سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

۱. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ... و ۶ را در یک ردیف نوشت به طوری که از بین هر دو عدد مجاور یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) ۱۰

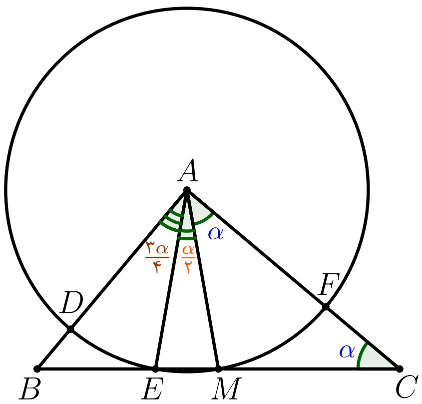
پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

تنها عددی که می‌تواند مجاور ۵ باشد ۱ است پس ۵ باید راست‌ترین یا چپ‌ترین عدد ردیف باشد. بنابر تقارن فرض می‌کنیم ۵ راست‌ترین باشد و در انتها تعداد حالات را دو برابر می‌کنیم، پس دو عدد راست ردیف $۱,۵$ هستند. از آن‌جا که عدد ۳ تنها می‌تواند مجاور ۱ و ۶ باشد برای مکان آن دو حالت وجود دارد. حالت اول این است که مجاور یک باشد در این‌صورت به راحتی بدست می‌آید که اعداد ردیف باید به شکل $۴,۲,۶,۳,۱,۵$ باشند. حالت دوم این است که چپ‌ترین عدد ردیف باشد و در این حالت نیز به سادگی نتیجه می‌شود اعداد ردیف باید به شکل $۳,۶,۲,۴,۱,۵$ باشند. پس جواب نهایی برابر می‌شود با $۲ \times ۲ = ۴$. ■

۲. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با فرض $\angle BAC = ۹۰^\circ$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز A طوری رسم می‌کنیم که ضلع AB را در D، ضلع AC را در F و ضلع BC را در دو نقطهٔ E و M قطع کند که نقطهٔ E بین نقاط D و M است. می‌دانیم M وسط ضلع BC است و هم‌چنین نسبت طول کمان‌های $\widehat{DE}$ به $\widehat{EM}$ به $\widehat{MF}$ برابر با نسبت ۳ به ۲ به ۴ است. مقدار قدر مطلق تفاضل دو زاویهٔ حادهٔ مثلث ABC چقدر است؟

۱) ۷۰° ۲) ۵۰° ۳) ۴۵° ۴) ۳۰° ۵) ۱۰°

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.



از آن‌جا که در مثلث قائم‌الزاویه میانه نصف وتر است بدست می‌آید $AM = MC$ پس $\angle MAC = \alpha$. هم‌چنین طبق شرط سوال می‌توان نوشت

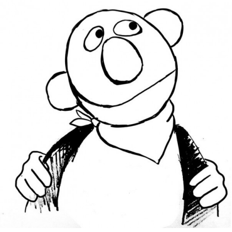
$$\angle EAM = \frac{۱}{۲}\angle MAF = \frac{۱}{۲}\alpha, \quad \angle DAE = \frac{۳}{۴}\angle MAF = \frac{۳}{۴}\alpha$$

در نتیجه

$$۹۰^\circ = \angle MAF + \angle MAE + \angle EAD = \frac{۳}{۴}\alpha + \frac{۱}{۲}\alpha + \alpha = \frac{۹}{۴}\alpha \Longrightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$

پس $\angle B = ۵۰^\circ$ و جواب مسئله ۱۰° می‌شود. ■

۳. جناب‌خان می‌خواهد برای گاوصندوق خود رمز انتخاب کند و هر هفته رمز آن را تغییر دهد! رمز گاوصندوق یک عدد سه‌رقمی است و جناب‌خان مایل است ارقام رمز متمایز باشند و به‌علاوه ارقام رمز جدید، از ارقام متناظر در رمز قبلی کمتر نباشد. مثلاً اگر یک بار ۲۵۹ را انتخاب کرد رمز بعدی نباید ۱۵۹ باشد. اگر اولین رمز گاوصندوق ۱۴۰ باشد، او حداکثر بعد از چند هفته دیگر نمی‌تواند به این شکل رمز گاوصندوقش را تغییر دهد؟ (توجه کنید که هفتهٔ اول، رمز همان ۱۴۰ خواهد بود.)



۱) ۲۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.

از آن‌جا که رقم‌های رمز باید متفاوت باشند بزرگ‌ترین عددی که برای رمز می‌تواند استفاده شود از ارقام ۷، ۸ و ۹ تشکیل شده است. دقت کنید که پس از هر هفته مجموع ارقام رمز حداقل یک واحد اضافه می‌شود پس جناب‌خان حداکثر

$$۹ + ۸ + ۷ - (۱ + ۴ + ۰) = ۱۹$$

هفتهٔ دیگر می‌تواند رمز انتخاب کند که با احتساب هفتهٔ اول می‌شود ۲۰ هفته. حالا مثالی برای ۲۰ هفته ارائه می‌دهیم:

$$۱۴۰,\ ۱۵۰, \ldots,\ ۱۹۰,\ ۲۹۰, \ldots,\ ۸۹۰,\ ۸۹۱, \ldots,\ ۸۹۷.$$

■

۴. تابع $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ مفروض است. برای هر $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ با شرط $(m, n) = ۱$:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n + ۱}$$

که منظور از (m, n) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک m و n است. کدام‌یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ تابع f درست است؟

۱) تابع f یک‌به‌یک است.
۲) تابع f یک‌نوا (صعودی یا نزولی) است.
۳) برد تابع f همه اعداد گویا است.
۴) به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$ داریم $f(x) \leq x$
۵) همهٔ گزینه‌ها صحیح هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.

واضح است که برای هر n طبیعی، $(n, n+۱) = ۱$. در تساوی داده شده قرار می‌دهیم $m = n + ۱$ که نتیجه می‌دهد $f\left(\frac{n+۱}{n}\right) = ۱$ پس تابع یک‌به‌یک نیست و گزینهٔ اول رد می‌شود. اگر جفت‌های $(۲, ۱)$، $(۵, ۳)$ و $(۱, ۱)$ را به جای (m, n) قرار دهیم، می‌توان نوشت $۱ < \frac{۵}{۳} < ۲$ اما $f(۱) > f\left(\frac{۵}{۳}\right) < f(۲)$ در نتیجه تابع یک‌نوا هم نیست و گزینهٔ دوم نیز رد می‌شود. برای رد کردن گزینهٔ چهارم کافی‌ست به این توجه کنیم که $f(-۱) = \frac{-۱}{۲} < -۱$. حالا درستی گزینهٔ سوم را اثبات می‌کنیم. عدد گویای دلخواه $\frac{a}{b}$ را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم فرض کنیم $b \in \mathbb{N}$. واضح است که ۱ و ۱− در برد f هستند پس فرض می‌کنیم حداقل یکی از دو عدد $|a|$ و b از یک بیشتر هستند. نشان می‌دهیم $(a^۳, a^۲b - ۱) = ۱$. فرض کنید p عامل اول مشترکی از دو عدد باشد. می‌توان نوشت

$$p \mid a^۳ \Longrightarrow p \mid a \Longrightarrow p \mid a^۲b \Longrightarrow p \mid ۱$$

که تناقض است. پس می‌توانیم قرار دهیم $m = a^۳$ و $n = a^۲b - ۱$ (دقت کنید طبق فرض‌هایی که برای a و b وضع کرده‌ایم n عددی طبیعی است) و نتیجه می‌شود $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b}$ پس f پوشا است. ■

۵. چند عدد سه رقمی $\overline{abc}$ وجود دارد که مربع کامل باشد و اگر یک واحد به رقم صدگان، دو واحد به رقم دهگان و سه واحد به رقم یکان آن اضافه شود، حاصل سه رقمی و مربع کامل باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

قرار می‌دهیم $\overline{abc} = x^۲$ هم‌چنین عدد حاصل را نیز $y^۲$ تعریف می‌کنیم که x, y اعدادی طبیعی هستند. می‌توان نوشت

$$x^۲ + ۱۲۳ = y^۲ \Longrightarrow ۱۲۳ = y^۲ - x^۲ = (y - x)(y + x)$$

می‌دانیم $۱۲۳ = ۳ \times ۴۱$ پس دو حالت وجود دارد: حالت اول $y + x = ۱۲۳$ و $y - x = ۱$ که واضح است در این حالت $y^۲$ سه رقمی نمی‌شود. حالت دوم $y + x = ۴۱$ و $y - x = ۳$ که جواب $\overline{abc} = ۳۶۱$ را به‌دست می‌دهد پس مسئله تنها یک جواب دارد. ■

۶. با استفاده از همهٔ ارقام ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی با ارقام متمایز ساخته‌ایم و بزرگ‌ترین آن‌ها را A نامیده‌ایم. کم‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

۱) ۳۴۵ ۲) ۱۹۸ ۳) ۹۱۲ ۴) ۳۹۸ ۵) ۳۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

کم‌ترین مقدار ممکن برای صدگان A، ۳ است زیرا ارقام متمایزند و صدگان دو عدد دیگر حداقل ۱ و ۲ است. هم‌چنین اگر صدگان A برابر با ۳ باشد ارقام ۱ و ۲ برای صدگان دو عدد دیگر استفاده شده‌اند در نتیجه حداقل A می‌تواند ۳۴۵ باشد، که اگر سه عدد ۱۶۷، ۲۸۹ و ۳۴۵ باشند این اتفاق رخ می‌دهد. ■

۷. برای $A, B \subseteq \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $A \otimes B = \{ab \mid a \in A, B \in B\}$. چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟ ($\mathbb{Q}'$ نماد مجموعهٔ اعداد گنگ است.)

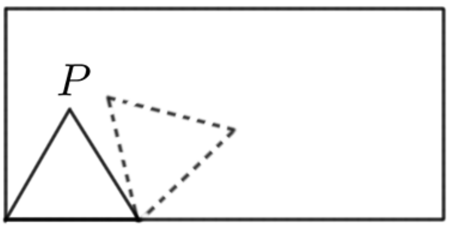
- $\mathbb{Q}' \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\{\sqrt{۲}, ۵\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$
- $\{\sqrt{۲}, \sqrt{۳}\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$

۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک ۵) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

واضح است که گزارهٔ ۳ صحیح نیست زیرا صفر در مجموعهٔ سمت چپ وجود دارد اما عددی گنگ نیست. حالا درستی سه گزارهٔ دیگر را نشان می‌دهیم. ابتدا درستی گزارهٔ ۴ را نشان می‌دهیم و به راحتی از آن درستی گزارهٔ ۱ نیز نتیجه می‌شود (زیرا $\{\sqrt{۲}, \sqrt{۳}\} \subset \mathbb{Q}'$) فرض کنید q عددی گویا و ناصفر باشد. می‌توان به سادگی نشان داد که $\frac{q}{\sqrt{۲}}$ عددی گنگ است پس همهٔ اعداد گویای ناصفر تولید می‌شوند. حالا فرض کنید q' عددی گنگ باشد. اگر هر دو عدد $\frac{q'}{\sqrt{۲}}$ و $\frac{q'}{\sqrt{۳}}$ گویا باشند نسبت آن‌ها نیز گویا است اما به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ گویا نیست پس حداقل یکی از آن‌ها گنگ است و در نتیجه همهٔ اعداد گنگ نیز تولید می‌شوند. به طور مشابه می‌توان درستی گزارهٔ ۲ را نیز نشان داد. ■

۸. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد درون و روی محیط یک مستطیل ۴×۲، مانند شکل، می‌غلطد. رأس P، که در شکل مشخص شده، از ابتدای حرکت تا زمانی که برای اولین بار به مکان اولیه‌اش بازگردد، چه مسافتی را طی می‌کند؟



۱) $\frac{۱۰\pi}{۳}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۵) ۲π

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

اگر P راس چرخش نباشد، در طول اضلاع به اندازهٔ کمان ۱۲۰° و در گوشهٔ مستطیل به اندازهٔ کمان ۳۰° از یک دایره به شعاع ۱ حرکت می‌کند. پس مجموع کمان‌هایی که P حرکت می‌کند برابر می‌شود با

$$۱۲۰^\circ + ۰^\circ + ۱۲۰^\circ + ۳۰^\circ + ۰^\circ + ۳۰^\circ + ۱۲۰^\circ + ۰^\circ + ۱۲۰^\circ + ۳۰^\circ + ۰^\circ + ۳۰^\circ = ۶۰۰^\circ$$

پس مجموع حرکت P برابر می‌شود با

$$\frac{۶۰۰}{۳۶۰} \times ۲\pi = \frac{۱۰\pi}{۳}$$

■

۹. چند سه‌تایی مرتب (x, y, z) وجود دارد که x, y, z ارقام ناصفر و متمایزی باشند و $x \times y$ بر z بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱۴۰　　۲) ۱۴۴　　۳) ۱۴۸　　۴) ۱۵۲　　۵) ۱۵۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

روی مقادیر مختلف z حالت‌بندی می‌کنیم. واضح است که برای $z = ۵, ۷$ هیچ جفتی نمی‌توانیم انتخاب کنیم. اگر $z = ۱$ باشد طبق اصل ضرب برای دو عدد دیگر $۵۶ = ۷ \times ۸$ حالت وجود دارد. اگر $z = ۲$، از آن‌جا که ۵ رقم فرد داریم $۲۰ = ۴ \times ۵$ حالت وجود دارد که $x \times y$ فرد شود پس طبق اصل متمم $۳۶ = ۲۰ - ۵۶$ حالت وجود دارد. اگر $z = ۳$، مشابه حالت قبل نتیجه می‌شود که $۲۶ = ۳۰ - ۵۶$ حالت وجود دارد. اگر $z = ۴$، در صورتی که هیچ‌کدام از x, y برابر با ۸ نباشند تنها دو حالت $(۲, ۶), (۶, ۲)$ وجود دارد و اگر یکی از آن‌ها ۸ باشد ۷×۲ حالت وجود دارد و در مجموع تعداد حالات $۱۶ = ۲ + ۱۴$ می‌شود. اگر $z = ۶$، یکی از x, y باید مضربی از ۲ باشد و دیگری مضربی از ۳ پس $۱۲ = ۲ \times ۳ \times ۲$ حالت وجود دارد. برای $z = ۸$ و $z = ۹$ نیز واضح است که به ترتیب ۴ و ۲ حالت وجود دارد. نهایتا تعداد حالات کل برابر است با

$$۵۶ + ۳۶ + ۲۶ + ۱۶ + ۱۲ + ۴ + ۲ = ۱۵۲.$$

■

۱۰. اعداد ۱، ۲، ... و ۱۳۹۵ روی تخته نوشته شده و ما به این شکل آن‌ها را خط می‌زنیم: هر بار بزرگ‌ترین عددی که تا قبل از آن خط نخورده را انتخاب و همهٔ مقسوم علیه‌های آن را به‌ترتیب از بزرگ به کوچک خط می‌زنیم و سپس مجدداً به سراغ بزرگترین عدد خط‌نخورده می‌رویم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا همهٔ اعداد خط بخورند. آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

۱) ۳۷　　۲) ۴۱　　۳) ۶۹۸　　۴) ۷۰۱　　۵) ۷۰۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.

دقت کنید که هر عدد کوچک‌تر از ۶۹۸ مضربی از ۶۹۸ تا ۱۳۹۵ دارد زیرا اگر $x < ۶۹۸$ آن‌گاه عدد طبیعی n وجود دارد که $۶۹۸ \leq ۲^n x \leq ۱۳۹۵$ (زیرا $۱۳۹۶ = ۶۹۸ \times ۲$) پس زمانی که همهٔ اعداد بزرگ‌تر از ۶۹۸ خط بخورند تنها امکان دارد ۶۹۸ و مقسوم علیه‌های آن باقی‌مانده باشند. واضح است که ۶۹۸ خط

نخورده است هم‌چنین به راحتی می‌توان بررسی کرد که سه مقسوم علیه دیگر آن مضرب دیگری بزرگتر از ۶۹۸ دارند و قبلا خط خورده‌اند پس آخرین عددی که خط می‌خورد ۶۹۸ است. ■

۱۱. عمل $*$ را در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x * y = \frac{x+y}{۱ - xy}$$

اگر a, b, c ریشه‌های $x^۳ - ۳x^۲ - ۲x + ۵$ باشند، مقدار $a * (b * c)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) -۸ ۴) $\frac{۸}{۳}$ ۵) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

می‌توان نوشت

$$a * (b * c) = a * \frac{b+c}{۱ - bc} = \frac{a + \frac{b+c}{۱-bc}}{۱ - \frac{a(b+c)}{۱-bc}} = \frac{a+b+c-abc}{۱ - (ab+bc+ca)}$$

از طرف دیگر نیز داریم

$$x^۳ - ۳x^۲ - ۲x + ۵ = (x-a)(x-b)(x-c) = x^۳ - (a+b+c)x^۲ + (ab+bc+ca)x - abc$$

پس $a + b + c = ۳$، $ab + bc + ca = -۲$ و $abc = -۵$ و با قرار دادن این روابط در تساوی اول پاسخ بدست می‌آید که برابر با $\frac{۸}{۳}$ است. ■

۱۲. تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a, b, c) از اعداد طبیعی را بیابید که در شرط زیر صدق کنند:

$$a(b, c) = b(c, a) = c(a, b) = ۲^۶ \times ۳^۸ \times ۵^{۱۰}$$

(منظور از (a, b) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b است.)

۱) ۳۲۴۰ ۲) ۲۰۸۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۱۶۲۰ ۵) ۷۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

دقت کنید که عوامل اول a, b, c تنها می‌توانند ۲, ۳, ۵ باشند. فرض کنید توان ۲ در a, b, c به ترتیب α, β, γ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. می‌توان نوشت

$$\beta + \min\{\alpha, \gamma\} = \gamma + \min\{\alpha, \beta\} \Longrightarrow \beta + \alpha = \gamma + \alpha \Longrightarrow \beta = \gamma$$

از طرف دیگر نیز داریم $\alpha + \beta = ۶$. این معادله جواب‌های

$$(\alpha, \beta) = (۰, ۶), (۱, ۵), (۲, ۴), (۳, ۳)$$

را دارد (از آن‌جا که $\alpha \leq \beta$). برای هر کدام از سه جواب اول ۳ حالت برای توان‌های ۲ در a, b, c وجود دارد زیرا α می‌تواند توان دوی هر یک از سه عدد باشد و توان دوی ۲ عدد دیگر به طور یکتا مشخص می‌شود اما در جواب چهارم تنها ۱ حالت وجود دارد. پس مجموعا ۱۰ حالت متفاوت برای توان‌های ۲ وجود دارد. به طور مشابه می‌توانیم ببینیم که برای توان‌های ۳ و ۵ به ترتیب ۱۳ و ۱۶ حالت وجود دارد و طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر با $۲۰۸۰ = ۱۶ \times ۱۳ \times ۱۰$ می‌شود. ■

۱۳. می‌خواهیم با چیدن ۱۲ آجر مکعبی به ضلع واحد، بر روی میز، مکعب مستطیلی به طول ۳ عرض ۲ و ارتفاع ۲ واحد، بسازیم. طبیعتاً یک مکعب بالایی را نمی‌توان قبل از مکعب زیری، سر جایش گذاشت. به چند روش متفاوت می‌توان این مکعب مستطیل را ساخت؟ (توجه داشته باشید که مکعب‌ها از نظر ما تفاوتی ندارند و مسأله ترتیب پر کردن ۱۲ محل مکعب مستطیل است.)

۱) ۳۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۳۲۴ ۴) ۹۲۴ ۵) ۷۴۸۴۴۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

جایگاه‌های ردیف پایین را با ۱ تا ۶ شماره‌گذاری می‌کنیم و برای $۱ \leq i \leq ۶$ جایگاه بالای شماره i را با $i + ۶$. مسئله به این تبدیل می‌شود که چند حالت برای قرار دادن اعداد ۱ تا ۱۲ پشت سر هم وجود دارد به‌طوری که برای هر $۱ \leq i \leq ۶$، i قبل از $i + ۶$ آمده باشد. طبق تقارن به ازای هر شرط نصف حالات کل حذف می‌شود پس تعداد حالات برابر است با

$$\frac{۱۲!}{۲^۶} = ۷۴۸۴۴۰۰.$$

■

۱۴. a, b, c اعدادی دوبه‌دو متمایزند. می‌دانیم سه معادلهٔ درجه دوی زیر ریشه‌ای مشترک دارند.

$$ax^۲ + bx + c = ۰, \quad bx^۲ + cx + a = ۰, \quad cx^۲ + ax + b = ۰$$

مقدار آن ریشهٔ مشترک چند است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱ ۵) به‌طور یک‌تا تعیین نمی‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

با جمع کردن سه معادله با هم بدست می‌آید

$$(a + b + c)(x^۲ + x + ۱) = ۰$$

از آن‌جا که پرانتز دوم ریشه حقیقی ندارد نتیجه می‌شود $a + b + c = ۰$. حالا می‌توان نوشت

$$۰ = ax^۲ + bx - a - b = a(x - ۱)(x + ۱) + b(x - ۱) = (x - ۱)(ax + a + b)$$

پس $x = 1$ یا $x = -\frac{a+b}{a}$. به طور مشابه از معادله دوم نیز بدست می‌آید $x = 1$ یا $x = -\frac{a+b}{b}$ و از آن‌جا که a, b متمایزند تنها حالت ممکن $x = 1$ است. ■

۱۵. ۱۰۰۰ عدد سیب داریم که ۹۰۰ عدد آن‌ها سالم و مابقی لکه‌دار هستند. آن‌ها را در تعدادی جعبه پخش می‌کنیم به‌طوری که تعداد سیب‌ها در هر جعبه با جعبهٔ دیگر برابر باشد. در حداقل و حداکثر چند درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است؟

۱) ۵۰ و ۹۰   ۲) ۵۰ و ۱۰۰   ۳) ۸۰ و ۹۰   ۴) ۸۰ و ۱۰۰   ۵) ۹۰ و ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

اگر فقط ۱ جعبه داشته باشیم واضح است که در ۱۰۰ درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است. هر جعبه‌ای که حداقل نصف سیب‌هایش لکه‌دار هستند را خراب می‌نامیم. فرض می‌کنیم هر جعبه دارای n سیب باشد، آن‌گاه برای خراب کردن هر جعبه حداقل $\frac{n}{2}$ سیب لکه‌دار نیاز است در نتیجه حداکثر $\frac{100}{\frac{n}{2}}$ جعبه خراب داریم. از طرف دیگر تعداد جعبه‌ها $\frac{1000}{n}$ است پس حداکثر

$$\frac{\frac{100}{\frac{n}{2}}}{\frac{1000}{n}} = 20\%.$$

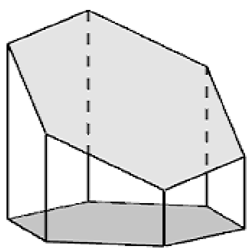
جعبه‌ها خراب است و حداقل در ٪۸۰ جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است. ■

۱۶. چند زوج مرتب (m, n) از اعداد طبیعی داریم که $[1, 2, \dots, m] = 1395 \times [1, 2, \dots, n]$.
(منظور از نماد $[1, 2, \dots, m]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک مثبت اعداد $1, 2, \dots, m$ است.)

۱) صفر   ۲) یک   ۳) دو   ۴) سه   ۵) چهار

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

تعریف می‌کنیم $M = [1, 2, \dots, m]$, $N = [1, 2, \dots, n]$. دقت کنید که N برابر با حاصل ضرب بزرگ‌ترین توان‌ها از عوامل اول اعداد کوچک‌تر یا مساوی n است. از آن‌جا که $9 \mid 1395$ باید داشته باشیم $m > 3n$. پس بزرگ‌ترین توان عامل ۲ در M بیش‌تر از بزرگ‌ترین توان عامل ۲ در N است که تناقض است. پس مسئله جوابی ندارد. ■



۱۷. یک منشور قائم با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم به ضلع واحد را توسط یک صفحه برش زده‌ایم. اگر فاصلهٔ رئوس این سطح مقطع تا قاعدهٔ پایین به ترتیب برابر ۲، ۳، x، y، ۱۱ و z باشد، $x + y + z$ چقدر است؟

۱) ۱۶   ۲) ۱۸   ۳) ۲۰   ۴) ۲۴   ۵) ۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

لم. در ذوزنقه قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ که $\angle DAB = \angle ABC = ۹۰^\circ$ می‌توان نوشت

$$CD^۲ = (AD - BC)^۲ + AB^۲.$$

اثبات. به عهدهٔ خواننده!

دقت کنید که در ۶ ضلعی که توسط صفحه ایجاد می‌شود هر دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی هستند. پس اگر ذوزنقه‌های قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو به هم را در نظر بگیریم طبق لم اختلاف قاعده‌های آن‌ها برابر است. از همین نکته می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$y - ۱۱ = ۳ - ۲ \Longrightarrow y = ۱۲$$

و از طرف دیگر

$$z - ۱۱ = ۳ - x \Longrightarrow x + z = ۱۴ \Longrightarrow x + y + z = ۲۶.$$

■

۱۸. در شهر ساده‌لوحان شایعه‌ها به‌سرعت پخش می‌شود؛ اگر آقای خالی‌بند، بخواهد شایعه‌ای را پخش کند ابتدا آن شایعه را به یک نفر دیگر منتقل می‌کند. در ادامه هر روز آقای خالی‌بند و هر کسی که شایعه را در یکی از روزهای گذشته شنیده آن را به فرد جدیدی منتقل می‌کند. پس از آنکه تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند از مرز یک میلیون نفر گذشت، چند نفر شایعه را مستقیماً یا با یک واسطه از آقای خالی‌بند شنیده‌اند؟

۱) ۲۰   ۲) ۲۱۰   ۳) ۱۰۲۴   ۴) ۵۰۰۰۰۰   ۵) ۵۲۴۲۸۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

واضح است که بعد از هر روز تعداد افرادی که شایعه را می‌دانند دو برابر می‌شود پس بعد از ۲۰ روز این تعداد از مرز یک میلیون نفر می‌گذرد. حالا نفر i–امی که آقای خالی‌بند شایعه را به او گفته است در طی این ۲۰ روز به $i - ۱$ نفر دیگر گفته است در نتیجه جواب برابر است با

$$۲۰ + ۱۹ + \cdots + ۱ = ۲۱۰.$$

■

۱۹. چند زوج مرتب از اعداد حقیقی (x, y) وجود دارد که در دستگاه معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} x^۲ - ۳xy + ۲y^۲ + x - y = ۰ \\ ۲x^۲ - ۲xy - ۳y^۲ - ۲x + ۵y = ۰ \end{cases}$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ ۵) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

تساوی اول را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$۰ = (x-y)^۲ + (x-y) - y(x-y) = (x - ۲y + ۱))(x-y)$$

پس دو حالت وجود دارد: حالت اول $x = y$ که با گذاردن آن در تساوی دوم به‌دست می‌آید

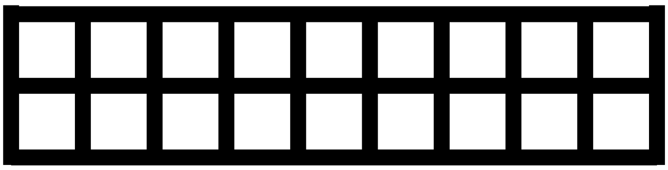
$$۰ = ۲x^۲ - ۲x^۲ - ۳x^۲ - ۲x + ۵x = -۳x^۲ + ۳x \Longrightarrow x = ۰, ۱$$

پس به دو جواب $x = y = ۱$ و $x = y = ۰$ می‌رسیم. حالت دوم $x = ۲y - ۱$ که باز هم با گذاردن آن در تساوی دوم به‌دست می‌آید

$$۰ = ۲(۲y-۱)^۲ - ۲(۲y-۱)y - ۳y^۲ - ۲(۲y-۱) + ۵y = y^۲ - ۵y + ۴ \Longrightarrow y = ۱,\ y = ۴$$

پس به دو جواب $x = y = ۱$ و $x = ۷, y = ۴$ می‌رسیم. در نتیجه در مجموع دو حالت سه جواب وجود دارد. ■

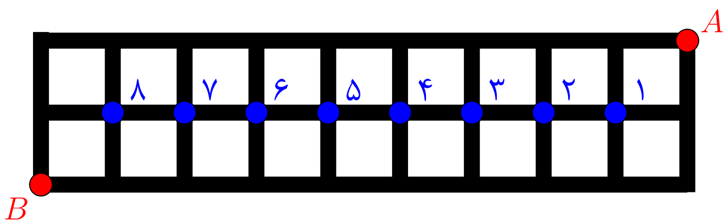
۲۰. خیابان‌کشی محله‌ای به شکل روبه‌رو است: سه خیابان افقی و ده خیابان عمودی. پلیسی می‌خواهد به همهٔ تقاطع‌ها سرکشی کند به‌طوری که از تقاطع راست-بالا شروع کند، از هر تقاطع دقیقاً یک بار عبور کند و در انتها به تقاطع راست-بالا برگردد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟



۱) $۲^۵$ ۲) $۳^۵$ ۳) ۲×۳^۴ ۴) $۲^۴$ ۵) $۳^۶ - ۳^۵$

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

چند تقاطع را مانند شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

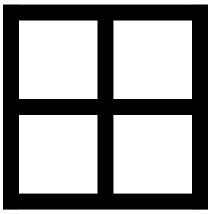


یک مسیر رفت از نقطه A به B داریم و یک مسیر برگشت از نقطه B به A. برای شروع حرکت دو انتخاب داریم و پس از آن با کمی بررسی متوجه می‌شویم هیچ سه تقاطع میانی نمی‌توانند به‌طور متوالی طی شوند

هم‌چنین جفت تقاطع‌های $(۱,۲)$، $(۳,۴)$، $(۵,۶)$ و $(۷,۸)$ باید به‌طور متوالی طی شوند و اگر مشخص کنیم هر کدام از این جفت تقاطع‌ها در مسیر رفت یا برگشت طی می‌شوند مسیر به‌طور یکتا مشخص می‌شود. در نتیجه تعداد کل حالات برابر می‌شود با

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۵.$$

■



۲۱. خیابان‌های محله‌ای به نام پهران مانند شکل روبه‌رو شامل ۹ تقاطع و ۱۲ خیابان است. (مسیر بین هر دو تقاطع یک خیابان است.) هر شب در این محله ۹۰ خودرو پارک می‌شود که همگی داخل خیابان‌ها و نه در تقاطع‌ها قرار دارند. در هر تقاطع میانگین تعداد خودروهای موجود در خیابان‌های متصل به آن تقاطع را ظرفیت پارک آن تقاطع می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع ظرفیت پارک ۹ تقاطع، برابر ۶۶ است. کدام یک از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟

۱) ظرفیت پارک تقاطع مرکزی محله، بیشتر از تقاطع‌های دیگر است.
۲) در هر یک از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۶ خودرو پارک شده است.
۳) در یکی از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۸ خودرو پارک شده است.
۴) در یکی از خیابان‌های متصل به مرکز محله، دستکم ۹ خودرو پارک شده است.
۵) گزینه‌های ۱ و ۴.

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

مجموع خودروهای مرکزی محله را x و مجموع خودروهای حاشیه‌ای را y می‌نامیم. اگر مجموع ظرفیت همه تقاطع‌ها را حساب کنیم، طبق تقارن در این مجموع ضریب تعداد خودروهای هر خیابان مرکزی مرحله برابر با $\frac{۷}{۱۲} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳}$ و ضریب تعداد خودروهای هر خیابان حاشیه‌ای برابر با $\frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}$ می‌شود در نتیجه $\frac{۷}{۱۲}x + \frac{۵}{۶}y = ۶۶$ و از طرف دیگر $x + y = ۹۰$. با حل معادله به‌دست می‌آید $x = ۳۶,\ y = ۵۴$ و این همهٔ چیزی است که ما راجع به تعداد خودروهای پارک شده می‌دانیم. در مرکز محله ۴ خیابان وجود دارد پس طبق اصل لانه کبوتری خیابانی وجود دارد که حداقل $۹ = \lceil \frac{۳۶}{۴} \rceil$ خودرو در آن پارک شده باشد پس گزینه ۴ صحیح است. اما ممکن است در هر کدام از این ۴ خیابان دقیقا ۹ خودرو پارک شده باشد پس گزینه ۳ صحیح نیست. گزینه ۲ نیز صحیح نیست زیرا ما فقط می‌دانیم مجموع خودروهای پارک شده در حاشیه محله ۵۴ است و ممکن است در یکی از خیابان‌های آن هیچ خودرویی وجود نداشته باشد. در نهایت گزینه ۱ نیز رد می‌شود زیرا ممکن است در هر یک از دو خیابان متصل به تقاطع بالا چپ ۲۷ خودرو پارک شده باشند پس ظرفیت آن تقاطع ۲۷ می‌شود اما ظرفیت تقاطع مرکزی محله هم‌واره ۹ است. ■

۲۲. در مسابقهٔ قوی‌ترین مردان ایران ۱۰ خانه دور یک دایره قرار دارد که در هر خانه ۲۰۰ وزنه از همهٔ وزنه‌های ۱، ۲، ... و ۲۰۰ کیلوگرمی وجود دارد. ابتدا مردی در خانه‌ای قرار دارد، با شروع مسابقه از آن خانه وزنهٔ ۱ کیلوگرمی را برداشته و در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده ۱ خانه به جلو می‌رود، وزنه را در آنجا قرار داده و از آن خانه وزنهٔ ۲ کیلوگرمی را برداشته و ۲ خانه به عقب (پادساعت‌گرد) آمده و وزنه را در آن قرار می‌دهد، سپس از آنجا وزنهٔ ۳ کیلوگرمی را برداشته ۳ خانه در جهت ساعت‌گرد می‌رود و همین روند ادامه می‌یابد. پس از آنکه وزنهٔ ۲۰۰ کیلوگرمی را جابه‌جا کرد در خانه‌ای که کار خود را از آنجا شروع کرده بود مجموعاً چند کیلوگرم وزنه وجود دارد؟

۱) ۲۰۲۸۰   ۲) ۲۰۲۰۰   ۳) ۲۰۱۸۰   ۴) ۲۰۱۰۰   ۵) ۲۰۰۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

خانه ابتدایی را با صفر نشان می‌دهیم و خانه‌های دیگر را در جهت عقربه‌های ساعت به‌ترتیب با ۱ تا ۹ شماره‌گذاری می‌کنیم. با استفاده از استقرا می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت برای هر $1 \leq i \leq 100$ وزنه $2i$ از خانه i به خانه $-i$ می‌رود و وزنه $2i-1$ از خانه $i-1$ به خانه i می‌رود (شماره خانه‌ها را به پیمانه ۱۰ در نظر می‌گیریم). پس وزنه $2i$ در خانه صفر بوده است اگر و تنها اگر $10 \mid i$ و از آن‌جا که $10 \mid -i$ به خانه صفر نیز برمی‌گردد. برای وزنه‌های فرد نیز می‌توان استدلال مشابهی را انجام داد و نتیجه گرفت اگر $10 \mid i-1$ وزنه $2i-1$ از خانه صفر خارج شده است و اگر $10 \mid i$ به خانه صفر وارد شده است. مجموع وزنه‌هایی که در ابتدای کار در هر خانه وجود دارد برابر است با

$$1+2+\cdots+200=20100.$$

حالا اختلاف وزنه‌هایی که از خانه صفر خارج یا وارد شده‌اند را محاسبه می‌کنیم:

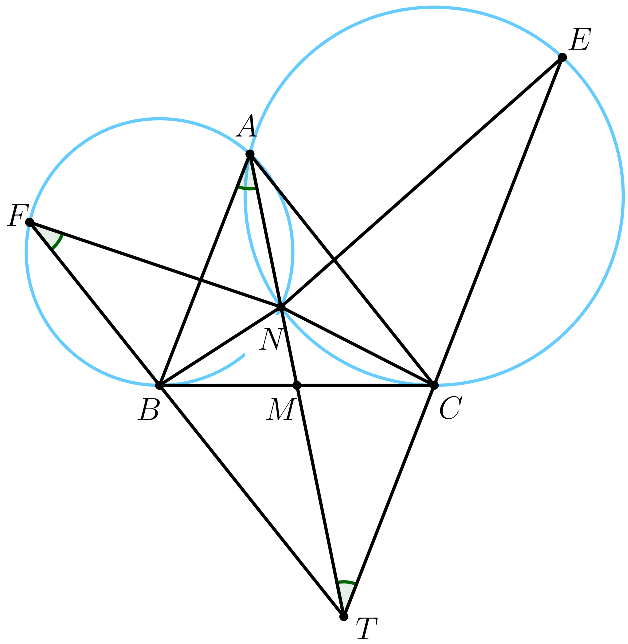
$$\sum_{i=1}^{10}\left(2\times(10i)-1\right)-\sum_{i=0}^{9}\left(2\times(10i+1)-1\right)=199-1+\sum_{i=1}^{9}-2=180$$

پس پاسخ برابر است با ۲۰۲۸۰. ■

۲۳. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید ω_b و ω_c به‌ترتیب دو دایرهٔ گذرنده از A باشند به‌طوری که به‌ترتیب در B و C بر BC مماس باشند و N و A محل برخورد دو دایرهٔ مذکور باشند. از هر کدام از نقاط B و C خطی موازی با ضلع روبه‌رویش رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو خط را T نام‌گذاری می‌کنیم. گیریم خطوط TC و TB به‌ترتیب دایره‌های محیطی مثلث‌های ANC و ANB را برای بار دوم در E و F قطع کنند. اگر $BC=8$ و $AN=6$، حاصل $NF \times NE$ کدام است؟

۱) ۶۴   ۲) ۸۱   ۳) ۱۰۰   ۴) ۱۵۰   ۵) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.



محل برخورد AN و BC را M می‌نامیم. طبق قوت M نسبت به دو دایره می‌توان نوشت

$$MB^۲ = MN \cdot MA = MC^۲ \Longrightarrow MB = MC$$

پس M وسط BC است هم‌چنین $ACTB$ متوازی‌الاضلاع است پس AT هم از M می‌گذرد و چهار نقطه A, N, M, T روی یک خط قرار دارند. حالا می‌توان نوشت

$$\angle BFN = \angle BAN = \angle BAT = \angle CTN$$

به طور مشابه می‌توان به‌دست آورد $\angle NET = \angle NTF$ در نتیجه

$$T\overset{\triangle}{N}F \sim T\overset{\triangle}{E}N \Longrightarrow \frac{NE}{NT} = \frac{NT}{NF} \Longrightarrow NE \times NF = NT^۲$$

پس کافی‌ست طول NT را محاسبه کنیم. باز هم طبق قوت M داریم

$$۱۶ = MB^۲ = MN \cdot MA = MN(MN + ۶) \Longrightarrow (MN - ۲)(MN + ۸) = ۰ \Longrightarrow MN = ۲$$

در نهایت به‌دست می‌آید

$$TN = TM + ۲ = AM + ۲ = AN + ۴ = ۱۰ \Longrightarrow NE \times NF = NT^۲ = ۱۰۰.$$

■

۲۴. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم $\angle ABC = ۶۰^\circ$. E را نقطه‌ای روی AB بگیرید که $BE = ۲AE$، به‌علاوه F را هم قرینهٔ E نسبت به مرکز متوازی‌الاضلاع فرض کنید. اگر BF و CE بر هم عمود باشند، نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر متوازی‌الاضلاع به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۰/۲   ۲) ۰/۳   ۳) ۰/۴   ۴) ۰/۵   ۵) ۰/۶

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

لم. در مثلث ABC اگر وسط BC را M بنامیم داریم

$$AM^{۲} = \frac{۱}{۴}\left(۲AB^{۲} + ۲AC^{۲} - BC^{۲}\right).$$

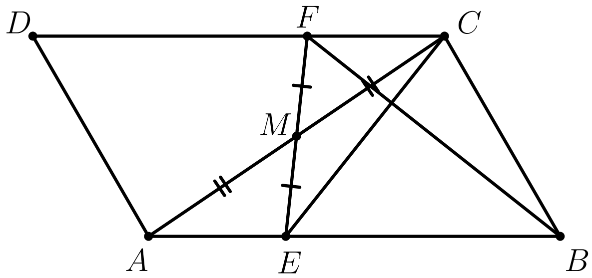
اثبات. قرینه A نسبت به M را A' می‌نامیم. واضح است که $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است. طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} - ۲AB \cdot AC\cos\angle A \Longrightarrow ۲AB \cdot AC\cos\angle A = AB^{۲} + AC^{۲} - BC^{۲} \quad (۱)$$

باز هم از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABA' به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} A'A^{۲} &= AB^{۲} + A'B^{۲} - ۲AB \cdot A'B\cos\left(۱۸۰^\circ - \angle A\right) \\ &\overset{(۱)}{=} AB^{۲} + AC^{۲} + \left(AB^{۲} + AC^{۲} - BC^{۲}\right) = ۲AB^{۲} + ۲AC^{۲} - BC^{۲} \end{aligned}$$

و نهایتا از آن‌جا که $A'A = ۲AM$ حکم لم نتیجه می‌شود. □



حالا به مسئله اصلی باز می‌گردیم. قرار می‌دهیم $a = AB, b = BC$ و مرکز متوازی‌الاضلاع را M می‌نامیم. طبق فرض سوال $BF \perp CE$ و با استفاده از قضیه فیثاغورس به‌سادگی نتیجه می‌شود

$$EF^{۲} - FC^{۲} = BE^{۲} - BC^{۲} \Longrightarrow ۴EM^{۲} - \frac{۱}{۹}a^{۲} = \frac{۴}{۹}a^{۲} - b^{۲} \quad (۲)$$

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث‌هاس EBC و ABC و لم در مثلث AEC می‌توان نوشت

$$EC^{۲} = BE^{۲} + BC^{۲} - ۲BC \cdot BE\cos ۶۰^\circ = \frac{۴}{۹}a^{۲} + b^{۲} - \frac{۲}{۳}ab \quad (۳)$$

$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} - ۲BC \cdot AB\cos ۶۰^\circ = a^{۲} + b^{۲} - ab \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} \overset{(۳),(۴)}{\Longrightarrow} ۴EM^{۲} &= ۲AE^{۲} + ۲EC^{۲} - AC^{۲} = \frac{۲}{۹}a^{۲} + \frac{۸}{۹}a^{۲} + ۲b^{۲} - \frac{۴}{۳}ab - a^{۲} - b^{۲} + ab \\ &= \frac{۱}{۹}a^{۲} + b^{۲} - \frac{۱}{۳}ab \end{aligned}$$

$$\overset{(۲)}{\Longrightarrow} b^{۲} - \frac{۱}{۳}ab = \frac{۴}{۹}a^{۲} - b^{۲} \Longrightarrow ۱۸\left(\frac{b}{a}\right)^{۲} - ۳\left(\frac{b}{a}\right) - ۴ = ۰$$

با حل معادله آخر نتیجه می‌شود که $\frac{b}{a} = ۰/۵۶۲۰۵\ldots$. ■

۲۵. بزرگ‌ترین عدد حقیقی و ثابت k را بیابید به‌طوری که برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, d, e:

$$(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-d)^۲ + (d-e)^۲ + (e-a)^۲ \geq k(b-d)^۲$$

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۲ ۵) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

در تمام راه‌حل از این نکته استفاده می‌کنیم که یک چندجمله‌ای درجه دو همواره نامنفی است اگر و تنها اگر دلتای آن نامثبت باشد. در هر مرحله عبارت را به صورت یک عبارت درجه دو بر حسب یکی از متغیرها می‌نویسیم و از نکته گفته شده استفاده می‌کنیم. همه عبارات را به طرف بزرگتر تساوی می‌بریم و بر حسب c می‌نویسیم:

$$۲c^۲ - ۲c(b+d) + \big(۲a^۲ + (۲-k)b^۲ + (۲-k)d^۲ + ۲e^۲ - ۲ab - ۲de = ۲ea + ۲kbd\big) \geq ۰$$

حالا بر حسب c به عبارت بالا نگاه می‌کنیم و دلتا را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\iff ۰ \geq \frac{\Delta_c}{۴} = -۴a^۲ - (۳-۲k)b^۲ - (۳-۲k)d^۲ - ۴e^۲ + ۴ab + ۴de + ۴ea - (۴k-۲)bd \\
&\iff ۴a^۲ - ۴a(b+e) + \big((۳-۲k)b^۲ + (۳-۲k)d^۲ + ۴e^۲ - ۴de + (۴k-۲)bd\big) \geq ۰ \\
&\iff ۰ \geq \frac{\Delta_a}{۱۶} = -۳e^۲ - (۲-۲k)b^۲ - (۳-۲k)d^۲ + ۴de - (۴k-۲)bd + ۲be \\
&\iff ۳e^۲ - ۲e(b+۲d) + \big((۲-۲k)b^۲ + (۳-۲k)d^۲ - (۴k-۲)bd\big) \geq ۰ \\
&\iff ۰ \geq \frac{\Delta_e}{۴} = -(۵-۶k)b^۲ - (۵-۶k)d^۲ + (۱۰-۱۲k)bd = -(۵-۶k)(b-d)^۲ \\
&\iff k \leq \frac{۵}{۶}
\end{aligned}$$

■

۲۶. برای زیرمجموعهٔ ناتهی A از نقاط صفحه و عدد حقیقی $r > ۰$، مجموعهٔ نقاطی که از دست‌کم یک نقطهٔ A فاصله‌ای کم‌تر یا مساوی r دارند را با A_r نشان می‌دهیم. چند تا از گزاره‌های زیر درست هستند؟ (در همهٔ موارد r و s اعداد حقیقی مثبت و A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحه هستند.)

- $(A_r)_s = (A_s)_r$.
- $A \subset B_r$ اگر و تنها اگر $B \subset A_r$.
- اگر برای هر $t > ۰$، $A_t \subset B_t$ آن‌گاه $A \subset B$.
- $(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$.

• اگر $A \cap B$ ناتهی باشد داریم $(A \cap B)_r = A_r \cap B_r$.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار ۵) پنج

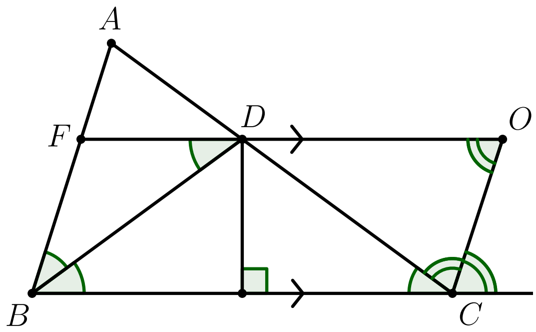
پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

ابتدا برای گزاره‌های ۲، ۳ و ۵ مثال نقض ارائه می‌دهیم سپس گزاره‌های ۱ و ۴ را اثبات می‌کنیم. فرض کنید مجموعه A از یک نقطه a و مجموعه B از دو نقطه b, c تشکیل شده باشد که فاصله a, b برابر با r و فاصله a, c بیش‌تر از r باشد. واضح است که $A \subset B_r$ اما $c \notin A_r$ پس گزاره ۲ درست نیست. برای رد کردن گزاره ۳ فرض کنید مجموعه A از یک نقطه a و مجموعه B از تمام نقاط صفحه به جز a تشکیل شده باشد. واضح است که شرط برقرار است اما $A \not\subset B$. در نهایت برای رد کردن گزاره ۵، فرض کنید مجموعه A از دو نقطه a, b و مجموعه B از دو نقطه a, c تشکیل شده باشد که فاصله a تا دو نقطه b, c بیش‌تر از r باشد و فاصله b, c برابر با r باشد. واضح است که $A \cap B = \{a\}$ پس $b \notin (A \cap B)_r$ اما $b \in A_r \cap B_r$.
حالا به سراغ اثبات گزاره ۴ می‌رویم. فرض کنید x عضوی از طرف چپ تساوی باشد. پس فاصله آن با یکی از اعضای $A \cup B$ مانند y کوچک‌تر یا مساوی r است. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $y \in A$. در نتیجه $x \in A_r$ پس $(A \cup B)_r \subseteq A_r \cup B_r$. به‌طور کاملا مشابه می‌توان اثبات کرد $A_r \cup B_r \subseteq (A \cup B)_r$ پس دو مجموعه با هم برابرند. برای اثبات گزاره ۱، با استفاده از گزاره ۴ فقط کافی‌ست تساوی را برای مجموعه A با یک عضو مانند a اثبات کنیم. نشان می‌دهیم $(A_r)_s$ دایره‌ای توپر به مرکز a و شعاع $r + s$ است. طبق نامساوی مثلث همه نقاط مجموعه فاصله کوچک‌تر یا مساوی $r + s$ از a دارند. هم‌چنین فرض کنید نقطه‌ای مانند b داشته باشیم که فاصله‌اش از a کوچک‌تر یا مساوی $r + s$ باشد. اگر این فاصله کوچک‌تر یا مساوی r باشد واضح است که $b \in A_r$ و حکم نتیجه می‌شود. در غیر این‌صورت یک نقطه مانند c روی ab وجود دارد که فاصله a و c برابر با r باشد در نتیجه فاصله b و c کوچک‌تر یا مساوی s است پس $b \in (A_r)_s$ و نهایتا حکم طبق تقارن نتیجه می‌شود. ■

۲۷. در مثلث ABC داریم $\angle B = ۲\angle C$. عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ D با ضلع AC برخورد می‌کند و عمودمنصف BD در نقطهٔ F با ضلع AB تقاطع دارد. دایره‌ای که مرکز آن روی خط FD است را خارج از مثلث در نظر می‌گیریم که بر ضلع AC و امتداد ضلع BC مماس شود. اگر مساحت مثلث ABC نه برابر مساحت مثلث AFD باشد و $FO = ۴$، شعاع دایره چه‌قدر می‌شود؟

۱) $۳ - \sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۳ - \sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$ ۵) $۲\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.



قرار می‌دهیم $a = BC, b = AC$. طبق فرض سوال $\angle DBC = \angle C$. می‌توان نوشت

$$\angle FDB = \angle FBD = \angle B - \angle DBC = ۲\angle C - \angle DBC = \angle DBC$$

پس $FD \parallel BC$. از قضیه تالس به‌دست می‌آید

$$\frac{FD}{a} = \frac{AD}{b} = \sqrt{\frac{S_{ADF}}{S_{ACB}}} = \frac{۱}{۳} \Longrightarrow CD = \frac{۲}{۳}b,\ FD = \frac{۱}{۳}a \qquad (۱)$$

واضح است که

$$F\overset{\triangle}{D}B \sim D\overset{\triangle}{C}B \Longrightarrow \frac{BD}{a} = \frac{FD}{CD} \overset{(۱)}{\Longrightarrow} \frac{۴}{۹}b^۲ = \frac{۱}{۳}a^۲$$

در نتیجه $b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$. از طرف دیگر دقت کنید که O روی نیم‌ساز خارجی راس C است پس

$$\angle DCO = ۱۸۰^\circ - \angle OCB = \angle DOC \Longrightarrow DO = DC$$
$$\Longrightarrow ۴ = FO = FD + DO = \frac{۱}{۳}a + DC = \frac{۱}{۳}a + \frac{۲}{۳}b = \frac{\sqrt{۳}+۱}{۳}a$$
$$\Longrightarrow a = ۶\left(\sqrt{۳}-۱\right),\ b = ۳\left(۳-\sqrt{۳}\right)$$

در نهایت واضح است که شعاع دایره همان فاصله O از BC است و از آن‌جا که $FO \parallel BC$ این فاصله همان فاصله D از BC است. طبق قضیه فیثاغورس این فاصله برابر است با

$$\sqrt{CD^۲ - \frac{۱}{۴}a^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۹}b^۲ - \frac{۱}{۴}a^۲} = \sqrt{۳\left(\sqrt{۳}-۱\right)^۲} = ۳ - \sqrt{۳}.$$

■

۲۸. فرض کنید x, y, z اعداد حقیقی مثبت باشند به گونه‌ای که $x+y+z = ۲۲۲$ و $xy+yz+zx = ۱۲۳۲۱$. اگر $A = \min\{xy, yz, zx\}$ آن‌گاه بیش‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

۱) ۵۴۷۶   ۲) ۴۱۰۷   ۳) ۲۴۱۲   ۴) ۱۶۰۲   ۵) ۱۳۶۹

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

فرض می‌کنیم $z = \max\{x, y, z\}$ پس $A = xy$. طبق مقادیر داده شده می‌توانیم به‌دست آوریم

$$(x+y+z)^{۲} = ۴(xy+yz+zx) \Longrightarrow z^{۲} - ۲z(x+y) + (x-y)^{۲} = ۰$$
$$\Longrightarrow z = x+y \pm \sqrt{(x+y)^{۲}-(x-y)^{۲}} = x+y \pm ۲\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x} \pm \sqrt{y}\right)^{۲}$$

از آن‌جا که z از x, y بیشتر است باید داشته باشیم

$$z = x+y+۲\sqrt{xy} \Longrightarrow ۲۲۲ = x+y+z = ۲(x+y+\sqrt{xy}) \Longrightarrow x+y+\sqrt{xy} = ۱۱۱$$

طبق نامساوی حسابی-هندسی می‌توانیم بنویسیم

$$۱۱۱ = x+y+\sqrt{xy} \geq ۲\sqrt{xy} + \sqrt{xy} = ۳\sqrt{xy} \Longrightarrow xy \leq ۱۳۶۹.$$

حالت تساوی نیز زمانی رخ می‌دهد که $x = y = ۳۷$ و $z = ۱۴۸$. ■

۲۹. زیرمجموعه‌ای از $\{۰, ۱, ۲, \ldots, ۹۹\}$ مثل A را «تقریباً جمعی» می‌گوییم، هر گاه بیش از یک عضو داشته باشد و به‌علاوه برای هر دو عضو متمایز a و b از A، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a+b+۱$ بر ۱۰۰ نیز عضوی از A باشد. چند زیرمجموعهٔ تقریباً جمعی وجود دارد؟

۱) ۴۹ ۲) ۹۹ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۵ ۵) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم x بر ۱۰۰ را با $x \pmod{۱۰۰}$ نشان می‌دهیم. ابتدا ثابت می‌کنیم هر زیرمجموعهٔ تقریبا جمعی شامل ۹۹ است. فرض کنید $a_{\max}$ و $a_{\min}$ به‌ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو یک زیرمجموعهٔ تقریبا جمعی باشند. اگر $a_{\max} \neq ۹۹$ آن‌گاه

$$a_{\max} + a_{\min} + ۱ \pmod{۱۰۰}$$

یا بیش‌تر از $a_{\max}$ است یا کم‌تر از $a_{\min}$ که تناقض است پس $a_{\max} = ۹۹$. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که تنها زیرمجموعهٔ‌های تقریبا جمعی دو عضوی یا سه عضوی مجموعه‌های زیر هستند:

$$\{x, ۹۹\}\ \forall ۰ \leq x \leq ۹۸, \quad \{x, ۹۸-x, ۹۹\}\ \forall ۰ \leq x \leq ۴۸$$

حالا فرض می‌کنیم زیرمجموعهٔ تقریبا جمعی $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_k, ۹۹\}$ را داشته باشیم که $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_k < ۹۹$ و $k \geq ۳$. به‌سادگی به‌دست می‌آید برای هر $۲ \leq i \leq k-۱$

$$a_i + a_۱ + ۱ = a_{i+۱}, \quad a_k + a_۱ + ۱ = ۹۹.$$

با جمع زدن دو طرف همهٔ این روابط به‌دست می‌آید

$$a_۲ + (k-۱)a_۱ + (k-۱) = ۹۹. \qquad (۱)$$

از طرف دیگر واضح است که $۹۹ < a_۲ + a_k + ۱ < ۱۰۰ + a_۲$ پس تنها حالت ممکن این است که

$$a_۲ + a_k + ۱ = ۱۰۰ + a_۱$$

و با کم کردن دو طرف این تساوی از تساوی $a_k + a_۱ + ۱ = ۹۹$ به‌دست می‌آید

$$a_۱ - a_۲ = -a_۱ - ۱ \overset{(۱)}{\Longrightarrow} (k+۱)a_۱ = ۹۹ - k \Longrightarrow k+۱ \mid ۱۰۰ \ , \ a_۱ = \frac{۱۰۰}{k+۱} - ۱$$

پس تعداد اعضای مجموعه باید عاملی از ۱۰۰ باشد و در این‌صورت نیز مجموعه به‌طور یکتا مشخص می‌شود. می‌توان بررسی کرد که همهٔ مجموعه‌های به‌دست آمده تقریبا جمعی هستند و از آن‌جا که ۱۰۰، هفت عامل بزرگ‌تر از ۳ دارد، پاسخ برابر است با

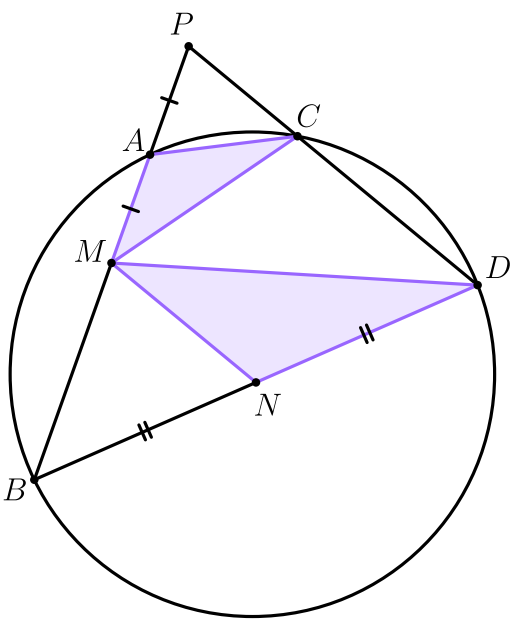
$$۹۹ + ۴۹ + ۷ = ۱۵۵.$$

■

۳۰. وترهای AB و CD از دایرهٔ ω در نقطهٔ P خارج از دایره متقاطع‌اند که A بین B و P است و C بین D و P است. می‌دانیم $AB = ۳AP$. عمودهای وارد از C و D بر AB را به‌ترتیب H و H' و وسط پاره‌خط PB را M می‌نامیم. اگر $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \sqrt{۳}$ باشد، مقدار $\frac{DM}{\sqrt{DH'}}$ چه‌قدر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$ ۵) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.



نشان می‌دهیم $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \frac{DM}{\sqrt{DH'}}$. دقت کنید که

$$\frac{CH}{DH'} = \frac{S_{ACB}}{S_{ADB}} = \frac{AC \cdot CB \sin \angle ACB}{AD \cdot DB \sin \angle ADB} = \frac{AC \cdot CB}{AD \cdot DB}$$

پس کافی‌ست ثابت کنیم

$$\frac{CM^۲}{DM^۲} = \frac{AC \cdot CB}{AD \cdot DB}. \qquad (۱)$$

می‌توان نشان داد (برای اثبات از A و B بر CD عمود کنید)

$$\frac{۱}{۴} = \frac{PA}{PB} = \frac{S_{CAD}}{S_{CBD}} = \frac{AC \cdot AD \sin \angle CAD}{BC \cdot BD \sin \angle CBD} = \frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} \qquad (۲)$$

با ضرب دو طرف روابط (۱) و (۲) باید ثابت کنیم

$$\frac{AC^۲}{BD^۲} = \frac{CM^۲}{۴DM^۲} \Longrightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{CM}{۲DM}$$

وسط BD را N می‌نامیم پس حکم معادل می‌شود با $\frac{AC}{DN} = \frac{CM}{DM}$. برای اثبات حکم معادل تشابه دو مثلث CAM و DNA را نشان می‌دهیم. واضح است که

$$\angle MND = ۱۸۰^\circ - \angle CDB = \angle CAM$$

پس کافی‌ست نشان دهیم

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{ND} \Longleftrightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{PD}{BD}$$

رابطه آخر بنابر تشابه دو مثلث PAC و PDB بدست می‌آید پس حکم ثابت شد. ■