بسمه تعالی

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده کشاورزی

گروه اقتصاد کشاورزی

عنوان:

سیستم معادلات هم‌زمان

در اقتصاد سنجی

استاد مربوطه:

دکتر محمد قربانی

گردآوری: کمیل مهجوری کارمزدی

تابستان ۱۳۹۲

فهرست مطالب **صفحه**

۳-۲-۸-۳- آزمون LM

فصل اول

مقدماتی بر سیستم معادلات هم زمان

۱-۱- مقدمه

اقتصاد دانان مدل هایی از مصرف، سرمایه گذاری، تولید، عرضه و تقاضای پول، عرضه و تقاضای نیروی کار را برای توضیح کارکرد اقتصاد فرموله می کنند. این معادلات رفتاری یا به صورت تک معادله ای و یا به صورت همزمان برآورد می گردند. به این مدل ، مدل سیستم معادلات همزمان گفته می شود (بالتاجی، ۲۰۰۸). از آنجا که سیستم معادلات همزمان به لحاظ ساختاری متفاوت با رگرسیون‌های چند متغیره است، ممکن است تامین‌کننده فروض کلاسیک حاکم بر رگرسیونهای چندمتغیره نباشد. به عنوان مثال یکی از مشخصه‌های سیستم معادلات همزمان این است که متغیر وابسته در یک معادله به عنوان متغیری توضیحی در معادله‌های دیگر از سیستم ظاهر می‌شود. چنین متغیر توضیحی ممکن است با جمله پسماند معادله‌هایی که در آن به عنوان متغیر توضیحی وارد شده است همبسته باشد و همبسته بودن متغیر توضیحی با جمله پسماند در یک معادله، فرض کلاسیک را نقض می‌کند (گجراتی، ۱۹۹۵، ۸۲۸). شرایطی استفاده از برآوردگرهای حداقل مربعات معمولی منجر به نتایجی می‌شود که نه تنها اریب[۲] است، بلکه ناسازگار نیز می‌باشد. یعنی حتی اگر حجم نمونه به سمت بی‌نهایت میل کند، باز هم برآوردگرهای حداقل مربعات معمولی با مقادیر حقیقی جامعه برابر نمی‌شوند (گجراتی، *۱۹۹۵: ۸۱۵*).

به طور کلی معادلات در اقتصادسنجی بر سه قسم اند:

۱- تک معادله ای *Single Equation*

۲- سیستم معادلات *System Equation*

در حالت سیستمی، معادلات به صورت موازی با هم ارتباط دارند. یعنی جملات اخلال معادلات با هم ارتباط یا همبستگی دارند. به طوریکه در معادله (۱) نشان داده شده است، u_1 و u_2 با یکدیگر همبستگی دارند.

$$Y1 = \ldots\ldots\ldots + u_1 \qquad (۱)$$

$$Y2 = \ldots\ldots\ldots + u_2$$

۳- معادلات هم‌زمان *Simultaneous Equation*

در سیستم معادلات هم‌زمان جملات اخلال معادلات با متغیرهای وابسته به صورت زیگزاگ همبستگی دارند. یا به عبارتی معادلات به طور همزمان بر هم اثر می گذارند. مثل معادلات عرضه و تقاضا. ساختار آن به صورت زیر است.

$$Y_{1i} = \beta_{10} + \beta_{12}Y_{2i} + \gamma_{11}X_{1i} + u_{1i}$$
$$Y_{2i} = \beta_{1} + \beta_{21}Y_{1i} + \gamma_{21}X_{1i} + u_{2i} \qquad (۲)$$

سوالی که اینجا مطرح می شود این است که آیا با روش *ols* می توان این معادلات را به صورت تکی برآورد کرد؟

۱-۲- بررسی فروض کلاسیک در سیستم معادلات هم زمان

۱-۲-۱- عدم وجود همبستگی بین متغیرهای توضیحی و جزء اخلال

همانطور که می‌دانید، یکی از فروض قاطع برآوردگر *OLS* غیر استوکاستیک بودن متغیر توضیحی، یا حداقل استقلال از جملات اخلال در صورت استوکاستیک بودن آن می‌باشد. در سیستم معادلات همزمان این فرض نقض می‌شود.

- **مثال**

از بهترین مثال ها در سیستم معادلات هم زمان، توابع عرضه وتقاضا است. که می توان به صورت زیر نشان داد:

- $Q^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + U_{1t}$
- $Q^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + U_{2t}$ $\qquad \alpha1 < 0 \quad , \beta > 0$
- $Q_1^d = Q_1^s$
- $U_{1t} = f\,(\,incom\,,\,prefrence\,,\,w\,,\,\ldots)$
- $U_{2t} = f(\,Weather\,,\,\ldots)$

در صورت تغییر هرکدام از این عوامل، قیمت و مقدار تعادلی به صورت هم‌زمان تغییر می کند. پس قیمت و مقدار به صورت هم زمان وابسته‌اند. همین همزمانی باعث می‌شود بین قیمت‌ها و جملات اخلال وابستگی به وجود آید. در نتیجه یکی از فروض اساسی کلاسیک‌ها (عدم وجود همبستگی بین متغیرهای توضیحی و جزء اخلال) نقض می شود. بنابراین استفاده از روش *OLS* برای برآورد سیستم معادلات هم زمان منتفی است.

۱-۲-۲- تورش در معادلات هم زمان – ناسازگاری تخمین زن‌های *OLS*

دومین اشکال برآوردگر حداقل مربعات معمولی ناسازگاری آن می باشد. برای اثبات از تابع مصرف در مدل کینزی استفاده می کنیم:

تابع مصرف: $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + U_t$

اتحاد درآمد ملی: $Y_t = C_t + I_t$

از دو معادله می‌توان فهمید که مصرف و درآمد ملی باهم رابطه متقابل دارند. Y_t و U_t ، با هم‌هبستگی دارند.

برای اثبات این مدعا، معادله مصرف را در اتحاد درآمد ملی جاگذاری می کنیم:

$$Y_t = \overbrace{\beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t}^{C_t} + I_t$$

$$Y_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t + \frac{1}{1-\beta_1} u_t$$

حال: $E(Yt) = (\beta 0 /1- \beta 1) + (1/1- \beta 1) It$

- داریم: $Yt - E (Yt) = Ut / (1- \beta 1)$
- همچنین داریم: $Ut - E (Ut) = Ut$
- بنابراین:

- $$\operatorname{cov}(Y_t, u_t) = E\{[(Y_t - E(Y_t)][u_t - E(u_t)]\} = E\,(\,U^2_t) / (\,1 - \beta_1\,)$$

بنابراین یکی از فروض کلاسیک ها نقض شد و نمی توان از روش حداقل مربعات معمولی برای برآورد استفاده کرد. چراکه با نقض این فرض تخمین‌زن های ols ناسازگار خواهد بود.

ناسازگاری تخمین زن β_1 به علت همبستگی بین Y_t و U_t را می توان از طریق زیر اثبات نمود:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (C_t - \bar{C})\,(Y_t - \bar{Y})}{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$= \frac{\sum c_t y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum C_t y_t}{\sum y_t^2}$$

- به جای C_t مساوی اش را قرار می‌دهیم:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(\beta_0 + \beta_1 Y_t + U_t)y_t}{\sum y_t^2}$$
$$= \beta_1 + \frac{\sum y_t U_t}{\sum y_t^2}$$

- حال امید ریاضی می‌گیریم:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + E\left[\frac{\sum y_t U_t}{\sum y_t^2}\right]$$

امید ریاضی یک اپراتور خطی است. در نتیجه نمی توان $E\ [\sum(y_t\ U_t) / \sum(y_t)^2\ ]$ را بسط داد. اما به طور شهودی می توان دریافت که مقدار $E\ [\ \sum(yt\ Ut) / \sum(yt)^2]$ غیر صفر است. پس تخمین زن $B^\wedge{}_1$ تورشدار است. اما در نمونه های بزرگ می توان تغییرات آن را مورد بررسی قرار داد.

زمانی که نمی‌توان صریحاً با امید ریاضی یک تخمین زن را ارزیابی کرد، در این صورت توجه خود را به رفتار آن تخمین زن در نمونه های بزرگ معطوف می‌کنیم. اگر حد احتمال آن ($plim$) با مقدار حقیقی جامعه برابر باشد، در این صورت آن تخمین زن سازگار خواهد بود.

$$P\lim(\hat{\beta}_1) = P\lim(\beta_1) + P\lim\left(\frac{\sum y_t U_t}{\sum y_t^2}\right) = \beta_1 + \frac{\overbrace{P\lim(\frac{\sum y_t U_t}{N})}^{\operatorname{cov}(u,y)}}{\underbrace{P\lim(\frac{\sum y_t^2}{N})}_{\operatorname{var}(y)}}$$

$$= P\lim(\beta_1) + P\lim\left(\frac{\sum y_t U_t / N}{\sum y_t^2 / N}\right)$$

$$if \quad N \to \infty: \quad p\lim(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + \frac{\sigma^2 / (1-\beta_1)}{\sigma_y^2}$$

$$= \beta_1 + \underbrace{\frac{1}{1-\beta_1}(\frac{\sigma^2}{\sigma_Y^2})}_{\text{تورش}} \xrightarrow{0<\hat{\beta}_1<1} \quad p\lim(\hat{\beta}_1) > \beta_1$$

رابطه‌ی آخر نشان می‌دهد که حتی در نمونه‌های خیلی بزرگ هم تخمین زن $\beta^\wedge{}_1$ تورشدار می‌ماند. حال با چه روشی باید سیستم معادلات هم زمان را برآورد کرد؟ یک روش این است که ابتدا فرم تقلیل یافته را برای سیستم معادلات نوشته و از آن طریق به ضرایب سیستم معادلات فرم ساختاری یا اولیه دست یافت.

۱-۳- معرفی فرم ساختاری و فرم تقلیل‌یافته *Stractural and reduced form*

فرم کلی معادلات هم زمان به صورت زیر است:

- $y\Gamma + x\beta + e = 0$ Γ: ماتریس ضرایب متغیر

متغیرها در سیستم معادلات هم‌زمان دو دسته اند:

۱- متغیرهای درونزا : به متغیرهایی گفته می‌شود که مقدار آنها در درون مدل تعیین می شود.

۲- متغیرهای از پیش تعیین شده: خود به دو دسته تقسیم می‌شوند.

الف- متغیرهای برونزا: به متغیرهایی گفته می‌شود که مقدار آنها در بیرون از مدل تعیین شده است.

ب: متغیرهای درونزای تاخیری : به متغیرهای وابسته‌ای گفته می‌شود که با تاخیر زمانی به عنوان متغیر مستقل در مدل ظاهر می شوند.

برای دستیابی به فرم تقلیل یافته، در ابتدا بایستی معادله را با Γ^{-1} نرمالایز کنیم.

- $y\Gamma\,\Gamma^{-1} + x\beta\,\Gamma^{-1} + e\,\Gamma^{-1} = 0$
- $Y + x\beta\,\Gamma^{-1} + e\,\Gamma^{-1} = 0$
- $y = x\Pi + v$ فرم تقلیل یافته:
- $\Pi = -\beta\,\Gamma^{-1} \;, v = e\,\Gamma^{-1}$

حال سوال این است که اگر فرم‌های تقلیل‌یافته را به دست آورده و تخمین بزنیم، آیا می‌توانیم از روی پارامترهای برآورد شده، پارامترهای اولیه (ساختاری) را به دست آوریم؟

بله، فرم تقلیل‌یافته با برآوردگر OLS قابل تخمین است. چرا که دیگر مشکلات برآوردی فرم ساختاری یا اولیه را ندارد:

$$\hat{\Pi} = (x'x)^{-1}x'y$$

- مثال:

در مدل تعیین درآمد کینزی داریم:

تابع مصرف : $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t \quad : \; 0 < \beta_1 < 1$

- اتحاد درآمد ملی : $Y_t = C_t + I_t$

در این مدل، c و y متغرهای درونزا بوده و I متغیر برونزا می‌باشد. حال اگر معادله تابع مصرف را در رابطه اتحاد قرار دهیم داریم:

- بعد از ساده سازی داریم:

$$Y_t = \pi_0 + \pi_1 I_t + w_t \quad , \quad \pi_0 = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} \quad \pi_1 = \frac{1}{1-\beta_1} \quad w_t = \frac{u_t}{1-\beta_1}$$

- اگر معادله اتحاد را در معادله مصرف قرار دهیم داریم:

$$C_t = \pi_2 + \pi_3 I_t + w_t \quad , \quad \pi_2 = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} \quad \pi_3 = \frac{\beta_1}{1-\beta_1} \quad w_t = \frac{u_t}{1-\beta_1}$$

در اینجا فرم تقلیل یافته با استفاده از روش ols قابل برآورد است.

$\Rightarrow \operatorname{cov}(I_t, w_t) = 0 \Rightarrow OLS$ از $\Rightarrow \pi \Rightarrow \beta \Rightarrow ILS$

به این روش دستیابی به ضرایب سیستم معادلات همزمان روش حداقل مربعات غیر مستقیم (ILS) نیز گفته می‌شود.

حال در چه شرایطی می توان از پارامترهای تخمینی فرم تقلیل یافته، پارامترهای فرم ساختاری را محاسبه کرد؟ جواب این سوال به بحث تشخیص برمی‌گردد. مهمترین مساله در مبحث معادلات هم زمان، بحث تشخیص است. اگر بتوانیم پارامترهای فرم ساختاری را از پارامترهای تخمینی فرم تقلیل یافته به دست آوریم، در این حال می‌گویند معادله مربوط تشخیص پذیر یا *Identified* است. مساله تشخیص پذیری یک مساله انفرادی است که به تک تک معادلات بر می‌گردد. دقت کنیم که نگاه سیستمی است اما بررسی جزئی (*partial*) است.

۱-۴- مساله تشخیص

با ارایه یک مثال مساله تشخیص را توضیح می‌دهیم. مثلاً در تابع عرضه و تقاضا فرض کنید که داده های سری زمانی مربوط به p و q را در اختیار داریم. اما هیچ داده‌ای در مورد متغیرهای دیگری مثل درآمد مصرف‌کننده، شرایط آب و هوایی و غیره نداریم. در این صورت مساله تشخیص مترادف با پاسخ به این سوال خواهد بود که:

- چطور می توان نسبت به این مساله اطلاع حاصل کرد که آیا این تابع مورد نظر، مربوط به عرضه است یا تقاضا؟

اصولا مساله تشخیص زمانی مطرح می‌شود که بتوان مجموعه‌های متفاوتی از ضرایب ساختاری را از یک گروه داده به دست آوریم که تحلیل اصلی را مشکل می‌کند.

از نظر مشخص بودن، معادلات را بر سه دسته تقسیم می‌کنند:

- ۱- حالت کمتر از حد مشخص *under identified*
- ۲- حالت دقیقا مشخص *Excactly identified*
- ۳- حالت بیش از حد مشخص *over identified*

الف: حالت کمتر از حد مشخص

هرگاه تعداد مقادیر عددی که برای ضرایب معادلات ساختاری به دست می‌آید، صفر باشد، به آن معادله کمتر از حد مشخص گویند.

- **مثال:** در تابع عرضه و تقاضا داریم:

- تابع عرضه: $Q_s = \beta_0 + \beta_1 P_t + U_{2t}$
- تابع تقاضا: $Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + U_{1t}$
- $\alpha_1 < 0 \quad , \beta_1 > 0$

- قیمت تعادلی به صورت مقابل است: (۱)

$$\boxed{P_t = \pi_0 + V_t}$$

- $\Pi_0 = (\beta_0 - \alpha_0) / (\alpha_1 - \beta_1)$
- $v_t = (U_{2t} - U_{1t}) / (\alpha_1 - \beta_1)$

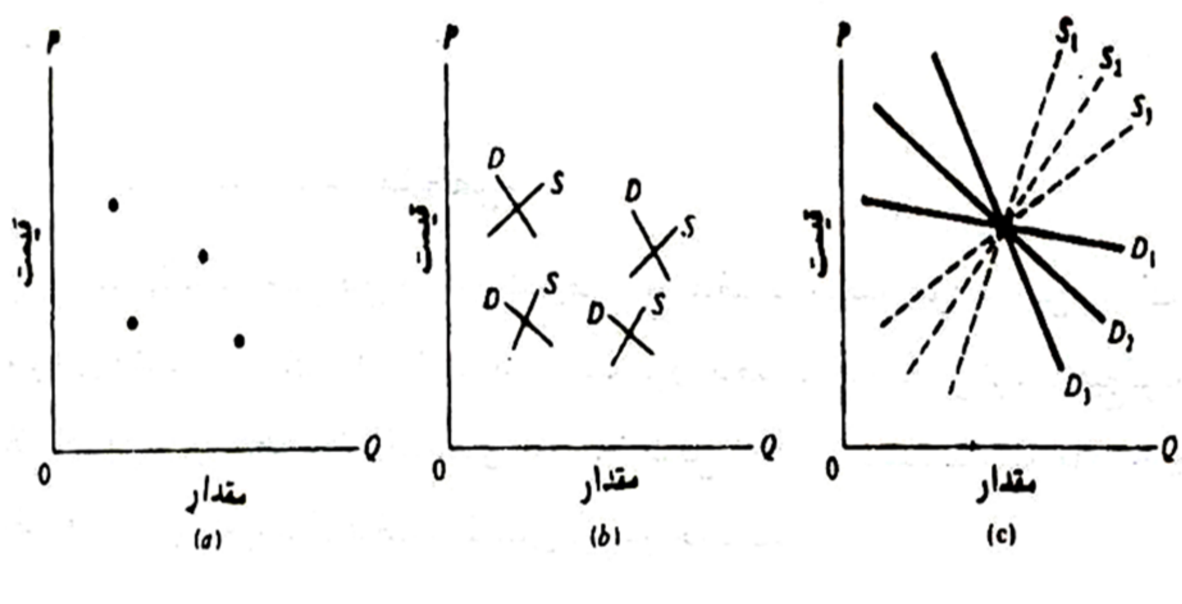
- با جایگذاری قیمت تعادلی در تابع عرضه می توان مقدار تعادلی را به صورت زیر به دست آورد:

$$\boxed{Q = \Pi_1 +} \qquad (۲)$$

- $\Pi_1 = (\alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1) / (\alpha_1 - \beta_1)$
- $v_t = (\alpha_1 U_{2t} - \beta_1 U_{1t}) / (\alpha_1 - \beta_1)$

به معادلات قیمت و مقدار تعادلی، فرم تقلیل یافته گویند. در این مدل‌های تقلیل یافته، ۴ ضریب ساختاری α_1 و β_0 و α_0 و β_1 داریم. در واقع در اینجا ۴ مجهول و دو معادله داریم که امکان برآورد این ۴ پارامتر مجهول امکانپذیر نیست. زیرا باید به اندازه تعداد پارامترهای مجهول، معادله داشته باشیم. حتی اگر معادلات تقلیل یافته (۱) و (۲) را نیز رگرس کنیم، متغیر توضیحی نخواهیم داشت.

این بدان معنی است که اگر ما فقط داده های سری زمانی مربوط به قیمت و مقدار را داشته باشیم، و هیچ اطلاعات دیگری نداشته باشیم، هیچ تضمینی وجود ندارد که رابطه تخمینی مربوط به عرضه است یا تقاضا. در شکل زیر چگونگی تشخیص در توابع عرضه و تقاضا نشان داده شده است.



شکل ۱ – مساله تشخیص در توابع عرضه و تقاضا

ب: حالت دقیقا مشخص

هرگاه تعداد مقادیر عددی که برای ضرایب معادلات ساختاری به دست می آید، یکی باشد، به آن معادله دقیقا مشخص گویند. حال توابع عرضه تقاضا را به صورت زیر در نظر بگیرید:

- تابع عرضه: $Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t} \qquad \beta_1 > 0$
- تابع تقاضا : $Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t} \qquad \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$

تنها اختلاف بین توابع عرضه و تقاضا در اینجا با توابع قبلی در متغیر I (درآمد) می باشد. قیمت تعادلی به صورت زیر به دست می آید:

- $P_t = \Pi_0 + \Pi_1 I_t + v_t \qquad (۱)$

$$\pi_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1}$$

- $\pi_1 = \dfrac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}$

$$v_t = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

با جایگذاری قیمت تعادلی در یکی از توابع عرضه و تقاضا، مقدار تعادلی به صورت زیر به دست می آید:

- $Q_t = \Pi_2 + \Pi_3 I_t + w_t \qquad (۲)$

$$\pi_2 = \frac{\alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}$$

- $\pi_3 = -\dfrac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}$

$$w_t = \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

در اینجا چون معادلات ۱ و ۲ فرم خلاصه شده هستند، با ols قابل تخمین‌اند. یعنی پارامترهای Π_2 و Π_3 و Π_0 و Π_1 قابل تخمین اند. اما مشکل، برآورد ضرایب فرم ساختاری است. در اینجا ضریب قیمت در تابع عرضه ($\beta 1$) قابل برآورد است ($\beta 1 = \Pi_3 / \Pi_1$). اما ضرایب مربوط به تابع تقاضا باز هم قابل برآورد نیست. بنابراین در این حالت تابع عرضه دقیقا مشخص است ولی تابع تقاضا هنوز هم کمتر از حد مشخص است. با همین تفاسیر اگر یک متغیر دیگری مثل قیمت دوره قبل (p_{t-1}) به تابع عرضه اضافه گردد، تابع تقاضا نیز کاملا مشخص می گردد.

ج: حالت بیش از حد مشخص

هرگاه تعداد مقادیر عددی که برای ضرایب معادلات ساختاری به دست می‌آید، بیش از یکی باشد، به آن معادله بیش از حد مشخص گویند. حالتی را در نظر بگیرید که توابع عرضه و تقاضا به صورت زیر باشد:

- تابع عرضه: $Q_s = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + U_{2t}$
- تابع تقاضا: $Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + \alpha_3 R_t + U_{1t}$
- $\alpha 1 < 0 \quad , \beta 1 > 0 \quad , \alpha_2 > 0$
-

در تابع تقاضا متغیر جدیدی اضافه شده است که ثروت (R) نام دارد. قیمت تعادلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_t = \pi_0 + \pi_1 I_t + \pi_2 R_t + \pi_3 P_{t-1} + v_t$$
$$Q_t = \pi_4 + \pi_5 I_t + \pi_6 R_t + \pi_7 P_{t-1} + w_t$$

$$\pi_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \pi_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \pi_2 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 - \beta_1}$$
$$\pi_3 = \frac{\beta_3}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \pi_4 = \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \pi_5 = -\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}$$
$$\pi_6 = \frac{-\alpha_3\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad \pi_7 = \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$
$$v_t = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1} \qquad w_t = \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید، دو مقدار برای β_1 به دست می‌آید:

$$\beta_1 = \frac{\pi_6}{\pi_2} \quad , \quad \beta_1 = \frac{\pi_5}{\pi_1}$$

هیچ تضمینی برای یکسان بودن دو مقدار β_1 وجود ندارد. از طرف دیگر در مخرج تمام ضرایب فرم خلاصه شده β_1 وجود دارد. تخمین سایر ضرایب هم با ابهام مواجه می‌شود. برای اینکه ببینیم کدام مقدار β_1 مناسب‌تر است از روش حداقل مربعات دو مرحله‌ای *2SLS* استفاده می‌کنیم.

نکته: یک مدل در کل مشخص خواهد بود، در صورتی که تک تک معادلات آن مشخص باشد.

برای تشخیص معادلات هم زمان، روشه های گوناگونی وجود دارد. در ادامه به دو روش اشاره شده است.

۳- شرط ترتیب یا ***order condition*** در رابطه با قابلیت تشخیص

برای شرط ترتیب ۲ تعریف وجود دارد. ابتدا نمادهای لازم را در اینجا تعریف می‌کنیم:

M : تعداد متغیرهای درونزای مدل

m : تعداد متغیرهای درونزا در معادله معین (تحت بررسی)

K : تعداد متغیرهای از پیش تعیین شده مدل

k : تعداد متغیرهای از پیش تعیین شده در معادله معین (تحت بررسی)

<u>*الف: در یک مدل دارای M معادله (همزمان)، یک معادله:*</u>

۱) مشخص است اگر معادله فوق حداقل m−۱ متغیر (درونزا یا از پیش تعیین شده) را که در مدل وجود دارند، در برنگیرد.

۲) دقیقاً مشخص است، اگر تعداد متغیرهای ملحوظ شده در مدل دقیقا m−۱ باشد.

۳) بیش از حد مشخص است اگر تعداد متغیرهای خارج از معادله بیش از m−۱ باشد.

$$K - k + M - m \geq m - 1$$

ب- در یک مدل دارای M معادله همزمان، یک معادله

۱) مشخص است هرگاه، $K-k \geq m-1$

۲) دقیقاً مشخص است هرگاه، $K-k = m-1$

۳) بیش از حد مشخص است هرگاه، $K-k > m-1$

۴- شرط مرتبه‌ای ***Rank condition***

یک سیستم معادلات با M معادله و متغیر درونزا مشخص است، اگر و تنها اگر بتوان حداقل یک دترمینان از درجهٔ *(M-1) (M-1)* غیر صفر از ضرایب متغیرهای (درونزا و از قبل تعیین شده) خارج از معادله و ملحوظ در معادلات دیگر نوشت.

$$\begin{aligned}
&Y_{1t} - \beta_{10} - \beta_{12}Y_{2t} - \beta_{13}Y_{3t} - \gamma_{11}X_{1t} = u_{1t}\\
&Y_{2t} - \beta_{20} - \beta_{23}Y_{3t} - \gamma_{21}X_{1t} - \gamma_{22}X_{2t} = u_{2t}\\
&Y_{3t} - \beta_{30} - \beta_{31}Y_{1t} - \gamma_{31}X_{1t} - \gamma_{32}X_{2t} = u_{3t}\\
&Y_{4t} - \beta_{40} - \beta_{41}Y_{1t} - \beta_{42}Y_{2t} - \gamma_{43}X_{3t} = u_{4t}
\end{aligned}$$

جهت سهولت، سیستم معادلات به صورت ساده زیر نوشته شده است.

1	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	X_1	X_2	X_3
$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{12}$	$-\beta_{13}$	0	$-\gamma_{11}$	0	0
$-\beta_{20}$	0	1	$-\beta_{23}$	0	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
$-\beta_{30}$	$-\beta_{31}$	0	1	0	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	0
$-\beta_{40}$	$-\beta_{41}$	$-\beta_{42}$	0	1	0	0	$-\gamma_{43}$

اگر بتوان از ماتریس ضرایب، حداقل یک ماتریس n در n نوشت که دترمینان آن صفر گردد، این سیستم معادلات نامشخص است. میتوان ماتریس A را به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{bmatrix}$$

کاملاً مشخص است که دترمینان این ماتریس برابر با صفر است. بنابراین این سیستم معادلات نامشخص است.

به طور کلی مراحل بررسی شرط رتبه‌ای در رابطه با قابلیت تشخیص:

۱- بازنویسی سیستم معادلات به شکل جدول

۲- صرف نظر کردن از ضرایب (سطر) متناظر با معادله مورد نظر

۳- صرف‌نظر کردن از ستون‌های متناظر با ضرایب غیرصفر سطر بحث شده

۴- عناصر باقیمانده جدول، ضرایب متغیرهایی خواهند بود که در سیستم معادلات لحاظ شده‌اند، اما در معادله مورد بررسی وارد نشده‌اند.

از این عناصر باقیمانده، تمام ماتریس‌های ممکن از درجه M-۱ را بدست می‌آوریم.

الف) اگر حداقل یک دترمینان غیرصفر وجود داشته باشد ← معادله مورد بررسی (دقیقاً یا بیش از حد) مشخص شده است.

ب) اگر تمام دترمینان‌های (M-۱) (M-۱) صفر باشند، رتبه ماتریس A کمتر از M-۱ است.

- معادله مورد بررسی مشخص نخواهد بود:

الف) اگر حداقل یک دترمینان غیرصفر وجود داشته باشد ← معادله مورد بررسی (دقیقاً یا بیش از حد) مشخص شده است.

ب) اگر تمام دترمینان‌های (M-۱) (M-۱) صفر باشند، رتبه ماتریس A کمتر از M-۱ است و معادله مورد بررسی مشخص نخواهد بود.

به طور کلی:

(1) $if \;\; K-k>m-1 \;,\; \rho_A = M-1 \;\; \rightarrow$ بیش از حد مشخص

(2) $if \;\; K-k=m-1 \;,\; \rho_A = M-1 \;\; \rightarrow$ دقیقاً مشخص

(3) $if \;\; K-k \geq m-1 \;,\; \rho_A < M-1 \;\; \rightarrow$ کمتر از حد مشخص

(4) $if \;\; K-k<m-1 \;\; \rightarrow$ نامشخص

فصل دوم

روش‌های تخمین سیستم معادلات همزمان

۲-۱- مقدمه

قبلاً توضیح داده شد که با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی نمی‌توان سیستم معادلات هم زمان را تخمین زد. اما ذکر این نکته ضروری است که ممکن است سیستم معادلات به صورت هم زمان با هم ارتباط نداشته باشند. در این صورت هم آیا نمی توان از روش OLS استفاده کرد؟ آیا نوعی از سیستم معادلات همزمان وجود دارد که با روش Ols قابل برآورد باشد؟ پاسخ به این سوالات و روش تخمین سیستم معادلات هم زمان در ادامه توضیح داده شده است.

۲-۲- روش های تخمین سیستم معادلات همزمان

برای تخمین سیستم معادلات همزمان، دو روش وجود دارد: روش تک معادله‌ای و روش سیستمی.

۱- روش تک معادله‌ای یا روش های با اطلاعات محدود

الف) روش حداقل مربعات معمولی(OLS) برای مدل های بازگشتی[۱]

ب) روش حداقل مربعات غیرمستقیم(ILS)[۲] برای معادلات دقیقاً مشخص

ج) روش متغیرهای ابزاری(IV)[۳]

د) روش حداقل مربعات دو مرحله ای($2SLS$)[۴]

ه) روش حداکثر درست نمایی با اطلاعات محدود($LIML$)[۵]

۲- روش سیستمی یا روش های با اطلاعات کامل

الف) روش حداقل مربعات سه مرحله ای($3SLS$)[۶]

ب) روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل($FIML$)[۷]

۲-۳- روش تک معادله‌ای

[1] - *Recursive model*
[2] - *Indirect Least Squares*
[3] - *Instrumental Variables*
[4] - *Two-Stage Least Squares*
[5] - *Limited Information Maximum Likelihood*
[6] - *Three-stage Least Squared*
[7] - *Full Information maximum Likelihood*

در روش های تک معادله ای یا روش های با اطلاعات محدود، هریک از معادلات فقط با توجه به محدودیت های معادله موردنظر و بدون توجه به محدودیت های سایر معادلات برآورد می شود. به عنوان مثال در مثال ۵-۱۱، معادله تقاضا با توجه به اینکه ضرایب متغیر مالیات(T) در معادله تقاضا برابر صفر است برآورد می شود و معادله عرضه نیز با توجه به صفر بودن ضریب متغیر درآمد(I) در معادله عرضه، برآورد می شود. بدیهی است که بدون داشتن این اطلاعات (یعنی صفر بودن ضریب T در معادله تقاضا) معادله تقاضا نامشخص می باشد، اما دانستن اینکه ضریب I در معادله عرضه برابر صفر است، هیچ کمکی به برآورد معادله تقاضا نمی-کند.

الف) تخمین سیستم معادلات بازگشتی با روش *OLS*:

سیستم معادلات بازگشتی یا سیستم مثلثی، نوع خاصی از سیستم معادلات همزمان است که در آن رابطه دو سویه بین متغیرهای دورن زا وجود ندارد. در واقع علیرغم آنکه تحت عنوان معادلات همزمان مطرح می شوند، ولی عملاً همزمانی وجود نخواهد داشت. به عنوان مثال Y_{it} تابعی از Y_{jt} است ولی عکس آن برقرار نمی باشد. در سیستم معادلات بازگشتی نظم خاصی برقرار است، بدین صورت که Y_1 فقط تابعی از متغیرهای برون است، Y_2 تابعی از متغیرهای برون زا و Y_1 است، $Y2$ تابعی از متغیرهای بروزن زا و Y_1 است، Y_3 تابعی از متغیرهای بروزن زا و Y_1 . Y_2 است، Y_4 تابعی از متغیرهای برون زا و Y_1 و Y_2 و Y_3 است و .... و Y_M نیز تابعی از متغیرهای برون زا و Y_1 و Y_2 و .... و Y_{M-1} می باشد. به عبارت دیگر ضرایب متغیرهای درون زا(β_{ij} ها) یک حالت مثلثی را تشکیل می دهند.

	Y_1	Y_2	Y_3	$\dots$	Y_{M-1}	Y_M
معادله اول (Y_1)	$-$	$\circ$	$\circ$	$\dots$	$\circ$	$\circ$
معادله دوم (Y_2)	β_{21}	$-$	$\circ$	$\dots$	$\circ$	$\circ$
معادله سوم (Y_3)	β_{31}	β_{32}	$-$	$\dots$	$\circ$	$\circ$
$\vdots$ $\vdots$						
معادله nام (Y_M)	β_{M1}	β_{M2}	β_{M3}	$\dots$	β_{M-1}	$-$

توجه شود که هر معادله، تابعی از متغیرهای برون زا نیز می باشد که در جدول فوق نشان داده شده است.

با توجه به ویژگی خاص سیستم معادلات بازگشتی و با این فرض که جملات خطای این معادلات همبستگی نداشته باشند، می توان ضرایب هر یک از معادلات آن را با روش OLS برآورد نمود، زیرا

الف) معادله اول شامل هیچ متغیر درون زا نمی باشد و چون متغیرهای برون زا مستقل از جمله خطا (u_{1t}) می باشند، لذا با OLS برآورد می شود.

ب) معادله دوم شامل متغیر درون زای Y_1 است، اما چون Y_1 هیچ رابطه ای با u_{2t} ندارد (زیرا $Y3$ در معادله اول وجود ندارد)، لذا امکان برآورد آن با روش OLS وجود دارد.

ج) معادله سوم شامل متغیرهای درون زای Y_1 و Y_2 است، اما چون Y_1 و Y_2 هیچ رابطه ای با u_{3t} ندارند(زیرا Y_3 نه در معادله اول و نه در معادله دوم وارد نشده است)، لذا امکان برآورد ضرایب آن با روش OLS وجود دارد.

د) معادله Mام شامل متغیرهای درون زای Y_1 تا Y_{M-1} می باشد، اما چون Y_1، $_Y2$ و.... Y_{M-1} هیچ رابطه ای با u_{Mt} ندارند (زیرا Y_M در هیچ یک از معادلات قبلی وارد نشده است)، لذا امکان برآورد ضرایب آن با روش OLS وجود دارد.

مثال ۱ : سیستم معادلات زیر، یک سیستم بازگشتی یا مثلثی را تشکیل می دهد:

$$Y_{1t} = \beta_{10} + \gamma_{11} X_{1t} + \gamma_{21} X_{2t} + u_{1t}$$

$$Y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{21} \gamma_{1t} + \gamma_{11} X_{1t} + \gamma_{21} X_{2t} + u_{2t}$$

$$Y_{3t} = \beta_{30} + \beta_{31} \gamma_{1t} + \beta_{32} \gamma_{2t} + \gamma_{11} X_{1t} + \gamma_{21} X 2_t u_{3t}$$

سیستم معادلات فوق در واقع شبیه به سیستم معادلات همزمان است. در حالی که همزمانی وجود ندارد. زیرا هیچ گونه رابطه دو سویه‌ای بین Y_1 و Y_2 و Y_3 وجود ندارد. در اینجا Y_2 تابعی از Y_1 است، در حالی که Y_1 تابع Y_2 نیست. Y_3 نیز تابعی از Y_1 و Y_2 است در حالی که Y_1 و Y_2 تابع Y_3 نیستند.

فرض کنید که جملات خطای این معادلات، همبستگی نداشت باشند. در این صورت می توان هر یک از این معادلات را با روش OLS برآورد نمود، زیرا:

الف) معادله اول شامل هیچ متغیر درون زا نمی باشد و چون X_1 و X_2 مستقل از $u1$ هستند، لذا با OLS برآورد می شود.

ب) معادله دوم شامل متغیر درون زای Y_1 می باشد، اما چون Y_1 هیچ رابطه ای با $u2$ ندارد(زیرا Y_2 در معادله اول وجود ندارد)، لذا امکان برآورد ضرایب آن با OLS وجود دارد.

ج) معادله سوم شامل متغیرهای درون زای Y_1 و Y_2 می باشد، اما چون Y_1 و Y_2 هیچ رابطه ای با u_3 ندارند (زیرا Y_3 نه در معادله اول و نه در معادله دوم وارد نشده است)، لذا امکان برآورد ضریب آن با OLS وجود دارد.

برای استفاده از روش های تک معادله ای، ابتدا معادله jام را در نظر بگیرید که به صورت (۱) معرفی شد. اگر در این معادله $\gamma_j^* = \beta_j^* = 0$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$Y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + u_j = [Y_j \quad X_j)\begin{bmatrix}\gamma_j \\ \beta_j\end{bmatrix} + u_j \qquad (۱)$$

اگر $Z_j = \begin{bmatrix}Y_j & X_j\end{bmatrix}$ و $\delta_j = \begin{bmatrix}\gamma_j \\ \beta_j\end{bmatrix}$ را به کار ببریم، فرم ساختاری معادله jام عبارت است از:

$$y_j = z_j\delta_j + u_j \qquad (۲)$$

از طرف دیگر، فرم حل شده سیستم معادلات همزمان به صورت $Y = XII + V$ است. فرم حل شده برای متغیرهای درون زای موجود در معادله jام (یعنی Y_j) عبارت است از:

$$Y_j = XII_j + V_j \qquad (۳)$$

II_j برابر با $\begin{bmatrix}II_j \\ II_j^*\end{bmatrix}$ است. V_j شامل M_j ستون از $V = U\Gamma^{-1}$ می‌باشد.

برآورد کننده OLS برای مدل(۳) عبارت است از:

$$\bar{\delta}_{j.OLS} = (Z_j'Z_j)^{-1}Z_j'y_j \qquad (۴)$$

با جایگذاری به جای Z_j و Y_j، خواهیم داشت:

$$\hat{\delta}_{j.OLS} = \delta_j + \begin{bmatrix}Y_j'Y_j & Y_j'X_j \\ X_j'Y_j & X_j'X\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}Y_j'u_j \\ X_j'u_j\end{bmatrix} \qquad (۵)$$

از آنجا که Y_j و u_j مستقل نیستند $(P\lim \frac{Y'U_j}{T} \neq 0)$ لذا $\hat{\delta}_{j.OLS}$ ناسازگار است و همانطور که دیدیم منجر به تورش معادلات همزمان می شود. توجه شود که در اینجا شرط $P\lim \frac{X'_j U_j}{T} \neq 0$ برقرار است.

ب) تخمین معادلات همزمان با روش حداقل مربعات غیرمستقیم(*ILS*):

اگر در یک سیستم معادلات همزمان هر یک از معادلات، دقیقاً مشخص باشند، در این صورت می توان آنها را با روش حداقل مربعات غیرمستقیم (*ILS*) برآورد نمود.

همانطور که دیدیم، چون یک یا چند متغیر درون زا به عنوان متغیر توضیحی در سمت راست معادله ساختاری وارد می شوند و از آنجا که این متغیرها مستقل از جمله خطای آن معادله نیستند، لذا فروض کلاسیک را نقض کرده و تخمین زننده های *OLS* دارای تورش خواهند بود. اما اگر فرم حل شده را برای هر یک از این معادلات بنویسیم، آنگاه هر متغیر درون زا صرفاً برحسب متغیرهای برون زا به دست می آید که مستقل از جملات خطا هستند. بنابراین می توان با روش *OLS* تخمین زننده های بدون تورش برای ضرایب فرم حل شده به دست آورد. از طرف دیگر چون هر یک از معادلات، دقیقاً مشخص هستند، لذا می توان ضرایب ساختاری را با استفاده از ضرایب فرم حل شده به دست آورد.

ح) روش متغیرهای ابزاری (*IV*):

روش متغیرهای ابزاری یک روش سازگار و کارا است. بدین منظور فرم ساختاری (۲) را در نظر بگیرید. دیدیم که چون Z_j و u_j مستقل نیستند لذا روش *OLS* ناسازگار است. روش دیگر برای رسیدن به تخمین زننده‌های سازگار، استفاده از متغیرهای ابزاری است. بدین منظور فرض کنید که W_j یک ماتریس با ابعاد $T \times (M_j + K_j)$ باشد که شرایط تخمین زننده های *IV* را تأمین می کند:

$$P\lim \frac{W'_j z_j}{T} = \sum_{wz} \qquad \text{ماتریس غیرمنفرد و محدود} \qquad (۶)$$

$$P\lim \frac{W'_j u_j}{T} = 0 \qquad (۷)$$

$$P\lim \frac{W'_j W_j}{T} = \sum_{WW} \qquad \text{ماتریس مثبت معین} \qquad (۸)$$

در این صورت تخمین زننده IV عبارت است از:

$$\hat{\delta}_{j,IV} = (W_j' Z_j)^{-1} W_j' y_j \tag{۹}$$

با جایگذاری از (۲) به جای y_j خواهیم داشت:

$$\hat{\delta}_{j.IV} = (W_j' Z_j)^{-1} (W_j' (Z_j \delta_j + u_j) \tag{۱۰}$$

$$= \delta_j + (W_j' Z_j)^{-1} (W_j' u_j$$

با توجه به شرایط(۶) تا (۱۰) خواهیم داشت:

$$P\lim \hat{\delta}_{j,IV} = \delta_j \tag{۱۱}$$

واریانس مجانبی $\hat{\delta}_{j.IV}$ عبارت است از:

$$P\lim Var(\hat{\delta}_{j,IV}) = P\lim E\left[(\hat{\delta}_{j.IV} - \delta_j)(\hat{\delta}_{j,IV} - \delta_j)'\right] \tag{۱۲}$$

$$= P\lim (W_j' Z_j)^{-1} W_j' u_j' W_j (Z_j' W_j)^{-1}$$

$$= \frac{\sigma_j^2}{T} P\lim (\frac{W_j' Z_j}{T})^{-1} P\lim (\frac{W_j' W_j}{T}) P\lim (\frac{Z_j' W_j}{T})^{-1}$$

$$= \frac{\sigma_j^2}{T} Q^{-1} wz \quad Qww \quad Q^{-1} zw$$

$\hat{\sigma}_j^2$ براساس باقیمانده های معادله jام حساب می شود که عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{e_j' e_j}{T} = \frac{(y_j - z_j \hat{\delta}_{j,IV})'(y_j - z_j \hat{\delta}_{j,IV})}{T} \tag{۱۳}$$

اگر به جای T از درجه آزادی، یعنی $T\text{-}M_j\text{-}K_j$ استفاده کنیم باعث می شود تا $\hat{\delta}_j^2$ بدون تورش شود، زیرا در اینجا تعداد ضرایب برآوردی برابر با M_j+K_j است.

ج) برآورد معادلات بیش از حد مشخص با روش $2SLS$:

اگر هریک از معادلات در یک سیستم همزمان، بیش از حد مشخص باشند، می توان آنها را با روش حداقل مربعات دو مرحله ای($2SLS$) برآورد نمود. همانطور که در بخش قبلی دیدیم، برای یک سیستم دقیقاً مشخص، از ILS استفاده می کنیم که اساس آن، برآورد معادلات فرم حل شده با روش OLS و سپس محاسبه ضرایب ساختاری با استفاده از ضرایب فرم حل شده است. در روش ILS برای حل مشکل همبستگی بین متغیر درون زای توضیحی با جملات اختلال، از فرم حل شده استفاده می شود. در روش $2SLS$ نیز تقریباً

همین منطق حاکم است. در یک معادله بیش از حد مشخص اگر روش ILS را استفاده کنیم، برای ضرایب ساختاری بیش از یک جواب به دست می آید که نمی توان به سادگی از بین آنها یکی را انتخاب نمود. در واقع به خاطر داشتن اطلاعاتی اضافی و استفاده جداگانه از این اطلاعات، به جواب های جداگانه می رسیم، حال اگر در ابتدا این اطلاعات را با هم تلفیق کنیم و به صورت یکجا مورد استفاده قرار دهیم، آنگاه به یک جواب خواهیم رسید.

برای توصیف روش $2SLS$ مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{2t} + \alpha_2 X_{1t} + \alpha_3 X_{2t} + u_{1t}$$

$$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{1t} + \beta_2 X_{3t} + \beta_3 X_{4t} + u_{2t}$$

هر دو معادله، بیش از حد مشخص هستند، زیرا با توجه به M=۲ و M=۴ و K=۴ خواهیم داشت:

معادله اول: $k = 2 \quad , m = 2 \quad , K - k = 2 > m - 1 = 1$

معادله دوم: $k = 2 \quad , m = 2 \quad , K - k = 2 > m - 1 = 1$

اگر فرم حل شده را بنویسیم دارای ۱۰ ضریب می‌باشد که بیش از تعداد ضرایب ساختاری(یعنی ۸ ضریب) است. فرم حل شده عبارتست از:

$$Y_{1t} = \pi_0 + \pi_1 X_{1t} + \pi_2 X_{2t} \pi_3 X_{3t} + \pi_4 X_{4t} + u_{1t}$$

$$Y_{2t} = \pi_0 + \pi_6 X_{1t} + \pi_7 X_{2t} \pi_8 X_{3t} + \pi_9 X_{5t} + u_{2t}$$

اگر π_i را از روش ILS برآورد کنیم و سپس ضرایب ساختاری (α ها و β ها) را حساب کنیم، آنگاه برای هر یک از آنها بیش از یک جواب به دست می آید. برای حل این مشکل، از یک روش دومرحله ای استفاده می شود:

الف) ابتدا معادلات فرم حل شده را با روش OLS برآودر کرده که $\hat{\pi}_i$ها به دست می آیند، سپس روابط زیر را می نویسیم:

$$Y_{1t} = \hat{Y}_{1t} + \hat{v}_{1t}$$

$$Y_{2t} = \hat{Y}_{2t} + \hat{v}_{2t}$$

ب) در سیستم معادلات ساختاری در سمت چپ به جای Y_{1t} و Y_{2t} قرار می دهیم:

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1(\hat{Y}_{2t} + \hat{v}_{2t}) + \alpha_3 X_{1t} + \alpha_4 X_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1(\hat{Y}_{1t} + \hat{v}_{1t}) + \beta_3 X_{3t} + \beta_3 X_{4t} + u_{2t}$$

توجه داریم که چون $\hat{Y}_{1t}$ و $\hat{Y}_{2t}$ فقط تابعی از متغیرهای برون زا هستند، لذا مستقل از جملات خطا می باشند. بنابراین می توان ضرایب آنها را با روش OLS برآورد نمود.

روش فوق موسوم به روش حداقل مربعات دو مرحله ای است که در آن، دوبار از روش OLS استفاده می شود. بدیهی است که اگر معادلات، دقیقاً مشخص باشند، تخمین های روش $2SLS$ با روش ILS یکسان خواهد بود.

* روش $2SLS$ یک روش عمومی برای تخمین سیستم معادلات همزمان است. این روش مبنی بر استفاده از متغیرهای ابزاری برای $Y1$ (متغیرهای درون زای موجود در معادله jام به استثنای y_j) می باشد. متغیرهای ابزاری که برای Y_j معرفی می شود عبارت از تخمین Y_j براساس تمام متغیرهای رون زای(Xها) موجود در کل سیستم معادلات است.

$$Y_j = X\Pi_j + V_j \qquad (۱۴)$$

$$\hat{Y} = X\hat{\Pi}_j \quad , \quad \hat{\Pi}_j = (X'X)^{-1}(X'Y_j) \qquad (۱۵)$$

$$Y_j = \hat{Y}_j + \hat{V}_j \qquad (۱۶)$$

با جایگذاری در معادله jام خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y_j &= (\hat{Y}_j + \hat{V}_j)\gamma_j + X_j\beta_j + u_j \qquad (۱۷) \\ &= \hat{Y}_j\gamma_j + X_j\beta_j + (u_j + \hat{V}_j) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{Y}_j & X_j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_j \\ \beta_j \end{bmatrix} + (u_j + \hat{V}_j) \\ &= \hat{Z}_j\delta_j + (u_j + \hat{V}_j) \quad , \quad \hat{Z}_j = \begin{bmatrix} \hat{Y}_j & X_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تخمین $2SLS$ عبارت است از:

$$\hat{\delta}_{j,2SLS} = (\hat{Z}'_j \hat{Z}_j)^{-1} \hat{Z}'_j y_j \qquad (۱۸)$$

با جایگذاری به جای $\hat{Z}_j$ خواهیم داشت:

$$\hat{\delta}_{j,2SLS} = \begin{bmatrix} \hat{Y}'_j Y_j & \hat{Y}'_j X_j \\ \hat{X}'_j Y_j & X'_j X_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{Y}'_j y_j \\ \hat{X}'_j y_j \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

در ماتریس $\begin{bmatrix} \hat{Y}_j & X_j \end{bmatrix}$، $M_j + K_j$ ستون وجود دارد که تمام ستون ها توابع خطی از K ستون مربوط به X هستند. درواقع K ترکیب مستقل خطی از ستون های X داریم. اگر معادله، مشخص نباشد، در این صورت $M_j + K_j$ بزرگتر از K است و لذا $\begin{bmatrix} \hat{Y}_j & X_j \end{bmatrix}$ دارای مرتبه ستونی کامل نخواهد بود. در این حالت، تخمین $2SLS$ نمی تواند به کار گرفته شود.

در اینجا می توان از یک ساده سازی مناسب استفاده نمود:

اولاً چون $X(X'X)^{-1}X' = (I-M)$ خود توان است، لذا رابطه $Y'_j Y_j = \hat{Y}'_j Y_j$ را داریم. ثانیاً $X'_j X(X'X)_{-1} = X'_j$ بدان معناست که $X'_j Y_j = X'_j \hat{Y}_j$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{\delta}_{j,2SLS} = \begin{bmatrix} \hat{Y}'_j Y_j & \hat{Y}'_j X_j \\ X'_j Y_j & X'_j X_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{Y}'_j y_j \\ X'_j y_j \end{bmatrix} \qquad (۲۰)$$

بدین ترتیب، تخمین زننده $2SLS$ در دو مرحله از تخمین OLS استفاده می کند:

۱- مرحله اول: رگرسیون Y_j روی X برآورده می شود.

۲- مرحله دوم: تخمین δ_j از طریق رگرسیون حداقل مربعات y_j بر روی $\hat{Y}_j$ و X_j به دست می آید.

اثبات سازگاری $2SLS$ نیازمند آن است که تخمین زننده IV معتبر باشد. برای برقراری(۷) لازم است که ماتریس زیر، غیرمنفرد و محدود باشد.

(۲۱)

$$P\lim\begin{bmatrix}\hat{Y}_j'Y_j/T & \hat{Y}_j'X_j/T\\ X_j'Y_j/T & X_j'X_j/T\end{bmatrix}$$

$$=P\lim\begin{bmatrix}\hat{\Pi}_j'X'(X\Pi_j+V_j)/T & \hat{\Pi}_j'X'X_j/T\\ X_j'(X\Pi_j+V_j)/T & {}_j X_j'X_j/T\end{bmatrix}$$

از آنجا که $P\lim\hat{\Pi}_j=\Pi_j$ است، لذا در حد می توان به جای Π_j از $\hat{\Pi}_j$ استفاده کرد. اگر مرتبه Π_j کامل باشد(یعنی معادله، مشخص باشد)، آنگاه ماتریس فوق، غیرمنفرد خواهد بود. طبق (۷) نیاز داریم که رابطه زیر برقرار باشد:

(۲۲)

$$P\lim\frac{1}{T}\begin{bmatrix}\hat{Y}_j'u_j\\ X_j'u_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

طبق فرض، شرط $P\lim\frac{1}{T}(X_j'u_j)=0$ برقرار است. اما جمله اول با توجه به $\hat{Y}_j=X\hat{\Pi}_j=X(X'X)_{-1}X'Y_j$ عبارت است از:

(۲۳)

$$P\lim\frac{1}{T}Y_j'u_j=P\lim\frac{1}{T}Y_j'X(X'X)^{-1}X'u_j$$

$$=P\lim(\frac{Y_j'X}{T})(\frac{X'X}{T})^{-1}(\frac{X'u_j}{T})$$

چون حد جمله سوم برابر صفر است، لذا شرط موردنظر را تأمین می کند. بدین ترتیب، $\hat{\delta}_{j,2SLS}$ یک تخمین زننده IV استو لذا می توان آن را به صورت یک تخمین زننده IV نوشت.

اگر X_j را روی X برازش کنیم، در این صورت $\hat{X}_j=X_j$ خواهد بود(چون X_j در داخل X قرار دارد). با استفاده از ماتریس خود توان $I-M=X(X'X)^{-1}X'$ و با توجه به $\hat{Y}_j=X\hat{\Pi}_j=X(X'X)^{-1}X'Y_j=(I-M)Y$ خواهیم داشت:

(۲۴)

$$\hat{\delta}_{j,1SLS=}\begin{bmatrix}Y'(I-M)Y_j & Y_j'(I-M)X_j\\ X_j'(I-M)Y_j & X_j'(I-M)X_j\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}Y_j'(I-M)y_j\\ X_j'(I-M)y_j\end{bmatrix}$$

و

$$\hat{\delta}_{j,2SLS} = (\hat{Z}_j \hat{Z}_j)^{-1}\hat{Z}'_j y_j \tag{۲۵}$$

$$= \left[Z'_j\hat{Z}_j)^{-1}(X'Z_j)\right]^{-1}(Z'_jX)(X'X)^{-1}(X'y_j)$$

$\hat{Z}_j$ از برآورد معادله رگرسیون $\hat{Z}_j = X\hat{C}$ بدست می آید که حاصل رگرسیون Z روی X است. لذا $\hat{Z}_j = X\hat{C} = X(X'X)_{-1}X'Z_j = (I-M)Z_j$ است. توجه شود که رگرسیون Z روی X شامل رگرسیون Y_i روی X و X_j روی X است که نتیجه اولی $\hat{Y}_j$ و نتیجه دومی $\hat{X}_j$ است که با X_i برابر می باشد.

واریانس مجانبی $\hat{\delta}_{j,2SLS}$ عبارت است از:

$$\hat{\delta}_j = \delta_j + (\hat{Z}'_j\hat{Z}_j)^{-1}\hat{Z}'_j u_j \tag{۲۶}$$

$$Var(\hat{\delta}_{j,2SLS}) = P\lim E(\hat{\delta}_{j,2SLS} - \delta_j)(\hat{\delta}_{j,2SLS} - \delta_j)' \tag{۲۷}$$

$\hat{\delta}_j^2$ عبارت است از:

$$\hat{\delta}_j^2 = \frac{e'e}{T} = \frac{(y_j - Z_j\hat{\delta}_{j,2SLS})'(y_j - Z_j\hat{\delta}_{j,2SLS})}{T} \tag{۲۸}$$

- **ویژگی‌های برجسته روش *2SLS*:**
- ۱– از نظر اقتصادی استفاده از آن با صرفه است.
- ۲- یک تخمین برای هریک از پارامترها می‌دهد.
- ۳- کاربرد آسان
- ۴- می‌توان از آن برای حل معادلات دقیقاً مشخص نیز استفاده کرد. در این حالت تخمین‌های *ILS* و *2SLS* یکسان هستند.
- ۵- اگر R^2 در رگرسیون‌های فرم خلاصه شده بالا باشد، تخمین‌های *OLS* و *2SLS* بسیار نزدیک یکدیگر خواهند بود. اگر R^2 در رگرسیون‌های مرحله اول خیلی پایین باشد، تخمین‌های *2SLS* عملاً بی معنی خواهند بود.

د) روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود(*LIML*):

در فصول قبلی روش حداکثر درستنمایی برای تخمین معادله رگرسیون یک متغیره و K متغیره، توضیح داده شد. در سیستم معادلات همزمان نیز می توان هر یک از معادلات را با روش حداکثر درستنمایی تخمین زد که در اینجا معروف به روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود($LIML$) می باشد. این روش توسط اندرسن و روبین ۱۹۴۹ ارایه شد. این روش مبتنی بر حداکثر نمودن تابع درستنمایی برای مشاهدات مربوط به متغیرهای درون زای موجود در معادله موردنظر، می باشد. اطلاعات محدود بدان معنا است که در تشکیل تابع درستنمایی خود را محدود به آن دسته از متغیرهای درون‌زا می‌کنیم که در معادله موردنظر وارد شده اند و توجهی به سایر محدودیت هایی که در سایر معادلات ساختاری وجود دارد نمی کنیم.

* روش $LIML$ یکی از روش های سازگار برای برآوردهای تک معادله ای است. این روش مبتنی بر حداکثر نمودن تابع درستنمایی براساس مشاهدات مربوط به متغیرهای درون زای موجود در معادله مورد نظر می‌باشد و توجهی به متغیرهای درون زایی که در سایر معادلات وجود دارد نمی کند. معنی اطلاعات محدود آن است که در تشکیل تابع درستنمایی، خود را محدود به متغیرهایی می کنیم که در معادله مورد نظر وارد شده است و توجهی به محدودیت های اعمال شده در سایر معادلات ساختاری نداریم.

تصور کنید که می خواهیم یکی از معادلات (معادله jام) را برآورد کنیم. بخشی از این سیستم معادلات که در روش $LIML$ مورداستفاده قرار می گیرد عبارت است از:

$$y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + u_j \quad \text{معادله } j\text{ام} \tag{۲۹}$$

$$Y_j = X\Pi_j + V_j \quad \text{فرم حل شده برای } Y_j \tag{۳۰}$$

بردارها و ماتریس ها عبارتند از:

Y_j شامل M_j متغیر دورن زا است که در معادله jام وارد شده است ولی در سایر معادلات وجود ندارد(توجه شود که Y_j شامل y_j نمی شود)، لذا ابعاد آن $1\times M_j$ می باشد.

X_j شامل K_j متغیر برون زا است که در معادله jام وارد شده است ولی در سایر معادلات وجود ندارد.

V_j جملات خطا است که شامل M_j خطا برای فرم حل شده Y_j است که بردار $M_j\times 1$ می باشد.

حال از (۲۹) در(۳۰) قرار می دهیم:

$$y_j = X\pi_j\gamma_j + X_j\beta_j + V_j \;\; , \;\; V_j = u_j + V_j\beta_j \tag{۳۱}$$

تخمین حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود از حداکثرسازی تابع درستنمایی y_j و Y_j نسبت به γ_j, β_j و Π_j و واریانس- کوواریانس جملات خطا به دست می آید. یک راه ساده برای به دست آوردن تخمین زننده های $LIML$ این است که ابتدا معادلات(۲۹) و (۳۰) را به صورت معادلات به ظاهر نامرتبط درنظر بگیریم(یعنی توجهی به همبستگی Y_j و u_j نکنیم). اما برای استفاده از معادلات(۲۹) و (۳۱) می‌توان Y_j را مانند یک متغیر غیرقابل مشاهده مورد توجه قرار داد و از $E(Y_j) = X\Pi_j$ استفاده نمود. این شیوه، تفاوت بین روش $2SLS$ و $LIML$ را به خوبی روشن می کند. در روش $2SLS$ ابتدا $\hat{\Pi}_j$ از معادله(۶۶) تخمین زده و در معادله(۲۹) جایگذاری می کنیم و سپس ضرایب β_j و γ_j را برآورد می کنیم. اما در روش $LIML$، Π_j، β_j، γ_j را به طور همزمان برآورد می کنیم. با این وجود، نتایج آنها به طور مجانبی، یکسان است.

معادله jاٌم را به صورت زیر می نویسیم:

$$y_j - Y_j\gamma_j = X_j\beta_j + u_j \tag{۳۲}$$

$$\hat{y}_j = X_j = X_j\beta_j + u_j \quad , \quad y_j - Y_j\gamma_j = \hat{y}_j$$

$\hat{Y}_j$ یک ترکیب خطی از متغیرهای درون زای موجود در معادله jاٌم است. با داشتن $\hat{y}_j$، تخمین $\hat{\beta}_j$ عبارت است از:

$$\hat{\beta}_j = (X_j'X_j)^{-1}X_j'\tilde{y}_j \tag{۳۳}$$

و مجموع مجذور خطاهای آن عبارت است از:

$$RSS_j = e_\circ'e_\circ = (\tilde{y}_j - X_j\hat{\beta}_j)'(\tilde{y}_j - X_j\hat{\beta}_j)$$

و جای $\hat{\beta}_j$ قرار داده و RSS_j را به صورت زیر می نویسیم:

$$RSS_j = e_\circ'e_\circ = \tilde{y}_j y_j - \tilde{y}_j'X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'\tilde{y}_j \tag{۳۴}$$

توجه شود که در اینجا فقط آن دسته از Xهایی را داریم که در معادله jاٌم وارد شده اند. اگر تمامی Xها را در نظر بگیرمی، آنگاه خواهیم داشت:

$$\hat{y}_j = X\beta + u_j \tag{۳۵}$$

که X یک ماتریس $T \times K$ است و $\beta = \begin{bmatrix} \beta \\ \circ \end{bmatrix}$ می باشد که β یک بردار $K\times1$ می باشد.

برای تخمین β از روش OLS خواهیم داشت:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X\tilde{y}_j \tag{۳۶}$$

و مجموع مجذور خطاها عبارتند از:

$$RSS = e'e = (\tilde{y}_j - X\hat{\beta})'(\tilde{y}_j - X\hat{\beta}) \tag{۳۷}$$

$$= \tilde{y}_j'\tilde{y}_j - \tilde{y}_j'X(X'X)^{-1}X\tilde{y}_j$$

حال نسبت زیر را تشکیل می دهیم:

$$l = \frac{RSS_j}{RSS} = \frac{\tilde{y}_j'\tilde{y}_j - \tilde{y}_j X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'\tilde{y}_1}{\hat{y}_j\tilde{y}_j - \tilde{y}_j'X(X'X)^{-1}X\tilde{y}_1} \tag{۳۸}$$

$$= \frac{\tilde{y}_j\left[I - X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'\right]\tilde{y}_j}{\tilde{y}_j'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]\tilde{y}_j}$$

این نسبت می تواند کوچکتر از ۱ شود، زیرا همواره $RSS_j \geq RSS$ می باشد. برای تخمین γ_j، ابتدا $\hat{y}_j$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$\tilde{y}_j = y_j - Y_j\gamma_j = [y_j \quad Y_j]\begin{bmatrix} 1 \\ -\gamma_j \end{bmatrix} = Y_j^{\circ}\gamma_j^{\circ} \tag{۳۹}$$

$$Y_j^{\circ'} = [y_j \quad Y_j] \quad , \quad \gamma_j^{\circ} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\gamma_j \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب با جایگذاری به جای $\tilde{y}_j$، نسبت l را می توان به صورت زیر نوشت:

$$l = \frac{\gamma_j^{\circ'}Y_j'^{\circ}\left[I - X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j\right]Y_j^{\circ}\gamma_j^{\circ}}{\gamma_j^{\circ'}Y_j'^{\circ}\left[I - X(X'X)^{-1}X\right]\ Y_j^{\circ}\gamma_j^{\circ}} = \frac{\gamma_j'^{\circ}W_j^{\circ}\gamma_j^{\circ}}{\gamma_j'^{\circ}W_j\gamma_j^{\circ}} \tag{۴۰}$$

W_j° و W_j عبارتند از:

$$W_j^{\circ} = Y_j'^{\circ}\left[I - X_j(X_j'\ X_j)^{-1}X_j\right]Y_j^{\circ} = Y_j'^{\circ}H_jY_j^{\circ} \tag{۴۱}$$

$$W_j = Y_j'^{\circ}\left[I - X(X'X)^{-1}X\right]Y_j^{\circ} = Y_j'^{\circ}HY_j^{\circ}$$

عبارت های داخل کروشه با H_j و H نشان داده شده اند.

تخمین زننده حداقل نسبت واریانس برای γ_j° برابر با آن مقدار از γ_j است که نسبت l را حداقل کند. بنابراین با حداقل نمودن l نسبت به γ_j° خواهیم داشت:

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma_j^{\circ}} = \frac{2W_j^{\circ}\gamma_j^{\circ}(\gamma_j'^{\circ}W_j\gamma_j^{\circ}) - 2(\gamma_j'^{\circ}W_j^{\circ}\gamma_j^{\circ})}{(\gamma_j'^{\circ}W_j\gamma_j^{\circ})^2} = 0$$

با ساده کردن عبارت فوق، خواهیم داشت:

$$W_j^{\circ}\gamma_j^{\circ}-\frac{\gamma_j'^{\circ}W_j^{\circ}\gamma_j^{\circ}}{\gamma_j'^{\circ}W_j\gamma_j^{\circ}}W_j\gamma_j^{\circ}=0$$

و یا

$$W_j^{\circ}\gamma_j^{\circ}-lW_j\gamma_j^{\circ}=\circ\Rightarrow(W_j^{\circ}-l\ \ W_j)\gamma_j^{\circ}=\circ$$

اگر رتبه ماتریس $W_j^{\circ}-lW_j$ کامل باشد، آنگاه $\left|W_j^{\circ}-lW_j\right|\neq$ بوده و لذا $\gamma_j^{\circ}=\circ$ می باشد. لذا برای به دست آودرن جواب های غیرصفر، بایستی رتبه ماتریس $W_j^{\circ}-lW_j$ کوچکتر از M_j+۱ باشد(توجه نمود که ابعاد این ماتریس $(M_j$+۱$)\times(M_j$+۱$)$ است. بنابراین، شرط حداقل شدن نسبت l معادل است با:

$$\left|W_j^{\circ}-lW_j\right|=\circ \tag{۴۳}$$

از آنجا که عناصر W_j° و W_j از مشاهدات نمونه (یعنی Xها و Yها) تعیین می شود، لذا دترمینان مذکور یک چندجمله ای درجه M_j+۱ از l می باشد. بدیهی است که مسئله (۷۸) معادل با تعیین مقادیر ویژه است که با حل آن، M_j+۱ مقدار ویژه ای برای l تا حد ممکن است به ۱ نزدیک باشد و از طرف دیگر تمام مقادیر ویژه این معادله بزرگتر از ۱ هستند(چون نسبت l بزرگتر از ۱ است). بنابراین، مقدار ویژه مناسب برای حداقل شدن(۷۶) برابر با کوچکترین مقدار ویژه است. اگر l° کوچکترین مقدار باشد، با قرار دادن آن در معادله، خواهیم داشت:

$$(W_j^{\circ}-lW_j)\gamma_j^{\circ}=\circ \tag{۴۴}$$

M_j+۱ معادله داریم که چون دترمینان $W_j-l^*W_j$ برابر صفرت است، لذا فقط M_j معادله مستقل باقی می‌ماند که با حل آنها می توان M_j مجهول را به دست آورد. توجه داریم که γ_j° شامل M_j+۱ پارامتر است که بایستی تعیین شوند، اما چون $\gamma_j^{\circ}=\begin{bmatrix}1\\-\gamma_j\end{bmatrix}$ است، لذا فقط نیاز به تعیین γ_j داریم که شامل M_j پارامتر می باشد. با توجه به تعداد معادلات مستقل که برابر با M_j است، می توان از حل آنها، γ_j را تعیین نمود که با $\hat{y}_{j,LIML}$ نشان می دهیم. بدین ترتیب $\tilde{y}_j$ برابر است با:

$$\tilde{y}_j=y_j-Y_j\hat{\gamma}_j \tag{۴۵}$$

با جایگذاری از (۴۵) به جای $\tilde{\gamma}_j$ در (۳۳)، تخمین β_j برابر است با:

$$\hat{\beta}_{j,LIML} = (X'_j X_j)^{-1} X'_j (y_j - Y_j \hat{\gamma}_{j,LIML}) \quad (۴۶)$$

۲-۴- روش های سیستمی

در روش های سیستمی، برای تخمین ضرایب از تمام اطلاعات موجود در سیستم معادلات استفاده می شود در اینجا دو روش را بررسی می کنیم که شامل روش حداقل مربعات سه مرحله ای ($3SLS$) و روش حداکثر درستنمایی با اطلاعاتکامل ($FIML$) می باشد. در این بخش توصیف مختصری از این روش ها را ارائه می کنیم.

الف) روش حداقل مربعات سه مرحله ای($3SLS$)[1] :

روش $3SLS$ یکی از روش های سیستمی برای برآورد معادلات معادلات همزمان است. روش های تک معادله ای، روش های سازگار هستند اما کارایی مجانبی ندارند. یعنی با افزایش حجم نمونه، تورش و واریانس آنها به سمت صفر میل می کند، لذا سازگارند، اما چون حداقل واریانس را ندارند لذا از کارایی برخوردار نیستند. دلیل عدم کارایی مجانبی آنها در نادیده گرفتن همبستگی جملات خطای معادلات است. یعنی فرض بر این است که جمله خطای یک معادله با جمله خطای سایر معادلات، همبستگی ندارد. این بحث مشابه با آن است که سیستم معادلات به ظاهر نامرتبط را با روش OLS برآورد کنیم، زیرا همبستگی بین جملات را نادیده گرفته ایم. اگر همبستگی بین جملات خطای معادلات ساختاری را نادیده بگیریم، در این صورت از تمام اطلاعات موجود در هر معادله استفاده نکرده ایم و لذا به کارایی مجانبی نخواهیم رسید.

روش $3SLS$ در سه مرحله انجام می شود:

۱- تخمین فرم حل شده برای متغیرهای درون زای موجود در هر معادله، به عنوان مثال برای معادله jام اگر Y_j بردار متغیرهای درون زای موجود در آن معادله باشد، ابتدابا روش OLS معادله $Y_j = X\pi_j + v_j$ را برآورد می کنیم. توجه شود که هر یک از Y_{jt}ها را روی تمام متغیرهای برون زا برازش می کنیم.

---

[1] - *Three Stage Least Squares*

۲- $\hat{Y}_j = X\hat{\pi}_j$ را حساب کرده و $\hat{Y}_j + \hat{v}_j$ را در معادله مورد نظر(معادله jام) به جای Y_j قرار می دهیم و ضرایب آن را برآورد می کنیم. این برآوردها همان تخمین های $2SLS$ هستند. با استفاده از این برآوردها، خطاهای معادله موردنظر را حساب کرده و سپس واریانس و کوواریانس بین جملات خطا (یعنی $\hat{\sigma}_{ij}$ها) را محاسبه می کنیم. ماتریس واریانس- کوواریانس جملات خطا به صورت $E(u_t u_t') = \Omega$ تعریف می شود که عناصر Ω معادل با $E(u_{it}u_{jt}) = \sigma_{ij}$ هستند.

۳- از روش حداقل مربعات وزنی برای برآورد ضرایب سیستم معادلات استفاده می کنیم که وزن ها معادل با $\hat{\sigma}_{ij}$ها هستند.

* در بخش قبلی، معادله jام به صورت زیر معرفی شد:

$$y_j = Z_j\delta_j + u_j \qquad Z_j = [Y_j \quad X_j] \qquad \delta_j = \begin{bmatrix}\gamma_j \\ \beta_j\end{bmatrix} \tag{۴۷}$$

ابعاد این بردارها و ماتریس ها عبارتند از:

y_j: بردار $T\times 1$

Y_j: ماتریس $T\times M_j$

X_j: ماتریس $T\times K_j$

Z_j: ماتریس $T\times(M_j\times K_j)$

γ_j: بردار $M_j\times 1$

β_j: بردار $K_j\times 1$

δ_j: بردار $(M_j+K_j)\times 1$

معادله(۴۷) را برای کل سیستم معادلات را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & Z_2 & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & Z_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}$$

و یا

$$y = Z\delta + U \qquad (۴۸)$$

ابعاد ماتریس ها و بردارها عبارت است از:

y: بردار $TM\times ۱$

z: $TM \times \sum_{j=1}^{M} (M_j + K_j)$

δ: $\sum_{j=1}^{M} (M_j + K_j) \times ۱$

U: $TM\times ۱$

برای جمله خطا، شرایط زیر برقرار است:

$$E(U|X) = ۰$$

$$E(UU'|X) = \bar{\sum} = \sum \otimes I_T = \begin{bmatrix} \sigma_{11}I_T & \sigma_{12}I_T & \cdots\sigma_{1M}I_T \\ \sigma_{21}I_T & \sigma_{22}I_T & \cdots\sigma_{2M}I_T \\ \vdots & \vdots & \\ \sigma_{M1}I_T & \sigma_{M2}I_T & \cdots\sigma_{MM}I_T \end{bmatrix} \qquad (۴۹)$$

$$E(u_t u_t') = \sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11}I_T & \sigma_{12} & \cdots\sigma_{1M} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}I_T & \cdots\sigma_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{M1} & \sigma_{M2} & \cdots\sigma_{MM} \end{bmatrix} \qquad (۵۰)$$

$\bar{\sum}$ یک ماتریس $TM\times TM$ و $\sum$ نیز یک ماتریس $M\times M$ است. $\sum$ بیانگر ماتریس واریانس- کوواریانس جملات خطای معادلات ۱ تا M برای سال t است.

تخمین زننده OLS که هر معادله را جداگانه تخمین می زند عبارت است از:

$$\delta_{OLS} = (Z'Z)^{-1}Z'y \qquad (۵۱)$$

که یک تخمین زننده ناسازگار است. حتی اگر OLS یک تخمین زننده سازگار باشد، با توجه به بحث معادلات به ظاهر نامرتبط، یک تخمین زننده ناکارا در مقایسه با تخمین زننده ای است که همبستگی جملات

خطای معادلات را در نظر می گیرد. برای حل مشکل اول(ناسازگاری) از روش متغیرهای ابزاری استفاده می کنیم و برای حل مشکل دوم(ناکارایی) از روش GLS استفاده می کنیم. بنابراین فرض می کنیم که $\bar{W}$ شرایط یک تخمین زننده IV را دارد، به گونه ای که یک تخمین زننده سازگار(هرچند ناکار) ارائه خواهد داد:

$$\hat{\delta}_{IV} = (\bar{W}'Z)^{-1}\bar{W}'y \tag{۵۲}$$

حال برای حل مشکل دوم می توان از روش GLS استفاده نمود. این روش مبتنی بر حداقل مربعات وزنی است و لذا براساس ماتریس $\bar{\sum}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{IV.GLS} &= \left[\bar{W}'(\bar{\sum})^{-1}\bar{W}'(\bar{\sum})^{-1}y\right] \\ &= \left[\bar{W}'(\bar{\sum})^{-1}\otimes I)Z\right]^{-1}\bar{W}'(\sum{}^{-1}\otimes I)y\end{aligned} \tag{۵۳}$$

اگر عناصر ماتریس $\sum^{-1}$ را با σ^{ij} نشان دهیم و اگر W_j مجموعه متغیرهای ابزاری برای معادله jام باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\hat{\delta}_{IV.GLS} = \begin{bmatrix} \sigma^{11}W_1'Z_1 & \sigma^{12}W_1'Z_2 & \cdots & \sigma^{1M}W_1'Z_M \\ \sigma^{21}W_2'Z_1 & \sigma^{22}W_2'Z_2 & \cdots & \sigma^{2M}W_2'Z_M \\ \sigma^{M1}W_M'Z_1 & \sigma^{M2}W_1'Z_M' & \cdots & \sigma^{MM}Z_M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{M}\sigma^{1j}W_1'Y_j \\ \sum_{j=1}^{M}\sigma^{2j}W_2'Y_j \\ \sum_{j=1}^{M}\sigma^{Mj}W_M'Y_j \end{bmatrix} \tag{۵۴}$$

ابعاد بردارها و ماتریس ها عبارتند از:

$$\sum_{j=1}^{M}(M_j+K_j)\times\sum_{j=1}^{M}(M_j+K_j):\bar{W}$$

$$TM\times TM:\bar{\sum}$$

$$TM\times ۱ :Y$$

$$T\times(M_j+K_j) :W_j$$

Z: $TM \times \sum_{i=1}^{M}(M_j + K_j)$

Z_j: $T\times(M_j+K_j)$

σ^{ij}: ۱×۱

$\sum_{j=1}^{M}\sigma^{ij}W_i'y_j$: $(M_j + K_j)\times$۱ و $i = 1,\dots,M$

$\sigma^{ij}W_i'Z_j : (M_i + K_i)\times(M_j + K_j) \quad , \quad i, j = 1,\dots,M$

$\hat{\delta} : \sum_{j=1}^{M}(M_j + K_j)\times 1$

در سیستم معادلات(۵۳)، عبارت $\overline{W}'(\sum^{1-}\otimes I)Z$ برابر است با:

(۵۵)

$$\overline{W}'(\sum^{-1}\otimes I)Z = [W_1' \; W_2' \; \cdots \; W_M'] \begin{bmatrix} \sigma^{11}I & \sigma^{12}I & \cdots & \sigma^{1M}I \\ \sigma^{21}I & \sigma^{22}I & \cdots & \sigma^{2M}I \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma^{M1}I & \sigma^{M2}I & \cdots & \sigma^{MM}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & \circ \\ \circ & Z_2 & \cdots & \circ \\ \circ & \circ & \cdots & Z_M \end{bmatrix}$$

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} W_1' \\ W_2' \\ \vdots \\ W_M' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W21 & \cdots W_{T1} \\ W_{12} & W_{22} & \cdots W_{T2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ W_{1M} & W_{2M} & \vdots W_{TM} \end{bmatrix}$$

$$W_j' = \begin{bmatrix} W_{1j} & W_{2j} & \cdots & W_{Tj} \end{bmatrix}$$ سطر jام ماتریس $\overline{W}$

حال برای تخمین زننده *3SLS*، ابتدا $\overline{W}$ را معادل با $\hat{Z}$ تعریف می کنیم:

$$\overline{W} = \hat{Z} = \begin{bmatrix} \hat{Z} & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \hat{Z}_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \hat{Z}_M \end{bmatrix} \tag{۵۶}$$

$$= \begin{bmatrix} X(X'X)^{-1}Z_1 & & & \\ \circ & X(X'X)^{-1}X'Z_2 & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \circ \\ \circ & \circ & \cdots & X(X'X)^{-1}X'Z_M \end{bmatrix}$$

توجه شود که $\hat{Z}_j$ برابر است با:

$$Z_j = [Y_j \quad X_j] \Rightarrow \hat{Z}_j = X\hat{\Pi} \Rightarrow \hat{Z}_j = X(X'X)^{-1}X'Z_j \tag{۵۷}$$

در واقع $\hat{Z}_j$ از یک تخمین زننده $2SLS$ به دست می آید که طبق آن $\hat{Z}_j$ روی تمام متغیرهای برون زا برازش می شود. به عبارت دیگر اجزای Z_j یعنی Y_j و X_j هر یک روی X برازش می شود که برای آنها به ترتیب $\hat{Y}_j = X\hat{\Pi}_j$ و $\hat{X}_j = X\,\hat{\underline{\Pi}} = X_j$ به دست می آید و لذا $\hat{Z}_j$ برابر است با:

$$\hat{Z}_j = [\hat{Y}_j \quad \hat{X}_j] = \begin{bmatrix} X\hat{\Pi}_j & X\,\hat{\underline{\Pi}}_j \end{bmatrix} \tag{۵۸}$$

$$= \begin{bmatrix} X(X'X)^{-1}X'Y & X(X'X)^{-1}X'X_j \end{bmatrix}$$

$$= X(X'X)^{-1}X'\begin{bmatrix} Y_j & X_j \end{bmatrix} = X(X'X)^{-1}X'Z_j$$

توجه شود که $\hat{\Pi}_j = (X'X)^{-1}X'Y_j$ و $\hat{\underline{\Pi}}_j = (X'X)^{-1}X'X_j$ می باشد.

حال تخمین زننده IV عبارت است از:

$$\hat{\delta}_{IV} = (\hat{Z}'\hat{Z})^{-1}\hat{Z}'y \tag{۵۹}$$

با توجه به $\hat{Z}$ و نحوه تعیین آن، تخمین زننده فوق یک تخمین زننده $2SLS$ می باشد. اگر همبستگی بین جملات خطای معادلات را در نظر بگیریم آنگاه بایستی از یک تخمین زننده GLS نیز استفاده کنیم که بر مبنای ماتریس $\bar{\sum} = \sum^{-1} \otimes I_T$ می باشد. این تخمین زننده را تخمین زننده $3SLS$ می گویند:

$$\hat{\delta}_{2SLS} = \left[\hat{Z}'(\textstyle\sum^{-1} \otimes I)Z\right]^{-1} \hat{Z}'(\textstyle\sum^{-1} \otimes I)y \tag{۶۰}$$

ماتریس واریانس- کوواریانس مجانبی این تخمین زننده عبارت است از:

(۶۱)
$$P\lim \hat{\delta}_{3SLS} = \left[\bar{Z}'(\sum^{-1} \otimes I)\right]^{-1}$$

که $\bar{Z}$ معادل با ماتریس قطری است که مشابه $\hat{Z}$ بوده که هر عنصر قطری آن به صورت ماتریس $[Y_j \quad X_j]$ می باشد.

بدین ترتیب روش $3SLS$ دارای ۳ مرحله است:

۱- برآورد $Y_j = X\Pi_j + V_j$ برای هر معادله با استفاده از روش OLS.

۲- برآورد $\hat{\delta}_{j,2SLS}$ برای هر معادله و سپس محاسبه $\hat{\sigma}_{ij}$.

(۶۲)
$$\sigma^{ij} = \frac{(y_i - Z_i\hat{\delta}_{i,SLS})'(y_j - Z_j\hat{\delta}_{j,SLS})}{T}$$

۳- محاسبه $\hat{\delta}$ با استفاده از روش GLS مطابق با فرمول (۶۰).

ب)برآورد سیستم معادلات همزمان با روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل($FIML$)[1]:

روش سیستمی دیگر، حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل است. در این روش از تابع درستنمایی استفاده می شود که از تابع احتمال جملات خطای تمام معادلات استخراج می شود. باحداکثر نمودن این تابع، تخمین زننده حداکثر درستنمایی به دست می آید.

* روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل از کل سیستم معادلات استفاده می کند. اگر توزیع جملات خطا، نرمال باشد روش $FIML$ کاراتر از هر تخمین زننده دیگری است. تخمین زننده $FIML$ تمام معادلات و پارامترها را به صورت یکجا در نظر می گیرد. ابتدا فرم خلاصه شده سیستم معادلات را برای سال t در نظر بگیرید:

(۶۳)
$$y_t = X_t'\Pi + V_t \quad , \quad t = 1,\ldots,T \quad , \quad \Pi = -B\Gamma^{-1}u_t$$

فرض می شود که V_t توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس Ω داشته باشند:

(۶۴)
$$\Omega^{-1} = \Gamma\sum^{-1}\Gamma' \quad , \quad E(V_tV_t'|X) = \Omega = (\Gamma^{-1})'\sum\Gamma^{-1} \quad , \quad \sum = E(u_tu_t'|X)$$

[1] - *Full Information Maximum Likelihood*

بدین ترتیب تابع درستنمایی برای V_t یا y_tعبارت است از:

(۶۵)

$$y_t \left| X_t \approx N(X_t'\Pi, \Omega) \right.$$

$$L_t = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(y_t - X_t'\Pi)'\Omega^{-1}(y_t - X_t'\Pi)}$$

لگاریتم تابع درستنمایی را برای سال t به صورت زیر می نویسیم:

(۶۶)

$$1nL_t = -\frac{M}{2}1n(2\pi) - \frac{1}{2}1n|\Omega| - \frac{1}{2}(y_t - X_t'\Pi)'\Omega^{-1}(y_t - X_t'\Pi)$$

لگاریتم تابع درستنمایی برای کل مشاهدات (از ۱ تا T) عبارت است از:

(۶۷)

$$1nL = \sum_{t=1}^{T} 1nL_t = -\frac{TM}{2}1n(2\pi) - \frac{T}{2}1n|\Omega|$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - X_t'\Pi)'\Omega^{-1}(y_t - X_t'\Pi)$$

در (۱۰۲) جمله سوم را به صورت زیر می نویسیم:

(۶۸)

$$\sum_{t=1}^{T}(y_t - X_t'\Pi)'\Omega^{-1}(y_t - X_t\Pi) = \sum_{t=1}^{T} V_t'\Omega^{-1}V_t = trV'\Omega^{-1}V$$
$$= tr\left\lfloor \Omega^{-1}V'V \right\rfloor = tr\left\lfloor \Gamma\sum{}^{-1}\Gamma'V'V \right\rfloor$$
$$= tr\left\lfloor \Gamma\sum{}^{-1}\Gamma'(Y + XB\Gamma^{-1})'(Y + XB\Gamma) \right\rfloor$$

توجه شود که V ماتریس قطری با عناصر V_t است. بدین ترتیب با جایگذاری (۶۸) در (۶۷) تابع درستنمایی عبارت است از:

(۶۹)

$$1nL = -\frac{T}{2}1n(2\pi) - \frac{T}{2}1n\left|(\Gamma^{-1})'\sum\Gamma^{-1}\right|$$
$$-\frac{T}{2}tr\left[\Gamma\sum{}^{-1}\Gamma'(Y + XB\Gamma)'(Y + XB\Gamma^{-1})\right]$$

ابتدا جمله دوم(۶۹) را به صورت زیر ساده می کنیم:

(۷۰)

$$-\frac{T}{2}1n\left|(\Gamma^{-1})'\sum\Gamma^{-1}\right| = \left| = -\frac{T}{2}1n\right|(\Gamma^{-1})'\left| - \frac{T}{2}1n\right|\sum\left| - \frac{T}{2}1n\right|\Gamma^{-1} \quad |$$
$$= T1n|\Gamma| - \frac{T}{2}1n\left|\sum \quad\right|$$

زیرا $\left|\Gamma^{-1}\right| = \left|(\Gamma^{-1})\right|$ است.

حال برای جمله سوم(۶۹)، نیاز به برخی ساده سازی ها داریم. بدین منظور ابتدا عبارت زیر را ساده می کنیم:

$$\Gamma'(Y + XB\Gamma^{-1})' = \Gamma'Y' + B'X' = (Y\Gamma + XB)'$$

حال Γ را در (۶۸) از ابتدای عبارت به آخر عبارت برده و در پرانتز دوم ضرب می کنیم که نتیجه آن عبارت است از:

$$(Y + XB\Gamma^{-1})\Gamma = (Y\Gamma + XB)'$$

با جایگذاری نتایج فوق در لگاریتم تابع درستنمایی، $1n\,L$ به صورت زیر ساده می شود:

$$1nL = -\frac{T}{2}1n(2\pi) + T\ln(\Gamma) - \frac{T}{2}1n\left|\sum\right| - \frac{1}{2}tr\left[\sum^{-1}(Y\Gamma + XB)\right] \tag{۷۱}$$

حال عبارت فوق را به صورت زیر می نویسیم:

$$1nL = -\frac{T}{2}\left[M1n(2\pi) - 2\ln\left|\Gamma\right| + tr(\sum^{-1}S) + 1n\left|\sum\right|\right] \tag{۷۲}$$

که در ان، S عبارتست از:

$$S = (Y\Gamma + XB)'(Y\Gamma + XB) \tag{۷۳}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{T}(Y\Gamma_i + XB_i)'(Y\Gamma_j + XB_j) \tag{۷۴}$$

S_{ij} مشابه $\hat{\delta}_{ij}$ در (۶۲) است. Γ_j و B_j به ترتیب ستون jام ماتریس های Γ و B هستند. برای حداکثر نمودن $1n\,L$ لازم است تمام محدودیت هایی را که بر روی ساختار سیستم معادلات وجود دارد در نظر بگیریم. بدین منظور عبارت $tr(\sum^{-1}S)$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} tr(\sum{}^{-1}S) &= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \sigma^{ij}(y_i - Y_i\gamma_i - X_i\beta_i)'(y_i - Y_j\gamma_j - X_j\beta_j) \\ &= \sum_i\sum_j \sigma^{ij}(y_i - Z_i\delta_i)'(y_j - Z_j\hat{\delta}_j)' \end{aligned} \tag{۷۵}$$

درمعادله فوق $Y=[Y_j \quad Y_j \quad Y_j^*]$ ، $X=[X_j \quad X_j^*]$ و $\Gamma_j=\begin{bmatrix}1\\-\gamma_j\\-\gamma_{j*}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-\gamma_j\\\circ\end{bmatrix}$ و $B_j=\begin{bmatrix}\beta_j\\\beta_j^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_j\\\circ\end{bmatrix}$ است که این روابط قبلاً معرفی شده اند. σ^{ij} عناصر ماتریس $\sum^{-1}$ را نشان می دهد. همچنین $Z_j=\begin{bmatrix}y_j & Y_j\end{bmatrix}$ و $\delta_j=\begin{bmatrix}\gamma_j\\\beta_j\end{bmatrix}$ است.

ملاحظه می شود که رابطه (۷۵) معادل با یک میانگین وزنی از خطاها برای کل مشاهدات و معادلات است. وزن ها برابر با δ^{ij} هستند که عناصر ماتریس $\sum^{-1}$ را تشکیل می دهند. با حداکثر نمودن تابع درستنمایی نسبت به δ، تخمین زننده $FIML$ به دست می آید. ثابت می شود که تخمین زننده حداکثر درستنمایی برای δ برابر با یک نقطه ثابت در معادله زیر است:

$$\hat{\delta}_{FIML}=\left[\hat{Z}(\hat{\delta})'(\hat{\sum}^{-1}\otimes I)Z\right]^{-1}\left[\hat{Z}(\hat{\delta})'(\hat{\sum}^{-1}\otimes I)y\right]=(\hat{\hat{Z}}'Z)^{-1}\hat{\hat{Z}}'y \tag{۷۶}$$

$$\hat{Z}(\hat{\delta})'(\sum^{-1}\otimes I)=\begin{bmatrix}\hat{\sigma}^{11}\hat{Z}_1 & \hat{\sigma}^{12}\hat{Z}_1 & \cdots & \hat{\sigma}^{1M}\hat{Z}_1\\ \hat{\sigma}^{12}\hat{Z}_2 & \hat{\sigma}^{22}\hat{Z}_2 & \cdots & \hat{\sigma}^{2M}\hat{Z}_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hat{\sigma}^{1M}\hat{Z}_M & \hat{\sigma}^{2}M\hat{Z}_M & \cdots & \hat{\sigma}^{MM}\hat{Z}'_M\end{bmatrix}=\hat{\hat{Z}}' \tag{۷۷}$$

$$\hat{Z}_j=\begin{bmatrix}X\hat{\Pi}_j & X_j\end{bmatrix}$$

که $\hat{\Pi}_j$ معادل با M_j ستون از ماتریس $-\hat{B}\hat{\Gamma}^{-1}$ است. همچنین $\hat{\sigma}_{ij}$ عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_{ij}=\frac{1}{T}(y_i-Z_i\hat{\delta}_i)'(y_i-Z_i\hat{\delta}_i) \tag{۷۸}$$

و δ^{ij} برابر با عنصر ijام ماتریس $\hat{\sum}^{-1}$ است.

ملاحظه می شود که تخمین زننده $FIML$ یک نوع تخمین زننده IV است. همچنین قبلاً نشان دادیم که تخمین زننده $3SLS$ نیز یک تخمین زننده IV است که از سازگاری برخوردار است. همچنین می توان نشان داد که تخمین زننده $3SLS$ به طور مجانبی کارا است و اگر جملات خطا دارای توزیع نرمال باشند تخمین زننده $3SLS$ توزیع مجانبی یکسانی با تخمین زننده $FIML$ خواهد داشت.

به طور کلی می توان ویژگی‌های زیر را برای این روش برشمرد:

- ۱- به طور مجانبی کاراست.
- ۲- ماتریس *var-cov* آن و $3sls$ به طور مجانبی یکسان است.
- ۳- تفاضل ماتریس *var-cov* مربوط به FIML از ماتریس *var-cov* مربوط به $3sls$ یک ماتریس نیمه معین مثبت (*semi positive*) است.
- ۴- $FIML$ نسبت به نرمال کردن معادلات بی تفاوت است.
- ۵- مهمترین ایراد این روش پیچیدگی در محاسبات است. زیرا معادلات به صورت غیرخطی برآورد می گردند.

در این حالت، فرمول صریحی برای $FIML$ نمی توان به دست آورد. $FIML$ در واقع روابط غیر خطی ایجاد می کند. یعنی سیستم معادلات غیرخطی ایجاد میکند که برای حل آن باید از روشهای عددی استفاده کرد.

در جدول ۱ خلاصه ای از خصوصیات سیستم معادلات هم زمان آمده است.

جدول ۱- خلاصه ای از سیستم معادلات همزمان

Single Equation Estimators	روش برآورد	خواص	وقتی استفاده می شود که...	نکات
OLS- Ordinary Least Squares	برآورد تکی	اوریب بوده و حتی برای نمونه های بزرگ، سازگار نیست ، و برای نمونه های بسیار کوچک، دارای حداقل باقی (کارآمد)واریانس اگر سیستم می ماند. OLSبازگشتی باشد،	به عنوان یک روش اکتشافی است و وقتی استفاده می شود که سیستم عطفی بوده و متغیر درونزای تاخیری نداشته باشد.	*If the weighting factor of the k-class estimator is* k=0, *k-class estimator is identical to OLS*

		*OLS*بدون تورش است. اگر متغیرهای درونزای تاخیری وجود نداشته باشد، به مشکلات برآورد کمتر حساس است.		
بسیاری از تخمین زنهای دیگر که برای معادلات بیش از حد مشخص به کار میروند، معادل تخمین زن *ILS* برای معادلات دقیقا مشخص اند.	فقط برای معادلات دقیقا مشخص انتخاب می‌شوند.	نااوریب است – فقط برای فرم ساختاری سازگار است (غیرکارا).	با برآورد فرم تقلیل یافته، پارامترهای فرم ساختاری محاسبه می گردد.	*ILS-Indirect Least Squares*
یافتن متغیر ابزار یمناسب مشکل جدی است. متغیرهای برونزا گزینه مناسبی برای آن هستند.	متغیر مستقل کاملا از جملات اخلال مستقل اند.	نا اوریب و سازگار	بایستی متغیر ابزاری مناسب انتخاب گردد. تغیرهای تاخیری و عرض از مبدا معمولا به عنوان متغیر ابزاری انتخاب میشوند).	*IV-Instrumental Variables*
2SLS نوعی از روش *IV* است. معروفترین تخمین زن است. این روش فقط برای معادلات بیش از حد مشخص به کار میرود. (k=1 →*2SLS*)	برای حالت بیش از حد مشخص مورد استفاده قرار میگیرد. زمانی مورد استفاده قرار می گیرد که مشکل هم خطی و تصریح در مدل داشته باشیم.	چون از متغیر ابزاری استفاده می کند، بنابراین نااوریب و سازگار است. در مقابل مشکل هم خطی و خطای تصریح مقاوم است.	هر متغیر دروززنا روی تمام متغیرهای برونزای مدل تخمین زده می شود. سپس مقادیر پیش بینی شده متغیر وابسته به عنوان *IV* انتخاب می شود و به عنوان یک متغیر برونزا به همراه متغیرهای برونزای مدل در یک تخمین *OLS* شرکت می کند.	*2SLS-Two Stage Least Squares*
در حالت دقیقا مشخص، روش *LIML* معادل روش *ILS* و *2sls* است. (در صورتی که جملات اخلال نرمال باشند).	برای معادلات بیش از حد مشخص کاربرد دارد. وقتی استفاده می-شود که توزیع جملات اخلال ناشناخته است.	*LIML*روشی سازگار است. ماتریس وار – کوار آن به طور مجانبی مشابه روش *2SLS* است. با استفاده از اطلاعات مشابه، این روش حداقل به صورت مجانبی همانند هر روش دیگر برای یک دامنه کوچک از اطلاعات، کاراست.	تخمین های فرم تقلیل یافته در روش *ILS* برای محاسبه پارامترهای فرم ساختاری مورد استفاده قرار می گیرد.	*LIML-Limited Information Maximum Likelihood*

System Estimators				
3SLS-Three Stage Least Squares	ابتدا معادله مشخص با استفاده از روش *2SLS* تخمین زده شده و جملات اخلال فرم ساختاری را استخراج می کنیم. از آن برای استخراج ماتریس وار – کوار همزمان مربوط به جملات اخلال فرم ساختاری استفاده می کنیم. سپی با استفاده از روش *GLS* به تخمین همه معادلات مشخص در سیستم می پردازیم.	*3SLS* معمولا سازگار و به صورت مجانبی کاراتر از روش *2SLS* است. اگر توزیع جملات اخلال در معادلات ساختاری مختلف غیر همبسته باشند، روش *3SLS* به *2SLS* تبدیل می گردد.	نبایستی در معادلات خطای تصریح وجود داشته باشد. یک همبستگی میان جملات اخلال در معادلات ساختاری مختلف وجود داشته باشد. برای معادلات بیش از حد مشخص مورد استفاده قرار می گیرد.	اگر توزیع جملات اخلال در معادلات ساختاری مختلف غیر همبسته باشند، روش *3SLS* و *2SLS* معادل می گردد. اما روش سه مرحله ای ترجیح دارد.
FIML-Full Information Maximum Likelihood	معادلات فرم تقلیل یافته ، با استفاده از روش حداکثر راستنمایی با توجه به همه محدودیت ها در همه معادلات فرم ساختاری مورد تخمین قرارا میگیرد.	*FIML* و *3SLS* حداقل به صورت مجانبی کارا هستند. اگر محدودیت های کواریانس وجود داشته باشد، *FIML* ترجیح بر *3SLS* دارد.	نبایستی در معادلات خطای تصریح وجود داشته باشد. یک همبستگی میان جملات اخلال در معادلات ساختاری مختلف وجود داشته باشد. برای معادلات بیش از حد مشخص مورد استفاده قرار می گیرد	*FIML* و *3SLS* در ماتریس وار– کوار مجانبی مشترک اند.

فصل سوم

نیکویی برازش و آزمون‌ها

۳-۱- معیار نیکویی برازش

معیار نیکویی برازش در روش $3sls$ آماره R^2_{CN} ($Carter$- $Negar$) است.

زیرا در سیستم معادلات هم زمان R^2 بین صفر تا منفی بی نهایت تغییر می کند. برای اینکه آنرا محدود کنیم از این آماره استفاده می‌کنیم.

$R^2_{CN} = (1 - (MSE/\delta 2i))$

* $\delta 2$: واریانس متغیر وابسته

همچنین:

برای معیار نیکویی برازش در روش $3sls$ ازآماره R^2_M ($Macelroy$, 1977) نیز می‌توان استفاده کرد. (این آماره در نرم افزار R گزارش می شود). مقدار این آماره به صورت زیر محاسبه می شود.

$$R_*^2 = 1 - \frac{\hat{u}^\top \widehat{\Omega}^{-1} \hat{u}}{y^\top \left(\widehat{\Sigma}^{-1} \otimes \left(I_T - \frac{\iota \iota^\top}{T} \right) \right) y},$$

where ι is a column vector of T ones (McElroy 1977).

۳-۲- آزمون‌های فرضیه و تصریح در سیستم معادلات هم زمان

۳-۲-۱- آزمون درونزایی ***Wu-Husman***

در این آزمون بحث این است که در معادله زیر آیا q واقعا متغیر درونزا است یا خیر؟

$P = \alpha + bq$

ابتدا معادله را با استفاده از روش روش OLS برآورد کرده و ضریب b تخمینی را $bols$ می نامیم.

سپس معادله را با استفاده از روش IV برآورد کرده و ضریب b تخمینی را $b*$ می‌نامیم.

سپس آماره‌ای تحت عنوان آماره WH یا F را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$WH = (b^* - bols)\, v(q)\text{-}1((b^* - bols)$

این آماره از توزیع کای دو پیروی می کند. اگر تفاوت معنا داری بین b^* و $bols$ وجود داشته باشد، به علت وجود درونزایی است. یعنی متغیر q درونزا است.

این آزمون تحت فروضی است:

۱- نباید متغیر حذف شده و نامربوط داشته باشیم.

۲- نباید خودهمبستگی و ناهمسانی واریانس داشته باشیم.

۳-۲-۲- آزمون درونزایی **Durbin-Wu-Husman**

این آزمون برای سنجش درونزایی متغیر استفاده می گردد. مراحل این آزمون به ترتیب زیر است:

مرحله اول: با استفاده از روش ols مقدار جملات اخلال را از برآورد معادله ابتدایی به دست می‌آوریم و $e-hat$ می‌نامیم.

مرحله دوم: هرکدام از xi ها را از روی بردار متغیرهای ابزاری ($vector\ of\ IV\ (zj\ )$) رگرس می کنیم و جملات اخلال هریک را استخراج می کنیم و با برداری به نام vj نشان می‌دهیم.

$$\left(\nu_j = x_j - \sum z_j \cdot \hat{\gamma}_j\right)$$

مرحله سوم: ei های مرحله اول را روی تمام متغیرهای برونزا و برونزای بالقوه و همچنین vj های مرحله دوم رگرس می کنیم و $R2$ آن را استخراج می کنیم.

$$e_i = \sum_{j=1}^{j=k} \beta_j \cdot x_{ji} + \sum_{j=k-ko+1}^{j=k} \alpha_j \cdot \hat{\nu}_{ji} + \eta_i$$

مرحله چهارم: با استفاده از آماره $LM = nR2$ که از توزیع کای دو با درجه آزادی $K\text{-}k0$ (تعداد متغیرهای برونزا منهای تعداد متغیرهای بالقوه برونزا) پیروی می کند، فرض صفر را آزمون می کنیم.

فرض صفر: رگرسور درونزا است.

۳-۲-۳- آزمون برای محدودیت های فرا تشخیصی

الف: آزمون ارتباط (*Relevance*) :

در این آزمون، برونزایی متغیر ابزاری را به صورت آماری مورد سنجش قرار می دهد. انتخاب متغیر ابزار بیه دانش تجربی نیاز دارد. اگرچه، اگر معادله ساختاری بیش از حد مشخص باشد، تعداد متغییرهای ابزاری l از تعداد متغیرهای سمت راست ($g1 + k1$) بیشتر است، بنابراین می توان این محدودیت های فراتشخیصی را آزمون کرد. آزمون نسبت درستنمایی (LR) برا اساس فرایند حداکثر درستنمایی برای آزمون این محدودیت های فراتشخیصی مورد استفاده قرار می گیرد.

در این آزمون فرض صفر و مقابل به صورت زیر تعریف می گردد:

$$H_o;\ y_1 = Z_1\delta_1 + u_1 \quad \text{versus} \quad H_1;\ y_1 = Z_1\delta_1 + W^{*}\gamma + u_1$$

W^*، زیر مجموعه ای از ماتریس متغیرهای ابزاری با ابعاد $l-g1-k1$ است.

در این آزمون از قانون سرانگشتی استوک و واتسن (*Stock and Watson,s rule of thumb*) و از آماره F مجانبی استفاده می شود. در واقع فرض صفر این آزمون، برابر با صفر بودن همه ضرایب متغیرهای ابزاری می باشد. مقدار آماره F با استفاد هاز فرمول زیر محاسبه می گردد:

$$\frac{(RRSS^{*} - URSS^{*})/\ell - (g_1 + k_1)}{URSS/(T - \ell)}$$

توزیع F مجانبی به صورت $F(l-g1-k1\ ,\ T-l)$ است.

ابتدا $Z1$ را روی W رگرس کرده و $\hat{Z}_1$ را محاسبه می کنیم. سپس $y1$ را روی $\hat{Z}_1$ با روش $2sls$ رگرس کرده و $\tilde{\delta}_{1,2SLS}$ را محاسبه می کنیم. جملات اخلال در این رگرسیون $2sls$ را با $RRSS^*$ نشان می‌دهیم. مقدار آن برابر است با: $(y_1 - \hat{Z}_1\tilde{\delta}_{1,2SLS})'(y_1 - \hat{Z}_1\tilde{\delta}_{1,2SLS})$

سپس $y1$ را روی $\hat{Z}_1$ و W^* رگرس کرده تخمین بدون محدودیت با روش $2sls$ از $\hat{\delta}_{1,2SLS}$ و $\hat{\gamma}_{2SLS}$ داشته باشیم. مجموع مربعات خطای حالت بدون محدودیت را با به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$URSS^{*} = (y_1 - \hat{Z}_1\hat{\delta}_{1,2SLS} - W^{*}\hat{\gamma}_{2SLS})'(y_1 - \hat{Z}_1\hat{\delta}_{1,2SLS} - W^{*}\hat{\gamma}_{2SLS})$$

برای تامین شرط ارتباط، مقدار آماره F بایستی بیشتر از ۱۰ باشد، یا مقدار آماره T باید بیشتر از ۳.۲ باشد و یا مقدار $p\text{-}value$ باید کمتر از ۰.۰۰۱۶ باشد.

ب- آزمون برونزایی سارگان (*Sargan exogenity test*) یا آزمون اعتبار (*Validity*):

از جمله رایج‌ترین آزمون‌های مربوط به محدودیتها در معادلات بیش از حد مشخص ، آزمون سارگان است که به آزمون *Hansen test* یا *J-Test* هم مشهور است. این آزمون برای سنجش برونزایی در متغیر ابزاری مورد استفاده قرار می گیرد. فرض صفر در این آزمون به صور زیر تعریف می شود:

Exogenity : corr (Zi , ui) ≠ 0

مراحل انجام این آزمون به صورت زیر است:

مرحله اول: با استفاده از روش *IV* مقدار جملات اخلال را به دست می آوریم و *e – hat* می‌نامیم.

مرحله دوم: *e- hat* محاسبه شده در مرحله اول را روی تمام متغیرهای ابزاری مدل با *ols* رگرس می کنیم و مقدار R^2 را استخراج می کنیم.

مرحله سوم: با استفاده از آماره $LM = nR^2$ که از توزیع کای دو با درجه آزادی *m-k* تبعیت می کند آزمون را انجام می‌دهیم. (n تعداد مشاهدات است).

استفاده از متغیر ابزاری دارای اشکالات بالقوه ای نیز می باشد. از جمله اینکه:

به طور کلی اگر ابزارها با جزء خطا در معادله هدف همبستگی داشته باشند در این صورت تخمین‌های آنها ناسازگار خواهد بود.

مشکل دیگر مربوط به ابزارهای ضعیف (*Weak Insrtument*) است که پیشبینی خوبی ارائه نمی‌دهند. در این صورت مقادیر پیش بینی شده تا حد کمی متفاوت هستند. در نتیجه وقتی آنها را در معادله دوم جایگزین می کنیم احتمال کمی وجود دارد که بتوان نتیجه نهایی را با موفقیت پیش بینی کنیم.

۳-۲-۴- آزمون برونزایی اسپنسر- برک (**Spencer and Berk Test**):

این آزمون برای تشخیص برونزایی متغیرها در سیستم معادلات هم زمان مورد استفاده قرار می گیرد. آماره این آزمون آماره والد است که از توزیع کای دو تبعیت می کند. در این آزمون ابتدا متغیر ابزاری را روی متغیر وابسته y رگرس کرده و ضریب متغیر ابزاری مورد تخمین را β_{IV} می نامیم. سپس با روش *2sls* و با استفاده از *y- hat* های تخمینی در مرحله اول، تخمینی دوباره انجام داده و ضریب تخمینی را β_{2sls} می‌نامیم. سپس با استفاده از فرمول زیر آماره والد را محاسبه می کنیم.

$$w = (\beta_{IV} - \beta_{2sls})^T \left[\mathrm{cov}(\beta_{IV}) - \mathrm{cov}(\beta_{2sls})\right]^{-1} ((\beta_{IV} - \beta_{2sls}) \approx \chi_j^2$$

J : تعداد معادلات

T : تعداد مشاهدات در هر معادله

فروض این آزمون به صورت زیر است:

Ho: X exogenous*
Ha: X not exogenous*

۳-۲-۵- آزمون تورش تصریح هاسمن (***Husman misspecification***) :

فروض این آزمون به صورت زیر است:

فرض صفر در این آزمون : متغیرهای ابزاری در هر معادله، با توزیع جملات اخلال سایر معادلات ناهمبسته اند. تحت این فرض هر دو روش *2sls* و *3sls* سازگارند ولی روش *3sls* کاراتر است($\mathrm{E}\left[u_i^{\top} Z_j\right]=0 \forall i \neq j$).

فرض مقابل در این آزمون : متغیرهای ابزاری در هر معادله، با توزیع جملات اخلال همان معادلات ناهمبسته- اند.($\mathrm{E}\left[u_i^{\top} Z_i\right]=0 \forall i$). تحت این فرض روش *2sls* سازگار است ولی روش *3sls* ناسازگار است.

آماره این آزمون با استفاده از فرمول زیر محاسبه می گردد:

$$m=\left(\hat{\beta}_{2SLS}-\hat{\beta}_{3SLS}\right)^{\top}\left(\widehat{\mathrm{COV}}\left[\hat{\beta}_{2SLS}\right]-\widehat{\mathrm{COV}}\left[\hat{\beta}_{3SLS}\right]\right)\left(\hat{\beta}_{2SLS}-\hat{\beta}_{3SLS}\right),$$

این آزمون داری توزیع کای دو با درجه آزادی برابر با تعداد ضرایب تخمینی است.

۳-۲-۶- آزمون محدودیت های خطی:

الف: آزمون F:

برای آزمون محدودیت های خطی در سیستم معادلات همزمان می توان از آزمون F (آزمون چند محدودیت باهم)، آزمون والد و آزمون LR (برای آزمون محدودیت های یگانه) استفاده کرد:

آماره آزمون F به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\hat{F} = \frac{(R\hat{\beta} - q)^\top (R(X^\top (\widehat{\Sigma} \otimes I)^{-1} X)^{-1} R^\top)^{-1} (R\hat{\beta} - q)/j}{\hat{u}^\top (\widehat{\Sigma} \otimes I)^{-1} \hat{u}/(G \cdot T - K)}$$

J: تعداد محدودیت های خطی

K: تعداد کل ضرایب تخمینی

T: تعداد مشاهدات در هر معادله

R و q نشاندهنده ماتریس و بردار هستند.

ب: آزمون والد و *LR* برای سنجش محدودیت خطی:

این آزمون ها از توزیع کای دو با درجه آزادی j تبعیت می کنند.

$$W = (R\hat{\beta} - q)^\top (R\,\widehat{\mathrm{COV}}[\hat{\beta}]\,R^\top)^{-1} (R\hat{\beta} - q).$$

$$LR = T \cdot \left(\log\left|\widehat{\Sigma}_r\right| - \log\left|\widehat{\Sigma}_u\right|\right),$$

سیگما هت‌ها نشاندهنده ماتریس کواریانس در مدل مقید و نامقید هستند.

T: تعداد متغیرها در هر معادله

۳-۲-۷- بررسی هم خطی مرکب در معادلات همزمان (*Assessing Multicollinearity*)

چند روش برای سنجش هم خطی مرکب وجود دارد:

- الف- عوامل تورم واریانس *Variance Inflation Factors (VIFs)*
- ب- ماتریس همبستگی پیرسون *Pearson Correlation Matrices*
- ج- شاخص وضعیت *Condition indexes*
- د- تجزیه واریانس ضرایب *associated regression coefficient variance decomposition*

- **<u>الف) عوامل تورم واریانس *Variance Inflation Factors (VIFs)*</u>**

مقدار *VIF* از طریق رابطه زیر به دست می آید: $VIF = 1/(1 - R^2_i)$

R^2_i ، مربع ضریب همبستگی مرکب است اگر هر متغیر توضیحی را بر سایر متغیرهای توضیحی رگرس کنیم.

نکته: اگر مقدار این آماره بیشتر از ۱۰ باشد، هم خطی مرکب وجود دارد.

- مثال:

Parameter Estimates

Variable	Label	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|	Variance Inflation
Intercept	Intercept	1	-36.71600	2.39942	-15.30	<.0001	0
waist_girth	waist#girth	1	0.59868	0.03952	15.15	<.0001	4.57075
chest_girth	chest#girth	1	0.07716	0.07169	1.08	0.2823	12.47291
bicep_girth	bicep#girth	1	0.66512	0.12170	5.47	<.0001	6.44810
shoulder_girth	shoulder#girth	1	0.29432	0.05568	5.29	<.0001	8.05461

- **ب) ماتریس همبستگی پیرسون (*Pearson Correlation Matrixes*)**

اگر هر متغیر توضیحی را بر متغیر توضیحی دیگر رگرس کنیم R^2 هایی به دست می آید که ماتریس همبستگی، ریشه R^2های محاسبه شده است.

نکته: اگر مقدار همبستگی ها بیشتر از ۰.۸ باشد، هم خطی وجود دارد.

- مثال:

Pearson Correlation Coefficients, N = 507
Prob > |r| under H0: Rho=0

	ankle_diam	waist_girth	forearm_girth	height
ankle_diam ankle#diam	1.00000	0.63697 <.0001	0.73525 <.0001	0.68645 <.0001
waist_girth waist#girth	0.63697 <.0001	1.00000	0.78079 <.0001	0.55296 <.0001
forearm_girth forearm#girth	0.73525 <.0001	0.78079 <.0001	1.00000	0.65502 <.0001
height height	0.68645 <.0001	0.55296 <.0001	0.65502 <.0001	1.00000

- **ج) شاخص وضعیت (*Condition indexes*)**

مقدار شاخص وضعیت از رابطه مقابل قابل محاسبه است.

$$\acute{\cap} = \sqrt{\lambda_{max}} / \sqrt{\lambda_i}$$

λ ها مقادیر ویژه ای هستند که از دترمینان ماتریس $|Z'Z|$ به دست می‌آیند. که:

$$\mathbf{Z} = [\hat{\mathbf{Y}}_1 \ \mathbf{X}_1]$$

نکته: اگر مقدار شاخص بین ۱۵ تا ۳۰ باشد، هم خطی جدی وجود دارد.

- **د- تجزیه واریانس ضرایب** (*associated regression coefficient variance decomposition*)

اساس این روش، ماتریس *VAR_COV* است. مقدار ماتریس *VAR_COV* از رابطه زیر به دست می آید:

$$var(b_i) = s^2 \sum_{j=1}^{n} (v_{ij}/\lambda_j)$$

where s^2 is the estimated variance of the residuals, n is the number of columns in $\mathbf{Z}$, and $v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{in}$ are the elements of the ith row of $\mathbf{V}$. Given

که s^2 واریانس جزء اخلال تخمینی و n، تعداد ستون در ماتریس Z است. همچنین v_{ij} عناصر سطر V هستند.

نکته: اگر مقادیر عناصر این ماتریس بیشتراز ۰.۵ باشد، هم خطی جدی وجود دارد.

۳-۲-۸- آزمون های فرضیه در سیستم معادلات همزمان

۱- آزمون T[۱] مجانبی

۲- آزمون F مجانبی[۲]

۳- آزمون $WALD$[۳]

۴- آزمون LM[۴]

- [1] - *Asymptotic t-test*
- [2] –*Approximate F-test*
- [3] –*Wald test*
- [4] –*Lagrange multiplier test*

توجه داشته باشید که به دلیل اینکه برآوردگرهای *IV*، *2SLS*، *3SLS* و *I3SLS* (*3SLS* تکراری) تخمین حداکثر راستنما تولید نمی‌کند، آزمون نسبت درستنمایی (*LR*) نمی تواند برای آزمون فرضیه مورد استفاده قرار گیرد .

۳-۲-۸-۴- آزمون F و T مجانبی

عبارت مجانبی (*Asympatic*) اشاره به بزرگ بودن اندازه دامنه (*Larg sample size*) دارد. تنها فرقی که این آزمون با شکل معمولی آن (دامنه با اندازه کوچک – *Small Sample*) دارد، در این است که مقدار پارامترها و مقدار انحراف معیار در ایندو ، متفاوت و مربوط به همان اندازه دامنه است.

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s.e.(\hat{\beta}_i)} \sim t(T-K) \qquad\qquad F = \frac{(RSS_r - RSS_u)/J}{RSS_u/(T-K)} \sim F(J, T-K)$$

۳-۲-۸-۵- آزمون والد

آزمون والد می تواند برای هر محدودیت خطی و غیرخطی به کار گرفته شود. آماره آن به صورت زیر به دست می آید.:

$$W = (\mathbf{R}(\hat{\beta}) - \mathbf{r})^T [\mathbf{G} \bullet \widehat{Cov}(\hat{\beta}) \bullet \mathbf{G}^T]^{-1} (\mathbf{R}(\hat{\beta}) - \mathbf{r}) \sim \chi^2(J)$$

R(β)، مجموعه محدودیت های خطی و غیر خطی است که به صورت ماتریس نوشته می شود و تابع بتا خوانده می شود و با *r* نمایش داده می شود.

J، تعداد محدودیت های خطی است.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \partial R_1/\partial\beta_1, \partial R_1/\partial\beta_2, & \ldots, \partial R_1/\partial\beta_k \\ \partial R_2/\partial\beta_1, \partial R_2/\partial\beta_2, & \ldots, \partial R_2/\partial\beta_k \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \partial R_J/\partial\beta_1, \partial R_J/\partial\beta_2, \ldots & , \partial R_J/\partial\beta_k \end{bmatrix}_{J\times K}$$

۳-۲-۸-۶- آزمون LM

آزمون ضریب لاگرانژ برای تست هر نوع محدودیت یا محدودیت در هر نوع مدل می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. برای انجام آزمون ضریب لاگرانژ باید مدل محدودشده را برآورد و پس از آن با استفاده از روش OLS یک رگرسیون کمکی را برآورد می کنیم. آماره آزمون به صورت زیر است:

$$LM = TR^2 \sim \chi^2(J)$$

که در آن T اندازه نمونه و R^2، آمار R^2 تعدیل نشده از رگرسیون کمکی است.

J، تعداد محدودیت های خطی است.