فصل سوم: فرم قوی و ضعیف برای مسائل یک بعدی

مقدمه

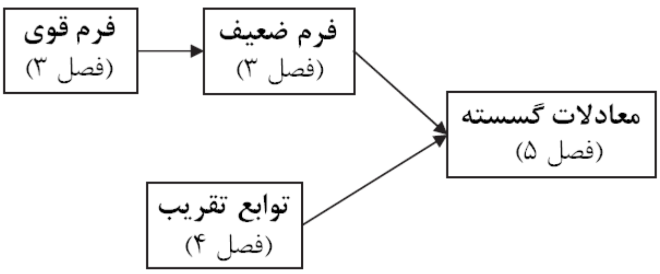
در این فصل فرم‌های قوی و ضعیف را برای چند مسأله یک بعدی بدست می‌آوریم.

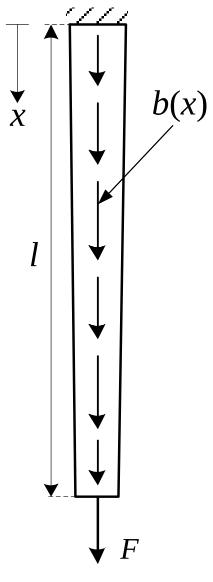
با روش بدست آوردن فرم قوی معادلات با کمک مدلسازی فیزیکی در دروسی مانند مقاومت مصالح، سیالات، انتقال حرارت و . . . آشنا شده‌ایم.

فرم ضعیف فرمی انتگرالی از این معادلات است که برای ایجاد فرمولاسیون روش اجزاء محدود مورد نیاز است.

××

- در گام اول مانند همه روش‌های دیگر فرم قوی معادلات سیستم بدست می‌آید.
- در گام دوم فرم ضعیف معادلات از فرم قوی آن استخراج می‌گردد.
- در گام سوم توابع تقریب برای ایجاد معادلات گسسته اجزاء محدود از فرم ضعیف بکار گرفته می‌شود.





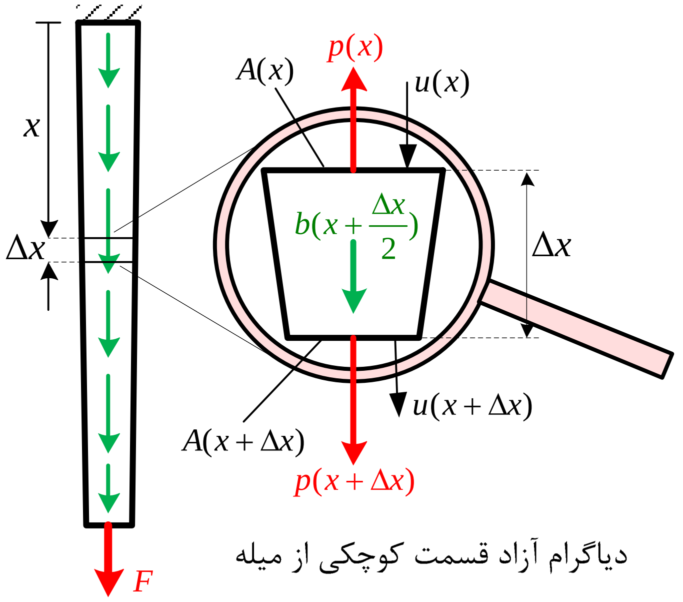
××

مثال اول: فرم قوی مسأله میله تحت بار محوری

میله‌ای با سطح مقطع متغیر مطابق با شکل تحت بار گسترده $b(x)$ قرار دارد.

b می‌تواند هر نیروی جسمی مانند وزن بر واحد طول میله باشد.

می‌خواهیم توزیع تنش $\sigma(x)$ را در آن تعیین کنیم.



دیاگرام آزاد قسمت کوچکی از میله

××

معادله دیفرانسیل حاکم با نوشتن رابطه تعادل

بین نیروی داخلی p و نیروی خارجی b حاصل می‌آید.

با جمع نیروها در جهت x خواهیم داشت:

(۱-۳)

×××

بازآرایی ترمهای معادله و تقسیم آن بر Δx معادله زیر را نتیجه می‌دهد:

(۲-۳)

با توجه به تعریف مشتق اگر $\Delta x \to 0$ میل کند خواهیم داشت:

$$\frac{dp(x)}{dx}+b(x)=0 \qquad (۳-۳)$$

این معادله، معادله تعادل میله بر حسب نیروی داخلی $p(x)$ است.

از طرفی طبق تعریف تنش داریم:

$$\sigma(x)=\frac{p(x)}{A(x)} \qquad (۴-۳)$$

×××

ضمن اینکه کرنش در قسمت نشان داده شده از میله برابر است با:

$$\varepsilon(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=\frac{du}{dx} \qquad (۵-۳)$$

رابطه تنش و کرنش هم از رابطه هوک بدست می‌آید:

$$\sigma(x)=E(x)\varepsilon(x) \qquad (۶-۳)$$

اگر معادله (۳-۵) را در معادله (۳-۶) و حاصل را در (۳-۴) و سپس در (۳-۳) قرار دهیم معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله بدست می‌آید:

(۳-۷)

×××

برای حل این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم نیاز به دو شرط مرزی داریم.

برای این مسأله خاص شرایط مرزی عبارتند از:

- در $x = 0$ جابجایی u داده شده است.
- در $x = l$ نیرو بر واحد سطح یعنی $\bar{t} = \dfrac{F}{A}$ داده شده است.

(۳-۸)

خط بالای متغیرها نشانگر معلوم بودن آن متغیر است.

×××

معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسأله به همراه شرایط مرزی آن فرم قوی مسأله نامیده می‌شوند.

لذا فرم قوی مسأله میله عبارت است از:

(۳-۹- الف)

$$u = \bar{u} = 0 \qquad \text{on} \quad x = 0 \qquad \text{(۳-۹- ب)}$$

$$\sigma = E\frac{du}{dx} = \frac{F}{A} = \bar{t} \qquad \text{on} \quad x = l \qquad \text{(۳-۹- ج)}$$

×××

مشاهده می‌شود که در فرم قوی یک شرط مرزی برای خود $u(x)$ (شرط مرزی ضروری) و دیگری برای مشتق آن (شرط مرزی طبیعی) وجود دارد.

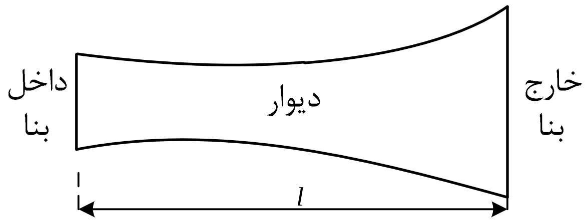
با کمک نمادهای معرفی شده در فصل اول فرم قوی را بصورت زیر هم می‌توان نوشت:

(۳-۹- د)

$$u = \bar{u} = 0 \qquad \text{on} \quad \Gamma_u \qquad \text{(۳-۹- ه)}$$

$$\sigma = E\frac{du}{dx} = \frac{F}{A} = \bar{t} \qquad \text{on} \quad \Gamma_t \qquad \text{(۳-۹- و)}$$

××



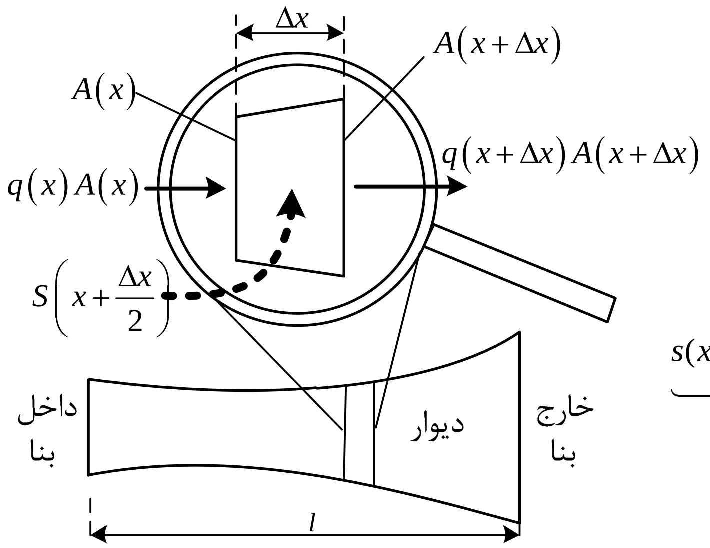
مثال دوم: فرم قوی مسأله هدایت گرما در یک بعد

مطابق شکل سطح مقطع دیواری به ضخامت l را در نظر بگیرید.

فرض کنید مساحت عمود بر جریان گرما $A(x)$ و گرمای تولید شده بر واحد ضخامت دیوار توسط منبع گرمایی داخل دیوار برابر $S(x)$ باشد.

معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله با نوشتن معادلات تعادل انرژی (پایستگی انرژی) بدست می‌آید.

××



برای پایستگی انرژی، باید گرمای وارده به هر قسمت از دیوار به اضافه گرمای تولیدی در آن قسمت برابر با گرمای خروجی از آن قسمت باشد:

(۱۰-۳)

$$\underbrace{s(x+\frac{\Delta x}{2})\Delta x}+\underbrace{q\left(x\right)A\left(x\right)}-\underbrace{q\left(x+\Delta x\right)A\left(x+\Delta x\right)}=0$$

$$=0$$

××

بازآرایی ترمهای معادله و تقسیم آن بر Δx معادله زیر را نتیجه می‌دهد:

(۱۱-۳)

با توجه به تعریف مشتق اگر $\Delta x \rightarrow 0$ میل کند خواهیم داشت:

$$\frac{d\left(qA\right)}{dx}=s \qquad (۱۲-۳)$$

همانطور که در درس انتقال حرارت دیدیم رابطه بین دما و شار گرما از قانون فوریه بدست می‌آید:

$$q=-k\frac{dT}{dx} \qquad (۱۳-۳)$$

در این معادله T دما و k ضریب هدایت دمایی است.

××

با قرار دادن معادله (۳-۱۳) در معادله (۳-۱۲) خواهیم داشت:

(۳-۱۴)

اگر Ak ثابت باشد معادله بالا بصورت زیر ساده می‌شود:

$$Ak\frac{d^2T}{dx^2}+s=0 \quad , \quad 0<x<l \tag{۳-۱۵}$$

چون معادله دیفرانسیل حاکم از مرتبه دوم است در دو مرز مسأله باید دو شرط مرزی داشته باشیم که می‌تواند شامل دما یا شار گرمای معین باشد.

××

فرض می‌کنیم شرایط در این مسأله شامل دمای مشخص $\bar{T}$ در $x=l$ و شار مشخص $\bar{q}$ در $x=0$ باشد.

بنابراین فرم قوی مسأله انتقال گرما بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(Ak\frac{dT}{dx}\right)+s=0 \quad \text{on} \quad 0<x<l\\
&q=-k\frac{dT}{dx}=-\bar{q} \quad \text{on} \quad x=0\\
&T=\bar{T} \quad \text{on} \quad x=l
\end{aligned} \tag{۳-۱۶- الف}$$

××

در مسأله انتقال حرارت مرز ضروری که دما روی آن داده شده با Γ_T مشخص می‌شود.

مرز طبیعی که شار گرما روی آن معلوم است با Γ_q مشخص می‌شود.

در صورت استفاده از این نمادها فرم قوی مسأله انتقال گرما بصورت زیر خواهد بود:

(۳-۱۶- ب)

×××

فرم ضعیف در مسائل یک بعدی

برای ایجاد معادلات اجزاء محدود لازم است معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به فرمی انتگرالی که فرم ضعیف نام دارد بیان شوند.

با این فرم انتگرالی کم و بیش در مبحث مربوط به روش باقیمانده‌های وزن‌دار در فصل اول آشنا شدیم.

مطابق با معادله (۱-۱۱)، فرم ضعیف از ضرب تابع وزن در باقیمانده معادله دیفرانسیل و انتگرال‌گیری روی ناحیه ایجاد می‌شود:

(۱-۱۱)

می‌توان نشان داد فرم ضعیف معادلات دیفرانسیل با معادله حاکمه و شرایط مرزی آن یعنی فرم قوی معادل است.

×××

تابع وزن (weight function) مورد استفاده در فرم ضعیف <u>دلخواه</u> است اما باید دارای دو ویژگی زیر باشد:

- اولاً هموار باشد،
- ثانیاً روی مرزهای ضروری صفر شود.

تابع وزنی که واجد دو ویژگی بالا باشد مجاز (admissible) نامیده می‌شود.

در همین راستا، صفر بودن تابع وزن در مرزهای ضروری، شرایط مرزی ضروری را از فرم ضعیف حذف می‌کند.

×××

برای آشنایی با نحوه ایجاد فرم ضعیف ابتدا با فرم قوی مسأله تحلیل تنش یعنی معادله (۳-۹) آغاز می‌کنیم.

با اعمال معادله (۱-۱۱) به این فرم قوی خواهیم داشت:

(۳-۱۷)

تابع $u(x)$ را تابع حدس یا آزمون (trial function) می‌نامیم.

تابع آزمون برای اینکه مجاز باشد به عنوان حل مسأله مورد توجه قرار گیرد باید اولاً <u>هموار</u> بوده و ثانیاً <u>شرایط مرزی ضروری را ارضا نماید</u>.

××

برای ایجاد فرمولاسیون اجزاء محدود می‌توان از معادله (۳-۱۷) بهره برد.

ایجاد این توابع آزمون بسیار هموار در مسائل پیچیده و چندبعدی دشوار است.

ضمناً بدلیل عدم تقارن معادله (۳-۱۷) نسبت به $u(x)$ و $w(x)$ ، ماتریس سختی حاصل نامتقارن و حل معادله ماتریسی دشوارتر خواهد بود.

××

برای حل این مشکلات با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء مشتق دوم $u(x)$ را به مشتق اول تبدیل می‌کنیم.

این ترفند ماتریس سختی را متقارن کرده و اجازه استفاده از حلهای آزمون با همواری کمتر را می‌دهد.

علاوه بر این اعمال شرایط مرزی را هم ساده می‌کند.

به این منظور ابتدا انتگرال معادله (۳-۱۷) را بصورت زیر باز می‌کنیم:

(۳-۱۸)

××

در صورت انتگرال‌گیری جزء به جزء ، ترم اول معادله بالا بصورت زیر خواهد بود:

(۳-۱۹)

با جاگذاری از معادله (۳-۱۹) در معادله (۳-۱۸) بدست می‌آید:

$$\left(wAE\frac{du}{dx} \right)_0^l - \int_0^l \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx + \int_0^l wb dx = 0 \quad \forall w \text{ with } w(0) = 0 \tag{۳-۲۰}$$

××

رابطه زیر که بخشی از معادله قبل است یعنی تابع وزن دلخواه بوده و باید در مرز ضروری صفر شود:

$$\forall w \text{ with } w(0) = 0 \tag{۳-۲۱}$$

از طرفی داریم:

$$AE\frac{du}{dx} = AE\varepsilon = A\sigma = p$$

بنابراین معادله (۳-۲۰) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

(۳-۲۲)

××

ترم دوم این معادله با توجه به رابطه (۳-۲۱) صفر است:

$$\left(wp\right)_{x=l} - 0 - \int_0^l \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx + \int_0^l wbdx = 0 \quad \forall w \text{ with } w\left(0\right) = 0$$ (۳-۲۳)

با توجه به رابطه (۳-۹-ج) ترم دوم هم برابر است با:

$$\left(wp\right)_{x=l} = F\left(w\right)_{x=l} = A\bar{t}\left(w\right)_{x=l}$$ (۳-۲۴)

بنابراین معادله (۳-۲۳) به فرم زیر در می‌آید:

(۳-۲۵)

××

با توجه به این معادله، فرم ضعیف مسأله میله تحت بار محوری بصورت زیر قابل بیان است:

- از میان توابع هموار، تابع $u(x)$ را که شرط $u(0)=\bar{u}$ را ارضا می‌کند طوری انتخاب کنید که داشته باشیم:

(۳-۲۶- الف)

فرم ضعیف به دلیل اینکه به توابعی با درجه همواری ضعیف‌تری نسبت به فرم قوی نیاز دارد به این نام خوانده می‌شود.

××

فرض کنید ناحیه میله را با Ω و مرز آن را با Γ مشخص کنیم،

مرزهای ضروری و طبیعی را هم با Γ_u و Γ_t نمایش دهیم،

در اینصورت فرم ضعیف مسأله را به فرم زیر هم می‌توان نوشت:

(۳-۲۶- ب)

فرم قوی مسأله و نیز کلیه مراحل تا رسیدن به فرم ضعیف را هم می‌توان با استفاده از نمادهای بالا بازنویسی نمود.

××

مثال (۳-۱)

فرم ضعیف را برای فرم قوی زیر بدست آورید.

(الف) $$\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du}{dx}\right)+10Ax=0\ ,\quad 0<x<2$$

(ب) $$u(0)=10^{-4}$$ (۳-۲۷)

(ج) $$\sigma(2)=\left(E\frac{du}{dx}\right)_{x=2}=10$$

معادله (۳-۲۷- ج) شرطی مرزی برای مشتق $u(x)$ است بنابراین یک شرط مرزی طبیعی است.

××

چون تابع وزن باید روی مرزهای ضروری صفر شود کلیه توابع وزن هموار $w(x)$ که شرط $w(0)=0$ را ارضا کنند در نظر می‌گیریم.

حلهای آزمون $u(x)$ هم باید شرط مرزی ضروری $u(0)=10^{-4}$ را ارضا کنند.

ابتدا معادله حاکمه را در تابع وزن دلخواه ضرب کرده و روی ناحیه مسأله انتگرال می‌گیریم:

(۳-۲۸)

××

حال با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_0^2 w\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du}{dx}\right)dx=\left(wAE\frac{du}{dx}\right)_0^2-\int_0^2\frac{dw}{dx}AE\frac{du}{dx}dx$$ (۳-۲۹)

با توجه به اینکه $w(0)=0$ است بنابراین ترم اول سمت راست معادله در $x=0$ برابر صفر است.

در نتیجه با جاگذاری از معادله بالا در معادله (۳-۲۸) خواهیم داشت:

(۳-۳۰)

××

با مقایسه معادله (۳-۲۷-ب) با ترم آخر معادله اخیر می‌توان نوشت:

(۳-۳۱)

بنابراین فرم ضعیف به این صورت است:

- $u(x)$ را طوری بیابید که برای تمام توابع هموار $u(x)$ با شرط $u(0)=10^{-4}$ معادله (۳-۳۱) برای تمام توابع هموار $w(x)$ با شرط $w(0)=0$ برقرار باشد.

××

مثال (۳-۲)

با استفاده از حل‌های آزمون و توابع وزن خطی (linear) زیر جوابی برای فرم ضعیف مثال (۳-۱) بدست آورید. α و β پارامترهای دلخواه هستند. فرض کنید A ثابت بوده و $E = 10^5$ باشد.

(۳-۳۲)

حل: برای اینکه تابع وزن مجاز باشد باید $w(0)=0$ باشد بنابراین $\beta_0=0$ خواهد بود.

برای اینکه حل آزمون مجاز باشد باید $u(0)=10^{-4}$ باشد در نتیجه باید $\alpha_0=10^{-4}$ باشد.

××

با توجه به این موارد تنها یک پارامتر مجهول α_1 و یک پارامتر دلخواه β_1 باقی می‌ماند. ضمن اینکه داریم:

$$u(x)=10^{-4}+\alpha_1 x, \quad \frac{du}{dx}=\alpha_1 \quad , \quad w(x)=\beta_1 x, \qquad \frac{dw}{dx}=\beta_1 \tag{۳-۳۳}$$

با جاگذاری از (۳-۳۳) در (۳-۳۱) بدست می‌آید:

(۳-۳۴)

××

با محاسبه انتگرال‌ها خواهیم داشت:

(۳-۳۵)

چون توابع وزن دلخواهند β_1 دلخواه بوده و رابطه (۳-۳۵) باید برای تمام مقادیر β_1 برقرار باشد.

لذا باید عبارت داخل پرانتز برابر صفر باشد که برای آن لازم است داشته باشیم:

$$\alpha_1 = 70/(3E) = 70/\left(3\times10^5\right) = 2.33\times10^{-4} \tag{۳-۳۶}$$

××

$$u^{\text{lin}} = 10^{-4}\left(1+2.33x\right), \quad \sigma^{\text{lin}} = E\, du^{\text{lin}}/dx = 23.3 \qquad (۳۷-۳)$$

استفاده از حل آزمون و تابع وزن خطی برای حل فرم ضعیف به معنی **تقریب زدن** حل مسأله با تابعی خطی است.

در فصل بعد خواهیم دید که به حل آزمون و تابع وزن در روش اجزاء محدود **تابع تقریب** نیز اطلاق می‌شود.

××

مثال (۳-۳)

انتظار داریم حلهای آزمون درجه دوم نسبت به حلهای آزمون خطی تطبیق بهتری با جواب دقیق داشته باشند. به منظور بررسی این امر مثال قبلی را با توابع وزن و حلهای آزمون درجه دوم (quadratic) تکرار کنید.

(۳۸-۳)

حل: مراحل فوق را برای حلهای آزمون و توابع وزن درجه دوم تکرار می‌کنیم.

مانند قبل باید $\alpha_0=10^{-4}$ و $\beta_0=0$ باشد.

××

بنابراین فرم ضعیف در این حالت بصورت زیر در می‌آید:

$$\int_0^2 E\left(\beta_1+2\beta_2 x\right)\left(\alpha_1+2\alpha_2 x\right) E dx - \int_0^2 10\left(\beta_1 x+\beta_2 x^2\right) x dx - 10\left(\beta_1 x+\beta_2 x^2\right)_{x=2} = 0 \qquad (۳۹-۳)$$

با محاسبه انتگرال‌های بالا بدست می‌آید:

(۴۰-۳)

××

چون β_1 و β_2 دلخواهند بنابراین باید ضرایب هر کدام از آنها صفر باشد:

(۴۱-۳)

جواب این دستگاه برابر است با:

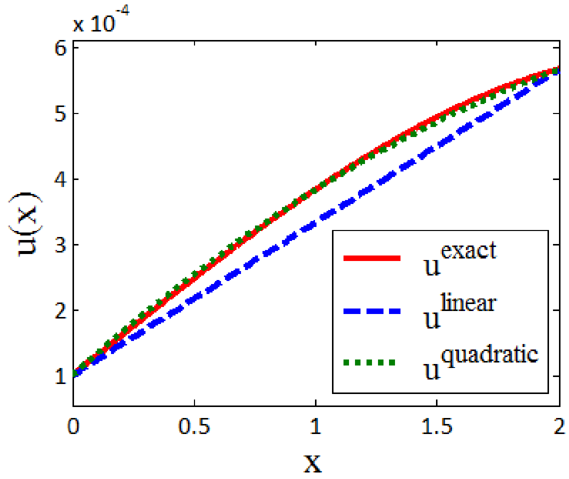
$$\alpha_1 = 100/\left(3E\right) = 3.33\times 10^{-4} \quad , \quad \alpha_2 = -5/E = -0.5\times 10^{-4} \qquad (۴۲-۳)$$

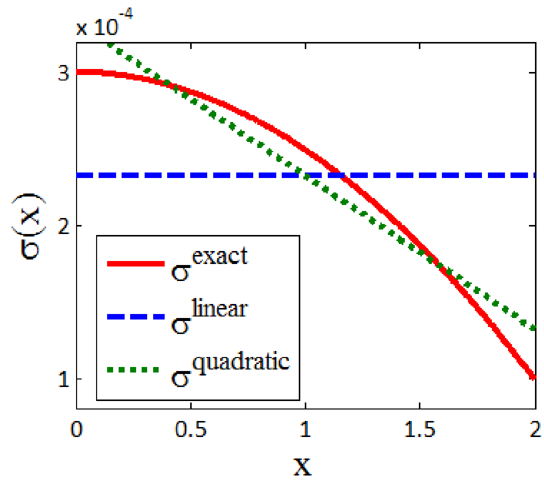
جابجایی‌ها و تنشهای حاصل هم عبارتند از:

$$u^{\text{quad}} = 10^{-4}\left(1+3.33x-0.5x^2\right) \quad , \quad \sigma^{\text{quad}} = E\,du^{\text{quad}}/dx = 33.3-10x \qquad (۴۳\text{-}۳)$$

×××

نتایج تقریب‌های خطی و درجه دوم مطابق با شکل رسم و با جواب دقیق تحلیلی مسأله که در زیر آمده است مقایسه شده‌اند.





همانطور که می‌بینیم استفاده از تقریب درجه دوم برای حل فرم ضعیف منجر به افزایش دقت در مقایسه با حل با تقریب خطی گردید.

چرا که به جای حل دستگاه یک معادله-یک مجهول ناچار به حل دستگاه دو معادله-دو مجهول گردیدیم.

×××

مثال (۳-۴)

فرم ضعیف را برای فرم قوی زیر بدست آورید.

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0 \quad \text{on} \quad 1<x<3$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=1}=2 \ , \quad u(3)=1 \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

لازم است تابع وزن شرط $w(3)=0$ و حل آزمون شرط مرزی ضروری $u(3)=1$ را ارضا کند.

××

ابتدا معادله حاکمه را در تابع وزن دلخواه ضرب کرده و روی ناحیه مسأله انتگرال می‌گیریم:

(۳-۴۵)

با انتگرالگیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\int_1^3 w\frac{d^2u}{dx^2}dx = \left(w\frac{du}{dx}\right)_{x=3} - \left(w\frac{du}{dx}\right)_{x=1} - \int_1^3 \frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}dx \qquad (۳-۴۶)$$

××

از آنجا که $w(3)=0$ است دو معادله فوق نتیجه می‌دهد:

$$-\int_1^3 \frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}dx - \left(w\frac{du}{dx}\right)_{x=1} = 0 \qquad (۳-۴۷)$$

با توجه به معادلات (۳-۴۴) و (۳-۴۷) فرم ضعیف به صورت زیر قابل بیان است:

- $u(x)$ را طوری بیابید که برای تمام توابع هموار $u(x)$ با شرط $u(3)=1$ برای تمام توابع هموار $w(x)$ با شرط $w(3)=0$ داشته باشیم:

(۳-۴۸)

××

فرم ضعیف مسأله هدایت گرما در یک بعد

همانطور که دیدیم فرم قوی این مسأله عبارت است از:

$$\frac{d}{dx}\left(Ak\frac{dT}{dx}\right) + s = 0 \quad \text{on} \quad \Omega$$

$$q = -k\frac{dT}{dx} = -\bar{q} \quad \text{on} \quad \Gamma_q \qquad (۳-۱۶-ب)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{on} \quad \Gamma_T$$

برای بدست آوردن فرم ضعیف مانند قبل معادله حاکمه را در تابع وزن ضرب کرده و روی ناحیه مسأله Ω انتگرال می‌گیریم:

(۳-۴۹)

××

با انتگرالگیری جزء به جزء از ترم اول خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} Ak \frac{dT}{dx} dx = \left(wAk \frac{dT}{dx} n \right)_{\Gamma} + \int_{\Omega} ws\, dx \quad \forall w \text{ with } w=0 \text{ on } \Gamma_T \qquad (۵۰\text{-}۳)$$

در این معادله n بردار نرمال خروجی سطح است که در مسأله یک بعدی در $x=0$ برابر $n=-1$ و در $x=l$ برابر $n=+1$ است.

$$\int_{\Omega} \frac{dw}{dx} Ak \frac{dT}{dx} dx = (wA\bar{q}n)\big|_{\Gamma_q} + \int_{\Omega} ws\, dx \quad \forall w \text{ with } w=0 \text{ on } \Gamma_T \qquad (۵۱\text{-}۳)$$

××

تمرین سری دوم

فرم ضعیف را برای فرم قوی زیر (معادله حرکت آونگ غیر خطی) بدست آورید.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2\sin(x) = 0, \qquad u(0)=1, \qquad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$$

با استفاده از حلهای آزمون و توابع وزن زیر جوابی برای فرم ضعیف حاصل بدست آورید. α و β پارامترهای دلخواه هستند.

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \qquad\qquad u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

$$w(x) = \beta_0 + \beta_1 x \qquad\qquad w(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

با کمک رسم نمودار، جوابهای بدست آمده را با جواب دقیق مسأله مقایسه کنید.

××

نمودار حل تمرین دوم