شود.

پ از ۳۳۳ تا ۳۲۵ و ک ۱۲۳ تا ۱۲۴ :

$$\lim_{(x,y)\to(3,2)} 2x + y^2 =$$

> $limit(x + y^2, \{x = 3, y = 2\})$

7

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \sqrt{9 - x^2 + y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x^2 y}{x + y} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{3},2)} y\sin\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},0)} \cos(x + y + z) =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2 - xy + 1}{x^2 + y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \mathrm{x}\cos^{-1}(y - 1) =$$

برای جواب های $\frac{0}{0}$ رفع ابهام می کنیم

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - xy}{x^3 + y^3} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y-1)sinx}{xy^2-x} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} =$$

بررسی وجود حد تابع :

جهش ۲۸۳ و ک ۸۲۳: برای بررسی حد تابع F(x,y) در نقطه (0,0) مسیرهای بسیار زیادی وجود دارد مثلا مسیرهای $y=0$, $x=0$, $y=x$, $y=-x$, $y=x^2$,$y=x^3$, ... که میتوان به نقطه (0,0) نزدیک شد اگر تابع دارای حد باشد از تمام مسیرها باید مقدار حد ، عدد ثابتی بدست آید.

نکته ارشدی : جهش ۲۸۳: بررسی حد تابع F(x,y) در نقطه (0,0) می توان مسیرهای $y=mx$ را ازمایش کرد. اگر مقدار حد تابع به m بستگی داشته باشد تابع فاقد حد است.

پ ۳۲۵: وجود حد تابع $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در نقطه (0,0) را بررسی کنید؟

پ ۳۲۶: وجود حد تابع $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ در نقطه (0,0) را بررسی کنید؟

(شبیه به تست ارشد هوافضا ۸۳ و ژئوفیزیک ۸۳)

وجود حد تابع $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sinxy}{xy}$ در نقطه (0,0) را بررسی کنید؟

ک ۱۲۵: وجود حد تابع $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+3y^2}$ در نقطه (0,0) را بررسی کنید؟

پ۳۲۷: وجود حد تابع $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ در نقطه (0,0) را بررسی کنید؟(تست ارشد معدن ۸۳)

پ۳۲۷: وجود حد تابع $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ را روی منحنی های $(m\neq0)$, y=mx و $y=x^2$ در نقطه (0,0) را بررسی کنید؟(تست ارشد مکانیک ۸۱)

پ۳۲۳و ک ۱۲۷: وجود حد توابع زیر را در نقطه (0,0) را بررسی کنید؟

$$\frac{x}{y}\ ,\quad \frac{x-y}{x+y}\ ,\quad \frac{x^2+y}{y}\ ,\quad \frac{xy}{|xy|}\ ,\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

پیوستگی توابع چند متغیره:

پ۳۳۱: برای بررسی پیوستگی تابع در یک نقطه سه شرط زیر باید برقرار باشد :

الف) F(a,b) باید وجود داشته باشد یعنی F در (a,b) تعریف شد باشد.

ب) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(x,y)$ وجود داشته باشد.

پ) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(x,y) = F(a,b)$ یعنی حد تابع برابر با مقدار تابع باشد.

پ۳۳۱: پیوستگی تابع زیر را در نقطه (-1,2) بررسی کنید؟ $F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (-1,2) \\ \frac{7}{5} & (x,y) = (-1,2) \end{cases}$

پ۳۳۲و ک ۱۲۶: پیوستگی تابع زیر را در نقطه (0,0) بررسی کنید؟ $(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(ارشد MBA ۸۱)

ک۱۲۶: پیوستگی تابع زیر را در نقطه (0,1) بررسی کنید؟ $F(x,y)=\frac{x^2+2y}{x+y^2}$

پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید؟

پ۳۳۴: $F(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^3+y^3} & (x,y)\neq(0,0)\\ 3 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

ک۱۲۷: $F(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}\quad(0,\sqrt{5})$

ک۱۲۷: $F(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 3 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

ک۱۲۷: $F(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x+y} & (x,y)\neq(1,-1)\\ 3 & (x,y)=(1,-1)\end{cases}$

پ۳۳۴: $F(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y^3}{x^{12}+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

پ۳۳۴: $F(x,y)=\begin{cases}\frac{sinxy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

مشتق گیری از توابع چند متغیره:

تعبیر هندسی

پ۳۴۰: نمودار معادله z=F(x,b) در واقع اثر سطح z=F(x,y) در صفحه y=b است. بنابراین $F_x(a,b)=\frac{\partial F}{\partial x}$ ضریب زاویه منحنی z=F(x,y) در نقطه (a,b,F(a,b)) است.

نکته ارشدی: معادله خط مماس L بر این منحنی در صفحه y=b عبارت است :

$$z-F(a,b)=F_x(a,b)(x-a)$$

نکته ارشدی: معادلات دکارتی (یا متقارن) این خط مماس را داریم:

$$y=b\ ,\qquad x-a=\frac{z-F(a,b)}{F_x(a,b)}$$

نمودار معادله z=F(a,y) در واقع اثر سطح z=F(x,y) در صفحه y=a است. بنابراین $F_y(\mathrm{a,b})=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}$ ضریب زاویه منحنی z=F(x,y) در نقطه (a,b,F(a,b)) است.

<u>نکته ارشدی:</u> معادلات دکارتی (یا متقارن) این خط مماس را داریم:

$$x=a\ ,\qquad y-b=\frac{z-F(a,b)}{F_y(\mathrm{a,b})}$$

<u>ک ۱۲۸:</u> فرض کنید Z=F(x,y) یک تابع دو متغیره باشد اگر $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h,y)-F(x,y)}{h}$ موجود باشد گوئیم مشتق جزئی مرتبه اول F نسبت به x موجود است لذا برای محاسبه $\acute{F}_x$ متغیر y را در F(x,y) ثابت نگه می داریم و مقدار آن را با نمادهای زیر نشان میدهیم.

$$\frac{\partial \mathrm{F(x,y)}}{\partial \mathrm{x}}\ ,\qquad \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}\ ,\qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}\ ,\qquad F_{\mathrm{x}}(\mathrm{x,y}),\qquad \acute{F}_x$$

به طور مشابه اگر $\lim_{h\to 0}\frac{F(x,y+h)-F(x,y)}{h}$ موجود باشد گوئیم مشتق جزئی مرتبه اول F نسبت به y موجود است لذا برای محاسبه $\acute{F}_y$ متغیر x را در F(x,y) ثابت نگه می داریم و مقدار آن را با نمادهای زیر نشان میدهیم.

$$\frac{\partial \mathrm{F(x,y)}}{\partial \mathrm{y}}\ ,\qquad \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}\ ,\qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}\ ,\qquad F_{\mathrm{y}}(\mathrm{x,y}),\qquad \acute{F}_y$$

در مثالهای زیر $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}$ و $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}$ را داریم؟

$F(x,y)=2xy$

$F(x,y)=x^2y^3$

<u>پ۳۴۶</u>: $F(x,y)=9+2x-3y^2$

<u>ک۳۴۶</u>: $F(x,y)=x^2y^3+2xy-2$

<u>پ۳۳۸</u>: $F(x,y,z)=x^2cosy+z^2$ در این تابع را نیز بدست آورید $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}$

۳۸۳پ: مقادیر مشتق جزئی مرتبه اول $F(x,y)=x^3y^2+2xy-4y$ را در نقطه (1,2) بدست آورید؟

پ۳۳۸: $F(x,y,z)=x^3y^2sinz+e^{yz}$ در این تابع را نیز بدست آورید $\frac{\partial F}{\partial z}$

ک۱۲۹: $F(x,y)=\frac{x}{y+x^2}$

مشتقات جزئی مرتبه های بالاتر

پ۳۴۳و ک ۱۲۹:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=F_{xx} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=F_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=F_{yx} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=F_{xy}$$

همه مشتق های جزئی مرتبه اول و دوم توابع زیر را بدست آورید؟

ک ۱۲۹: $F(x,y)=x^3y^4$

پ ۳۴۳: $F(x,y)=sinxy^2$

مشتق جزئی مرتبه دوم $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ تابع زیر را در نقطه(2,4) بدست آورید؟ (کارشناسی ارشد حسابداری ۹۲)

$$z=xe^{y-x^2}+xy^2$$

مشتق ترکیب توابع و ضمنی

قاعده زنجیره ای : THE CHAIN RULE

فرض می کنیم مشتقات جزئی مرتبه اول z=F(x,y) پیوسته بوده و توابع u(x,y) و v(x,y) مشتق پذیر باشند در این صورت z تابعی مشتق پذیر است و داریم:

$$z = F(u,v) = \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

مجموعه کتب کارشناسی ارشد رشته حسابداری انتشارات علوی: علوی اینترنت ۲۳۵:

در تابع $z = F\left(x^2 + y^2, {}^{y}\!/_{x}\right)$ مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ یا z_x و $\frac{\partial z}{\partial y}$ یا z_y را حساب کنید؟

جزوه ایترنت دست نوشت: درتابع $z = \frac{u}{v} - \frac{v}{u}$ و $u = x^2 - y^2$ و $v = xy$ مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید؟

علوی ۲۳۵: درتابع $z = ln\sqrt{u^2 + v^2}$ و $u = xe^{y}$ و $u = xe^{-y}$ مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید؟

$y = \ln u \quad \acute{y} = \frac{\acute{u}}{u} \quad , \quad y = \sqrt{u} \quad \acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$

جزوه اینترنت چاپی: درتابع $z = u^2 - uv + 2v^2$ و $u = \frac{1}{x+1}$ و $u = 1 + \sqrt{x}$ مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در نقطه x=1 محاسبه کنید؟ در منزل

مشتق توابع ضمنی:

ماهان۹۲: توابعی که *X,Y* از هم مجزا نباشند را تابع ضمنی می گویند تمام توابعی که تا بحال دیده ایم حالت خاصی از توابع ضمنی اند. برای مشتق این توابع *F(X,Y)=0* در نظر میگیرم و داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)}$$

سایت http://Fa.wikipedia.org: و : دانشنامه رشد: چه موقع می‌توان انتظار داشت که توابع مختلف (y=F(x که با رابطه F(x,y)=۰ تعریف می‌شوند مشتقپذیر باشند؟

پاسخ: هنگامی که نمودار رابطه به اندازه کافی هموار باشد تا در هر نقطه آن خطی مماس وجود داشته باشد، از جمله این موارد وقتی است که فرمول F ترکیبی جبری از توانهای y,x باشد. برای محاسبه مشتق توابعی که بطور ضمنی تعریف می‌شوند، Yرا به عنوان تابعی هر چند ناشناخته، مشتق پذیر از x در نظر می‌گیریم و از دو طرف معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم. این روش را مشتق گیری ضمنی می‌نامند.

ماهان ۹۲: مشتق ضمنی تابع زیر را بر حسب X بدست آورید؟

$$x^2y^4 + y^5 + x^3 + x^3y^2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}} =$$

$$\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{y}} =$$

پ ۳۶۳:

$$y^4 + 3\mathrm{y} - 4x^3 - 5x - 1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}} =$$

$$\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{y}} =$$

ک۱۳۳: در توابع F(x,y,z) نیز ابتدا تابع را به صورت F(x,y,z)=0 در می اوریم و برای محاسبه $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}$ یک بار x,y را ثابت نگه می داریم و مشتق F نسبت به z را محاسبه می کنیم و بار دیگر y,z را ثابت نگه می داریم و مشتق F نسبت به x را محاسبه می کنیم و داریم:

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}} = -\frac{F_{\mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{F_{\mathrm{z}}(\mathrm{x},\mathrm{y})}$$

به طور مشابه برای حل $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}$ نیز داریم:

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}} = -\frac{F_{\mathrm{y}}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{F_{\mathrm{z}}(\mathrm{x},\mathrm{y})}$$

ک۱۳۳: در تابع $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ مشتقات ضمنی $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}$ و $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}$ را بدست آورید؟

ک۱۳۳: در تابع $xz + ylnz = x^2y$ مشتقات ضمنی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بدست آورید؟

ماکزیمم و مینیمم توابع چند متغیره:

ک۱۵۱:وجهش: فرض می کنیم z=F(x,y) یک تابع با مشتقات اول و دوم پیوسته باشد دستگاه $F_x(x,y) = 0$ و $F_y(x,y) = 0$ را حل می کنیم فرض می کنیم (x_0, y_0) جواب دستگاه باشند سپس با محاسبه $\Delta = F_{xx}F_{yy} - (F_{xy})^2$ داریم :

۱- اگر $\Delta > 0$ و $F_{xx} > 0$ تابع در نقطه (x_0, y_0) مینیمم نسبی دارد.

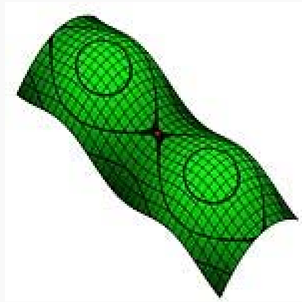
۲- اگر $\Delta > 0$ و $F_{xx} < 0$ تابع در نقطه (x_0, y_0) ماکزیمم نسبی دارد.

۳- اگر $\Delta < 0$ آنگاه تابع در نقطه (x_0, y_0) اکسترمم نسبی نیست این نقطه را نقطه زینی می گویند.

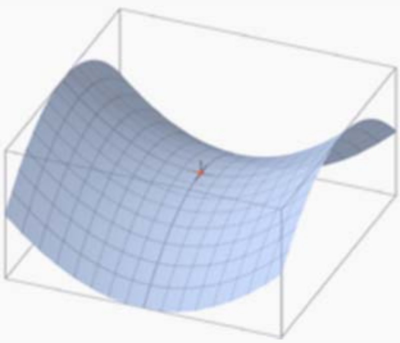
۴- اگر $\Delta = 0$ نتیجه ای از این آزمون بدست نمی آید که باید از روش های دیگری استفاده نمود.

تعریف : اگر تابع z در نقطه (x_0, y_0) ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد گوئیم z در آن نقطه اکسترمم نسبی دارد.

تعریف: http://Fa.wikipedia.org/ : در ریاضیات، یک نقطهٔ زینی نقطه‌ای در دامنه یک تابع است که یک نقطه سکون بوده ولی اکسترمم موضعی نیست. نام آن از این موضوع گرفته شده که در حالتی که دامنه تابع $\mathbb{R}^2$ باشد، نمونه مشخص نقطهٔ زینی، سطحی است که در یک راستا به بالا و در راستای دیگر به پایین خم می‌شود (مانند یک زین یا گردنه .(در حالت دوبعدی، خطوط کانتوری تابع در نقطهٔ زینی یکدیگر را قطع می‌کنند.



نقطهٔ زینی بین دو تپه (محل تقاطع خطوط کانتوری به شکل(8)



یک نقطهٔ زینی (با رنگ قرمز) بر روی نمودار $z = x^2 - y^2$

۲۹۴جهش: اکسترمم نسبی تابع را در نقطه (1,-1) بدست آورید؟(ارشد معدن ۸۳)

$$F(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$$

۲۹۴جهش: اکسترمم نسبی تابع را در نقطه (3,2) بدست آورید؟(ارشد سیستم ۷۸)

$$F(x,y) = 1 + 2x + 3y - xy$$

۲۹۵جهش: اکسترمم نسبی تابع را در نقطه (0,0) بدست آورید؟(ارشد ریاضی ۷۸)

$$F(x,y) = x^2y - y^2 - x^3 + xy$$

نقطه بحرانی:

$(x_0, y_0) \in D_z$ را یک نقطه بحرانی z=F(x,y) می گوئیم هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد

۱- $F_x(x,y) = 0$ و $F_y(x,y) = 0$

۲- مشتق وجود نداشته باشد.

ک۱۵۳: نقاط بحرانی و اکسترمم تابع را در صورت وجود بیابید؟

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$

جهش ۲۹۴:نقاط بحرانی و اکسترمم تابع را در صورت وجود بیابید؟(ارشد مکانیک ۸۱)

$$F(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 7y$$

ک۱۵۲: نقاط بحرانی و اکسترمم تابع را در صورت وجود بیابید؟(ارشد مکانیک ۸۱)منزل

$$F(x,y) = 2xy - 5y^2 + 4x - 2x^2 + 4y - 4$$

ک۱۵۲وپ۳۹۰: نقاط بحرانی و اکسترمم تابع را در صورت وجود بیابید؟ منزل

$$F(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$$

فرض می کنیم $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \in D_z$ و یک نقطه بحرانی باشد با توجه به تعریف نقاط بحرانی، $F_x = 0$ و $F_y = 0$ را با توجه به مفهوم مشتق چگونه ارزیابی می کنید؟