سوالات دوره تابستان المپیاد فیزیک سال۸۴

استفاده به منظور توزیع علم آزاد است . خواهشا یک فاتحه و صلوات مرحمت بفرمایید

جمع آوری:

محمد رضا لطفی نمین

حسین حسین آبادی

تقدیم به آقا امام زمان (عج)

۱/۵

بسمه تعالی

امتحان اول المپیاد فیزیک (دوره‌ی تابستان)

۸۴/۲/۲۷

وقت : ۳ ساعت

۱- مطابق قانون گرانش عمومی اندازه‌ی نیروی جاذبه‌ی بین دو جرم m و m' برابر $F = G\frac{mm'}{r^2}$ است که در آن G ثابت گرانش نیوتن و r فاصله‌ی بین دو جرم است. همچنین مطابق قانون کپلر زمان تناوب روی مدار تقریباً دایره‌ای یک جرم به دور جرم دیگر با $R^{3/2}$ متناسب است که در آن R فاصله‌ی بین دو جرم است.

اگر ماه را نسبت به زمین کاملاً متوقف کنیم 21 روز طول می‌کشد تا با زمین برخورد کند. اگر زمین را نسبت به خورشید متوقف کنیم چند روز طول می‌کشد تا با خورشید برخورد کند. از جرم ماه در مقابل جرم زمین و جرم زمین در مقابل جرم خورشید صرف‌نظر کنید. همه‌ی جرم‌ها را نقطه‌ای فرض کنید.

راه‌نمایی : از تحلیل ابعادی استفاده کنید.

$\frac{21 \times 365?}{20}$

۱۵

۲- بار q در نقطه‌ی x و بار ـ $-q$ در نقطه‌ی $x - \Delta x$ است: این دوبار را یک فنر ـ آرمانی به هم وصل می‌کند با طول ـ کشیده‌نشده‌ی صفر و ضریب‌ِسختی‌ی k. به بار ـ q یک نیروی خارجی‌ی $F\hat{x}$ هم وارد می‌شود. این مجموعه در میدان ـ الکتریکی‌ی $E\hat{x}$ است، که E تابع ـ مکان است. در کل ـ مسئله از نیروی الکتریکی‌یی که این دوبار به هم وارد می‌کنند چشم می‌پوشیم.

a) نیروی کل ـ وارد بر هر یک از این دوبار را بنویسید.

b) در حالت‌ی که این دوبار ساکن و در حالت ـ تعادل اند، با فرض ـ این که k خیل‌ی بزرگ است Δx را حساب کنید. k نسبت به چه کمیت‌ی باید خیل‌ی بزرگ باشد؟

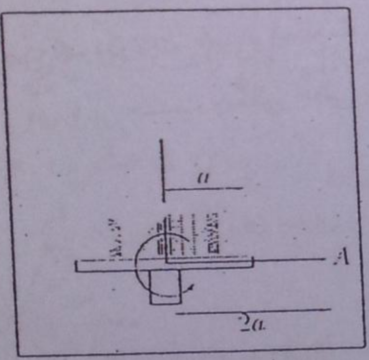
c) با همان فرض ـ بالا F را حساب کنید.

۳/۵

۳- در لحظه‌ی $t = 0$ از آب‌پاشی مطابق شکل آب با سرعت u نسبت به آب‌پاش، از آن خارج می‌شود. در همان لحظه آب‌پاش با سرعت زاویه‌ای ω نسبت به مرکز آب‌پاش شروع می‌کند به چرخیدن. عرض آب‌پاش $2a$ و نقطه‌ی A در فاصله‌ی $2a$ از مرکز آب‌پاش است.

الف- کم‌ترین سرعت u چه‌قدر باشد تا قبل از این که آب‌پاش یک دور کامل بزند آب به نقطه‌ی A برسد؟

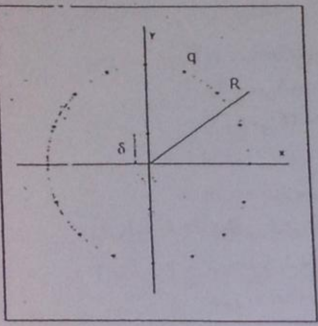
ب- بیش‌ترین سرعت u چه‌قدر باشد به طوری که وقتی آب‌پاش سه‌دور کامل می‌زند آب هنوز به نقطه‌ی A نرسیده باشد؟



۴۱۵

میدان

۴- $4n$ بار نقطه ای، هر یک با بار q ، به صورت یکنواخت روی محیط دایره ای به شعاع R توزیع شده اند.



شکل ۱. حلقه ی بار (قسمت الف و ب)

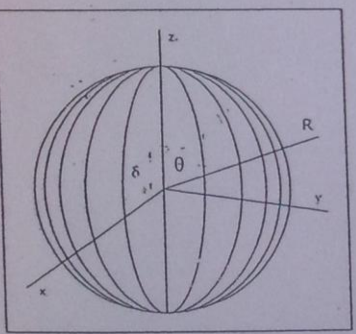
الف) میدان الکتریکی را در نقطه ای مشخص شده روی محور عمودی تا مرتبه ی اول از δ حساب کنید.

ب) با ثابت فرض کردن nq، پاسخ قسمت قبل را در حد $n \to \infty$ و $q \to 0$ ساده کنید و آن را بر حسب چگالی خطی بار حلقه بیان کنید.

با توجه به قسمت قبل، اندازه ی میدان حدی به دست آمده را می توان به صورت زیر نوشت:

$$E(\delta) = A\lambda\delta$$

که در آن λ چگالی خطی بار حلقه و A مقداری ثابت است. با کنار هم قرار دادن تعداد زیادی (N) حلقه ی بار، کره ای سیمی می سازیم. (شکل ۲)



شکل ۲. کره ی سیمی ساخته شده از دوران دادن چند حلقه حول محور Z (قسمت های پ و ت)

پ) میدان الکتریکی درون کره را در نقطه ای مشخص شده روی محور عمودی تا مرتبه ی اول از δ حساب کنید.

ت) با ثابت فرض کردن $N\lambda$، در حد $N \to \infty$ و $\lambda \to 0$ می توان به این کره چگالی سطحی بار نسبت داد. آن را به صورت تابعی از θ (زاویه ی قطبی) حساب کنید.

بسمه تعالی

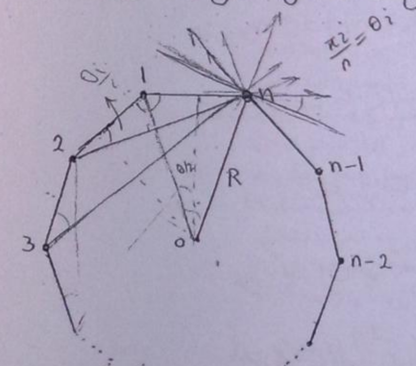
۸۴/۵/۱۰

امتحان دوم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۴) — وقت: ۲,۵ ساعت

۱- نیروی گرانشی بین دو جسم به جرم های m_1 و m_2 برابر $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ و نیرو جاذبه و در راستای خط واصل دو جرم است. فرض کنید روی رئوس یک n ضلعی منتظم n جسم نقطه‌ای هر یک به جرم m قرار دارد. فاصله‌ی رئوس از مرکز n ضلعی را R بگیرید. OK

الف- نیروی وارد بر یکی از این جرم ها را به دست آورید و جهت آن را مشخص کنید. لازم نیست جمع سری به دست آمده را به دست آورید.

ب- اگر جسمی روی دایره‌ای به شعاع r، با سرعت زاویه‌ای ثابت ω بچرخد، شتابی برابر با $r\omega^2$ رو به مرکز خواهد داشت. فرض کنید n جسم روی رأس‌های n ضلعی، مثل روی دایره‌ی محیطی n ضلعی بچرخند. زمان تناوب چه قدر است؟



۲- الف) در نقاط $\vec{r}_i$ بارهای q_i $(i=1,2,3,\dots)$ را قرار داده‌ایم. میدان الکتریکی حاصل در نقطه‌ی $\vec{r}$، $\vec{E}(\vec{r})$ است. حالا بارها را برمی‌داریم و بارهای جدید $q'_i = a q_i$ را در نقاط $\vec{r}'_i = k\vec{r}_i$ قرار می‌دهیم: a و k دو عدد ثابت‌اند. میدان الکتریکی جدید را برحسب میدان الکتریکی قبلی به دست آورید: OK

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \frac{a}{k^2}\vec{E}\left(\frac{\vec{r}}{k}\right)$$

ب) روی محور x، بار با چگالی خطی $\lambda(x)$ توزیع شده است. میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار برابر با $\vec{E}(\vec{r})$ است. اگر این چگالی خطی بار را با چگالی خطی $\lambda'(x) = a\lambda\left(\frac{x}{k}\right)$ عوض کنیم، میدان الکتریکی چه قدر می‌شود؟ $\vec{E}''(\vec{r}) = \frac{a}{k^2}\vec{E}\left(\frac{\vec{r}}{k}\right)$

۱۵

پتانسیل

۳- یک پوسته‌ی کروی به شعاع R و با بار یکنواخت سطحی را در نظر بگیرید. بار کل این پوسته Q است. OK

الف- نیروی وارد بر یک بخش کوچک این پوسته با مساحت ΔS را حساب کنید.

ب- کار نیروی الکتریکی در تغییر شعاع پوسته از R_1 تا R_2 را حساب کنید.

ج- انرژی پتانسیل الکتریکی این پوسته را حساب کنید. (راه‌نمایی: انرژی پتانسیل الکتریکی به ازای شعاع R، برابر است با کار نیروی الکتریکی از شعاع R تا شعاع ∞.)

این پوسته به خاطر کشش سطحی یک انرژی پتانسیل دیگر هم دارد که برابر است با $2\tau S$، که S مساحت پوسته، و τ مقداری ثابت (کشش سطحی) است.

انرژی پتانسیل کل مجموع این انرژی پتانسیل و انرژی پتانسیل الکتریکی است. شعاع تعادل پوسته جایی است که انرژی پتانسیل کل کمینه می‌شود.

د- این شعاع را حساب کنید. انرژی پتانسیل کل در این حالت را هم حساب کنید.

فرض کنید این پوسته به دو پوسته‌ی کروی یکسان تجزیه شود، چنان که بار هر پوسته نصف بار پوسته‌ی اولیه باشد.

هـ- انرژی پتانسیل کل در حالت تعادل را حساب کنید. این انرژی را برحسب انرژی پتانسیل کل در بخش (د) بنویسید.

۷/۵

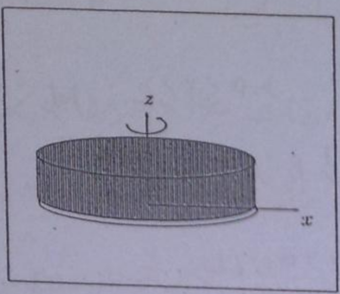
بسمه تعالی

امتحان سوم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۴)

۸۴/۵/۱۷

وقت: ۳ ساعت

۱- از آب‌پاشی به‌شکل یک قرص، آب با سرعتِ قائم u، نسبت به آب‌پاش، از آن خارج می‌شود. صفحه‌ي آب‌پاش را صفحه‌ي xy بگیرید. از گرانش نیز صرفِ نظر کنید.



آب‌پاش با سرعتِ زاویه‌ای‌ي ω حولِ محورِ z می‌چرخد.

الف- پنبه‌ای آغشته به رنگ رويِ محورِ x و در فاصله‌ي R از مرکزِ قرص قرار می‌دهیم. R از شعاعِ قرص کوچک‌تر است. پنبه ساکن است و آب‌پاش زیرِ آن می‌چرخد و قطره‌هایی که از محلِ پنبه‌ي رنگی رد می‌شوند رنگی می‌شوند. در زمانِ T از قطره‌هايِ آب عکس می‌گیریم. قطره‌هايِ رنگی چه خمی را تشکیل می‌دهند؟ معادله‌ي خم را به دست آورید.

ب-۱- پنبه‌ي آغشته به رنگ را رويِ آب‌پاش و در فاصله‌ي R از مرکزِ قرص می‌چسبانیم. حالا پنبه هم‌راهِ آب‌پاش می‌چرخد و قطره‌هایی که از محلِ پنبه‌ي رنگی رد می‌شوند رنگی می‌شوند. فرض کنید در زمانِ $t = 0$ پنبه‌ای آغشته به رنگ رويِ محورِ x باشد. در زمانِ T از قطره‌هايِ آب عکس می‌گیریم. قطره‌هايِ رنگی چه خمی را تشکیل می‌دهند؟ معادله‌ي خم را به دست آورید. براي این‌کار ابتدا مکانِ قطره‌ای که در زمانِ t_1 از آب‌پاش جداشده را در زمانِ t، یعنی $x(t)$، $y(t)$، و $z(t)$، به دست آورید. t_1 را بینِ آن‌ها حذف کنید و x و y را بر حسبِ t و z به دست آورید.

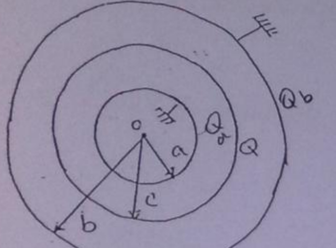
ب-۲- بگیرید $\tan\phi := y/x$. ϕ را بر حسبِ t و z به دست آورید. رابطه‌ي خود را براي zِ بزرگ ساده کنید. (راه‌نمایی: بگیرید $\tan\alpha := \omega z/u$).

ب-۳- پايِ‌پیچ یعنی تغییرِ z به ازايِ تغییرِ ϕ به اندازه‌ي 2π. براي خمی که در بندهايِ قبل به دست آورده‌اید و براي zِ بزرگ پايِ‌پیچ را محاسبه کنید.

پتانسیل

۲/۵

۲۷- دو پوسته‌ی کروی رسانا هم مرکزند. شعاع آنها a و b ($b>a$) است. این دو کره به زمین متصل‌اند. یک کره‌ی باردار دیگر با بار کل Q، شعاع c ($a<c<b$)، و چگالی بار سطحی یکنواخت بین دو کره‌ی رسانا قرار دارد. فرض کنید پتانسیل بین کره‌های a و c به صورت $\varphi_1(r)=A_1+\frac{B_1}{r}$ و پتانسیل بین کره‌های c و b به صورت $\varphi_2(r)=A_2+\frac{B_2}{r}$ است که در آن A_1، B_1، A_2 و B_2 ثابت و r فاصله از مرکز کره‌هاست.



الف- پتانسیل را در نواحی $a\le r\le c$ و $c\le r\le b$ به دست آورید. یعنی A_1، B_1، A_2 و B_2 را معین کنید.

ب- بار القایی روی دو پوسته‌ی رسانای a و b چه قدر است؟

ج- می‌دانیم عنصرهای بار یکسان روی بخش‌های مختلف کره‌ی c بر روی پوسته‌های رسانای a و b بارهای یکسانی را القا می‌کنند. اگر به جای کره‌ی c بار نقطه‌ای Q را بین کره‌های a و b و با همان فاصله‌ی c از مرکز آنها قرار دهیم، بار القایی روی کره‌ها چه قدر می‌شود؟

د- اگر بین دو کره‌ی رسانای a و b حلقه‌ای با بار کل Q قرار دهیم به طوری که شعاع حلقه c و مرکز آن همان مرکز کره‌ها باشد، بار القایی روی کره‌های a و b چه قدر است؟

۹/۵

پتانسیل

۳- یک قرص باردار با بار کل Q، شعاع R، و چگالی سطحی یکنواخت را در نظر بگیرید. محور z را محور عمود بر این قرص و گذرنده از مرکز آن بگیرید. مرکز قرص را نقطه‌ی $z=-L$ بگیرید. بار نقطه‌ای Q' را روی محور z و در نقطه‌ی $z=L'$ می‌گذاریم. L، L'، Q، و Q' مثبت اند.

الف- پتانسیل الکتریکی در مرکز مختصات را حساب کنید.

ب- L' را چنان تعیین کنید که در مرکز مختصات میدان الکتریکی صفر شود.

در بقیه‌ی مسئله، L' را همان مقدار محاسبه شده در "ب" بگیرید.

ج- مشتق دوم پتانسیل الکتریکی نسبت به z در مرکز مختصات را حساب کنید.

د- با استفاده از تقارن مسئله، معادله‌ی لاپلاس، و نتیجه‌ی "ج" (یا به هر طریق دیگری) پتانسیل الکتریکی در نزدیکی مرکز مختصات را تا مرتبه‌ی دو نسبت به مختصات دکارتی به دست آورید.

ه- فرض کنید یک ذره بار مثبت مقید است روی یک خط که از مرکز می‌گذرد حرکت کند. زاویه‌ی این خط با محور z، θ است. به ازای چه مقدارهایی از θ، حرکت این ذره حول مرکز مختصات پایدار است؟ l را مختصه‌ی جابه‌جایی در راستای خط مورد نظر فرض می‌کنیم، داریم: (با تقریب اول)

$$\ddot{l} + \frac{qV''_{(0)}}{m}\left(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}\right) l = 0 \rightarrow \sin\theta < \sqrt{\frac{2}{3}}$$ و $V''_{(0)} = \left.\frac{d^2V}{dz^2}\right|_0$

آیا $\left.\frac{d^2V}{dzdx}\right|_0 = 0$ و $\left.\frac{d^2V}{dydx}\right|_0 = 0$ است؟ تقارن مسئله موجب می‌شود که چنین باشد.

بله،

بسمه تعالی

۱/۶

۸۴/۵/۲۴

امتحان چهارم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۴)

وقت: ۳٫۵ ساعت

۱- برخورد دو بعدی دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 را در نظر بگیرید. در دستگاه آزمایشگاه m_2 ساکن است و m_1 پس از برخورد با زاویه‌ی θ_1 نسبت به جهت اولیه‌اش منحرف می‌شود.

الف - در دستگاه مرکز جرم زاویه‌ی انحراف m_1 نسبت به جهت اولیه‌اش θ است. رابطه‌ی بین θ و θ_1 را به دست آورید.

احتمال اینکه زاویه‌ی انحراف m_1 در دستگاه آزمایشگاه بین θ_1 و $\theta_1+d\theta_1$ باشد، $P_1(\theta_1)d\theta_1$ است. می‌خواهیم $P_1(\theta_1)$ را به دست آوریم. فرض کنید احتمال انحراف m_1 در دستگاه مرکز جرم یکنواخت است یعنی اگر احتمال انحراف بین زاویه‌های θ و $\theta+d\theta$ برابر با $P(\theta)d\theta$ باشد، $P(\theta)=\frac{1}{2\pi}$ است. توجه کنید که احتمال انحراف به اندازه‌ی زاویه‌ای بین θ_1 و $\theta_1+d\theta_1$ در دستگاه آزمایشگاه با احتمال انحراف متناظر در دستگاه مرکز جرم بین θ و $\theta+d\theta$ برابر است، یعنی $P_1(\theta_1)\,d\theta_1=P(\theta)\,d\theta$.

ب - به ازای دو حالت $m_1=m_2$ و $m_1 \ll m_2$، $P_1(\theta_1)$ را به دست آورید و برحسب θ_1 ترسیم کنید.

$P_1(\theta_1)=\frac{1}{2\pi} \leftarrow m_1 \ll m_2$ ، $\boxed{P_1(\theta_1)=\frac{1}{\pi}} \leftarrow m_1=m_2$

میدان با

۲- دو قطبی الکتریکی $\vec{P}=P\hat{z}$ در نقطه‌ی $(x=0, y=0, z=0)$ است. یک حلقه‌ی باردار با چگالی یکنواخت در نظر بگیرید که صفحه‌ی آن عمود بر محور z، و مرکز آن در $(x=0, y=0, z)$ است. بار کل حلقه q است.

الف - شعاع حلقه را a بگیرید و نیروی وارد بر حلقه را حساب کنید.

فرض کنید حلقه کش‌سان است، شعاع آن در حالت کشیده یا فشرده نشده a_0 است، و $T=\gamma\frac{\Delta a}{a_0}$، که T نیروی کشش در حلقه، Δa تغییر شعاع حلقه نسبت به a_0، و γ یک مقدار ثابت است. فرض کنید γ بسیار بزرگ است. در افزایش شعاع حلقه، از اثر بار حلقه روی خودش صرف‌نظر کنید، و تنها اثر دو قطبی روی حلقه را در نظر بگیرید.

۲/5

ب - $\Delta\alpha$ را تا اولین مرتبه‌ی غیرصفر نسبت به $\frac{1}{\gamma}$ حساب کنید.

ج - اولین تصحیح غیرصفر نسبت به $\frac{1}{\gamma}$ در نیروی وارد بر حلقه را حساب کنید.

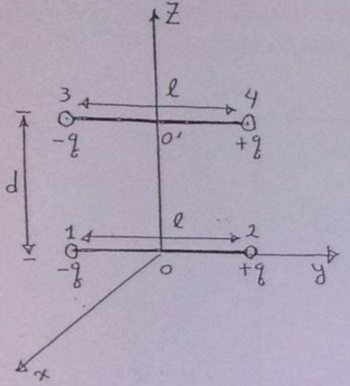
۳- یک دستگاه تصفیه‌ی هوا از دو استوانه‌ی هم‌محور تشکیل شده. بین این دو استوانه اختلاف پتانسیل V برقرار می‌شود. هوا از فضای بین دو استوانه حرکت می‌کند. ذره‌های غبار معلق در هوا در میدان الکتریکی قطبیده می‌شوند و در نتیجه به آنها نیرویی وارد می‌شود که باعث می‌شود پس از پیمودن مسافتی به یکی از استوانه‌ها بخورند و به آن بچسبند. بدین ترتیب غبار از هوا گرفته می‌شود.

الف - فرض کنید که دوقطبی ذره (که در میدان $\vec{E}$ قرار دارد) متناسب با $\vec{E}$ باشد یعنی $\vec{P}=\lambda\vec{E}$. نیروی وارد بر ذره‌ای به جرم m با λی داده شده را برحسب فاصله از محور استوانه‌ها حساب کنید. اندازه‌ی ذره‌های غبار بسیار کوچک است، طوری که می‌توان میدان الکتریکی در محل هر ذره را یکنواخت گرفت.

ب - حداقل طول لوله‌ی استوانه چه قدر باشد تا همه‌ی ذره‌های غبار به جداره برخورد کنند. فرض کنید سرعت همه‌ی ذرات غبار در ورود به این سیستم v_0 باشد.

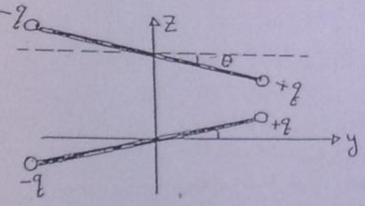
ج - فرض کنید ذره‌های غبار کره‌های فلزی باشند. λ را برای آنها حساب کنید.

۴- شکل مقابل را در نظر بگیرید. ۳/۵



بارهای 1 و 2 با میله‌ی عایقی به طول l به هم متصل اند، همین طور بارهای 3 و 4 . جرم هر بار m است. نقاط O و O' که وسط دو میله هستند ثابت شده‌اند. در نتیجه، این مجموعه در حالت تعادل است. به ازای انحراف‌های کوچک از حالت تعادل، وضعیت تعادل مجموعه (پایداری یا ناپایداری) را در حالتهای زیر معین کنید. در صورت پایداری بسامد نوسانات آن را حساب کنید.

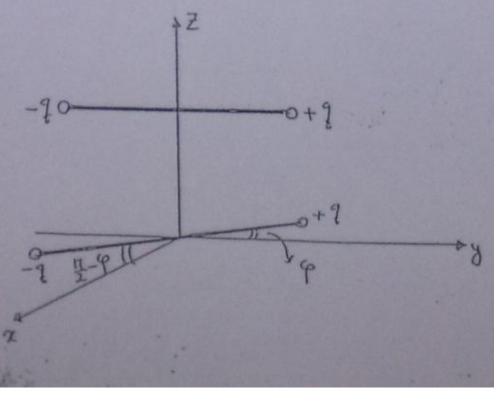
الف - میله‌ی پایین به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک θ و میله‌ی بالا به اندازه‌ی زاویه‌ی $-\theta$ در صفحه‌ی yz منحرف شوند. پایدار _



ب - هر دو به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک θ منحرف شوند (دوباره در صفحه‌ی yz).

ج - میله‌ی پایین به اندازه‌ی زاویه‌ی سمتی کوچک φ (در دستگاه استوانه‌ای) یعنی در صفحه‌ی xy منحرف شود.

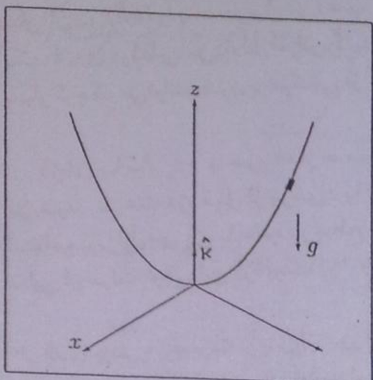
(توجه: در این حالت میله‌ها فقط می‌توانند حول محور Z دوران کنند.)



وقت: ۲ ساعت

۴/۵

۵- روي ميله‌اي كه معادله‌ي آن به صورتِ $z = \alpha r^{2k}$ (α و k ثابت هستند و $r := \sqrt{x^2+y^2}$ است) دانه‌ي تسبيحی بدون اصطكاك و آزادانه می‌تواند حركت كند. اين ميله با سرعتِ زاويه‌ايِ ثابتِ $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ می‌چرخد.



الف- معادله‌ي مؤلفه‌هاي z، r، و θ ي قانونِ نيوتن را براي دانه‌ي تسبيح بنويسيد. (r، و θ مختصه‌هاي قطبيِ دانه‌ي تسبيح در صفحه‌ي xy هستند.)

ب- معادله‌هاي مربوط به مؤلفه‌هاي z، و r را بر هم تقسيم كنيد و با انتگرال‌گيری از آن به معادله‌ي زير برسيد.

$$E' = f(r)\dot{r}^2 + k(r).$$

E' مقداری ثابت است. تابع‌هاي $f(r)$ و $k(r)$ را به دست آوريد.

ج- دانه‌ي تسبيح در چه نقاطی از ميله باشد تا حركتِ آن پايا باشد (يعنی در چارچوبِ دستگاهِ دوارِ ميله، دانه‌ي تسبيح ساكن باشد). اگر دانه‌ي تسبيح را از اين نقاط منحرف كنيم به ازاي چه شرطی حركتِ آن پايدار و به ازاي چه شرطی حركتش ناپايدار است. براي حالتِ پايدار فركانسِ نوسان‌هاي كوچک و براي حركتِ ناپايدار ثابتِ زمانی (يعنی زمانی كه دامنه‌ي حركت e برابر می‌شود) را به دست آوريد.

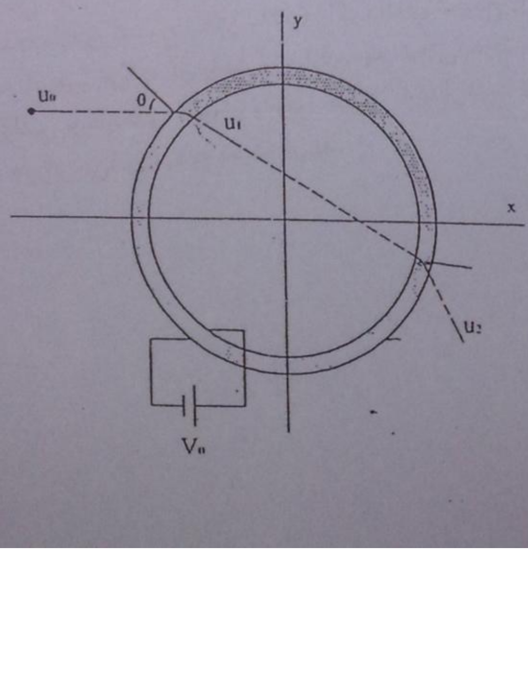
۶ – دو استوانه‌ی هم مرکزِ بسیار بلند و رسانا با شعاع‌های R و $R + \delta R$ را در نظر بگیرید. در حالی که این دو رسانا را در اختلاف پتانسیلِ ثابتِ V_0 نگه می‌داریم، فاصله‌ی میان آن دو (δR) را به صفر میل می‌دهیم. در این حدِ آرمانی، ناحیه‌ی میان دو استوانه را یک لایه‌ی دوقطبی می‌نامند. فرض کنید سطوح استوانه‌ها به گونه‌ای است که ذره‌های بسیار کوچک می‌توانند بدون برهم‌کنشی از آن‌ها بگذرند.

ذره‌ای با بارِ $-e$ و جرمِ m از سمتِ چپ به سوی این مجموعه شلیک می‌شود. سرعتِ ذره قبل از برخورد با استوانه u_0 و موازیِ محور x است. زاویه‌ی امتدادِ مسیرِ اولیه‌ی ذره با عمود بر سطح استوانه‌ی خارجی را θ فرض کنید. شکلِ زیر، نمایی از حرکتِ نوعی این ذره است.

الف) بردارِ سرعتِ ذره را پس از عبور از لایه‌ی دوقطبی (u_1) حساب کنید.
راهنمایی: در حدِ گفته شده، می‌توانید از تغییرات و انحنای میدان و هم‌چنین از انحنای سطح استوانه‌ها صرف نظر کنید.

ب) شرطی میان پارامترهای مسئله پیدا کنید تا ذره از محورِ استوانه عبور کند.

پ) اندازه‌ی سرعت ذره را پس از خارج شدن از استوانه (u_2) حساب کنید.
توجه: پاسخِ این قسمت را مستقل از بندِ ب و در حالتِ کلی حساب کنید.



۱/۴

۸۴/۵/۳۱

وقت: ۴/۵ ساعت

بسمه تعالی

امتحان پنجم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۴)

۱- می‌خواهیم سطحی بسازیم که اگر جسمی را از ارتفاع y_0 روی آن رها کنیم حرکت آن پس از چهار بار برخورد با سطح، تناوبی شود. این سطح دارای این خاصیت‌هاست:

I) معادله‌ی آن به صورت $y=f(x)$ است یعنی برخورد آن با هر سطح $z=c$ یکسان است و می‌توان مسئله را دو بعدی بررسی کرد.

II) نسبت به محور y متقارن است یعنی $f(x)=f(-x)$.

III) برای سادگی فرض می‌کنیم $|f'(x)| \ll 1$ یا فقط x های به اندازه‌ی کافی کوچک که این شرط برقرار را درنظر می‌گیریم یعنی تا مرتبه‌ی اول نسبت به f' محاسبات را انجام دهید.

IV) گرانش در جهت $-y$ است.

V) مهم نیست که جسم از چه x ی رها شود. VIP

معادله‌ی سطح را به دست آورید. کافی است رابطه‌ای بین x و y بیابید.

۲/۴

۲- میله‌ی همگنی به طول l و جرم m مقید است که همواره دو انتهایش روی دایره‌ای به شعاع R باشد ($l < 2R$). صفحه‌ی دایره بر صفحه‌ی افق عمود است. اصطکاکی در کار نیست. زاویه‌ی میله با افق را θ می‌نامیم. OK✓

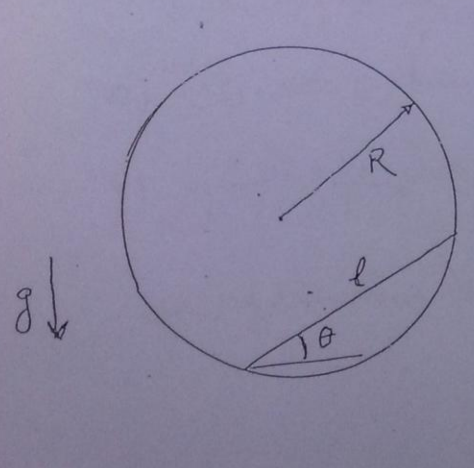
میله را از یک وضعیت اولیه، که افقی نیست اما در نزدیکی‌های پایین دایره است، رها می‌کنیم. زاویه‌ی اولیه را θ_0 می‌نامیم.

الف) $\dot{\theta}$ را به صورت تابعی از θ به دست آورید.

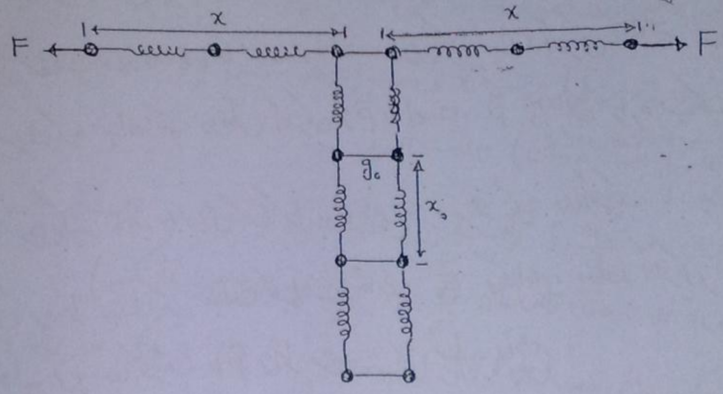
ب) مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت مرکز جرم میله را به صورت تابعی از θ به دست آورید.

ج) اگر θ_0 خیلی کوچک باشد، و میله در نزدیکی‌های پایین‌ترین قسمت دایره باشد، میله نوسان می‌کند. بسامد این نوسان چیست؟

یادآوری: گشتاور لختی یک میله‌ی همگن به طول l و جرم m حول محوری عمود بر میله که از مرکز جرم می‌گذرد $\frac{1}{12}ml^2$ است.



۴- مولکول DNA به صورت دو زنجیر مولکولی جفت شده کشسان است. در واقع هر مولکول از یک زنجیر با مولکول مجاورش از زنجیر دیگر با پیوند هیدروژنی و با انرژی پیوند g_0 به هم متصل‌اند. در این مدل مولکول‌های مجاور هر زنجیره هم توسط فنری با ثابت فنر k و طول اولیه‌ی x_0 به هم متصل‌اند.



الف- حال دو سر DNA را با نیروی ثابت می‌کشیم. با فرض این که فاصله‌ی دو نقطه‌ی باز شده‌ی DNA، $2x$ باشد و n تعداد پیوندهای قطع شده است، افزایش انرژی مولکول DNA، $E(n,x)$، را محاسبه کنید.

در ادامه n را یک عدد حقیقی فرض کنید.

ب- در حالت تعادل n_c تعداد مولکول‌های جدا شده را برحسب بازشدگی مولکول محاسبه کنید.

ج- نیروی F در حالت تعادل چیست؟

۴/۴

۲- یک دی الکتریک به حجم V و پذیرفتاری χ در یک میدان الکتریکی یکنواخت خارجی $\vec{E}$ است.

OK

الف - با فرض $\chi \ll 1$، میدان الکتریکی در نقاط دور از دی الکتریک را تا مرتبه‌ی اول نسبت به χ حساب کنید.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{\chi E_0}{4\pi\epsilon r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

ب - یک کره به شعاع R را در نظر بگیرید، که چگالی بار بر سطح آن $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ است. مرکز کره مرکز مختصات، و θ زاویه با محور z است. فرض کنید میدان الکتریکی $\vec{E}^{(in)}$ درون کره یکنواخت و بیرون کره میدان یک دوقطبی الکتریکی $(\vec{P})$ است. $\vec{P}$ و $\vec{E}^{(in)}$ را حساب کنید. $\vec{P} = \frac{4\pi\epsilon R^3 \sigma_0}{3\epsilon}$ و $\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$

ج - فرض کنید ناحیه‌ی درون یک کره به شعاع R، پر از یک دی الکتریک با پذیرفتاری χ است. این کره را درون یک میدان یکنواخت خارجی $\vec{E}$ می‌گذاریم. میدان الکتریکی درون کره، $\vec{E}^{in}$، و قطبیدگی دی الکتریک، $\vec{P}$، را برحسب χ بسط می‌دهیم:

$$\vec{E}^{(in)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{E}^{(in)}_{(n)} \chi^n$$

$$\vec{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{P}_{(n)} \chi^n$$

$\vec{E}^{(in)}$ را یکنواخت بگیرید.

د - ضریب‌های بسط $\vec{P}$ را برحسب ضریب‌های بسط $\vec{E}^{(in)}$ بنویسید.

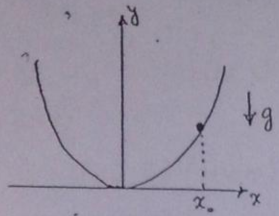
هـ - با استفاده از $\vec{P}$، ضریب‌های بسط $\vec{E}^{(in)}$ را برحسب $\vec{P}$ به دست آورید.

و - $\vec{E}^{(in)}_{(n+1)}$ را برحسب $\vec{E}^{(in)}_{(n)}$ بنویسید. $E^{in}_{n+1} = -\frac{\chi E_n}{3}$

ز - با فرض این که χ کوچک است (که بسط‌ها همگرا شوند)، $\vec{E}^{(in)}$ را حساب کنید. $\frac{3E_0}{12\chi}$

۵- جسمی به جرم m بر روی منحنی مشخص شده ی زیر تحت تأثیر گرانش حرکت می کند.

$y = \frac{x^2}{2a}$ که a پارامتر مشخص کننده ی منحنی است.



الف- انرژی جنبشی و پتانسیل را برحسب x و $\dot{x}$ و دیگر پارامترهای مسئله (به جز y و $\dot{y}$) تعیین کنید.

فرض کنید که جسم بر روی منحنی از نقطه ی مشخص شده با x_0 با سرعت اولیه ی صفر رها شود.

ب- نیروی عمود بر سطح را برحسب x و دیگر پارامترهای مسئله (به جز $\dot{x}$ و $\dot{y}$ و مشتقات بالاتر x و y نسبت به زمان) به دست آورید.

از این به بعد $\frac{x_0}{a}$ را کوچک بگیرید و محاسبات را تا مرتبه ی دو برحسب $\frac{x_0}{a}$ و $\frac{x}{a}$ انجام دهید.
(یعنی از جملات حاوی توان های $\frac{x_0^3}{a^3}$ و $\frac{x^3}{a^3}$ و بالاتر صرف نظر کنید.)

فرض کنید در طی مدت زمان طولانی ($t \gg$ دوره ی تناوب) a اندکی تغییر می کند و به $a+\delta a$ می رسد.
بر اثر این تغییر x_0 هم اندکی تغییر می کند و به $x_0+\delta x_0$ می رسد.

ج- تغییر میانگین زمانی انرژی جنبشی را برحسب δa و δx_0 حساب کنید.

در محاسبه ی کارها، اثر تغییر a و x_0 هر دو را در نظر بگیرید و در خلال فرآیند از تغییر فرکانس نوسان‌ها صرف نظر کنید.

د- میانگین زمانی کار انجام شده توسط نیروی وزن را در خلال این فرآیند حساب کنید.

هـ- میانگین زمانی کار انجام شده توسط نیروی عمود بر سطح را در خلال این فرآیند حساب کنید.

و- با برابر قرار دادن کار انجام شده توسط نیروها با تغییر انرژی جنبشی نسبت $\frac{\delta x_0}{\delta a}$ را تعیین کنید و از روی آن ثابت کنید در خلال فرآیند کمیتی به شکل $a x_0^n$ ثابت است و از آنجا n را تعیین کنید.

راهنمایی: $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$

که منظور از $\langle f(t) \rangle$ میانگین زمانی f(t) است که به صورت زیر تعریف می شود.

$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$; T مدتی است که میانگین گیری انجام می شود.

بسمه تعالی

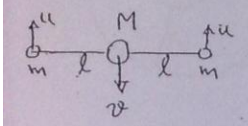
۱/۲

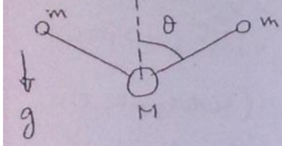
۸۴/۶/۶

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۸۴)

وقت: ۴٫۵ ساعت

۱- دو جرم m همراه با دو میله‌ی صلب، به یک جسم به جرم M $(M \gg m)$ لولا شده‌اند. این مجموعه را مطابق شکل همراه با سرعت‌های اولیه‌ی u و v که به ترتیب به جرم‌های m و M می‌دهیم در میدان گرانشی یکنواخت g رها می‌کنیم. طول هر یک از دو میله‌ی صلب l است.





الف- زاویه‌ی میله‌ها را نسبت به امتداد قائم، $\theta(t)$، را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{m}{M}$ به دست آورید.

توجه: میله‌ها بدون جرم‌اند و از هرگونه اصطکاک صرف‌نظر کنید.

ب- زمان رسیدن دو جرم m به یکدیگر را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{m}{M}$ به دست آورید.

۲- فرض کنید از سطح صافی ذراتی با سرعت v_0 در راستای عمودی رو به بالا گسیل می‌شوند. سطح صاف را $y=0$ بگیرید. به دلیل گرانش سرعت و چگالی ذرات برحسب ارتفاع y، که جهت مثبت آن رو به بالا فرض شده است، متغیر است. (g در راستای منفی محور y است.)

تعداد ذرات بر واحد حجم در $y=0$ را n_0 (یکنواخت) فرض کنید. فرض کنید ذرات در بالاترین نقطه‌ی مسیرشان به نحوی جذب شده و دیگر به سطح باز نمی‌گردند.

الف) $n(y)$ یعنی تعداد ذرات بر واحد حجم را به دست آورید.

حال فرض کنید کره‌ای به شعاع R و جرم M در داخل منطقه‌ای که $n(y)$ حضور دارد قرار دهیم. جرم هر یک از ذرات را m بگیرید و برخورد ذرات با کره را کشسان فرض کنید. R را کوچک فرض کنید به طوری که چگالی ذرات در کل نقاط کره ثابت باشد.

ب) شرطی برای تعادل کره به دست آورید و ارتفاع تعادل آن را محاسبه کنید.

ج) فرض کنید کره را از وضعیت تعادل به اندازه‌ی δy منحرف کنیم. معادله‌ی دیفرانسیلی برای $\delta y(t)$ تا مرتبه‌ی اول نسبت به δy و $\delta \dot{y}$ به دست آورید.

۳- یک پوسته‌ی کروی با چگالی بار سطحی $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ را در نظر بگیرید. مرکز کره مرکز مختصات، شعاع کره R، و θ زاویه‌ی بردار واصل مرکز به هر نقطه با محور z است. پتانسیل الکتریکی حاصل از این پوسته را پتانسیل

$$\phi = \begin{cases} -E r \cos\theta, & r<R \\ \dfrac{A\cos\theta}{r^2}, & r>R \end{cases}$$

بگیرید، که E و A ثابت اند و r فاصله تا مرکز است.

الف) E و A را حساب کنید.

ناحیه‌ی بین دو کره به شعاع‌های a و b $(a<b)$ پر از یک دی‌الکتریک با پذیرفتاری χ است. درون کره‌ی به شعاع a و بیرون کره‌ی به شعاع b خالی است. این مجموعه را در یک میدان الکتریکی یکنواخت $E_0 \hat{z}$ می‌گذاریم. (یعنی میدان الکتریکی در نقاط دور از این کره‌ها یکنواخت است.) به خاطر این میدان بارهای سطحی $\sigma_a \cos\theta$ روی کره‌ی به شعاع a و $\sigma_b \cos\theta$ روی کره‌ی به شعاع b القا می‌شود. σ_a و σ_b ثابت اند.

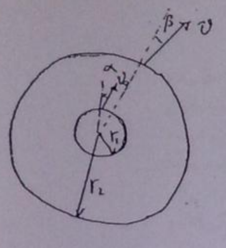
ب) پتانسیل الکتریکی در ناحیه‌های $r<a$، $a<r<b$، و $r>b$ را برحسب σ_a، σ_b، a، b، و E_0 به دست آورید.

ج) σ_a و σ_b را حساب کنید و پتانسیل الکتریکی در کل فضا را به دست آورید (برحسب a، b، χ، و

د) فرض کنید $\frac{b-a}{a} \ll 1$. یک ذره‌ی باردار به بار q و جرم m، از بیرون $(r=b)$ وارد دی‌الکتریک می‌شود. اندازه‌ی سرعت ذره هنگام وارد شدن به دی‌الکتریک v، و زاویه‌ی بردار سرعت با راستای شعاعی α است. اندازه‌ی سرعت این ذره هنگام خروج از دی‌الکتریک $(r=a)$، تا مرتبه‌ی یک نسبت به $b-a$ چه قدر است؟

فرض کنید ذره در نقطه‌ی $\theta=0$ وارد دی‌الکتریک می‌شود.

- دو استوانه‌ی هم محور با شعاع‌های r_1 و r_2 ($r_2>r_1$) به اختلاف پتانسیل U متصل‌اند. استوانه‌ی داخلی، یک فلز داغ و توپر است که الکترون‌ها از آن با سرعت v_0 بیرون می‌آیند. استوانه‌ی بیرونی، r_2، یک توری فلزی است که الکترون‌ها به راحتی از آن می‌گذرند.



الف - اگر الکترون از استوانه‌ی داخلی با زاویه‌ی α نسبت به خط شعاعی خارج شود، سرعت v در هنگام خروج الکترون از استوانه‌ی بیرونی و زاویه‌ی آن هنگام خروج از استوانه نسبت به خط شعاعی، β، را به دست آورید. (مؤلفه‌ی z سرعت صفر است.)

فرض کنید n الکترون بر واحد زمان در صفحه‌های عمود بر محور استوانه از استوانه‌ی داخلی جدا شده و سرعت آن در جهت دلخواهی به طرف بیرون است (جهت خاصی در صفحه‌ی عمود بر محور استوانه مرجح نیست و احتمال خروج الکترون در تمام زوایا در این صفحه یکسان است یعنی احتمال خروج الکترون بین زاویه‌ی α و $\alpha+d\alpha$ به α بستگی ندارد).

ب - تعداد الکترون‌هایی که در زاویه‌ی α تا $\alpha+d\alpha$ از استوانه‌ی داخلی بر واحد زمان خارج می‌شود چند تاست؟ تعداد الکترون‌هایی که از استوانه‌ی خارجی بر واحد زمان در زاویه‌ی β تا $\beta+d\beta$ بیرون می‌آیند چند تاست؟

حال فرض کنید وقتی الکترون‌ها از استوانه‌ی r_2 خارج می‌شوند تحت نیروی $\vec{F}=\eta\,\vec{v}\times\hat{z}$ قرار بگیرند، که در آن $\hat{z}$ بردار یکه در راستای محور استوانه‌ها و به سمت داخل صفحه‌ی کاغذ است و η مقدار ثابتی است. در اثر این نیرو الکترون‌ها روی دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کنند. جرم الکترون را m بگیرید.

ج - شعاع R را به دست آورید.

د - حداکثر فاصله‌ای که الکترون‌ها می‌توانند از محور استوانه‌ها پیدا کنند چه قدر است؟

اکنون فرض کنید استوانه‌ای به شعاع r_3 ($r_3>r_2>r_1$) هم محور با استوانه‌های قبلی هم وجود دارد که الکترون‌هایی که به آن می‌رسند آشکار می‌شوند.

هـ - ماکزیمم مقدار U چه قدر باشد تا هیچ الکترونی توسط آشکارساز روی استوانه‌ی r_3 آشکار نشود؟

و - برای آنکه تمام الکترون‌های خارج شده از استوانه‌ی r_1 به آشکارساز برسند، حداقل مقدار U چه قدر باید باشد؟

ز - فرض کنید $eU \ll \frac{1}{2}mv_0^2$. در این حالت مقدار بار رسیده بر واحد زمان به استوانه‌ی r_3 را به دست آورید.

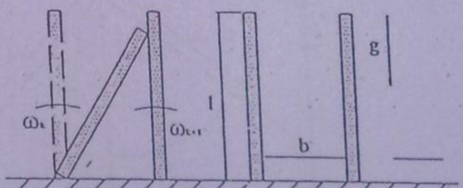
۸۴/۶/۷

وقت: ۲

بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۸۴)

۵ — در این مسئله می‌خواهیم با مدلی ساده، بازی دومینو را بررسی کنیم. چیدمانِ این بازی، تعدادی قطعه‌ی چوبیِ هم‌شکل (دومینو) است که در فواصلِ یکسان از هم به صورتِ عمودی قرار داده شده‌اند. بازی با حرکت دادنِ اوّلین دومینو به سمتِ دومینوهایِ دیگر شروع می‌شود و با برخوردهایِ پیاپیِ آن‌ها ادامه پیدا می‌کند. ابعادِ طولیِ مورد نیاز، در شکل مشخّص شده‌اند. به عنوانِ مدلی ساده برای بررسیِ کیفیِ این بازی، چند فرضِ ساده می‌کنیم: ۱) قطعات کاملاً هم‌گن‌اند و ضخامتِ آن‌ها قابل چشم‌پوشی است. ۲) پایِ دومینوها هنگامِ حرکت و برخوردها نمی‌لغزد و بلند نمی‌شود. ۳) هر دومینو تنها یک برخورد انجام می‌دهد و در برخوردهایِ بعدی نقشی ندارد. ۴) از اصطکاکِ میانِ دومینوها در لحظه‌ی برخورد می‌توان چشم پوشی کرد.



سرعتِ زاویه‌ایِ دومینویِ k ام درست پس از برخوردِ دومینویِ $k-1$ ام با آن، ω_k است. این دومینو پس از سقوط در میدانِ گرانشی با دومینویِ بعدی برخوردی ناکشسان انجام می‌دهد.

الف) کمترین انرژی جنبشیِ مجموعه‌ی دومینوی k ام و $k+1$ ام را درست پس از برخورد به دست آورید ($E_{min}^{(k)}$).

ب) فرض کنید انرژی جنبشیِ این مجموعه پس از برخوردِ ناکشسان به صورت زیر باشد:

$$E^{(k)} = E_{min}^{(k)} + \eta^2 (E_0^{(k)} - E_{min}^{(k)}) \qquad (۱)$$

که در آن η عددی ثابت در بازه‌ی $(0,1)$ و $E_0^{(k)}$ انرژی جنبشیِ مجموعه‌ی دو دومینو پیش از برخورد است. رابطه‌ای بازگشتی برای سرعتِ زاویه‌ایِ دومینوی $k+1$ ام درست پس از برخورد، دومینوی k ام با آن (ω_{k+1}) بر حسبِ ω_k و با حلّ آن، رابطه‌ای صریح برای ω_k بر حسبِ سرعتِ زاویه‌ایِ دومینویِ اوّل (ω_0) و پارامترهای مسئله به دست آورید.

پ) رفتارِ ω_k را در حدِّ $k \to \infty$ حساب کنید.

ت) سرعتِ خطّیِ انتشارِ برخوردها را در حدِّ $k \to \infty$ تا اوّلین مرتبه‌ی ناصفر از b/l به دست آورید. می‌توانید پاسخِ خود را با استفاده از معکوسِ تابعِ $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ بیان کنید.

راهنمایی: پاسخِ عمومیِ معادله‌ی دیفرانسیلِ زیر:

$$\ddot{x} - \beta^2 x = 0 \quad (۲)$$

به صورت $x(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$ است که در آن A و B با توجّه به شرایطِ اوّلیه تعیین می‌شوند.

۶ — یک نفر می‌خواهد تاب‌بازی کند. او با تغییرِ مکانِ مرکزِجرمِ خود دامنه‌ي نوسانِ تاب را زیاد می‌کند. مطابقِ شکل در نیمی از حرکت فاصله‌ي مرکزِ جرمِ او از نقطه‌ي آویز $a+b$ و در نیمِ دیگر این فاصله $a-b$ است. دامنه‌ي حرکتِ او در نقطه‌ي 1 را θ_1 و در نقطه‌ي 2، θ_2 بگیرید. حرکتِ او از 1 به 2 را یک گام بگیرید. او حرکتِ خود در گامِ اول را به چند بخش تقسیم می‌کند:

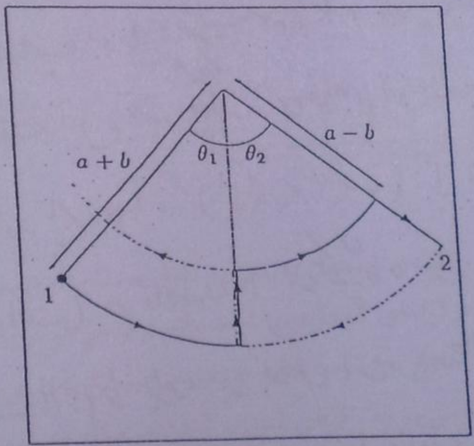
۱) ابتدا از نقطه‌ي 1 روي مسیری دایره‌ای با شعاع $a+b$ شروع به حرکت می‌کند،

۲) در پایین‌ترین نقطه از مسیر، فاصله‌اش از نقطه‌ي آویز را به $a-b$ تغییر می‌دهد،

۳) سپس روي دایره‌ای به شعاع $a-b$ حرکت می‌کند،

۴) بالاخره در انتها فاصله‌اش را به $a+b$ می‌رساند.

۵) او در گام هاي بعدی مشابهِ همین کار را ادامه می‌دهد.



الف— با فرضِ این که در ابتدا از زاویه‌ي θ_1 رها شده باشد، θ_2 را بر حسبِ θ_1، a، و b به دست آورید.

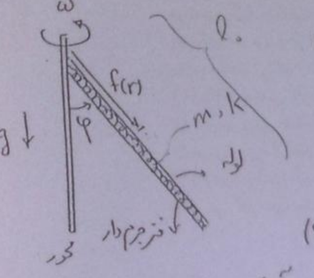
ب— پس از چند بار تاب‌خوردن (چند گام) می‌تواند خودش را به بالاترین نقطه برساند و دورِ کامل بزند.

۵/۲

۷/۱

۷- لوله‌ی صلب بدون جرمی را که فنر جرم داری به جرم m و ضریب سختی k و طول آزاد ℓ_0 در داخل آن قرار دارد، در نظر بگیرید. این لوله از یک انتها به محوری که با سرعت زاویه‌ای ω در حال چرخش است متصل شده است و می‌تواند آزادانه در صفحه‌ی شامل لوله و محور حرکت کند (شکل ۱).

(توجه کنید که فنر فقط در راستای میله می‌تواند تغییر طول بدهد.)



الف - ضریب سختی فنر (k) را بی‌نهایت بگیرید و زاویه‌ی تعادل در این حالت را محاسبه کنید (φ_0).

در صورت بی‌نهایت نبودن ضریب سختی k، زاویه‌ی تعادل (φ) نسبت به حالت قبل تغییر می‌کند. می‌خواهیم این زاویه را به دست آوریم.

برای این منظور تابع $f(r)$، ($0 < r < \ell_0$) را تعریف می‌کنیم که بیانگر مکان جزء کوچکی از فنر است که در حالت (الف) در فاصله‌ی r از تکیه‌گاه قرار داشته است.

ب - معادلات لازم را برای جزء کوچکی از فنر در حالت تعادل بنویسید و با توجه به آنها معادله‌ی دیفرانسیلی برای $f(r)$ به دست آورید. (این معادله شامل $f(r)$ و مشتقات آن، ثابتهای مسئله و زاویه‌ی تعادل، φ، می‌باشد.)

حال فرض می‌کنیم که k بسیار بزرگ است به طوری که $\frac{1}{k}$ بسیار کوچک است.

ج - معادله‌ی دیفرانسیل به دست آمده در قسمت (ب) را حل کرده و جواب را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{1}{k}$ بسط دهید. حال با اعمال شرایط مرزی مناسب، تابع $f(r)$ را به طور کامل (همراه با ضرایب) تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{1}{k}$ به دست آورید.

د- زاویه‌ی تعادل جدید را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{1}{k}$ و ثابتهای مسئله به دست آورید.

* جواب معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = b$ (که a و b ثابت اند) به صورت $y = A\sin(ax+B) + \frac{b}{a^2}$ است که A و B ضرایب دلخواهی هستند که با توجه به شرایط مرزی مشخص می‌شوند.