باسمه تعالی

آنالما و تعدیل زمان

ANALEMMA & EQUATION OF TIME

محمدرضا حسن پور

با همکاری اعضای تیم هشتمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

Ioaa2014.blogsky.com

مقدمه:

حتما تا به حال کلمه آنالما به گوشتان خورده و شکل زیبای آن را در عکس های نجومی دیده اید. اما تا حالا فکرکرده‌اید چه حقیقت نجومی پشت آن وجود دارد؟ اصلا چه دلیلی دارد که خورشید یک مسیر نامتقارن و عجیب را طی کند؟ راستی چرا آنالما مهم است؟ خب خورشید هر طور بخواهد حرکت می‌کند. به ما چه مربوط؟!!

ما می‌خواهیم کمی راجع به این پدیده نیمه انسانی (!) صحبت کنیم و پاسخی برای سوالات بالا بیابیم. همچنین به خاطر وابستگی آنالما به تعدیل زمان، این کمیت را نیز بررسی خواهیم کرد و با نحوه محاسبه آن آشنا خواهیم شد.

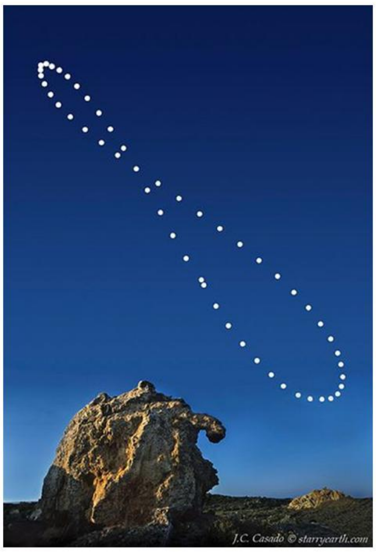
و اما المپیاد. در المپیاد نجوم مبحث آنالما کاربرد خیلی زیادی ندارد (تا حالا سوال زیادی از این مبحث نیامده). در میان منابع المپیاد نیز، کتابی پیدا نمی‌شود که آنالما را بررسی و تحلیل کند. البته بعضی کتاب ها در این باره توضیحاتی دارند که کافی به نظر نمی‌رسد. در مورد تعدیل زمان نیز وضع به همین صورت است. البته اینکه در المپیاد زیاد به این بحث پرداخته نمی‌شود شاید به خاطر پیچیدگی های آن است. با این وجود باز هم می‌توان ایده های خوبی یافت و سوالات زیبایی طرح کرد.

پیشگفتار:

آنالما از یک واژه یونانی به معنای «پایه‌ی شاخص آفتابی (pedestal of a sundial)» گرفته شده است.

قضیه از این قرار است که اگر شما نوک سایه یک شاخص را در یک ساعت معین از روز علامت بزنید و این کار را به مدت یک سال تکرار کنید، شکلی ساخته می شود که شبیه عدد ۸ انگلیسی است. این همان آنالمای خورشیدی است.

همچنین این کار را می‌توان با یک دوربین عکاسی ساده و یک پایه محکم (و احیاناً بی‌استفاده) انجام داد. به این صورت که پایه را در مکان مشخصی قرار می‌دهیم و آن را ثابت می‌کنیم. هر چند روز یک بار، سر یک ساعت مشخص، از خورشید عکاسی می‌کنیم. (پایه دوربین یا باید همیشه ثابت باشد، یا مکان قرارگیری آن دقیقا مشخص و یکسان باشد) پس از یک سال، با ادغام عکس ها، شکل آنالما به دست می‌آید. شکل زیر نمونه‌ای عکاسی شده از آنالما است.



نکته جالب این است که آنالما صرفاً به خاطر تعریف ها و قرارداد های انسانی ایجاد می‌شود. بنابراین می‌توان آن را یک پدیده نیمه مصنوعی دانست!! وقتی ما سر یک ساعت معین، از خورشید عکس‌برداری می‌کنیم، در واقع شرطی برای شکل آنالما می‌گذاریم. ساعت مچی که ما استفاده می‌کنیم، تابع قرارداد های انسانی است. و این باعث می‌شود هر روز خورشید در نقطه‌ای خاص دیده شود.

با این مقدمه بحث اصلی را شروع می‌کنیم. ابتدا موجودی به نام تعدیل زمان را معرفی می‌کنیم که در حقیقت پلی است بین کمیّت های نجومی و ساعت قراردادی انسانی. پدیده آنالما نیز مستقیماً به تعدیل زمان مربوط می‌شود.

پیش از شروع:

فرض بر این بوده که خواننده محترم با مفاهیم اولیه نجوم کروی و مکانیک سماوی آشنایی دارد. برای آشنایی با این مفاهیم، بهتر است قبل از شروع، منابع زیر را مطالعه فرمایید.

فصل ۱ و ۲ و ٤ و ٥ کتاب «نجوم کروی / و.م.اسمارت»

فصل ۲ و ۳ و ٤ کتاب «اوربیتال مکانیک / هاوارد.دی.کرتیس ‹Orbital Mechanics / Howard D. Curtis› »

در بیشتر مواقع، زمین مرکزی فکر کردن معادل خورشید مرکزی فکرکردن است. ممکن است در بعضی قسمت های این درسنامه، به جهت راحتی، زمین را مرکز در نظر بگیریم.

تعدیل زمان:

بشر برای انجام کارهایش به یک زمان‌بندی دقیق و البته تکرار شونده نیاز دارد. به همین خاطر، طراحی یک سیستم زمانی بسیار مهم است.

در قدیم الایام، زمان را از روی خورشید می سنجیدند. به این ترتیب که یک «روز» را فاصله بین دو عبور خورشید از نصف النهار (اذان ظهر!) در نظر می‌گرفتند. اما انسان پیشرفته با این سیستم مشکلاتی دارد. (می توانید خودتان تصور کنید هر روز هنگام ظهر شرعی، ساعتتان ۱۲ را نشان دهد. چه مشکلاتی پیش می آید؟!)

عامل اصلی مشکلات این است که خورشید حرکت می‌کند! و حرکت آن هم بس پیچیده است! دو عامل اصلی پیچیدگی عبارت است از:

۱-مدار زمین به دور خورشید بیضوی است. به همین علت سرعت زمین در مدارش (و در نتیجه، سرعت ظاهری خورشید در آسمان) متغیر است.

۲-صفحه دوران وضعی و انتقالی زمین با هم زاویه می‌سازند. به عبارت دیگر، خورشید روی دایره البروج حرکت می‌کند. در حالی که ساعت های ما از روی استوای سماوی سنجیده می‌شوند.

برای رفع این دو مشکل، یک جسم خیالی به نام «خورشید میانگین» تصور می‌کنیم. این خورشید دو ویژگی کلی دارد. (۱) با سرعت ثابت (برابر سرعت متوسط گردش ظاهری خورشید)؛ (۲) روی استوای سماوی حرکت می‌کند. ویژگی اول با عمل «تعدیل مرکز» و ویژگی دوم با عمل «تقلیل به استوا» مهیا می‌شود.

در تعدیل مرکز، ما خورشیدی تعریف می‌کنیم (خورشید میانگین دینامیکی)که در مدار دایره‌ای دور زمین می‌گردد. بنابراین سرعت حرکت آن در آسمان ثابت است. این خورشیدِ خیالی، هنگامی که خورشید واقعی در حضیض مدارش قرار دارد، روی دایره البروج شروع به حرکت می‌کند.

هنگامی که خورشید میانگین دینامیکی به نقطه اعتدال بهاری رسید، «خورشید میانگین» روی استوای سماوی با سرعت ثابت شروع به حرکت می‌کند.

واضح است که بُعد خورشید میانگین و واقعی با یکدیگر متفاوت خواهد بود. اختلاف بُعد دو خورشید را «تعدیل زمان/معادله زمان[۱]» می‌نامیم و آن را با E نشان می‌دهیم:

$$E = RA_{MS} - RA_{\odot}$$

اگر بُعد خورشید را بدانیم، از رابطه بالا می‌توانیم بعد خورشید میانگین را حساب کنیم. اما بُعد خورشید کمیتی نیست که بتوانیم آن را اندازه بگیریم. زاویه ساعتی کمیت ملموس‌تری است. در هر لحظه می‌توان با داشتن سمت و ارتفاع خورشید،

[۱] Equation of time

زاویه ساعتی آن را پیدا کرد و با داشتن تعدیل زمان، زاویه ساعتی خورشید میانگین را به دست آورد. از تعریف زمان نجومی (LST) به رابطه زیر می‌رسیم.

$$LST = RA + HA \qquad \Rightarrow \qquad E = HA_{\odot} - HA_{MS}$$

زمان رسمی (زمانی که ساعت مچی شما نشان می‌دهد) با رابطه زیر وارد ماجرا می‌شود:

$$MT = HA_{MS} + 12^{h}$$

البته توجه داریم که باید تصحیح مربوط به اختلاف طول جغرافیایی ناظر و نصف النهار استاندارد را اعمال کنیم.

بر این اساس، ساعت صفر (٢٤) هنگامی است که خورشید میانگین در عبور پایینی باشد. این تمام چیزی است که لازم داشتیم. با داشتن تعدیل زمان می توانیم زمان رسمی وقوع یک حادثه نجومی را پیش بینی کنیم (این کار را در قالب یک مثال در انتهای درسنامه انجام خواهیم داد). فعلاً با ساعت مچی کار نداریم و سراغ تعدیل زمان و نحوه محاسبه آن می رویم.

محاسبه تعدیل زمان:

در ادامه خواهید دید که برای محاسبه دقیق تعدیل زمان، نمی‌توانیم معادله‌ای صریح بنویسیم و ناچاریم از روش های عددی کمک بگیریم.

محاسبه تعدیل زمان را برای هر روز از سال به این ترتیب انجام می‌دهیم:

ابتدا زاویه‌ای را که خورشید میانگین دینامیکی روی دایره البروج طی می‌کند، حساب می‌کنیم. به طور تقریبی، زمین در روز ١٤ دی ماه در حضیض مداری قرار دارد. بنابراین:

$$M = \frac{2\pi}{T_e} \times \Delta \mathrm{t} = \frac{2\pi}{T_e} \times (D + \varpi) \quad , \quad T_e = 365.25$$

در رابطه بالا D تعداد روزهای گذشته از اول بهار و $\varpi \approx 75.5^{d}$ فاصله بین حضیض و اعتدال بهاری است. M در رابطه بالا همان «آنومالی میانگین» (یکی از پارامتر های مدار بیضوی) در روز مورد نظر است.

باید طول سماوی خورشید در روز مورد نظر را به دست آوریم. چون مدار بیضوی است، لازم است محاسباتی روی مدار بیضوی انجام دهیم. (در ادامه خواهیم دید به دلیل کوچک بودن خروج از مرکز مدار زمین ($e = 0.0167$) می‌توانیم از محاسبات این قسمت صرف نظر کنیم. ولی فعلاً نمی خواهیم کلیّت مسئله را از دست بدهیم.)

از معادله کپلر برای مدار بیضوی، آنومالی خروج از مرکزی را به دست می‌آوریم. (e :خروج از مرکز مدار زمین)

$$M = E - e \sin E$$

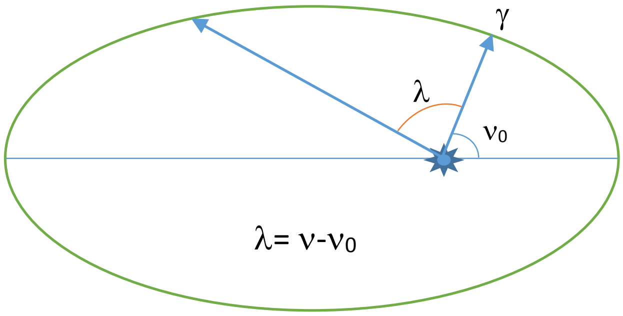
(E در این معادله را با تعدیل زمان اشتباه نگیرید!). این معادله را باید با روش های عددی (مانند روش نیوتون-رافسون و روش نصف کردن بازه) حل کنیم (در قالب یک مثال با این روش آشنا خواهیم شد)

داخل پرانتز: دلیلی که ما نمی‌توانیم رابطه‌ای صریح برای تعدیل زمان بنویسیم، همین رابطه بالاست!

پس از محاسبه E ، با استفاده از رابطه زیر، آنومالی واقعی ν را به دست می‌آوریم.

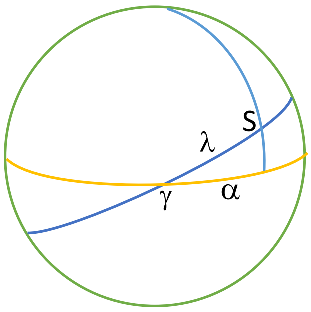
$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

طول سماوی خورشید مستقیماً با آنومالی واقعی زمین مرتبط است. با توجه به شکل زیر:



که $\nu_0 \approx 76°20'$ آنومالی واقعی خورشید در اعتدال بهاری است.

حالا که طول سماوی در روز مورد نظر را به دست آوردیم، آن را با روابط کروی به بُعد تبدیل می‌کنیم. در مثلث کروی شکل زیر از فرمول چهار جزئی می‌توان استفاده نمود:



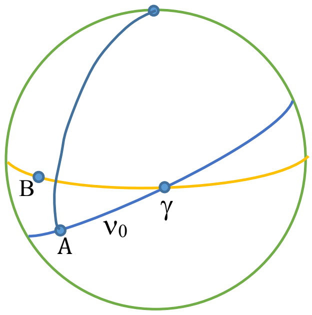
$$\cos\alpha\cos\varepsilon = \sin\alpha\cot\lambda - \sin\varepsilon\cot 90 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \cos\varepsilon\tan\lambda$$

$$RA_{\odot} = \tan^{-1}(\cos\varepsilon\tan\lambda)$$

تا اینجا ما بُعد خورشید واقعی را برای روز مورد نظر به دست آورده ایم. برای محاسبه تعدیل زمان باید بُعد خورشید میانگین را نیز حساب کنیم.

تعریفی که برای خورشید میانگین داشتیم به این شکل بود: هنگامی که خورشید میانگین دینامیکی به نقطه اعتدال بهاری می‌رسد، خورشید میانگین از روی استوا شروع به حرکت می‌کند. می‌توان این تعریف را به شکل ساده تری بیان کرد:

هنگامی که خورشید واقعی در حضیض مداری قرار دارد، خورشید میانگین از نقطه‌ای به بُعد $-\nu_0$ روی استوا شروع به حرکت می‌کند. ν_0 همان آنومالی واقعی نقطه اعتدال بهاری یا به عبارت بهتر، فاصله بین اعتدال بهاری و جهت حضیض است. برای درک بهتر این مطلب به شکل زیر نگاه کنید.



از آنجایی که هر دو خورشید میانگین با سرعت متوسط $\bar{\Omega}$ حرکت می‌کنند، مدت زمانی که طول می‌کشد تا خورشید میانگین دینامیکی زاویه ν_0 را طی کند، برابر زمانی است که خورشید میانگین همین زاویه را روی استوا طی کند. پس می‌توان فهمید که در هنگام حضیض، بُعد خورشید میانگین برابر $-\nu_0$ است!

حال که یک مکان اولیه برای خورشید میانگین پیدا کرده ایم، می‌توانیم به راحتی بُعد آن را برای هر روزی به دست آوریم. با کمی تأمل در می‌یابیم که این مقدار برای روز مورد نظر ما برابر است با:

$$\alpha_0 = M - \nu_0 \qquad \Rightarrow \qquad RA_{MS} = M - \nu_0$$

و در نهایت، تعدیل زمان به دست می‌آید.

$$E = RA_{MS} - RA_{\odot} = (M - \nu_0) - \tan^{-1}(\cos\varepsilon \tan(\nu - \nu_0))$$

مثال:

تعدیل زمان را برای روز اول خرداد ماه به دست آورید. (فرض کنید $\nu_0 = 76°20'$ و حضیض زمین را روز ۱٤ دی‌ماه در نظر بگیرید)

ابتدا آنومالی میانگین را برای این روز حساب می‌کنیم:[۲]

$$M = \frac{2\pi}{Te}(D + \varpi) = \frac{2\pi}{365.25}(62 + 75.5) = 2.3653^r = 2.36^r$$

[۲] دقت اعداد ما بیشتر از دو رقم نیست و ما هم تا همین مقدار نگه می‌داریم. اما محاسبات را با اعداد گرد نشده ادامه می‌دهیم.

برای محاسبه آنومالی خروج از مرکز، از روش نیوتون–رافسون استفاده می‌کنیم. در این روش، مسئله را به مسئله پیدا کردن نقطه برخورد یک تابع با محور افقی تبدیل می‌کنیم. یعنی:

$$y = E - e\sin E - M$$

قرار است مقداری برای E به دست آوریم که در آن، y با تقریب خوبی صفر باشد. (در اینجا تقریب را تا رقم چهارم اعشار انجام می‌دهیم) الگوریتم زیر را تکرار می‌کنیم. در اولین قدم، مقدار اولیه را قرار می دهیم$E_1 = M$ و پس از محاسبات، تخمین بعدی (E_2) را به دست می‌آوریم. این عمل را تا زمانی تکرار می‌کنیم که y_i تا حد قابل قبولی (مثلاً ϵ) به صفر نزدیک شود.

$$E_i \quad \Rightarrow \quad y_i = E_i - e\sin E_i - M \qquad if(\,|y_i| < \epsilon\,) \quad \Rightarrow$$
$$y_i' = -e\cos E_i \quad \Rightarrow \quad E_{i+1} = E_i - \frac{y_i}{y_i'} \quad \Rightarrow \; ....$$

با $M = 2.3653$ ، پس از دو مرحله، به تقریب $y_1 \approx 10^{-5}$ دست می‌یابیم که برای کار ما کافی است. در این تقریب، داریم: $E = 2.3769$. سپس مقدار آنومالی واقعی روز مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$\nu = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+0.0167}{1-0.0167}} \times \tan\left(\frac{2.3769}{2}\right)\right) = 2.3884 = 2.39^\circ$$

حالا طول سماوی خورشید واقعی را به دست می‌آوریم:

$$\lambda_\odot = \nu - \nu_0 = 2.3884 - 1.3322 = 1.0562 \; rad \; = 60.516^\circ = 60.52^\circ$$

و در نهایت، بُعد خورشید واقعی:

$$RA_\odot = \tan^{-1}(\cos 23.45 \tan 60.516) = 58.35$$

بُعد خورشید میانگین نیز به راحتی محاسبه می‌شود:

$$RA_{MS} = M - \nu_0 = 2.3653 - 1.3322 = 1.0331\, rad \; = 59.19^\circ$$

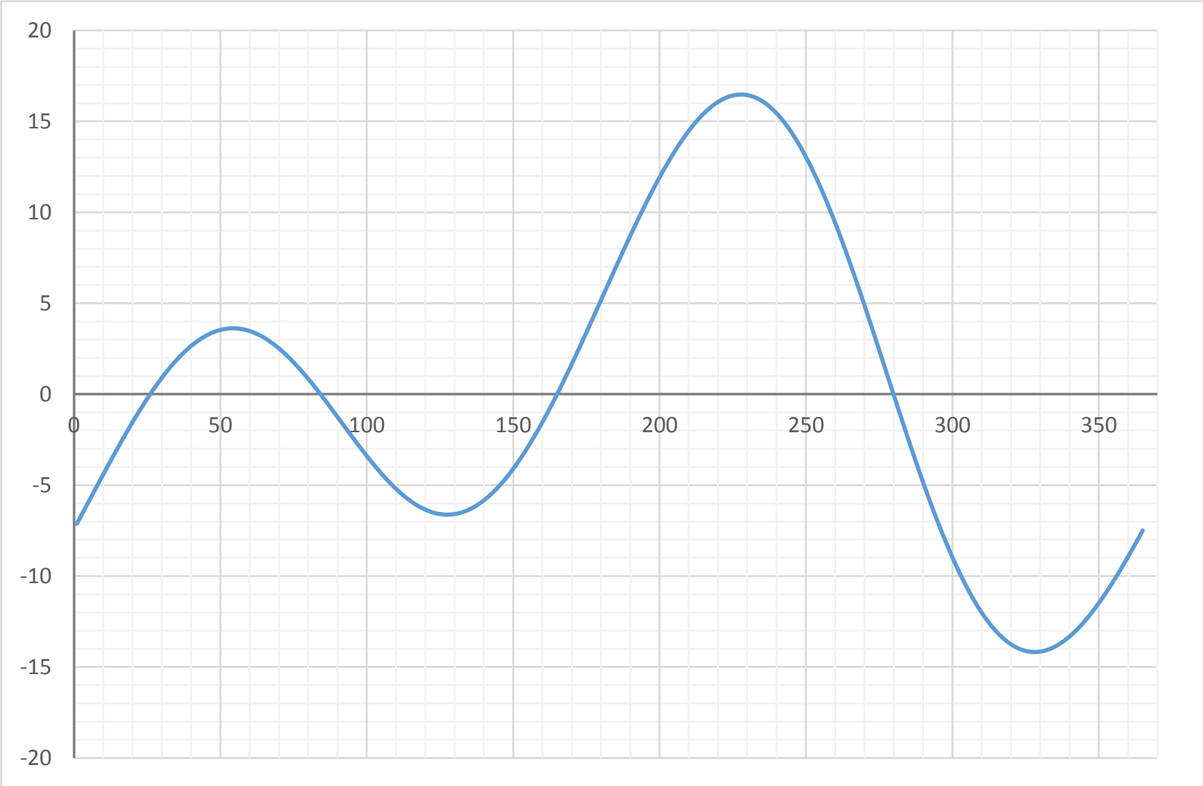
و بالاخره تعدیل زمان:

$$E = RA_{MS} - RA_\odot = 59.192 - 58.354 = 0.84^\circ$$

که با تبدیل آن به دقیقه زمانی، تعدیل زمان حدود ۳,۳۶ دقیقه به دست می‌آید.

نمودار تعدیل زمان

مقدار تعدیل زمان را می‌توانیم برای هر روز از سال به دست آوریم. اگر این کار را به رایانه بسپاریم، در نهایت نمودار تعدیل زمان شکل زیر به دست می آمد. در این نمودار، محور افقی تعداد روز های گذشته از ابتدای سال شمسی را نشان می‌دهد.



با یک نگاه کلی می‌فهمیم این نمودار هیچ تقارنی ندارد!! در ادامه می‌بینیم که آنالما نیز بر خلاف ظاهرش هیچ تقارنی ندارد!

در روز اول فروردین، تعدیل زمان تقریباً ۷- دقیقه است (این مقدار با کم کردن آنومالی واقعی نقطه اعتدال بهاری از آنومالی میانگین آن، به دست می‌آید).

در چهار روز از سال، مقدار تعدیل زمان برابر صفر می‌شود. توجه کنید که این چهار روز ربطی به انقلابین و اعتدالین ندارند.

واضح است که تعدیل زمان در طول سال، بین دو مقدار بیشینه (۱٦,٤ دقیقه) و کمینه (۱٤,۳- دقیقه) تغییر می‌کند. دو کمینه و بیشینه موضعی هم دارد. در انتهای درسنامه، سعی خواهیم کرد این نقاط بحرانی (اکسترمم) ها را به دست آوریم.

در جدول زیر چند نقطه مهم نمودار و تاریخ مربوط به آنها نوشته شده است.

تاریخ	مقدار تعدیل زمان	تاریخ	مقدار تعدیل زمان	تاریخ	مقدار تعدیل زمان
اعتدال بهاری	۷,۱-	۲٦ فروردین	۰,۰	۲٦ اردیبهشت	۳,٤ (بیشینه اول)
اعتدال پاییزی	۷,۳	۲۲ خرداد	۰,۰	٦ امرداد	٦,٦- (کمینه اول)
انقلاب تابستانی	۱,۷-	۹ شهریور	۰,۰	۱۲ آبان	۱٦,٤ (بیشینه مطلق)
انقلاب زمستانی	۱,٤	۳ دی	۰,۰	۲۲ بهمن	۱٤,۳- (کمینه مطلق)

(اعداد جدول بالا فقط در حد یک تخمین قابل قبول هستند. خطای تاریخ ها را ۳ روز فرض کنید!)

وقتی وارد بخش آنالما شویم، دوباره به نمودار بالا برمی‌گردیم و با جزئیات بیشتری آن را بررسی می‌کنیم.

آنالما:

با بحثی که راجع به تعدیل زمان داشتیم، آماده ایم تا به خود آنالما بپردازیم. همان طور که در پیشگفتار خواندیم، آنالما را می‌توان با عکس‌برداری از خورشید در یک ساعت معین از روز، پس از یک سال مشاهده کرد! حال بیایید فرض کنیم این ساعت معین، ساعت ۱۲ ظهر باشد. ساعت ۱۲ ظهر یعنی زمانی که زاویه ساعتی خورشید میانگین، صفر باشد. (تعریف زمان رسمی را که در چند صفحه قبل توضیح دادیم به یاد بیاورید.)

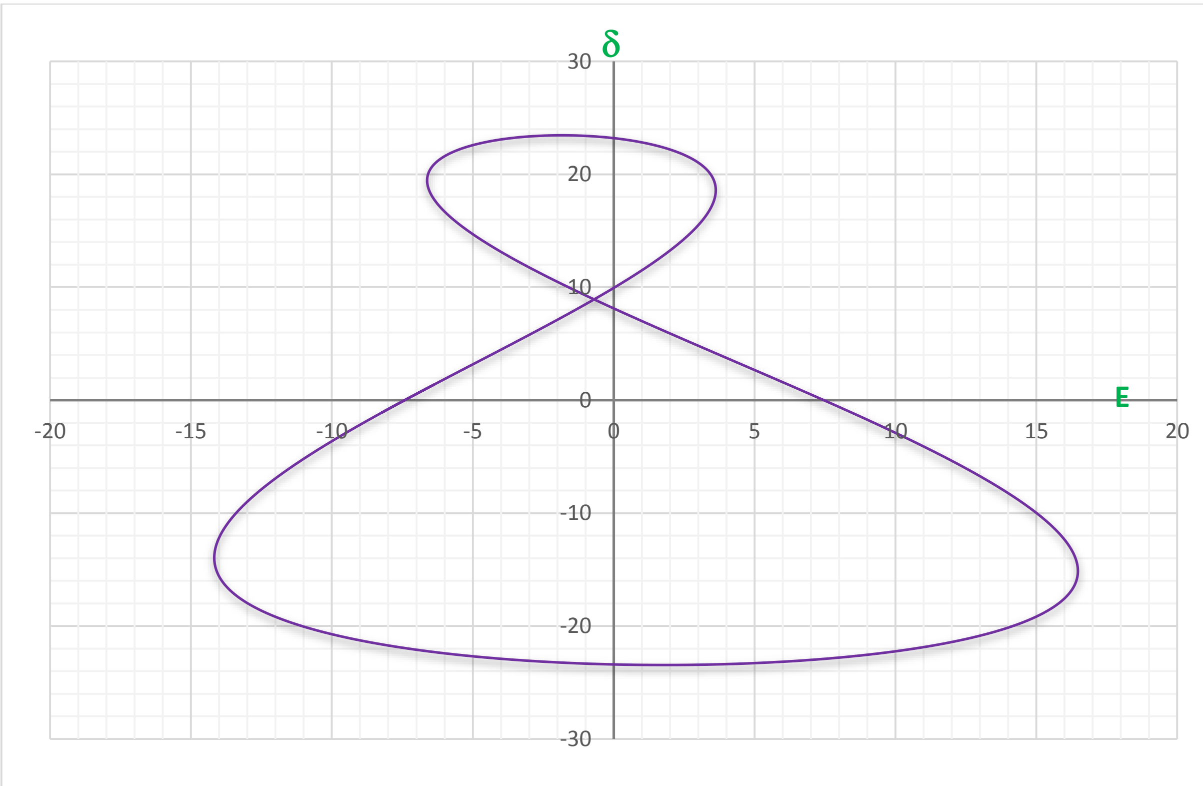
دیدیم که می‌توان تعدیل زمان را بر حسب زاویه ساعتی خورشید ها نوشت:

$$E = HA_{\odot} - HA_{MS}$$

با صفر گذاشتن HA_{MS} ، زاویه ساعتی خورشید واقعی برابر تعدیل زمان می‌شود!! پس اگر هر روز در این ساعت از خورشید عکس بگیریم، خورشید فاصله خاصی از نصف النهار محل دارد که مقدار آن به تعدیل زمان وابسته است.

پس تا حالا فهمیدیم که جابجایی های افقی خورشید روی آنالما به چه دلیل است. بدیهی است که به خاطر تغییر میل، خورشید هر روز در جهت عمودی نیز جابجا می‌شود. و این دو حرکت در مجموع آنالما را شکل می‌دهند.

حال ما یک نمودار رسم می‌کنیم که محور عمودی آن میل خورشید و محور افقی‌اش، تعدیل زمان باشد.



این نمودار شباهت زیادی با آنالما دارد (تقریباً[۳] همان است!). می‌توانیم از این به بعد، روی همین نمودار بحث کنیم.

همان طور که قبلاً پیش بینی کرده بودیم، آنالما هیچ تقارنی ندارد. بیشتر اطلاعاتی که قبلاً درباره آنالما داشتیم، با نمودار بالا زیر سوال می‌رود. از جمله نکاتی که باید به آن توجه کرد، نقطه «گره» آنالما است. این نقطه صرفاً به خاطر تقاطع خطوط تابع ایجاد شده است و تعدیل زمان در آن صفر نیست! تاریخی که خورشید در نقطه گره است، از روی نمودار تعدیل زمان به دست می‌آید.

تاریخ	مقدار تعدیل زمان
۲۳ فروردین	-۰,۷ (گره)
۷ شهریور	-۰,۷ (گره)

با نگاهی دیگر می‌فهمیم که نمودار از دو جهت کشیده شده است. یکی در ربع چهارم دستگاه مختصات و دیگری در ربع دوم. این هم عدم تقارن آنالما را نشان می‌دهد.

قبلاً هم گفتیم که نقاط صفر تعدیل زمان هیچ ربطی به اعتدالین و انقلابین ندارند. از نمودار نیز این مطلب فهمیده می‌شود.

جهت حرکت خورشید روی آنالما:

چرخه یکساله حرکت خورشید روی آنالما به این ترتیب است: از مکانی روی محور افقی با تعدیل زمان منفی، حرکت شروع می‌شود (آغاز سال شمسی)؛ به سمت گره می‌رود؛ تعدیل زمان صفر می‌شود؛ حلقه بالایی را با سرعت کمتر، پادساعتگرد دور می‌زند؛ اول تعدیل زمان صفر می‌شود سپس از بالاترین نقطه (انقلاب تابستانی) می‌گذرد؛ دوباره از گره عبور می‌کند؛ تعدیل زمان صفر می‌شود. محور افقی را در اعتدال پاییزی قطع می‌کند. حلقه پایینی را با سرعت بیشتر و در جهت ساعتگرد طی می‌کند. از نقطه انقلاب زمستانی می‌گذرد، تعدیل زمان صفر می‌شود. دور می‌زند و دوباره به محور افقی می رسد.

با توجه به چرخه بالا، مکان اعتدالین و انقلابین را در نمودار تعدیل زمان مشخص کنید.

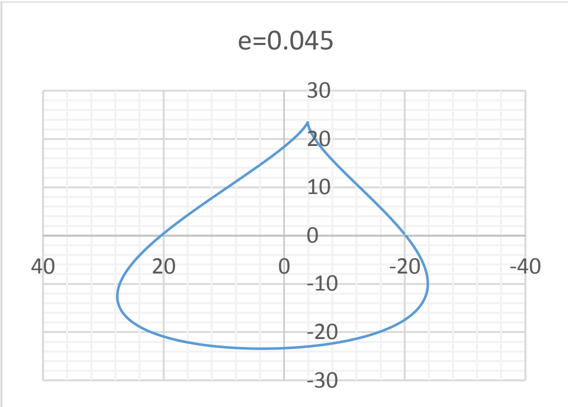
جزئیات بیشتری درباره آنالما:

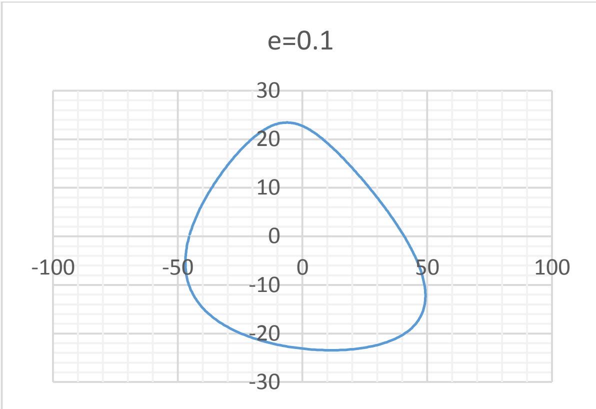
برای این که بتوانیم جزئیات بیشتری از آنالما بفهمیم، دست به کار می‌شویم. می‌دانیم در حالت کلی، معادله صریحی که تعدیل زمان را برای هر روز مشخصی به دست دهد، وجود ندارد. نمودار های بالا هم با استفاده از نرم افزارهای $MATLAB$ و $Excel$ با حل عددی رسم شده اند. برای این که تاثیر هر یک از پارامترها بر آنالما را بفهمیم، مقادیر آن‌ها را تغییر داده و نمودار رسم می‌کنیم. با این کار، اطلاعات جزئی تری به دست می‌آوریم.

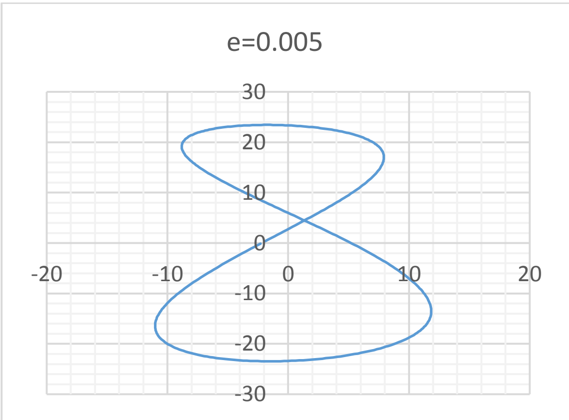
[۳] آنالمای واقعی روی کره رسم می‌شود. در حالی که این نمودار روی صفحه است. تفاوت اصلی همین است!

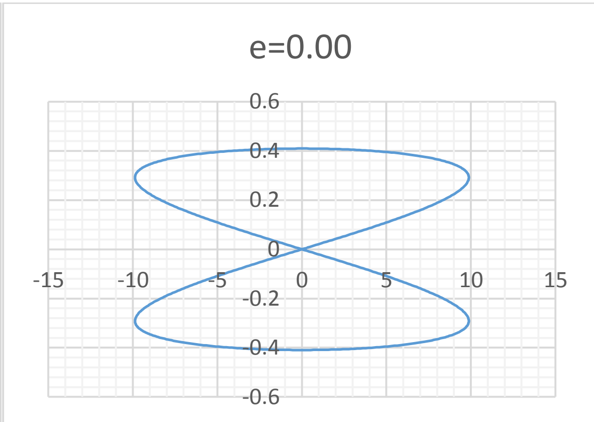
خروج از مرکز:

خروج از مرکز فعلی مدار زمین $e = 0.0167$ است. ببینیم با تغییر در e و ثابت ماندن سایر پارامتر ها، آنالما چه شکلی می‌شود:







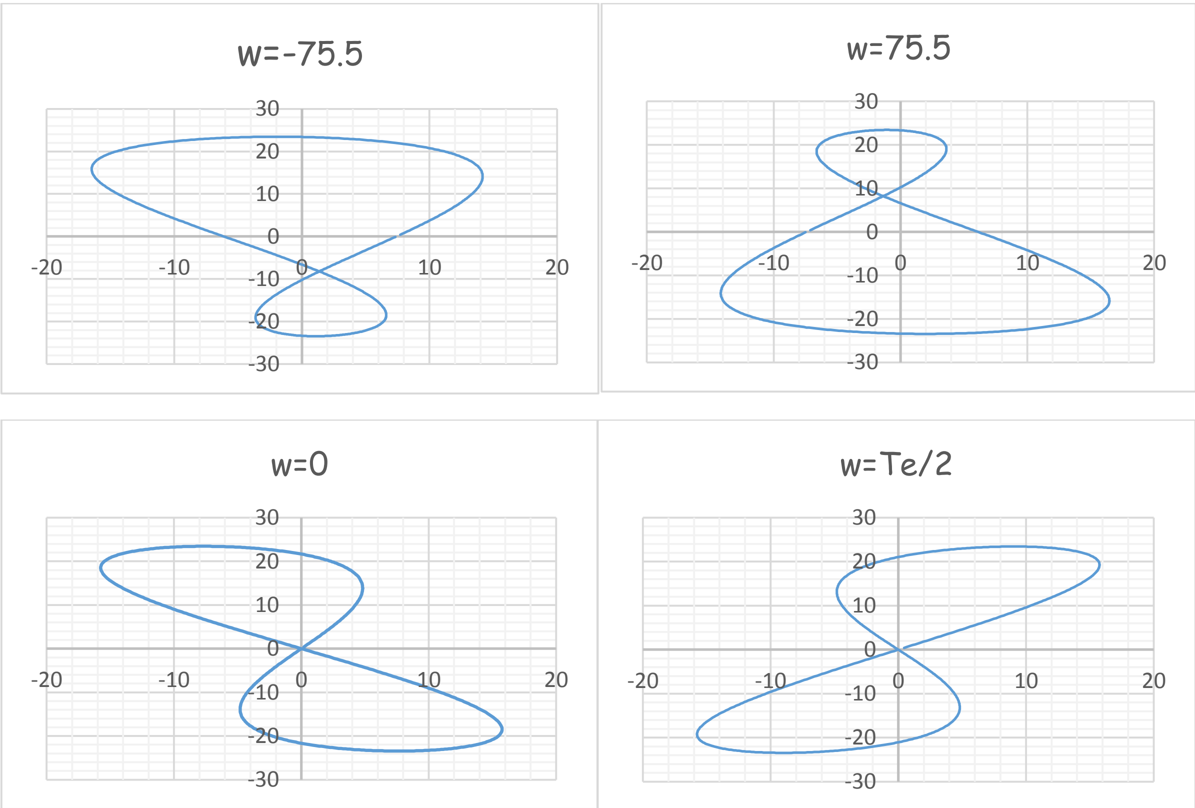


آنالمای زمین شامل دو قسمت است. می بینیم با افزایش خروج از مرکز، قسمت بالای آنالما از بین می‌رود. در یک حالت خاص، شکل آنالما قطره ای می شود. این حالت خاص به سایر پارامترها از جمله طول حضیض مدار نیز بستگی دارد. اما در هر شرایط با افزایش خروج از مرکز، حالتی وجود دارد که آنالما قطره مانند شود. اگر باز هم خروج از مرکز را زیاد کنیم، شکل از حالت قطره‌ای نیز بیرون می‌آید و به دایره نزدیک می‌شود.

دو نمودار پایینی نشان می‌دهند هرچه خروج از مرکز کمتر شود، شکل آنالما متقارن‌تر می‌شود. و در حالتی که $e = 0$ است (مدار دایره‌ای)، آنالما کاملاً متقارن است. همانگونه که انتظار داشتیم! در مورد این حالت در ادامه درسنامه محاسبات بیشتری انجام خواهیم داد.

طول حضیض:

منظور از طول حضیض، فاصله حضیض مدار زمین با نقطه اعتدال بهاری است. می دانیم زمین تقریباً در روز ١٤ دی ماه در حضیض قرار دارد. بنابراین، پس از گذشت حدوداً ٧٥ روز از زمان حضیض، خورشید واقعی در اعتدال بهاری قرار می‌گیرد. این مقدار می‌توانست کمتر یا بیشتر باشد؛ و در یک حالت خاص، حضیض زمین در اعتدال بهاری اتفاق بیفتد. ببینیم با تغییر هر یک از پارامترها، آنالما به چه شکلی در می‌آید.



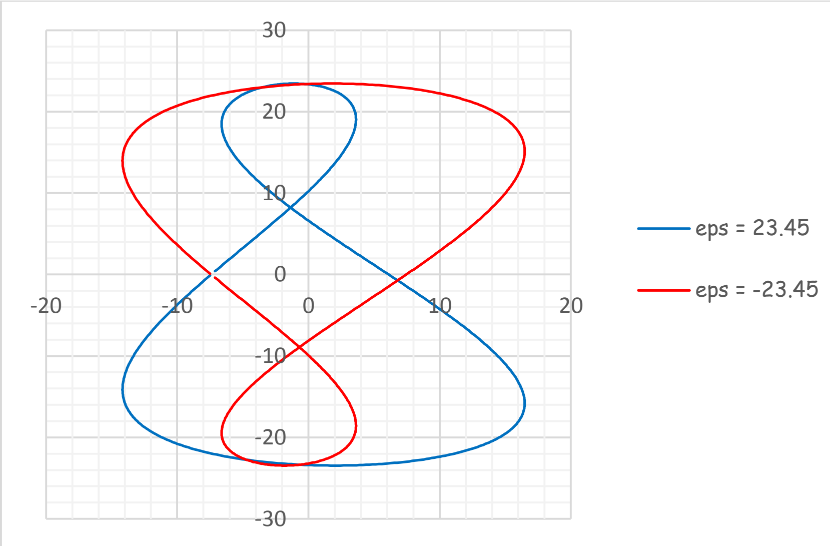
از شکل ها تقارن های مسئله کاملاً مشخص هستند و لازم به ذکر نیست. در یک خروج از مرکز خاص، عامل تغییر اندازه و جهت گیری «دمبِل» آنالما، طول حضیض مداری است.

میل دایره البروج:

شاید بتوان گفت مهمترین عامل ایجاد شکلی شبیه آنالما، میل دایره البروج نسبت به استوای سماوی است. بیضویت مدار زمین تاثیر بسیار کمی دارد و اغلب در محاسبات ساده، از آن صرف نظر می‌شود. اما میل دایره البروج چیزی نیست که بتوان آن را نادیده گرفت.

اگر این زاویه برابر صفر باشد، بدیهی است که دیگر آنالمایی وجود نخواهد داشت. صرفاً یک خط روی محور x تشکیل می‌شود. از طرفی دیگر، اگر میل برابر ۹۰ درجه باشد، یعنی دایره البروج بر استوا عمود باشد، باز هم چیزی به نام آنالما نخواهیم داشت. چون از یک حدی به بعد، اختلاف بعد و میل خورشید میانگین و خورشید واقعی زیاد می‌شود و آنالما به اندازه تمام آسمان بزرگ می شود!! این شرایط را در سیاره اورانوس داریم!

اما یک نکته مهم درباره میل باقی می‌ماند که در نمودار زیر دیده می‌شود:



یعنی مسئله ما در مورد مقدار صفر میل دایره البروج تقارن دارد.

دوره تناوب وضعی و انتقالی:

نکته مهم تری که جا دارد در مورد آن نیز حرف بزنیم، ریشه اصلی کل بحث است. تعریف یک روز کامل، همان تعریف قدیمی است. یک روز برابر مدت زمان بین دو عبور بالایی خورشید واقعی و برابر ۲۴ ساعت است. در این تعریف، «روز» مدِ نظر، روز خورشیدی است نه روز نجومی.

برای سایر سیارات نیز روز خورشیدی تعریف می‌شود. نحوه محاسبه آن نیز مشابه محاسبه دوره تناوب هلالی یک سیاره نسبت به سیاره دیگر است (روش سرعت زاویه ای نسبی در این مورد مفید است).

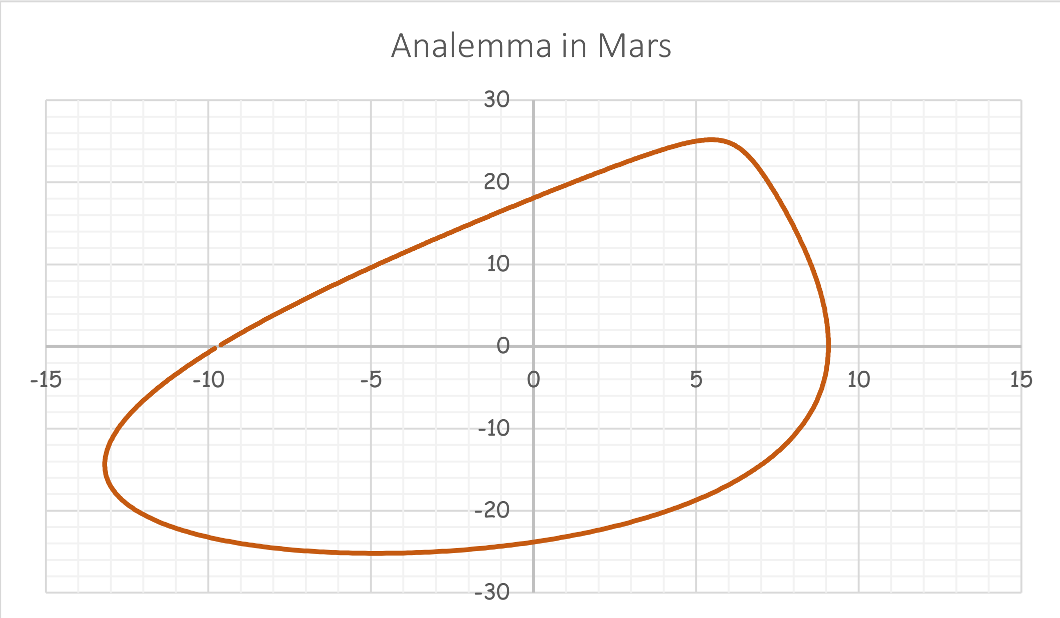
برای مثال، یک دور گردش مریخ به دور خود (روز نجومی مریخی) برابر ۱٫۰۲۵۹ روز زمینی (۲۴ ساعت و ۳۷٫۵ دقیقه) است. با داشتن دوره تناوب حرکت انتقالی (۶۸۶٫۹۳ روز زمینی)، یک روز خورشیدی در مریخ ۲۴ ساعت و ۳۹٫۵ دقیقه طول می‌کشد. با استفاده از این اطلاعات، می‌توانیم روی مریخ بنشینیم و به مدت یک سالِ مریخی به کار ثبت آنالما مشغول شویم!

راستی آنالمای مریخ چه شکلی می تواند باشد؟ می توانیم حدس هایی بزنیم. از داده هایی که با استفاده از نرم افزار استاری نایت به دست می‌آید، داریم:

خروج از مرکز: ۰٫۰۹۳۴ ؛ میل استوا نسبت به صفحه مداری: ۲۵٫۱۹ ؛ فاصله زمانی بین حضیض و اعتدال بهاری: ۲۰۸ روز

اولا این که این اطلاعات به جز طول حضیض، تقریباً با مقادیری که در مورد زمین می‌شناسیم، یکسان هستند. البته تقریباً!

خروج از مرکز بزرگتر ممکن است آنالمای قطره‌ای ایجاد کند. یعنی قسمت بالای آنالما را حذف کند. طول حضیض روی شکل کلی آنالما تاثیری ندارد و فقط جهت شکل را عوض می کند. در کل ما انتظار داریم با شکل زیر روبرو شویم!!!



تا حالا، آنالما را در کلی‌ترین حالت و با در نظر گرفتن تمام عوامل موثر بررسی کردیم. اما می توانیم از روش های تقریبی نیز استفاده کنیم. گرچه با استفاده از تقریب به شکل اصلی آنالما دست نمی‌یابیم اما تا حد خوبی به آن نزدیک می‌شویم. در ادامه کمی با تقریب های ساده در این مورد آشنا می‌شویم. پس از آن چند نکته باقی‌مانده در رابطه با آنالما را بررسی خواهیم کرد.

تقریب خروج از مرکز:

در بین عوامل موثر در آنالمای زمینی، خروج از مرکز تاثیر کمی دارد و می‌توان از آن صرف نظر کرد. یعنی می توانیم بنویسیم $e = 0$ و مسئله را حل کنیم. در نتیجه این کار، عمل «تعدیل مرکز» از روند محاسبه تعدیل زمان حذف می‌شود و فقط بخش تقلیل به استوا باقی می‌ماند. می خواهیم با به دست آوردن روابط ساده، مسئله را تحلیلی‌تر کنیم.

واضح است وقتی خروج از مرکز صفر باشد، دیگر چیزی به نام طول حضیض معنی نخواهد داشت. یعنی داریم:

$$M = \frac{2\pi}{T_e} \times \Delta t = \frac{2\pi}{T_e} \times D = \Omega\, D$$

$$RA_{MS} = M$$

$$\lambda_{\odot} = \nu = M$$

در شرایط بالا تعدیل زمان در اعتدال بهاری خود به خود صفر می‌شود. تنها کاری که لازم است انجام دهیم، تقلیل به استوا (محاسبه بعد خورشید واقعی) است. پس:

$$\tan RA_{\odot} = \cos\varepsilon \tan\lambda_{\odot} = \cos\varepsilon \tan M$$

و تعدیل زمان:

$$E = RA_{MS} - RA_{\odot} = M - \tan^{-1}(\cos\varepsilon \tan M)$$

می توانیم رابطه بالا را تغییر دهیم و به رابطه زیر برسیم:

$$\tan(M - E) = \cos\varepsilon \tan M$$

اگر تمام زاویه ها را برحسب رادیان بنویسیم، تعدیل زمان بسیار کوچک می‌شود و می توانیم آن را تقریب بزنیم. البته می‌توانیم بدون استفاده از تقریب هم به معادله صریحی برسیم (به مسئله ها مراجعه کنید) ولی هدف ما این است که معادله‌ای ملموس پیدا کنیم.

تعدیل زمان را تا مرتبه اول نگه می داریم:

$$\tan M - E(1 + \tan^2 M) + \cdots = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \cdots\right)\tan M$$

$$\frac{E}{\cos^2 M} = \frac{\varepsilon^2}{2}\tan M$$

$$E = \frac{\varepsilon^2}{2}\sin M\, cosM = \frac{\varepsilon^2}{4}\sin(2M)$$

که معادله بالا تابع متناوبی بر حسب زمان است. برای میل خورشید داریم:

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\lambda = \sin\varepsilon\, sinM$$

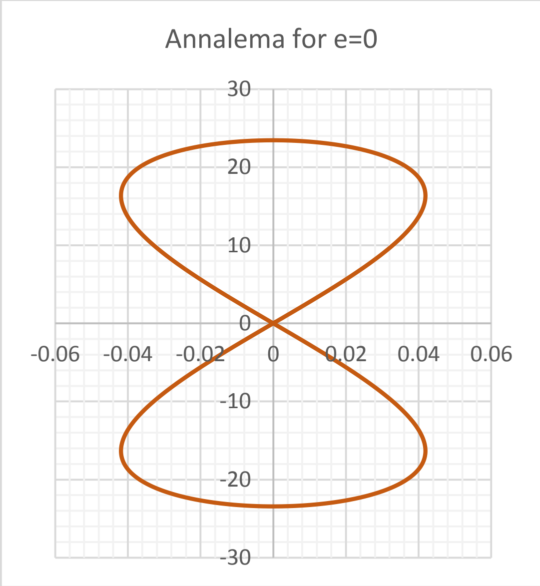
M را از این رابطه در رابطه بالا جاگذاری می‌کنیم.

$$E = \frac{\varepsilon^2}{4} \times 2\sin M \cos M = \frac{\varepsilon^2}{4} \times 2\sin M\sqrt{1 - \sin^2 M}$$

$$E = \frac{\varepsilon^2}{4} \times 2\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}\sqrt{\frac{\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta}{\sin^2\varepsilon}} = \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\sin\delta}{\sin^2\varepsilon}\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\delta}$$

می توان معادله بالا را با اعمال تقریب ها باز هم ساده کرد. ولی برای کار ما (رسم نمودار) همین کافی است!

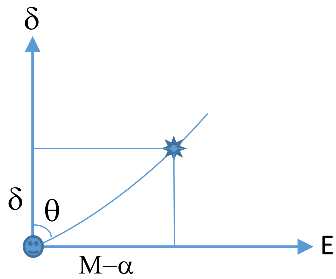
اگر نمودار میل خورشید بر حسب تعدیل زمان را رسم کنیم، شکل زیر به دست می‌آید:



همان طور که قبلاً هم دیده بودیم، نمودار کاملاً متقارن است.

زاویه مرکزی آنالما در حالت e=0 :

می توانیم زاویه مرکزی آنالما (زاویه بین دو مماس بر آنالما در نقطه گره) را حساب کنیم. در مسئله ای که ما داریم بررسی می‌کنیم، سرعت حرکت خورشید روی دایره البروج ثابت است. در جابجایی بسیار کوچکِ خورشید روی دایره البروج می‌توان با اعمال تقریب هایی زاویه مرکزی را به دست آورد. در شکل زیر، خورشید میانگین و واقعی پس از مدت زمان کم (مثلاً یک روز) نشان داده شده است. می دانیم که اختلاف بعد دو خورشید همان تعدیل زمان است.



به راحتی زاویه تتا به دست می‌آید:

$$\tan\theta = \frac{M-\alpha}{\delta}$$

$$\delta \approx \sin\delta = \sin\varepsilon \sin M \approx M \sin\varepsilon$$

$$\alpha \approx \tan\alpha = \cos\varepsilon \tan M \approx M \cos\varepsilon$$

$$\tan\theta \approx \frac{M - M\cos\varepsilon}{M} = \frac{1-\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} = \frac{2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}} = \tan\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\theta = \varepsilon/2$$

چون آنالما تقارن دارد، زاویه مرکزی دو برابر تتا یعنی همان ε است.

لازم به ذکر است که زاویه‌ی نقطه گره، در حالت کلی که خروج از مرکز را نیز در نظر بگیریم قابل محاسبه است. در انتهای درسنامه، این زاویه را به دست خواهیم آورد.

محاسباتی روی آنالمای واقعی:

بعد از تقریب هایی که زدیم، وقت آن شده کمی دقیق‌تر شویم. چند نکته درباره‌ی آنالما باقی مانده است که جدا از بحث اصلی به آنها می‌پردازیم. چون محاسبات ریاضی طولانی‌تری دارند.

نقاط بحرانی نمودار تعدیل زمان:

دیدیم که تعدیل زمان دارای بیشینه و کمینه است. در این قسمت، ابتدا عوامل موثر در تعدیل زمان را جداگانه بررسی کرده سپس بحث را کلی می‌کنیم. محاسبات این بخش را در قالب مثال می‌آوریم.

مثال: (سوال از کتاب نجوم کروی اسمارت فصل ٦)

الف) ثابت کنید اگر فقط تقلیل به استوا را در نظر بگیریم (*e=0*)، بیشینه تعدیل زمان وقتی پیش می آید که طول سماوی خورشید برابر مقدار زیر باشد:

$$\lambda_{\odot} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{\cos\varepsilon}}$$

ب) ثابت کنید اگر فقط تعدیل مرکز را در نظر بگیریم (*ε=0*)، بیشینه تعدیل زمان وقتی پیش می آید که آنومالی واقعی خورشید برابر مقدار زیر باشد:

$$\nu_{\odot} = \cos^{-1}\left(\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{4}} - 1}{e}\right)$$

حل:

الف) رابطه تعدیل زمان را می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

$$E = RA_{MS} - RA_{\odot} = M - \alpha$$

$$\frac{dE}{dM} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(M-\alpha)}{dM} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\alpha}{dM} = 1$$

$$\tan\alpha = \cos\varepsilon \tan M \quad \Rightarrow \quad (1+\tan^2\alpha)\frac{d\alpha}{dM} = \cos\varepsilon\,(1+\tan^2 M)$$

$$\frac{d\alpha}{dM} = \frac{\cos\varepsilon\,(1+\tan^2 M)}{1+\cos^2\varepsilon\tan^2 M} = 1$$

با جابجا کردن معادلات، به رابطه مورد نظر خواهیم رسید.

$$\tan^2 M = \frac{1}{\cos\varepsilon}$$

با قرار دادن مقدار میل محوری زمین، طول سماوی خورشید ٤٧,٤٧ و ۱۳۲,۵۳ و ۲۲۷,٤٧ و ۳۱۲,۵۳ به دست می‌آید که به ترتیب به تاریخ های ۱۷ اردیبهشت، ۱۰ مرداد، ۱۵ آبان و ۱۱ دی مربوط است. این تاریخ ها خیلی به نقاط بحرانی نمودار تعدیل زمان نزدیک اند.

ب) دوباره از رابطه تعدیل زمان شروع می‌کنیم.

$$E = RA_{MS} - RA_{\odot} = (M-\nu_0) - (\nu-\nu_0)$$

$$\frac{dE}{dM} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\nu}{dM} = 1$$

از معادله کپلر مشتق می‌گیریم:

$$M = E - e\sin E \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dE} = 1 - e\cos E$$

از رابطه‌ای که بین آنومالی خروج از مرکز و واقعی داشتیم نیز مشتق می‌گیریم:

$$\tan\frac{E}{2} = \beta\tan\frac{\nu}{2} \quad where \quad \beta = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{1+e}$$

$$\left(1+\tan^2\frac{E}{2}\right)\frac{dE}{d\nu} = \beta\left(1+\tan^2\frac{\nu}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{d\nu} = \frac{\beta\left(1+\tan^2\frac{\nu}{2}\right)}{1+\beta^2\tan^2\frac{\nu}{2}}$$

ادامه می‌دهیم!

$$\frac{dM}{d\nu} = \frac{dM}{dE}\frac{dE}{d\nu} = (1-e\cos E)\frac{\beta\left(1+\tan^2\frac{\nu}{2}\right)}{1+\beta^2\tan^2\frac{\nu}{2}}$$

از رابطه قبلی می‌توانیم $\cos E$ را به دست آوریم و در رابطه بالا قرار دهیم:

$$\frac{1-\cos E}{1+\cos E} = \beta^2\tan^2\frac{\nu}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos E = \frac{1-\beta^2\tan^2\frac{\nu}{2}}{1+\beta^2\tan^2\frac{\nu}{2}}$$

$$\frac{dM}{d\nu}=\left(1-e\frac{1-\beta^2\tan^2\frac{\nu}{2}}{1+\beta^2\tan^2\frac{\nu}{2}}\right)\left(\frac{\beta\left(1+\tan^2\frac{\nu}{2}\right)}{1+\beta^2\tan^2\frac{\nu}{2}}\right)=1$$

از آنجایی که $\tan^2\frac{\nu}{2}=\frac{1-\cos\nu}{1+\cos\nu}$ رابطه ها بر حسب $\cos\nu$ ساده می‌کنیم:

$$\frac{1-\beta^2\tan^2\frac{\nu}{2}}{1+\beta^2\tan^2\frac{\nu}{2}}=\frac{(1-\beta^2)+(1+\beta^2)\cos\nu}{(1+\beta^2)+(1-\beta^2)\cos\nu}=\frac{e+\cos\nu}{1+e\cos\nu}$$

$$\frac{1+\tan^2\frac{\nu}{2}}{1+\beta^2\tan^2\frac{\nu}{2}}=\frac{1+e}{1+e\cos\nu}$$

با جاگذاری در رابطه بالا:

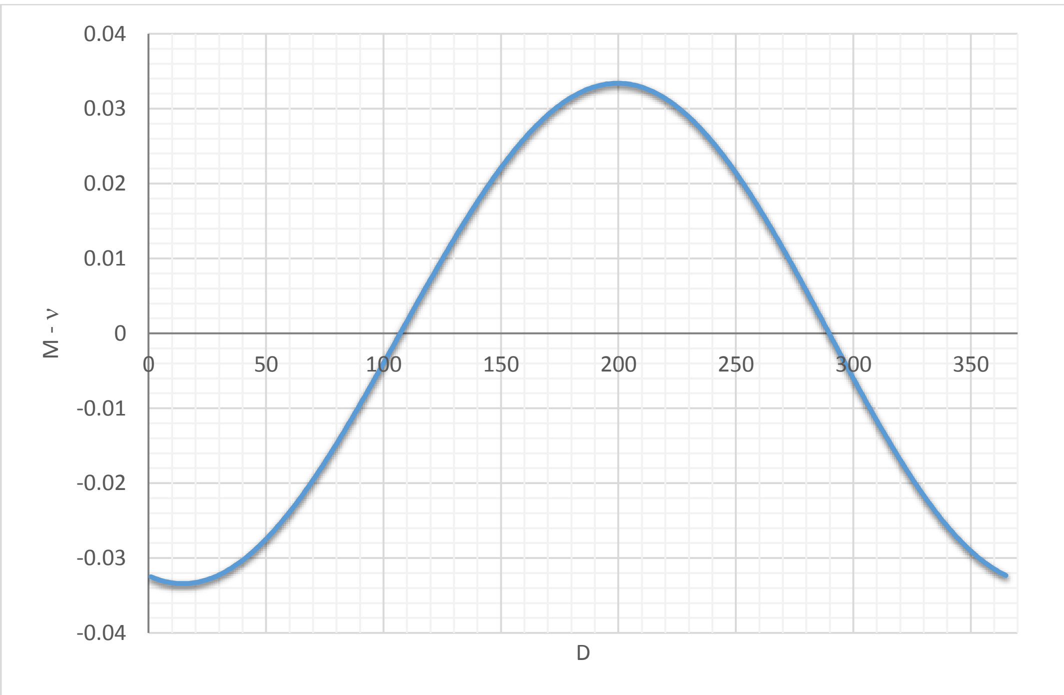
$$\left(1-e\frac{e+\cos\nu}{1+e\cos\nu}\right)\left(\frac{1+e}{1+e\cos\nu}\right)\beta=1$$

$$(1+e\cos\nu-e^2-e\cos\nu)(1-e^2)^{\frac{1}{2}}=(1+e\cos\nu)^2$$

$$\cos\nu=\frac{1}{e}\left((1-e^2)^{\frac{3}{4}}-1\right)$$

خسته نباشیم!!

با جاگذاری مقدار خروج از مرکز مدار زمین، آنومالی های ۹۰,۷ و ۲٦۷,۳ به دست می‌آید که به ترتیب به ۱۵ فروردین و ۲۷ آذر مربوط است. نمودار زیر، این نقاط را نشان می‌دهد.



می توانیم حدس بزنیم نقاط بحرانی نمودار تعدیل زمان بیشتر به خاطر میل محوری ایجاد شده‌اند تا خروج از مرکز مدار. در حقیقت خروج از مرکز مدار زمین تاثیر زیادی بر تعدیل زمان ندارد.

حالا می‌توانیم حالت کلی‌تر را بررسی کنیم. یعنی حالتی که نه خروج از مرکز صفر باشد نه میل محوری. باز هم از رابطه تعدیل زمان شروع می‌کنیم:

$$E = (M - \nu_0) - \tan^{-1}(\cos\varepsilon \tan(\nu - \nu_0))$$

$$\tan(M - \nu_0 - E) = \cos\varepsilon \tan(\nu - \nu_0)$$

مشتق می‌گیریم:

$$(1 + \tan^2(M - \nu_0 - E))\left(1 - \frac{dE}{dM}\right) = \cos\varepsilon\,(1 + \tan^2(\nu - \nu_0))\frac{d\nu}{dM}$$

با صفر گذاشتن $\frac{dE}{dM}$ و جاگذاری از رابطه بالا برای $\tan(M - \nu_0 - E)$:

$$\frac{\cos\varepsilon\,(1 + \tan^2(\nu - \nu_0))}{1 + \cos^2\varepsilon \tan^2(\nu - \nu_0)} = \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d\nu}}$$

طرف دوم رابطه را از محاسبات قسمت قبل جاگذاری می‌کنیم.

$$\frac{\cos\varepsilon\,(1 + \tan^2(\nu - \nu_0))}{1 + \cos^2\varepsilon \tan^2(\nu - \nu_0)} = \left(1 - e\frac{e + \cos\nu}{1 + e\cos\nu}\right)\left(\frac{1 + e}{1 + e\cos\nu}\right)\beta$$

$$\frac{\cos\varepsilon}{\cos^2(\nu - \nu_0)} = \frac{1 - e^2}{1 + e\cos\nu}\left(\frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + e\cos\nu}\right)(1 + \cos^2\varepsilon \tan^2(\nu - \nu_0))$$

با کمی دستکاری به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\cos\varepsilon\,(1 + e\cos\nu)^2 = (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}(\cos^2(\nu - \nu_0) + \cos^2\varepsilon \sin^2(\nu - \nu_0))$$

این رابطه را می‌توانیم بر حسب طول سماوی خورشید نیز بنویسیم:

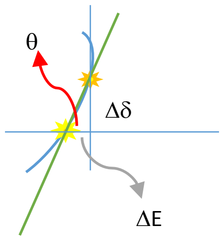
$$\lambda_{\odot} = \nu - \nu_0$$

$$\cos\varepsilon\left(1 + e\cos(\lambda_{\odot} + \nu_0)\right)^2 = (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}\left(\cos^2\lambda_{\odot} + \cos^2\varepsilon \sin^2\lambda_{\odot}\right)$$

این رابطه صریح نیست. ولی می توانیم آن را به روش های عددی (مثل روش نیوتون رافسون) حل کنیم. معادله به ما ٤ جواب می‌دهد که همان نقاط بحرانی (اکسترمم) نمودار تعدیل زمان هستند. از حل معادله، به اعداد زیر برای طول سماوی خورشید رسیدیم ۵۳٫۲۹ و ۱۲۳٫۲۰ و ۲۲۱٫۰۱ و ۳۲۲٫۷۰ که تقریباً همان مقادیری هستند که از نمودار تعدیل زمان به دست آمد.

زاویه خطوط مماس بر آنالما:

به عنوان آخرین مطلب، می خواهیم زاویه خط های مماس بر آنالما در نقطه گره را به دست آوریم. در تقریب مرتبه اول، می‌توان زاویه خطوط مماس را از روی شیب خط های واصل بین دو نقطه متوالی به دست آورد. هرچه فاصله این دو نقطه کمتر باشد، دقت بیشتر می‌شود. در اینجا فاصله دو نقطه را یک روز فرض می‌کنیم. در شکل زیر، مکان خورشید واقعی روی آنالما در دو روز متوالی دیده می‌شود.



که از اینجا زاویه شیب خط واصل برابر است با:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\Delta\delta}{\Delta E}$$

هدف ما به دست آوردن زاویه نقطه گره است. تاریخی را که خورشید در این نقطه واقع می‌شود، به طور تقریبی می‌دانیم. پس از انجام محاسبات مربوطه، داده های زیر به دست می آیند:

اولین قرارگیری در گره				دومین قرارگیری در گره			
۲۲ فروردین		۲۳ فروردین		٦ شهریور		۷ شهریور	
میل	تعدیل زمان	میل	تعدیل زمان	میل	تعدیل زمان	میل	تعدیل زمان
۸,٦٥	-۰,۸۸	۹,۰۱	-۰,۷٥	۹,۳۹	-۱,۰۹	۹,۰۳	-۰,۷۸

که میل ها بر حسب درجه و تعدیل زمان ها بر حسب دقیقه زمانی هستند.

بنابراین:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{\Delta\delta}{\Delta E} = \tan^{-1}\left(\frac{9.01 - 8.65}{\frac{-0.75 + 0.88}{4}}\right) = 84.84°$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{9.03 - 9.39}{\frac{-0.78 + 1.09}{4}}\right) = 102.15°$$

پس زاویه گره آنالما برابر است با:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 102.15 - 84.84 = 17.31°$$

اگر به یاد داشته باشید، وقتی از خروج از مرکز صرف نظر کردیم، این زاویه دقیقا برابر ε بود. ولی حالا کمتر از آن است. البته از روی نمودارهایی که رسم کرده بودیم، می‌شد این را حدس زد.

در آخر چند مثال می آوریم تا با نحوه استفاده از تعدیل زمان بیشتر آشنا شویم.

مثال:

در شهری به مختصات ($L = 58°40'$, $\varphi = 35°30'$) در روز ۱٦ شهریور ماه، ستاره شباهنگ در چه ساعتی (به وقت رسمی کشور) طلوع می‌کند؟ از تغییرات تعدیل زمان در طول روز صرف نظر کنید و ارتفاع شهر از سطح دریا را 1000 متر در نظر بگیرید.

مختصات ستاره شعرای یمانی: $\alpha = 6^h45^m \quad , \quad \delta = -16°44'$

حل:

زاویه ساعتی لحظه طلوع شباهنگ را می‌توانیم به راحتی به دست آوریم. سپس با داشتن بُعد، زمان نجومی محلی را به دست می آوریم:

$$LST = HA_s + RA_s$$

رابطه زمان نجومی را برای خورشید میانگین نیز می‌نویسیم:

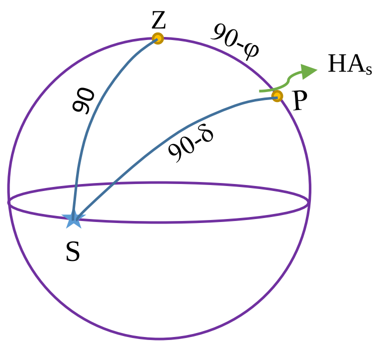
$$LST = HA_{MS} + RA_{MS}$$

برای پیدا کردن زمان محلی به زاویه ساعتی خورشید میانگین نیاز داریم. از دو رابطه بالا داریم:

$$HA_{MS} = HA_s + (RA_s - RA_{MS})$$

بعد خورشید میانگین نیز به راحتی قابل محاسبه است و به تعدیل زمان نیز احتیاجی نیست!

حال برویم سراغ محاسبات. برای پیدا کردن زاویه ساعتی طلوع شباهنگ از مثلث معروف *PZS* استفاده می‌کنیم.



ضلع ZS را ۹۰ درجه گرفتیم. شاید بپرسید پس ارتفاع شهر چه می‌شود؟ به خاطر ارتفاع شهر، افق ظاهری پایین‌تر می‌رود و ضلع ZS باید کمی از ۹۰ درجه بیشتر باشد. سوال شما درست است. اما ارتفاع جایی تاثیر دارد که ما روی کوه یا بلندی باشیم. به این صورت که ارتفاع ما نسبت به اطراف بیشتر باشد نه نسبت به سطح دریا. در این سوال، ما اطلاع دقیقی درباره محیط نداریم. پس فرض می‌کنیم تمام منطقه در ارتفاع یکسانی قرار دارد.

$$\cos 90 = \cos(90-\varphi)\cos(90-\delta) + \sin(90-\varphi)\sin(90-\delta)\cos HA_s$$

$$\cos HA_s = -\tan\varphi\tan\delta = -\tan(-16°45')\tan(35°30')$$

$$HA_s = -77°36' = -5^h10^m$$

توجه داریم که زاویه ساعتی طلوع همواره منفی است. علامت منفی را خودمان قرار دادیم!

حالا زاویه ساعتی خورشید میانگین را محاسبه می‌کنیم. برای روز ۱۶ شهریور، آنومالی میانگین به این صورت است:

$$M = \frac{360°}{365.25}\times(16+5\times31+75.5) = 242°57'$$

آنومالی واقعی اعتدال بهاری هم از قبل به یاد داریم $\nu_0 = 76°20'$. پس:

$$RA_{MS} = 242°57' - 76°20' = 166°37' = 11^h6^m$$

با جاگذاری در رابطه‌ای که به دست آوردیم، زاویه ساعتی خورشید میانگین به دست می‌آید:

$$HA_{MS} = -5^h10^m + \left(6^h45^m - 11^h6^m\right) = -9^h31^m$$

پس زمان از باید از نیمه شب گذشته باشد. برای زمان محلی داریم:

$$LMT = 12^h + HA_{MS} = 2^h29^m$$

هنوز کار تمام نشده. باید زمان را به وقت رسمی یعنی برای نصف النهار استاندارد بیان کنیم. برای ایران، نصف النهار استاندارد $L_{std} = 52°30'$ است. پس اختلاف زمانی با نصف النهار عبارت است از:

$$\Delta t = \frac{L_{std}-L}{15} = \frac{52°30' - 58°40'}{15} = -0^h24^m$$

این مقدار را به زمان محلی اضافه می‌کنیم:

$$MT = 2^h29^m - 0^h24^m = 2^{\text{h}}5^m$$

اما این هنوز آخر کار نیست! می دانیم که در ایران، شش ماه اول سال ساعت تابستانی داریم. پس زمان نهایی که به دست می‌آید ساعت 3^h5^m بامداد است. نرم افزار استاری نایت زمان طلوع شباهنگ را برای روز ۱۵ شهریور 3^h7^m و برای ۱۶ شهریور 3^h3^m گزارش می‌کند! به نظر می‌رسد درست محاسبه کرده‌ایم!!

خسته نباشیم!!

مثال:

برای شهر مثال قبل، زمان اذان ظهر در روز اول آذر ماه را به دست آورید. سپس سایر اوقات شرعی را محاسبه کنید.

حل:

اذان ظهر زمانی است که خورشید به بالاترین ارتفاع خود برسد. می‌توان این را با تقریب همان عبور بالایی خورشید دانست. یعنی زمانی که زاویه ساعتی خورشید واقعی صفر شود. اگر رابطه زمان نجومی را برای خورشید میانگین و خورشید واقعی بنویسیم و با هم برابر قرار دهیم به این رابطه می‌رسیم:

$$RA_{\odot} + HA_{\odot} = RA_{MS} + HA_{MS}$$

$$HA_{MS} = RA_{\odot} - RA_{MS} = -E$$

و با همان ترتیبی که در مثال قبل انجام دادیم، زمان رسمی محلی به دست می‌آید:

$$LMT = 12 + HA_{MS} = 12 - E$$

حالا تعدیل زمان را برای این روز به دست می‌آوریم:

$$M = \frac{2\pi}{365.25}(186 + 2 \times 30 + 75.5) = 5.5306^{r} = 5.53^{r} = 316°53'$$

$$E_i = M + e\sin E_i \quad \Rightarrow \quad y_i = E_i - M - e\sin E_i \quad \Rightarrow \quad y_i' = 1 - e\cos E_i \quad \Rightarrow \quad E_{i+1} = E_i - y_i/y_i'$$

$$E_1 = M \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0.0114 \quad \Rightarrow \quad y_1' = 0.9878 \quad \Rightarrow \quad E_2 = 5.5190$$

$$E_2 = 5.5190 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -4.445 \times 10^{-5} \qquad \textit{this is enough}!!$$

آنومالی خروج از مرکزی با تقریب خوبی به دست آمد. سپس:

$$\tan\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} \quad \Rightarrow \quad \nu = -0.7758 = 5.5074 = 315°33'$$

$$\lambda_{\odot} = \nu - \nu_0 = 315°33' - 76°20' = 239°13'$$

$$RA_{\odot} = \tan^{-1}(\cos\varepsilon \tan\lambda_{\odot}) = 57°0' = 237°0'$$

در حین محاسبات، به برد تابع های مثلثاتی توجه داشته باشید. در آخرین مرحله ما ۱۸۰ درجه به بعد به دست آمده اضافه کردیم. (می‌دانیم که بعد و طول سماوی خورشید اختلاف زیادی با هم ندارند.)

بعد خورشید میانگین نیز به دست می‌آید:

$$RA_{MS} = M - \nu_0 = 316°53' - 76°20' = 240°33'$$

و در نهایت تعدیل زمان:

$$E = RA_{MS} - RA_{\odot} = 240°33' - 237°0' = 3°33' = 14^{m}$$

پس زمان اذان ظهر به وقت محلی تقریباً ساعت ۱۱ و ٤٦ دقیقه است که با تاثیر دادن اختلاف طول جغرافیایی محل و نصف النهار استاندارد، ساعت رسمی اذان ظهر می‌شود:

$$MT = 11^h46^m - 0^h24^m = 11^h22^m$$

سایر اوقات شرعی را می‌توانیم با داشتن زمان اذان ظهر به دست آوریم. اما ابتدا لازم است میل خورشید را حساب کنیم:

$$\frac{\sin\delta_\odot}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin\lambda_\odot}{\sin 90} \quad \Rightarrow \quad \delta_\odot = \sin^{-1}(\sin\varepsilon\sin\lambda_\odot) = -19°59'$$

در این قسمت با مثلث PZS سر و کار داریم. رابطه کسینوس ها را می‌نویسیم:

$$\cos(90-a) = \cos(90-\varphi)\cos(90-\delta) + \sin(90-\varphi)\sin(90-\delta)\cos HA_s$$

با حل آن برای زاویه ساعتی داریم:

$$\cos HA_s = \frac{\sin a - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$$

اوقات شرعی به این صورت مشخص می‌شوند:

اذان صبح: خورشید در ارتفاع ۱۸ درجه زیر افق قرار گیرد.

طلوع و غروب آفتاب: خورشید روی افق قرار دارد.

اذان مغرب: خورشید در ارتفاع ٤,٥ درجه زیر افق قرار داشته باشد.

که بر این اساس زاویه ساعتی خورشید در هر یک از چهار زمان بالا به دست می‌آید:

$$HA_{\text{اذان صبح}} = -6^h33^m \quad , \quad HA_{\text{طلوع آفتاب}} = -5^h0^m \quad , \quad HA_{\text{غروب آفتاب}} = 5^h0^m \quad , \quad HA_{\text{اذان مغرب}} = 5^h24^m$$

با اضافه کردن هر کدام از زاویه های ساعتی به زمان اذان ظهر، زمان آن رویداد به دست می‌آید:

اذان صبح	طلوع آفتاب	اذان ظهر	غروب آفتاب	اذان مغرب
4^h49^m	6^h22^m	11^h22^m	16^h22^m	16^h46^m

مسائل:

۱- ناظری در عرض ۳۵٫۵ درجه شمالی هر روز از در یک زمان خاص محلی، از خورشید عکس می‌گیرد. سپس این عکس ها را بر هم منطبق می‌کند. طبق انتظار شکل آنالما تشکیل می‌شود. به طور اتفاقی تمام نقاط آنالما بالای افق است و فقط یک نقطه آنالما بر افق مماس است.

الف: زاویه محور تقارن آنالما با افق چقدر است؟

ب: زاویه خط واصل آنالما با افق چقدر است؟ (سوال از آقای شهاب الدین محین)

۲- ما انتظار داریم هرچقدر میل خورشید کمتر باشد، برای یک ناظر یکسان، دیرتر طلوع کند. یعنی باید در روز اول دی‌ماه، خورشید نسبت به سایر روز های سال در ساعت دیرتری طلوع کند. اما در واقعیت این طور نیست.

الف: چرا؟! با محاسبات خود نشان دهید.

ب: با فرض دایره‌ای بودن مدار زمین، روزی از سال راکه خورشید از همه روز ها دیرتر طلوع می‌کند، پیدا کنید.

پ: آیا در مورد تابستان نیز همین امر اتفاق می‌افتد؟

۳- بر طبق فقه شیعه[۴] و اهل سنت شافعی، زمان اذان عصر هنگامی است که سایه شاخص به دوبرابر سایه‌اش در کوتاه‌ترین حالت برسد. برای آخرین مثالی که حل کردیم این وقت شرعی را نیز به دست آورید.

٤- در شهر سوچیاوا (کشور رومانی) به مختصات جغرافیایی ($\varphi = 47°38'$, $L = 26°15'$) ناظری ستاره شباهنگ را در حال عبور مشاهده می‌کند. ساعت مچی او که با زمان رسمی رومانی ($time\ zone = +2^h$) تنظیم شده، ساعت صفر بامداد را نشان می‌دهد. تاریخ این رویداد را به دست آورید. (ایده از امتحان آزمایشی دوره تیم و امتحان پلنتاریوم جهانی رومانی[۵])

۵- یک منجم در نیم‌کره جنوبی که طلوع قطب جنوب دایره البروج را مشاهده می‌کند، با خود فکر می‌کند که چقد جالب می‌شد اگر ستارگان به جای چرخش به دور قطب جنوب سماوی، به دور قطب جنوب دایره البروجی گردش می‌کردند. مسیر جابجایی ناظر بر روی سطح زمین را رسم کنید تا ناظر، ستارگان را با همان جهت و سرعت زاویه‌ای فعلی، در حال گردش به دور قطب جنوب دایره البروجی ببیند. خط سیر ناظر را در یک روز کامل رسم کنید و جهت و سرعت او را وقتی برای اولین بار از استوا می‌گذرد پیدا کنید. (سوال تئوری جهانی برزیل)

[۴] این حکم طبق فتوای آیت الله سیستانی است و اغلب نرم افزار های اوقات شرعی زمان اذان عصر را برای شیعیان به همین شکل محاسبه می‌کنند.

[۵] این ایده که با رصد یک واقعه نجومی و استفاده از ساعت، تاریخ را به دست آوریم، دو بار در امتحانات آزمایشی دوره تیم مطرح شد و در امتحان پلنتاریوم جهانی نیز سوالی مشابه آمد.

مسائل کامپیوتری:

۱- برنامه‌ای بنویسید که تعدیل زمان را برای هر روز از سال محاسبه کند. سپس سعی کنید نمودار هایی را که در این درسنامه دیدید رسم کنید. (نمودار های این درسنامه براساس داده های به دست آمده از نرم افزار متلب رسم شده‌اند)

۲- یک جدول اوقات شرعی پیدا کنید[۶]. با نرم افزار اکسل (یا هر نرم افزار مشابه دیگری) نمودار زمان طلوع خورشید بر حسب روز سال را رسم کنید. سپس با تفسیر نمودار، توضیح دهید چرا از ساعت تابستانه برای نیمه اول سال استفاده می‌کنیم؟

۳- نمودار تعدیل زمان بر حسب روز سال را در این درسنامه رسم کردیم (اولین نمودار). شما همین نمودار را به صورت قطبی رسم کنید!! برای تعدیل زمان های منفی نیز ایده بزنید!!

در آخر جا دارد از استاد گرانقدر جناب آقای سادات موسوی تشکر کنم. تمام ایده های این درسنامه حاصل تنها یك جلسه کلاس ایشان در دوره انتخابی تیم بود!

هر مشکلی در درسنامه مشاهده کردید لطفا از طریق ایمیل با بنده در میان بگذارید. Hasanpoor75@gmail.com

یا حق...

محمدرضا حسن‌پور

تابستان ۱۳۹۳

[۶] می‌توانید جدول اوقات شرعی را از سایت موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران برای هر شهر ایران و هر مختصات جغرافیایی دلخواه دریافت کنید.