فصل

۱ تابع

درس اوّل
ترکیب توابع

درس دوم
توابع چند جمله‌ای ــ توابع صعودی و نزولی

درس سوم
وارون تابع

درس اوّل

ترکیب توابع

فعالیت

یک مادهٔ غذایی را با دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون می‌آوریم. تعداد باکتری‌هایی را که در آن با افزایش دما رشد می‌کنند با $N(d)$ نمایش می‌دهیم و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$N(d)=۲۰d^{۲}-۸۰d+۵۰۰, \quad ۲\leq d\leq ۱۴$$

که در این رابطه، d دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجه است.

الف) هر کدام از مقادیر زیر را به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$N(۱۰)=۲۰(۱۰)^{۲}-۸۰(۱۰)+۵۰۰=۱۷۰۰$$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک غذای یخچالی با دمای ۱۰ درجه، ۱۷۰۰ تا است.

$N(۲)=$ ....

....

$N(۳)=$ ....

....

همچنین هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذر زمان افزایش می‌یابد و از تابع $d(t)$ با ضابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d(t)=۴t+۲ \quad ; \quad ۰\leq t\leq ۳$$

ب) هر کدام از مقادیر زیر را به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$d(۲)=۱۰$$

دمای غذایی که ۲ ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۱۰ درجه است.

$d(۱)=$ ....

$d(۳)=$ ....

به‌طور کلی می‌توان گفت در تابع d، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا را به‌دست آورد و در تابع N، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد.

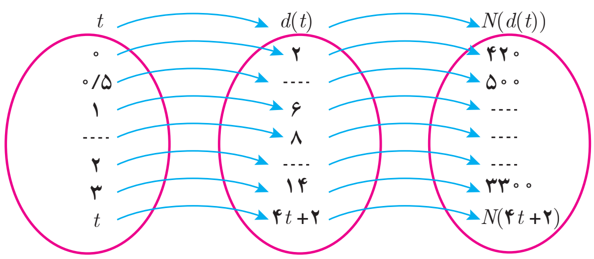
زمان $\xrightarrow{d}$ دما $\xrightarrow{N}$ تعداد باکتری‌ها

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت: تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی که دو ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۱۷۰۰ است.

پ) جدول زیر را کامل کنید :

t	$d(t)=۴t+۲$	$N(d(t))=N(۴t+۲)$
۰	$d(۰)=۲$	$N(d(۰))=N(۲)=۴۲۰$
۰/۵	$d(۰/۵)=\cdots$	$N(d(۰/۵))=N(\cdots)=۵۰۰$
۱	$d(۱)=۶$	$N(d(۱))=N(۶)=\cdots$
$\cdots$	$d(\cdots)=۸$	$N(d(\cdots))=N(۸)=\cdots$
۲	$d(۲)=\cdots$	$N(d(۲))=N(\cdots)=\cdots$
۳	$d(۳)=۱۴$	$N(d(۳))=N(۱۴)=۳۳۰۰$

ت) به کمک جدول قسمت «پ»، جاهای خالی را تکمیل کنید.



همان‌طور که دیدیم می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را می‌توان مشخص کرد.

آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟

به بیان دیگر تابعی ساخت که N را برحسب t مشخص کند.

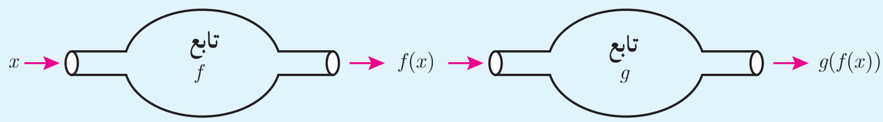
برای به‌دست آوردن این تابع به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$N(d(t))=N(۴t+۲)=۲۰(۴t+۲)^۲-۸۰(۴t+۲)+۵۰۰=$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =۳۲۰t^۲+۴۲۰ \qquad ۰\leq t\leq ۳$$

$N(d(t))$ تعداد باکتری‌هایی در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

«مراحل ساخت تابع gof»



x باید در دامنهٔ f باشد. $f(x)$ باید در دامنهٔ g باشد.

مرحلهٔ اول : x ورودی و $f(x)$ خروجی است. مرحلهٔ دوم : $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.

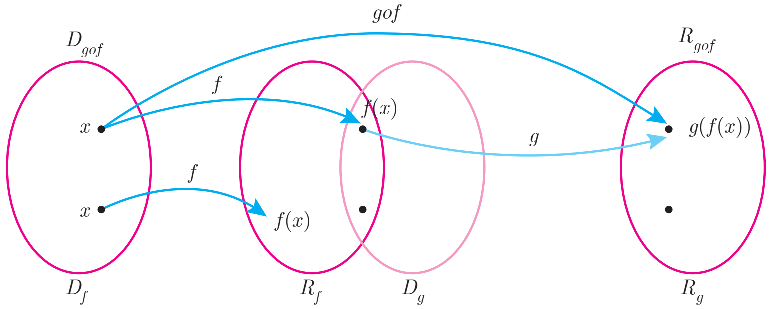
اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که اشتراک برد f و دامنهٔ g غیر تهی باشد، تابع $g(f(x))$ را به‌صورت $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را ترکیب g با f می‌نامیم.

دامنهٔ تابع مرکب:

دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ــ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ــ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

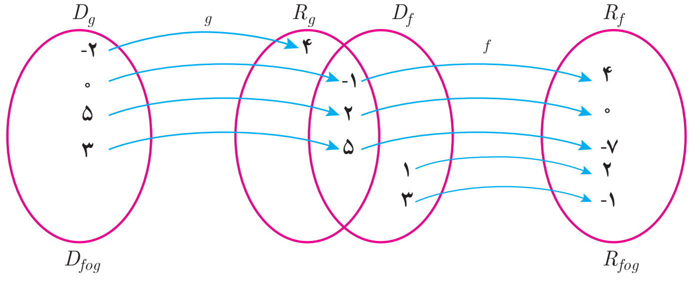


بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

مثال : اگر $f=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰)(-۱,۴),(۵,-۷)\}$ و $g=\{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵)(-۲,۴)\}$ ، تابع fog را در صورت امکان بنویسید.

$$\left.\begin{array}{l}(fog)(۰)=g(f(۰))=f(-۱)=۴\\(fog)(۵)=f(g(۵))=f(۲)=۰\\(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۵)=-۷\\(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۴)\ \text{تعریف نشده}\end{array}\right\}\rightarrow fog=\{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$$



کار در کلاس

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

x	f(x)
−۳	−۷
−۲	−۵
−۱	−۳
۰	−۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

x	g(x)
−۳	۸
−۲	۳
−۱	۰
۰	−۱
۱	۰
۲	۳
۳	۸

الف) $(fog)(۱)=\cdots$

ب) $(fog)(-۱)=\cdots$

پ) $(gof)(۰)=\cdots$

ج) $(gog)(-۲)=\cdots$

ت) $(gof)(۲)=\cdots$

ث) $(fof)(۱)=\cdots$

مثال : اگر $f(x)=x-۲$ و $g(x)=x^۲-۱$ ، دامنه و ضابطهٔ تابع gof را به‌دست آورید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=f^۲(x)-۱=(x-۲)^۲-۱$$

$$D_f=\mathbb{R}\,,D_g=\mathbb{R}\,,D_{gof}=\left\{x\in D_f\,\middle|\,f(x)\in D_g\right\}$$

$$D_{gof}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,(x-۲)\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$, $g(x)=۲x^۲-۱$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=۲f^۲(x)-۱=۲(\sqrt{x-۱})^۲-۱=۲(x-۱)-۱=۲x-۳$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-۱}=\sqrt{۲x^۲-۱-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$$

$$D_f=[۱,+\infty),D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f\,\middle|\,f(x)\in D_g,\right\}=\left\{x\in[۱,+\infty)\,\middle|\,\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}\right\}=[۱,+\infty)$$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g\,\middle|\,g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,۲x^۲-۱\in[۱,+\infty)\right\}=$$

$$\left\{\mathbb{R}\,\middle|\,۲x^۲-۱\geq ۱\right\}=\left\{\mathbb{R}\,\middle|\,x^۲\geq ۱\right\}=(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)$$

کار در کلاس

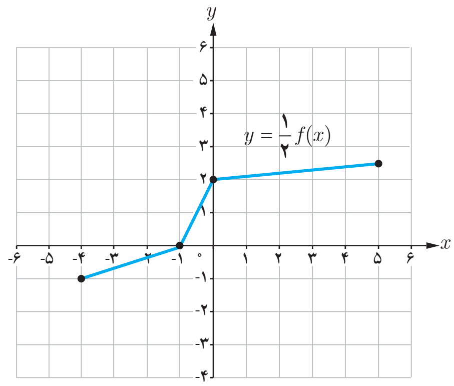
اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱},g(x)=\frac{۳}{x}$ ، دامنه و ضابطهٔ fog را به‌دست آورید.

«انتقال توابع»

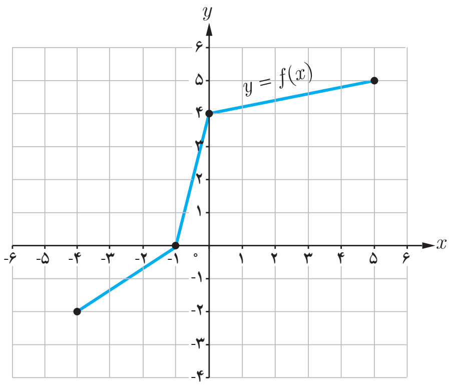
رسم نمودار $kf(x)$:

یادآوری : همان‌طور که در پایهٔ یازدهم دیدید اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

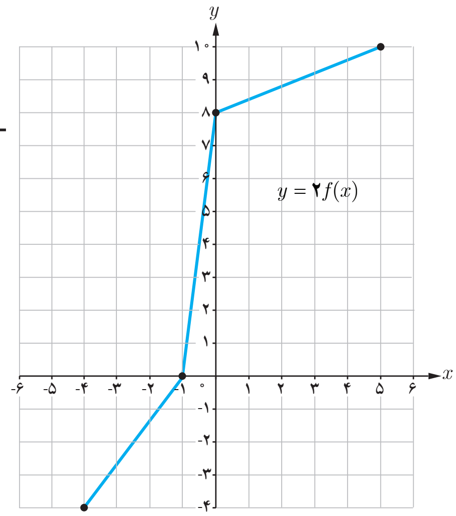
مثال : نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر داده شده است. نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ و $y=-f(x)$ و $y=۲f(x)$ را رسم کنید.



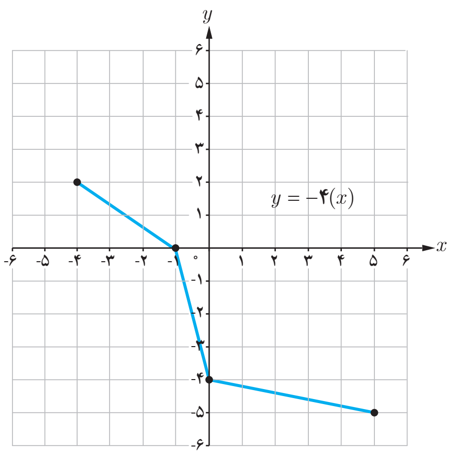
x	$\frac{۱}{۲}f(x)$
-۴	-۱
-۱	۰
۰	۲
۵	$\frac{۵}{۲}$



x	f(x)
-۴	-۲
-۱	۰
۰	۴
۵	۵



x	۲f(x)
-۴	-۴
-۱	۰
۰	۸
۵	۱۰



x	-f(x)
-۴	۲
-۱	۰
۰	-۴
۵	-۵

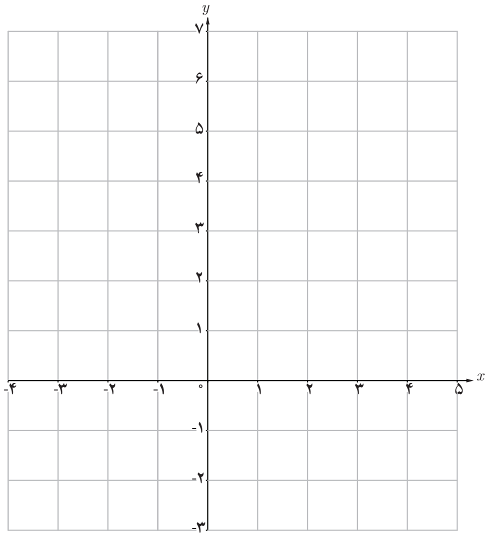
با توجه به آنچه که گفته شد نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور xهاست.

همان‌طور که در این مثال دیدید برای رسم نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ عرض هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ و برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطه را در ۱- و برای رسم نمودار $y=۲f(x)$ عرض هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم. یعنی دامنه تغییر نمی‌کند و دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ همان دامنهٔ $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکی نیست.

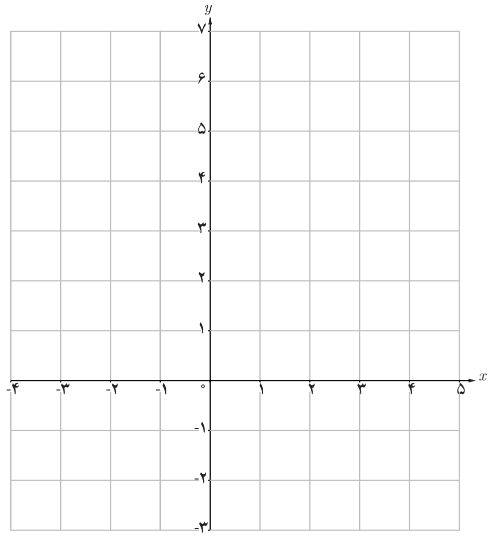
همچنین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور xها یکی هستند. یعنی ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ و $kf(x)=۰$ یکی است.

کار در کلاس

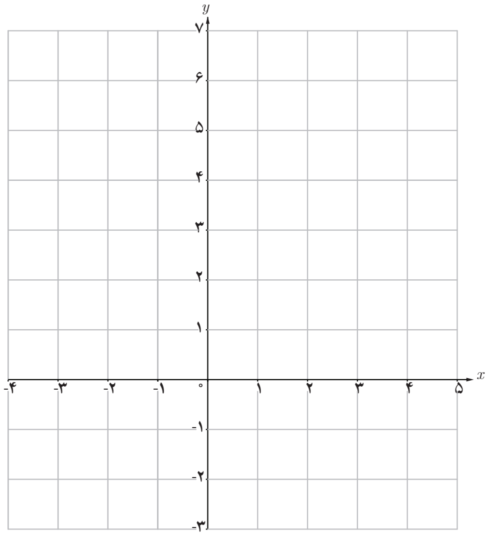
نمودار تابع $f(x)=|x-۳|$ را در بازهٔ $[-۳,۴]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۳|$ و $h(x)=۳|x-۳|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۴}|x-۳|$ را رسم کنید.



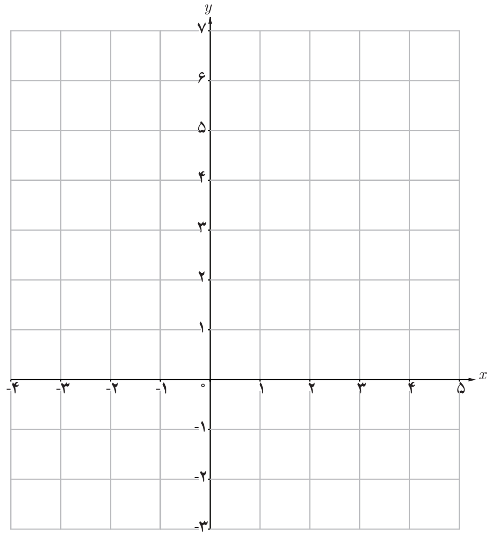
f



g



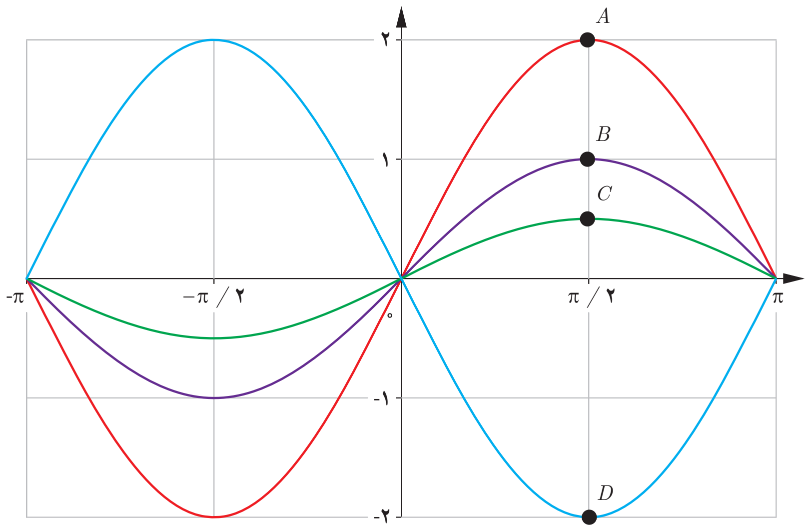
h



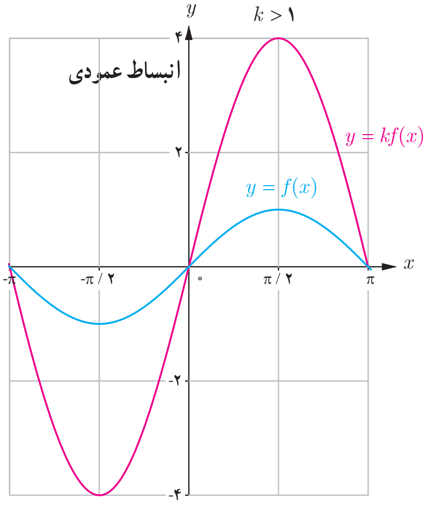
k

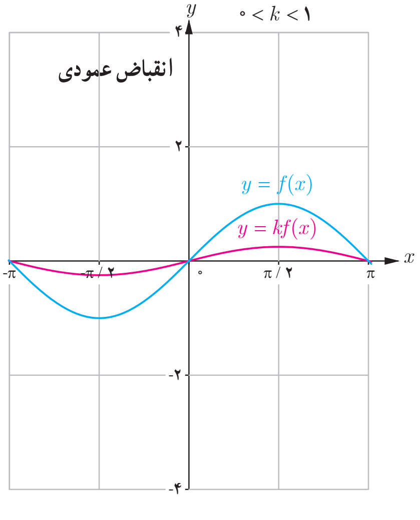
کار در کلاس

در شکل زیر نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$ و $y=۲\sin x$ و $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. مشخص کنید هر کدام از ضابطه‌ها مربوط به کدام نمودار است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.



نمودار تابع $y=kf(x)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید : اگر $k>۱$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است. اگر $۰<k<۱$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k جمع می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است. اگر $k<۰$ ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.





رسم نمودار $f(kx)$:

مثال : تابع $f(x)=x+۳$ را با دامنه $[-۴,۰]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $f=(۲x)$ و $f(\frac{x}{۲})$ را بررسی می‌کنیم.
ضابطهٔ تابع $f=(۲x)$ به صورت $f(۲x)=۲x+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$-۴\leq ۲x\leq ۰$

$-۲\leq x\leq ۰ \rightarrow$ دامنهٔ $f(۲x)$: $D=[-۲,۰]$

همچنین ضابطهٔ تابع $f(\frac{x}{۲})$ به صورت $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود.

$-۴\leq \frac{x}{۲}\leq ۰$

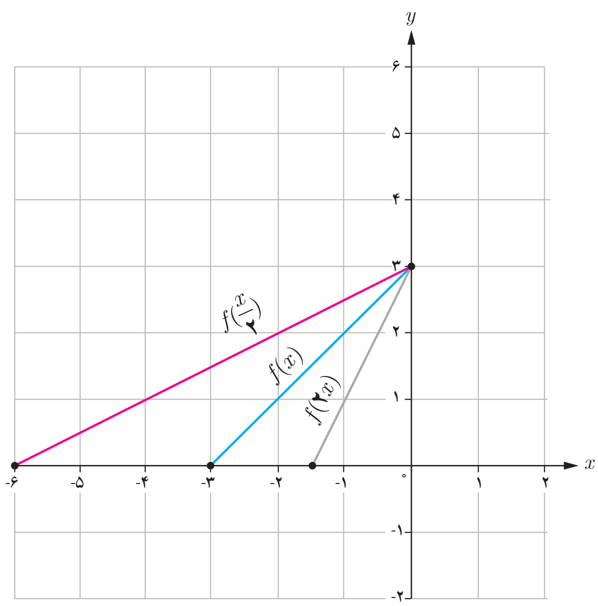
$-۸\leq x\leq ۰ \rightarrow$ دامنهٔ $f(\frac{x}{۲})$: $D=[-۸,۰]$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است :

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
$f(x)=x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

x	-۲	$-۱/۵$	-۱	$-۰/۵$	۰
$f(۲x)=۲x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

x	-۸	-۶	-۴	-۲	۰
$f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

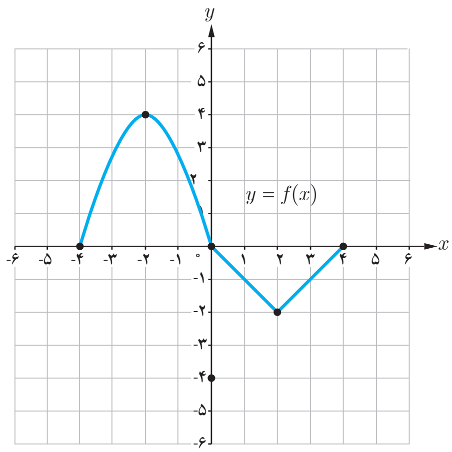


فعالیت

نمودار $f(x)$ به صورت زیر داده شده است :

دامنهٔ این تابع $[-۴,۴]$ است. می‌خواهیم با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
-۴	۰
-۲	۴
۰	۰
۲	-۲
۴	۰



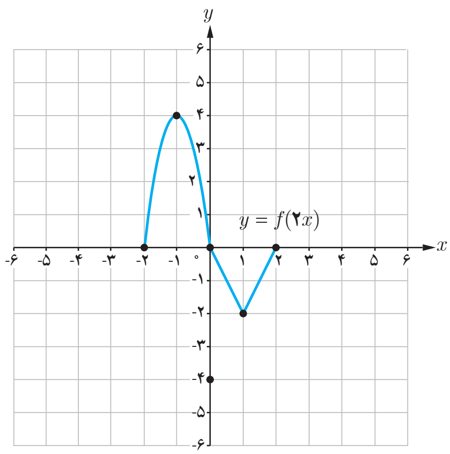
الف) برای تشخیص دامنهٔ $y=f(۲x)$ قرار می‌دهیم :

$$-۴ \le ۲x \le ۴ \rightarrow -۲ \le x \le ۲$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(۲x)$ بازهٔ $[-۲,۲]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.

برای رسم نمودار $f(۲x)$، طول نقاط یا همان xها باید محاسبه شود.

x	$۲x$	$f(۲x)$	$(x, f(۲x))$
-۲	-۴	۰	$(-۲,۰)$
...	-۲	۴	$(...,۴)$
...	۰	۰	$(...,۰)$
...	۲	-۲	$(...,-۲)$
...	۴	۰	$(...,۰)$

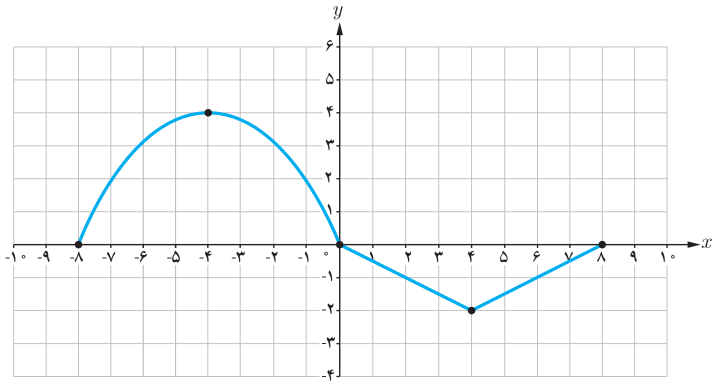


ب) برای تشخیص دامنهٔ $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ قرار می‌دهیم :

$$-۴ \le \frac{۱}{۲}x \le ۴ \rightarrow -۸ \le x \le ۸$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ بازهٔ $[-۸,۸]$ است و نقاط متناظر به‌صورت زیر است :

x	$f(\frac{۱}{۲}x)$
-۸	۰
-۴	۴
۰	۰
۴	-۲
۸	۰



همان‌طور که ملاحظه کردید برای رسم نمودار $y=f(۲x)$ طول هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ و برای رسم نمودار $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ طول هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم. یعنی دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ الزاماً یکی نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

کار در کلاس

با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ هر تابع را به نمودارش نظیر کنید. در هر مورد دامنه و برد را مشخص کنید.

الف) $y=-\sqrt{x}-۱$

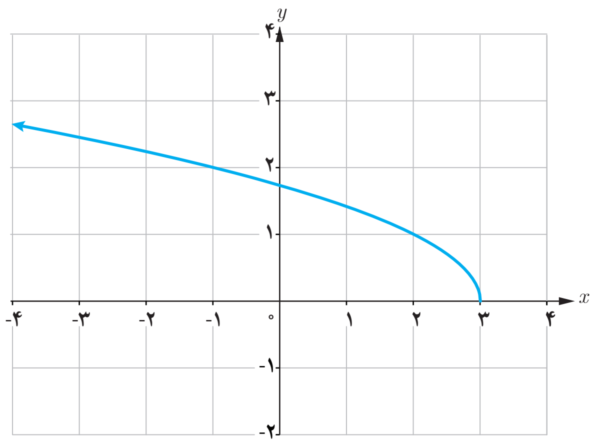
ب) $y=\sqrt{x}+۲$

پ) $y=\sqrt{x-۲}$

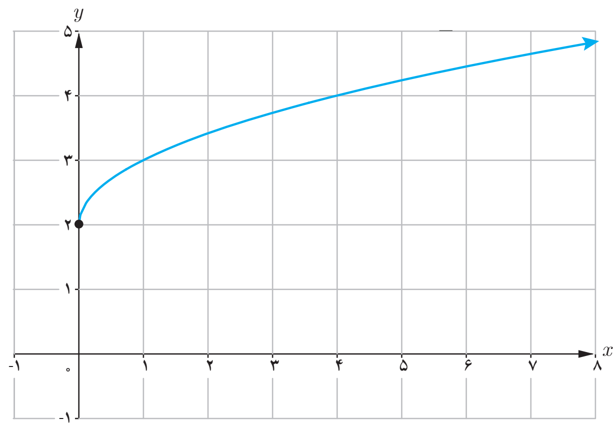
ت) $y=\sqrt{x+۴}$

ث) $y=\sqrt{۲x}$

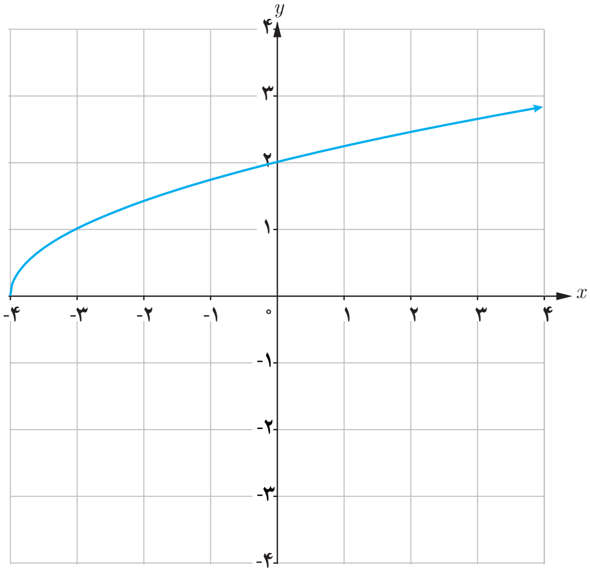
ج) $y=\sqrt{-x+۳}$



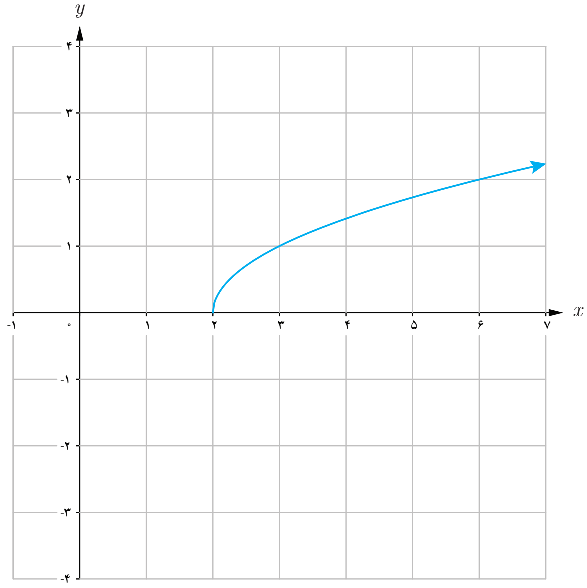
(۱)



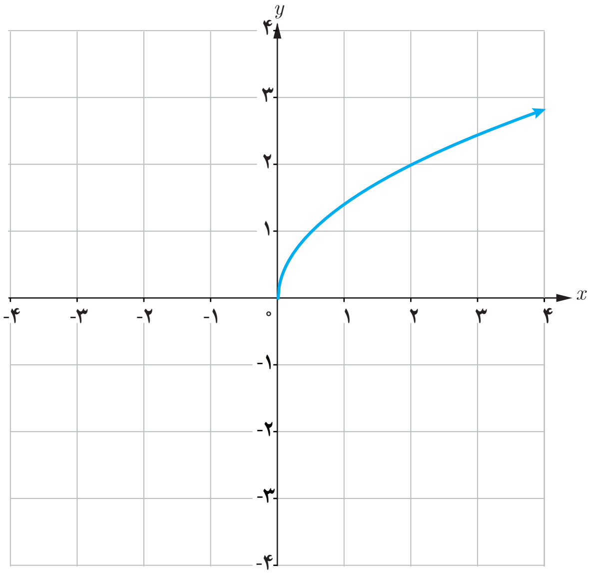
(۲)



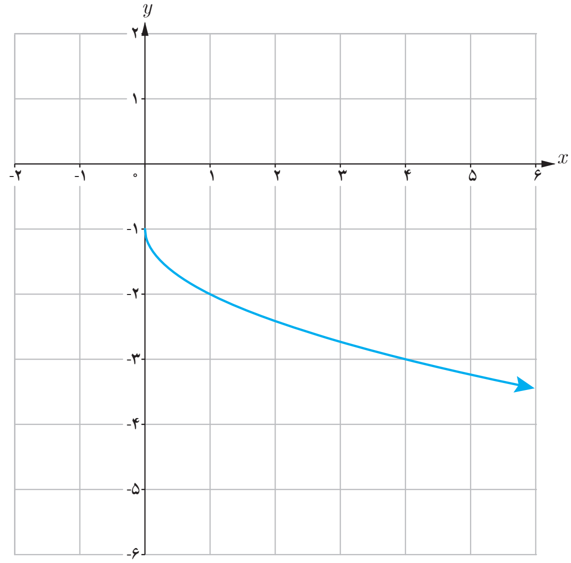
(۳)



(۴)

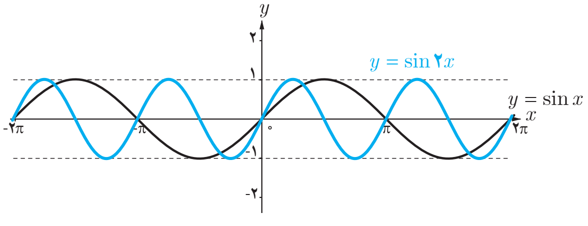


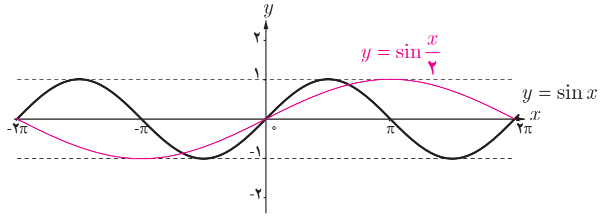
(۵)



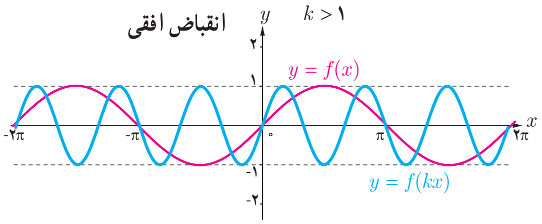
(۶)

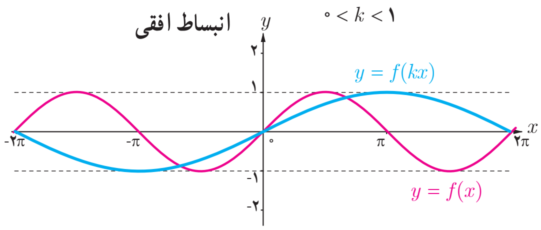
مثال : در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin\frac{x}{2}$ در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود نمودار $y=\sin 2x$ با انقباض در امتداد محورxها و نمودار $y=\sin\frac{x}{2}$ با انبساط در امتداد محورxها به‌دست آمده است.





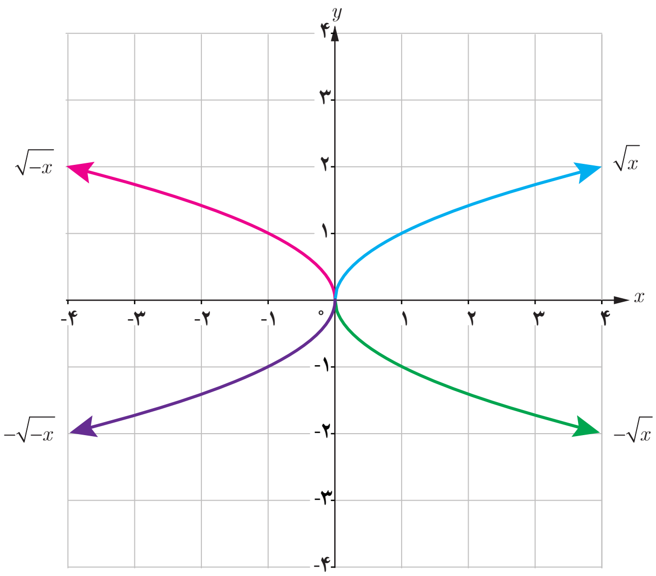
نمودار تابع $y=f(kx)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید : اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به‌دست آورد. در حالتی که $k>1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض و در حالتی که $k<1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود.





با توجه به آنچه که گفته شد نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور yهاست.

مثال : نمودار توابع $\sqrt{-x}$ و $-\sqrt{x}$ و $-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار تابع $\sqrt{x}$ رسم کنید.



دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

کار در کلاس

اگر $k<0$، نمودار تابع $f(kx)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ چگونه رسم می‌شود؟

تمرین

۱ اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$ ، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۲ در هر قسمت ضابطه‌های $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ و در صورت امکان $(fog)(۰)$ را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{x+۴}\ ;\ g(x)=x^{۲}$

ب) $f(x)=x^{۲}-۵\ ;\ g(x)=\sqrt{x+۶}$

پ) $f(x)=\sqrt{۳-۲x}\ ;\ g(x)=\dfrac{۶}{۳x-۵}$

ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}\ ;\ g(x)=\sqrt{x^{۲}-۱۶}$

ث) $f(x)=\sin x\ ;\ g(x)=\sqrt{x}$

ج) $f(x)=x\quad+\quad;\ g(x)=\cos x$

۳ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^{۲}-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$ ؛ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^{۲}$.

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت بر قرار نیست.

پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ ، آنگاه $(fog)(۴)=۳۵$.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$ ، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$.

۴ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام راه به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۵ تابع $h(x)=(۳x^{۲}-۴x+۱)^{۵}$ ترکیب کدام دو تابع است؟ حاصل $(fog)(x)$ است یا $(gof)(x)$ ؟

الف) $f(x)=\sqrt[۵]{x}\ ;\ g(x)=۳x^{۲}-۴x+۱$

ب) $f(x)=x^{۵}\ ;\ g(x)=۳x^{۲}-۴x+۱$

۶ توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}$

ب) $l(x)=\sqrt{x^{۲}+۵}$

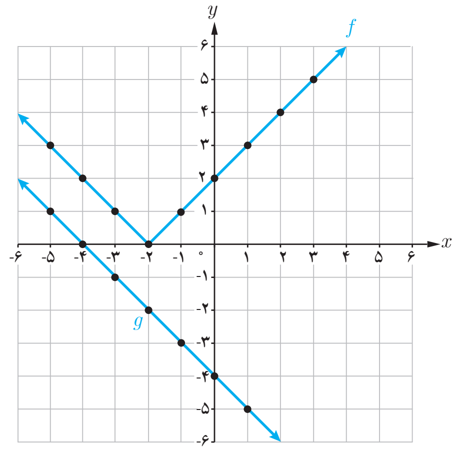
۷ با توجه به نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-۱)$

ب) $(gof)(۰)$

پ) $(fog)(۱)$

ت) $(gof)(-۱)$



۸ با توجه به ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x)=۲x-۵\ ,\ g(x)=x^۲-۳x+۸\quad :(fog)(x)=۷$

ب) $f(x)=۳x^۲+x-۱\ ,\ g(x)=۱-۲x\quad :(gof)(x)=-۵$

۹ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y=\cos ۲x$

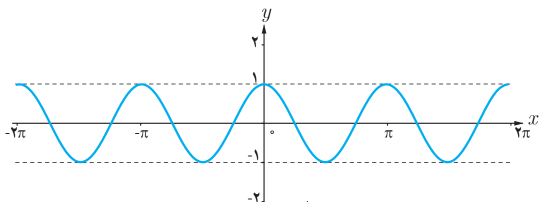
ب) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$

پ) $y=۲\cos ۲x$

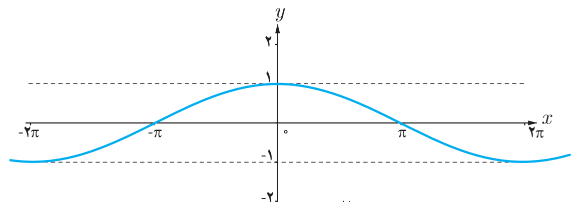
ت) $y=\cos(\frac{۱}{۳}x)$

ث) $y=-\cos ۲x$

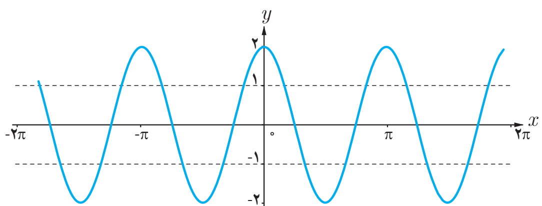
ج) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(\frac{۱}{۲}x)$



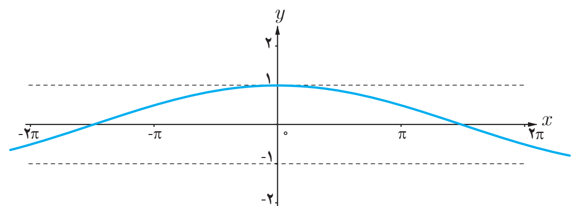
(۱)



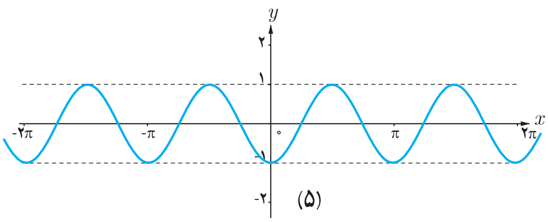
(۲)



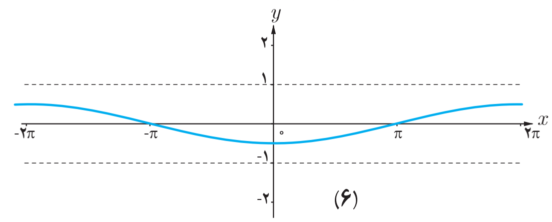
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

درس دوم

توابع چند جمله‌ای ــ توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای:

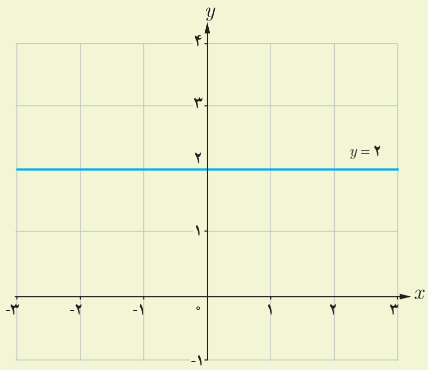
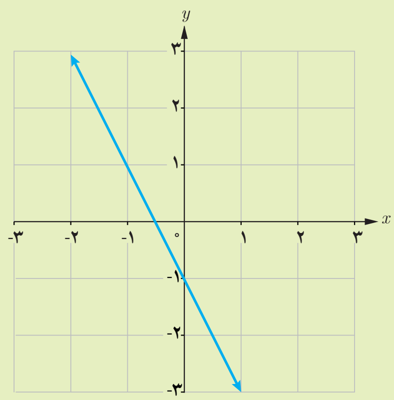
در سال‌های گذشته با توابع خطی آشنا شدید. هر تابع به‌صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$، تابع به‌صورت $f(x)=b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. تابع ثابت و تابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که توابع چند جمله‌ای نام دارند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چند جمله‌ای هستند.

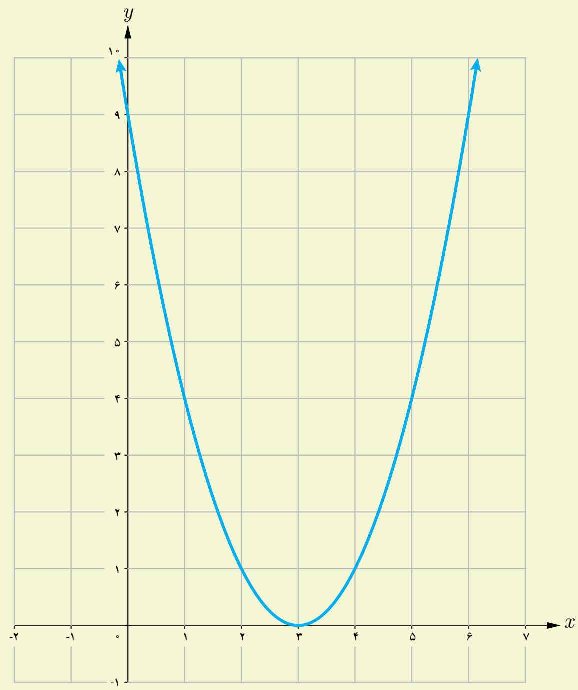
هر تابع به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن a_n و a_{n-1} و $\cdots$ و a_2 و a_1 و a_0 اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$، یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند. دامنهٔ توابع چند جمله‌ای مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

مثال : توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای هستند که به‌ترتیب از درجهٔ ۱، ۲ و ۳ و ۵ هستند.

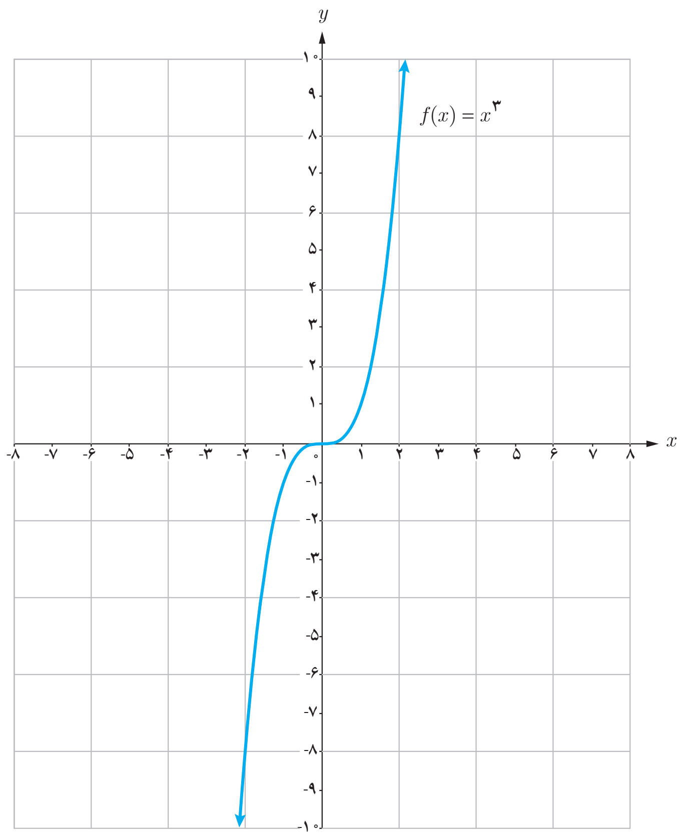
$$y=3x+5 \quad , \quad y=-8x^2+2x-\frac{1}{2} \quad , \quad y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x \quad , \quad y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$$

انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌اید به‌صورت زیر است :

درجهٔ تابع	نام تابع	ضابطهٔ کلی	مثال
۰	ثابت	$f(x)=a$	$f(x)=2$ 
۱	خطی	$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$	$f(x)=-2x-1$ 

	$f(x)=x^{۲}-۶x+۹$	$f(x)=ax^{۲}+bx+c$ $(a\neq ۰)$	درجهٔ ۲	۲

تابع چند جمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d\ (a\neq ۰)$ یک تابع درجهٔ ۳ است که در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x)=x^{۳}$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم :



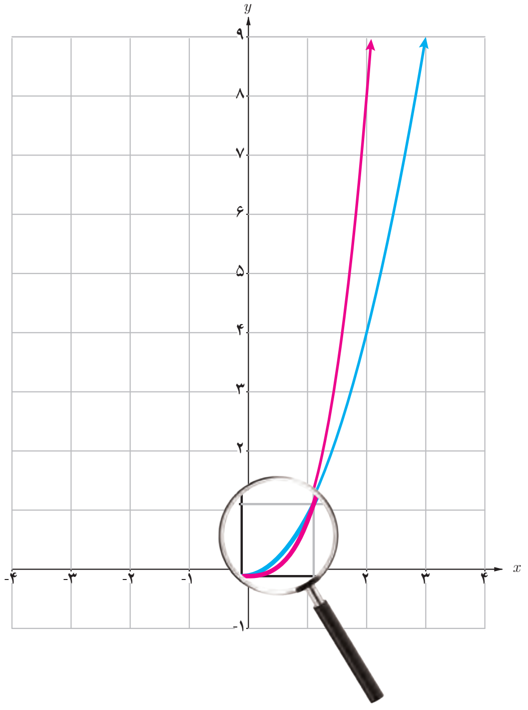
x	$f(x)=x^{۳}$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۸}$
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
۲	۸

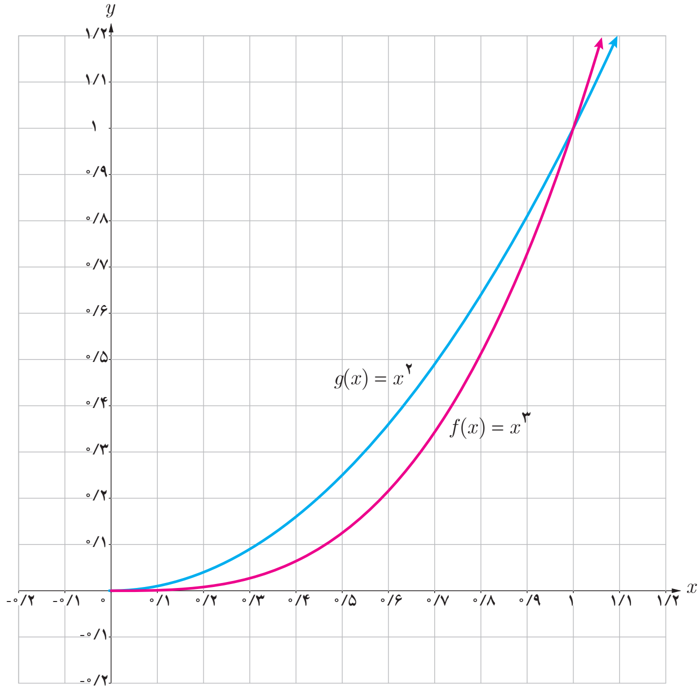
فعالیت

با توجه به نمودار توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند :

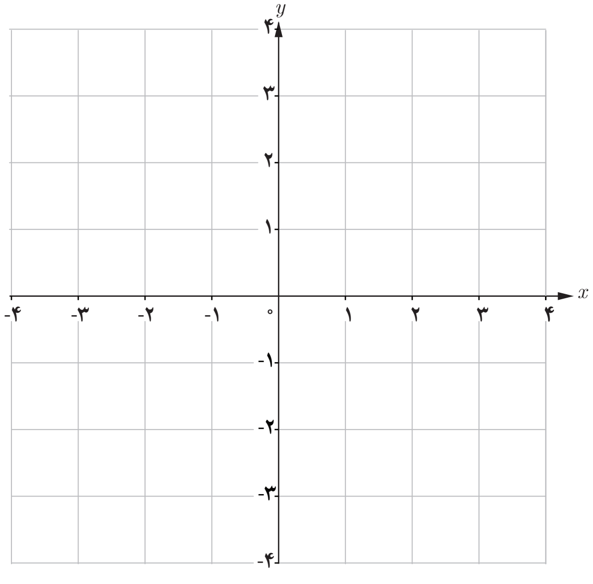
الف) آیا برای تمام xهای نامنفی، نمودار x^3 بالای نمودار x^2 قرار دارد؟

ب) نمودار را برای xهای منفی رسم کنید.





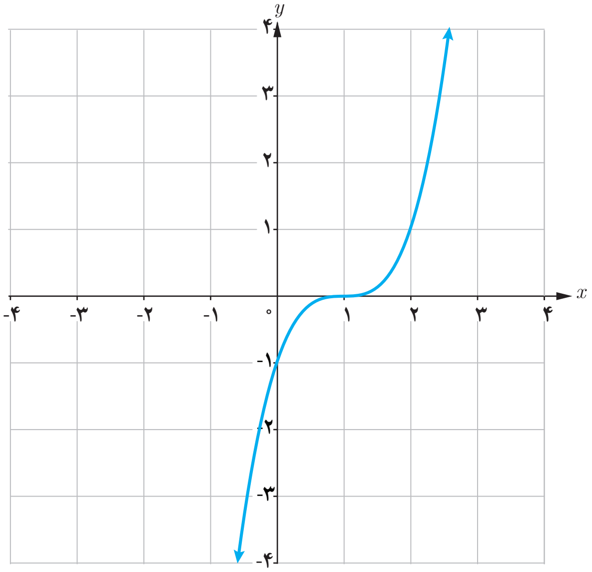
پ) آیا تابع $f(x)=x^3$ یک به یک است؟ اگر جواب مثبت است در دستگاه مختصات زیر $f(x)=x^3$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطهٔ تابع وارون چیست؟



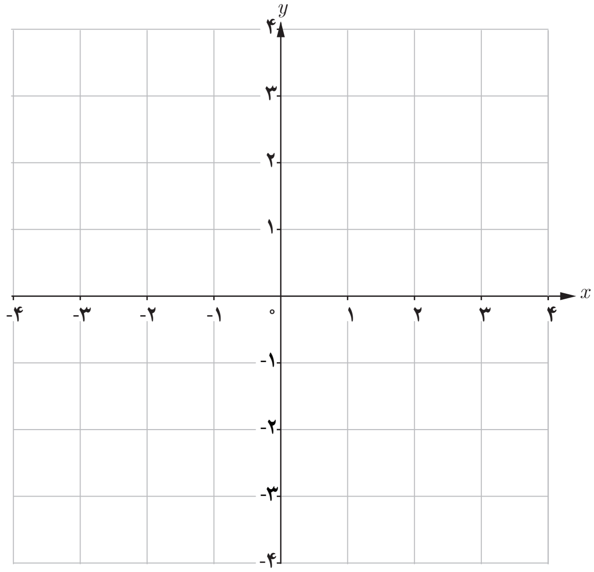
فعالیت

با استفاده از قوانین انتقال نمودار توابع و با کمک نمودار تابع $f(x)=x^{3}$، نمودار توابع ب و پ را رسم کنید. دامنه و برد توابع را مشخص کنید.

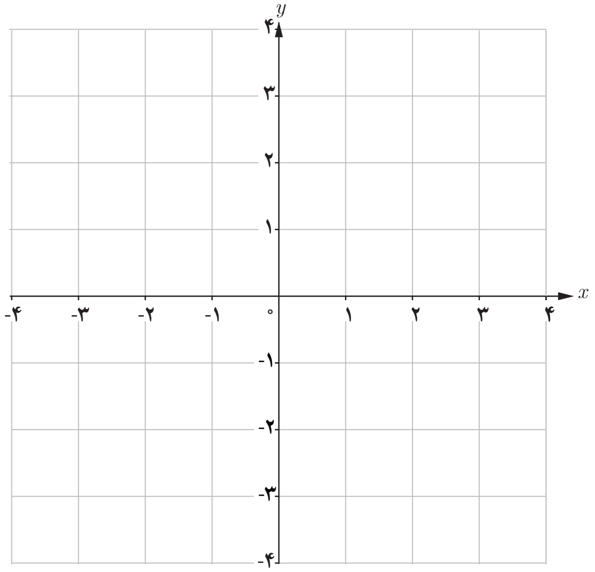
الف) $y=(x-1)^{3}$



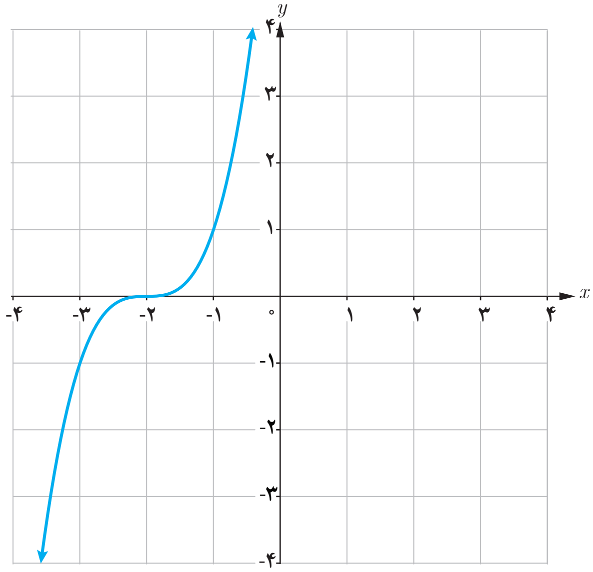
ب) $y=x^{3}-1$



پ) $y=-x^{3}+2$



ت) $y=(x+2)^{3}$



کار در کلاس

ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y=(x+1)^3$

ب) $y=x^3-2$

پ) $y=-x^3-1$

ت) $y=x^3+1$

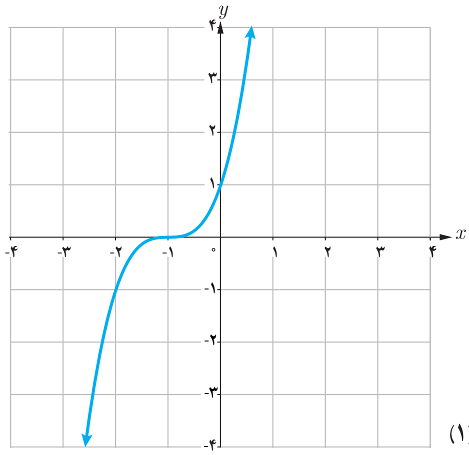
ث) $y=-x^3$

ج) $y=(x-1)^3+2$

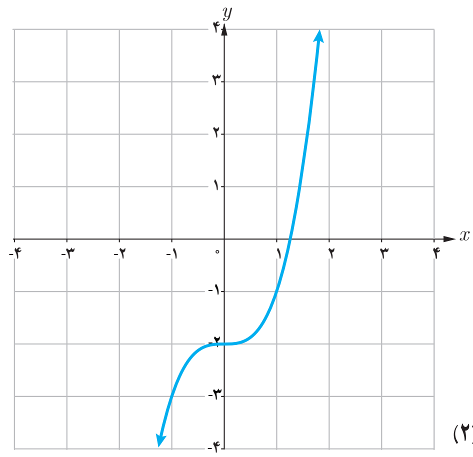
چ) $y=(x+1)^3-1$

ح) $y=-x^3+1$

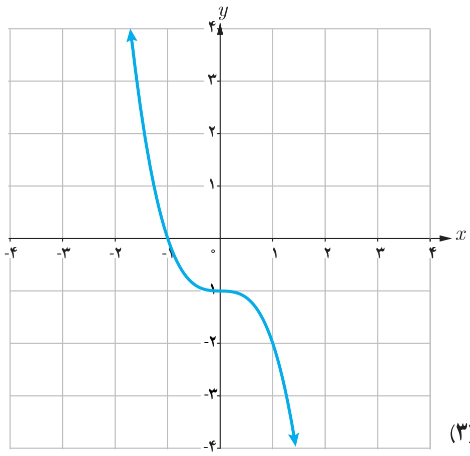
خ) $y=(x-2)^3$



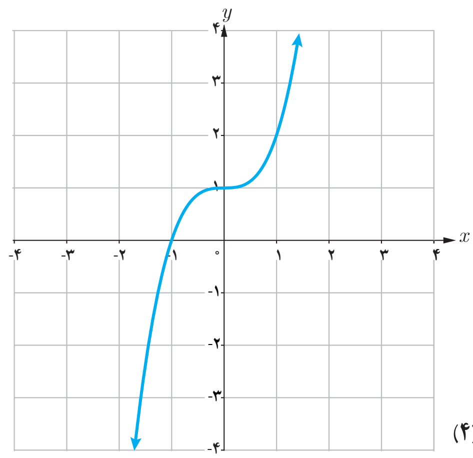
(۱)



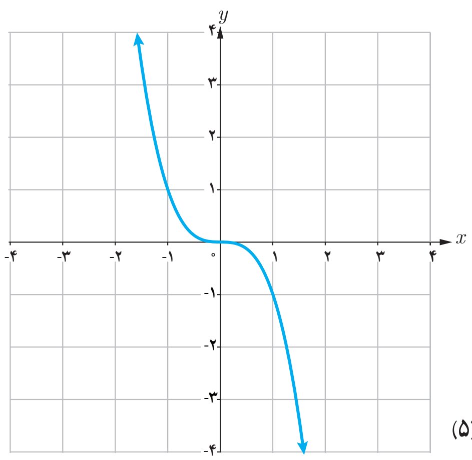
(۲)



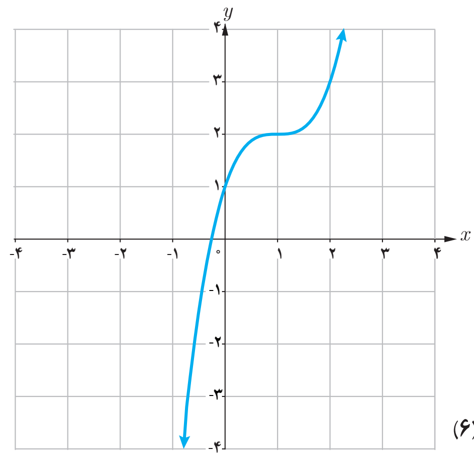
(۳)



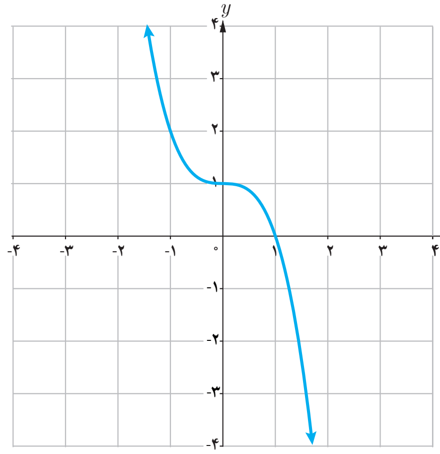
(۴)



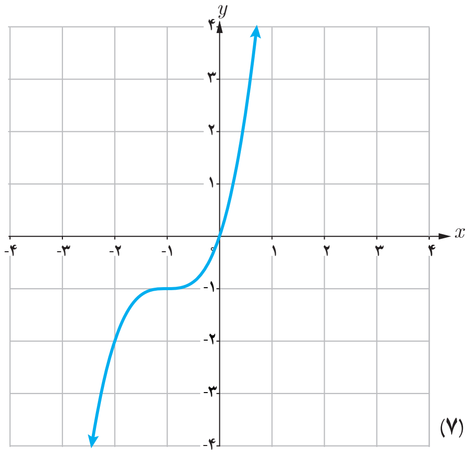
(۵)



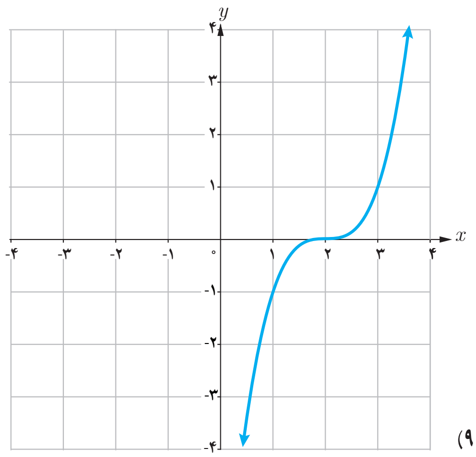
(۶)



(۸)



(۷)



(۹)

در سال‌های گذشته با اتحادهای جبری و تجزیهٔ آنها آشنا شدید. فرم کلی آنها چند جمله‌ای است :

$$x^{2}-a^{2}=(x-a)(x+a)$$

$$x^{3}-a^{3}=(x-a)(x^{2}+ax+a^{2})$$

فعالیت

آیا می‌توانید مشابه اتحادهای مثال قبل، عوامل چند جمله‌ای $x^{4}-a^{4}$ را نیز به‌دست آورید؟

$$x^{4}-a^{4}=(x-a)(\cdots+ax^{2}+\cdots+a^{3})$$

برای پر کردن جاهای خالی می‌توانید از تقسیم چند جمله‌ای $x^{4}-a^{4}$ بر چند جمله‌ای $x-a$ استفاده کنید.

کار در کلاس

برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n، چند جمله‌ای زیر را درنظر بگیرید :

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1}$$

عبارت $as - s$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

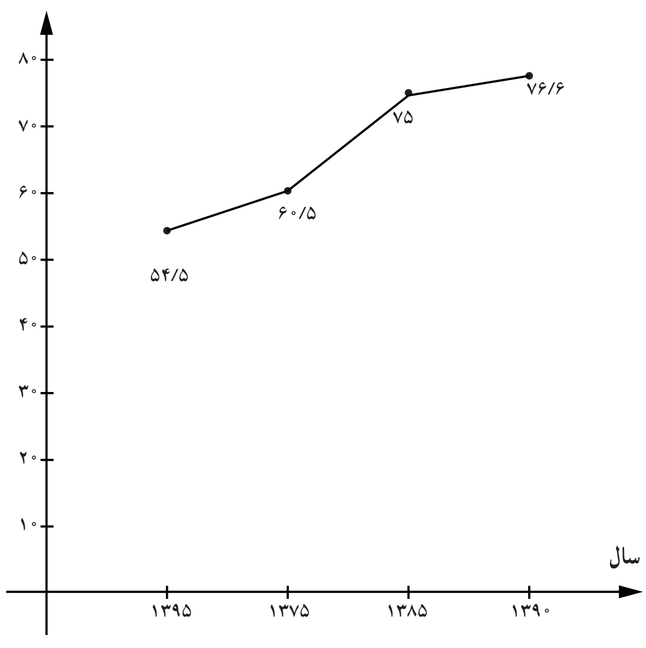
سپس به کمک اتحاد قبل، اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}.b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

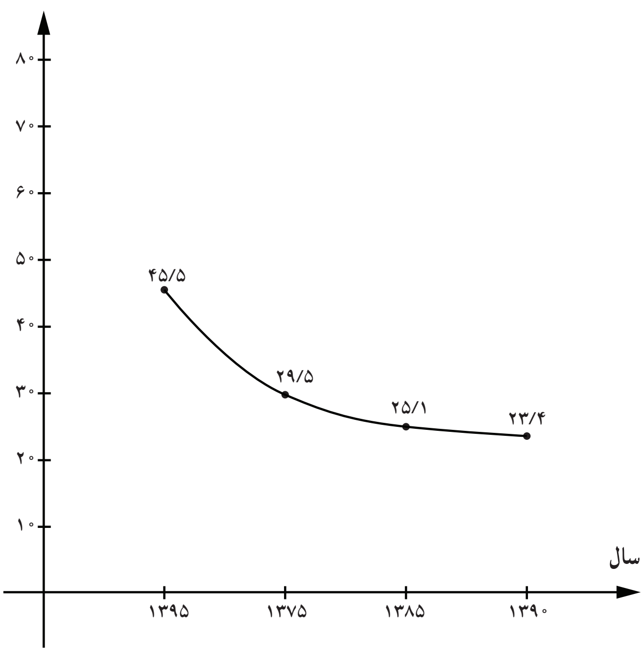
توابع صعودی و نزولی:

فعالیت

یکی از مسائلی که این روزها به‌عنوان یکی از دغدغه‌های مهم و اصلی مطرح می‌شود بحث کاهش قابل توجه رشد جمعیت کشور و پیری جمعیت جامعه ایران در آینده است. روند تغییرات دو گروه سنی در نمودارهای زیر نشان داده شده است.



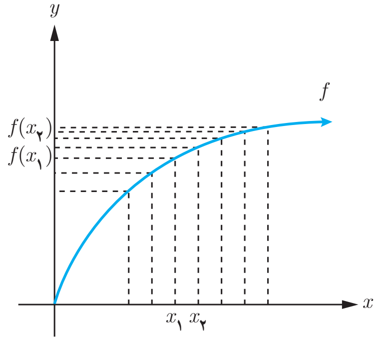
نمودار جمعیت ۱۵ سال به بالا



نمودار جمعیت ۱۴ــ۰ سال

همان‌طور که در نمودارهای بالا مشاهده می‌کنید جمعیت ۱۵ سال به بالای کشورمان از سال ۱۳۶۵ به بعد افزایش یافته است. می‌توان گفت جمعیت ۱۵ سال به بالای ایران از سال ۱۳۶۵ تا ۱۳۹۰ روندی صعودی داشته است.

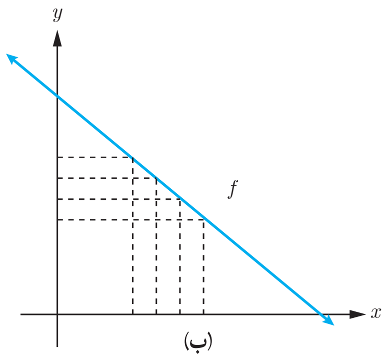
الف) جمعیت ۰ تا ۱۴ سال در ایران از سال ۱۳۶۵ تا ۱۳۷۵ چه روندی داشته است؟
از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۰ چطور؟
ب) جمعیت بالای ۱۵ سال کشورمان از سال ۱۳۷۵ تا ۱۳۸۵ چه روندی داشته است؟
از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۰ چطور؟



(الف)

به نمودار روبه‌رو دقت کنید :
در نمودار (الف) وقتی مقدار x در دامنهٔ تابع f افزایش می‌یابد، مقدار y نیز افزایش می‌یابد، به این توابع اکیداً صعودی می‌گوییم.
در این نمودار اگر x_1 از x_2 کوچک‌تر باشد، $f(x_1)$ نیز از $f(x_2)$ کوچک‌تر است.

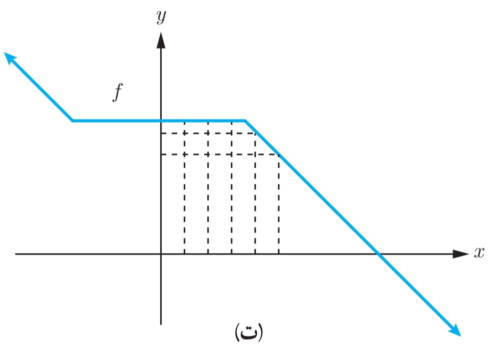
$$x_1, x_2 \in D_f \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



(ب)

در نمودار (ب) با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع f، مقدار y کاهش می‌یابد. به این توابع اکیداً نزولی می‌گوییم. به بیان دیگر :

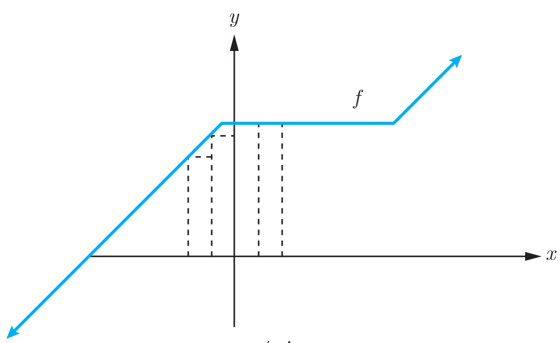
$$x_1, x_2 \in D_f \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



(ت)

در نمودار (ت) با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع، مقدار y یا کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند، به این توابع نزولی می‌گوییم.

$$x_1, x_2 \in D_f \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



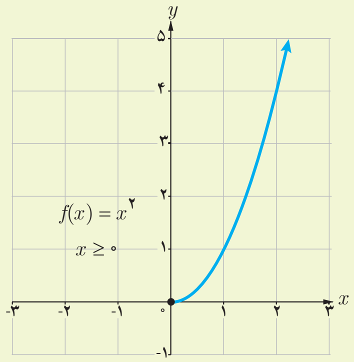
(پ)

در نمودار (پ) با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع، مقدار y یا افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند، به این توابع صعودی می‌گوییم.

$$x_1, x_2 \in D_f \ , \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

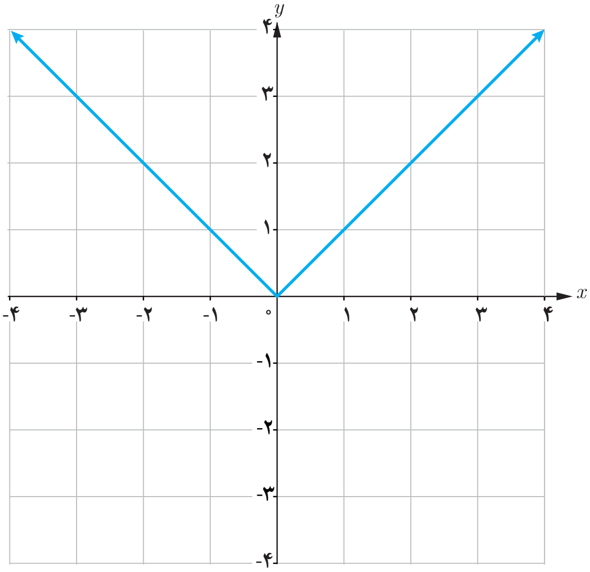
کار در کلاس

در حالت کلی جدول زیر را داریم، جاهای خالی را کامل کنید.

توابع اکیداً صعودی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	
توابع اکیداً نزولی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	
توابع صعودی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	
توابع نزولی	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	

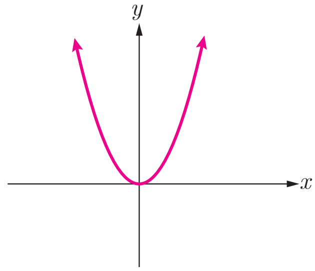
ممکن است تابعی در یک بازهٔ صعودی (اکیداً) و در بازهٔ دیگر نزولی (اکیداً) باشد.

مثال : تابع $f(x)=|x|$ در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.

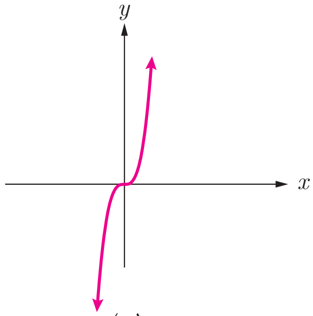


کار در کلاس

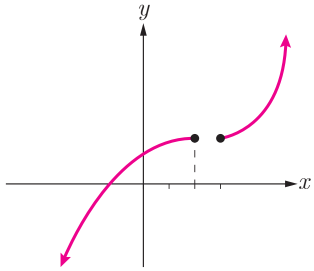
در هر کدام از توابع زیر مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی (اکیداً) و در چه بازه‌هایی نزولی (اکیداً) هستند؟



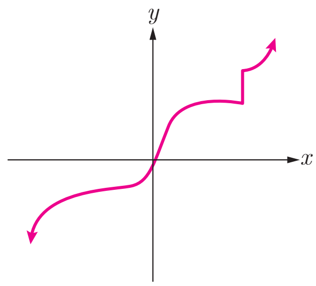
(پ)



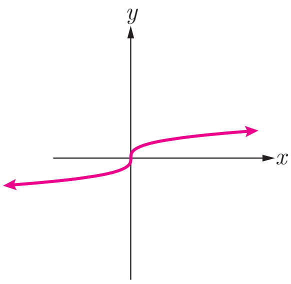
(ب)



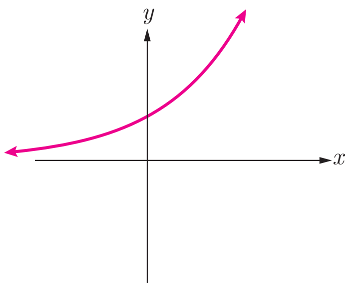
(الف)



(ج)



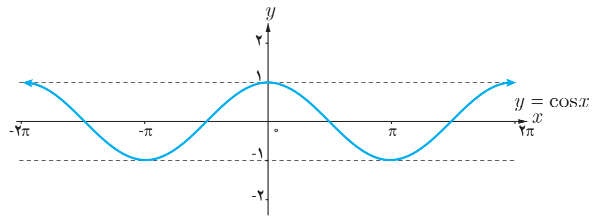
(ث)

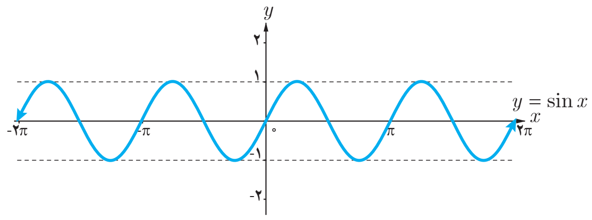


(ت)

کار در کلاس

نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های جدول‌ها مشخص نمایید.





x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},۰]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y=\sin x$					صعودی			

x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},۰]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y=\cos x$							صعودی	

کار در کلاس

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x)=x^۲$

ب) $g(x)=x+|x|$

پ) $h(x)=\sqrt{x}$

ت) $l(x)=\frac{۱}{x}$

ث) $k(x)=x^۳$

ج) $t(x)=-x^۳$

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد می‌گوییم در این بازه اکیداً یکنواست.

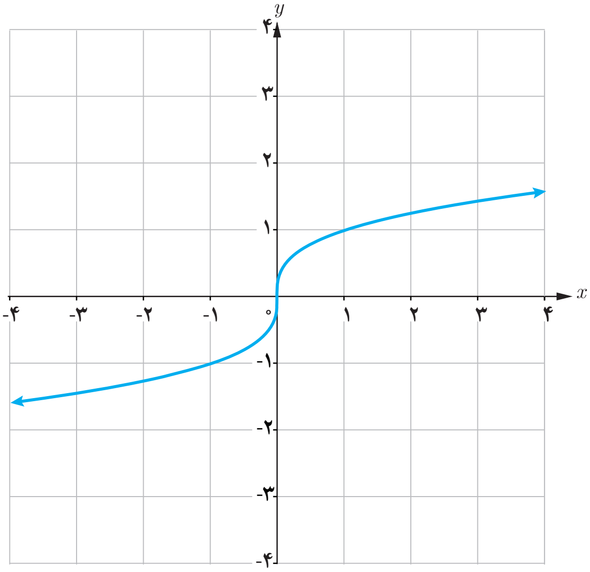
اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی باشد می‌گوییم در این بازه اکیداً یکنواست.

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ صعودی باشد می‌گوییم در این بازه یکنواست.

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ نزولی باشد می‌گوییم در این بازه یکنواست.

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ نه صعودی باشد نه نزولی، به آن تابع غیر یکنوا گوییم.

فعالیت



به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) آیا این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

ب) آیا این تابع یک به یک است؟

پ) آیا می‌توانید تابعی رسم کنید که اکیداً صعودی باشد ولی یک به یک نباشد؟

تمرین

۱) توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

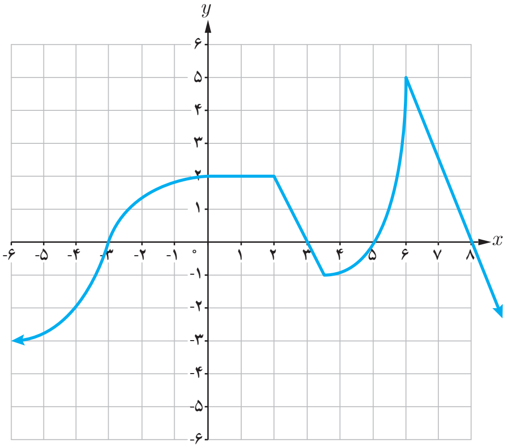
الف) $y=(x-۱)^{۳}-۱$ ب) $y=(x+۲)^{۳}-۲$

۲) عبارت $a^{۵}-b^{۵}$ را تجزیه کنید.

۳) تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\leq x<۲\\ ۳x-۲ & x\geq ۲\end{cases}$$

۴) با استفاده از نمودار تابع روبه‌رو مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



۵) تابع نمایی $y=۲^{x}-۲$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_{۲}^{x}+۲$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی یا غیر یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۶) تابع $y=x\,|x|$ در چه بازه‌ای صعودی است؟ در چه بازه‌ای نزولی است؟

۷) دو تابع مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی باشند و در تابع مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشند.

۸) ضابطهٔ تابعی را بنویسید که در دامنهٔ خود غیر یکنوا باشد.

درس سوم

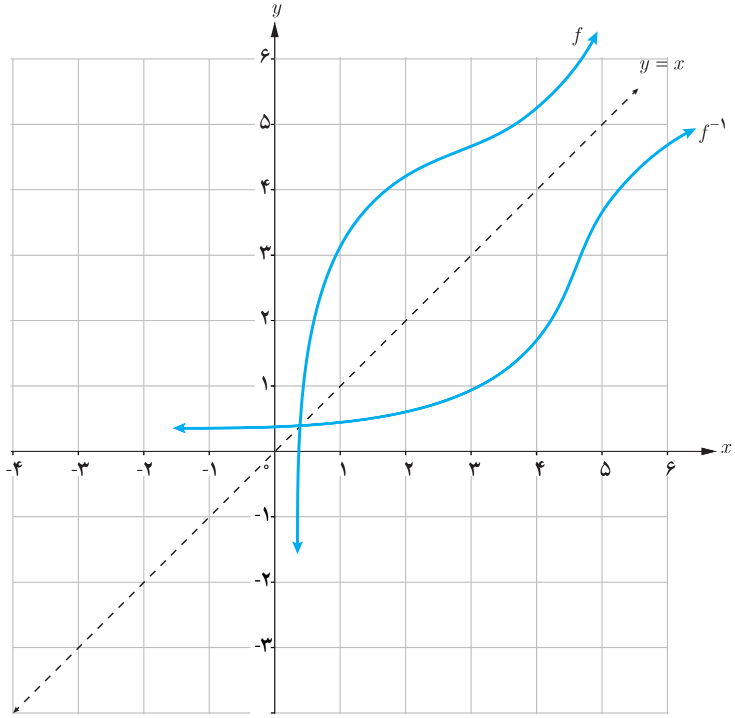
وارون تابع

یادآوری

همان‌طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ ملاحظه کردید با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک‌به‌یک f، تابعی جدید به‌دست می‌آید که وارون تابع f است که آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ $(a\ ,b)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ $(b\ ,a)$ روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد :

$$(a\ ,b)\in f \Rightarrow (b\ ,a)\in f^{-1}$$

بنابراین نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.



مثال :

اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ آن‌گاه :

$$f^{-1}=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

خواهیم داشت :

$$\begin{cases}(fof^{-1})(۴)=f\left(f^{-1}(۴)\right)=f(۱)=۴\\(fof^{-1})(۳)=f\left(f^{-1}(۳)\right)=f(۲)=۳\\(fof^{-1})(۵)=f\left(f^{-1}(۵)\right)=f(۳)=۵\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f^{-1} داریم :

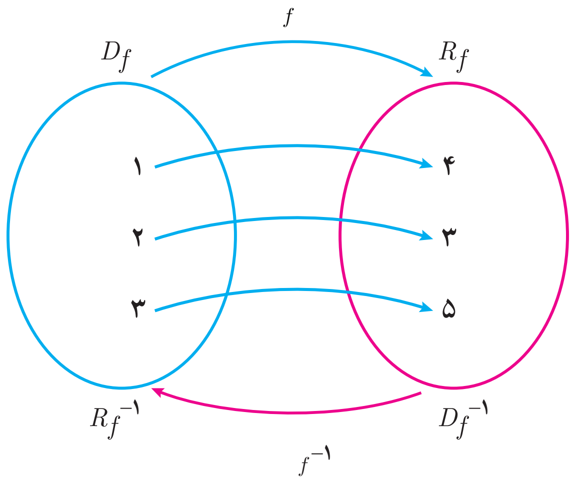
$$(fof^{-1})(x)=x$$

همچنین :

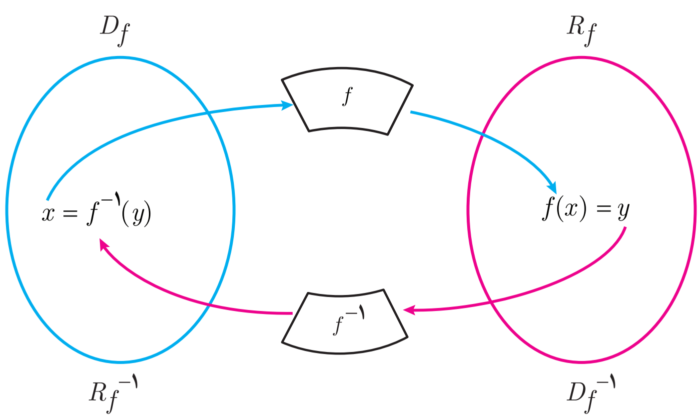
$$\begin{cases}(f^{-۱}of)(۱)=f^{-۱}\big(f(۱)\big)=f^{-۱}(۴)=۱\\(f^{-۱}of)(۲)=f^{-۱}\big(f(۲)\big)=f^{-۱}(۳)=۲\\(f^{-۱}of)(۳)=f^{-۱}\big(f(۳)\big)=f^{-۱}(۵)=۳\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f داریم :

$$(f^{-۱}of)(x)=x$$



به‌طور کلی اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد و $f^{-۱}$ تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و $f^{-۱}$ را نشان می‌دهد.



اگر f تابعی وارون‌پذیر و $f^{-۱}$ وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f\big(f^{-۱}(x)\big)=x : x\in D_{f^{-۱}}$$

$$f^{-۱}\big(f(x)\big)=x : x\in D_f$$

برعکس اگر دو تابع در دو تساوی فوق صدق کنند، آنگاه یک‌به‌یک هستند و وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x)=۳x-۴$$

$$g(x)=\frac{x+۴}{۳}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=۳g(x)-۴=۳(\frac{x+۴}{۳})-۴=x$$

همچنین :

$$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=\frac{f(x)+۴}{۳}=\frac{۳x-۴+۴}{۳}=x$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.[۱]

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$ ، دامنه و برد توابع f و $f^{-۱}$ را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را نیز به‌دست آورید.

تابع f یک‌به‌یک است، بنابراین دارای وارون است.

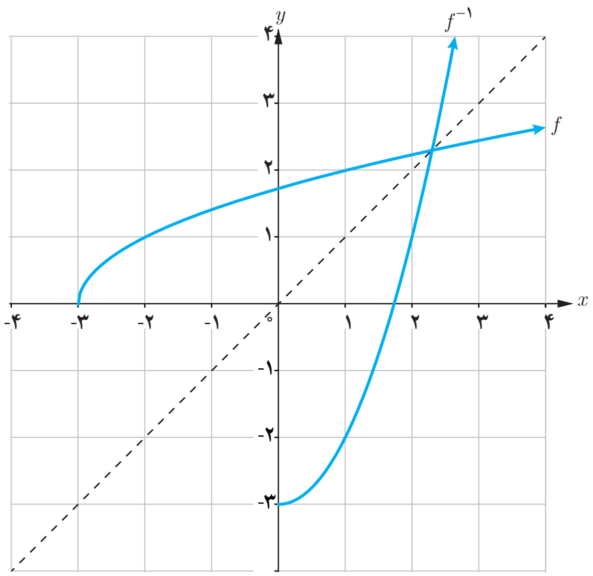
$$\begin{cases}D_f=[-۳,+\infty)\\R_{f^{-۱}}=[-۳,+\infty)\end{cases}\qquad\begin{cases}R_f=[۰,+\infty)\\D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)\end{cases}$$

$$y=\sqrt{x+۳}$$

$$y^۲=x+۳$$

$$x=y^۲-۳$$

$$f^{-۱}(x)=x^۲-۳$$



۱ــ توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجهٔ ۲، $\sqrt{ax+b}$، $x^۳$، $\sqrt[۳]{x}$ است.

کار در کلاس

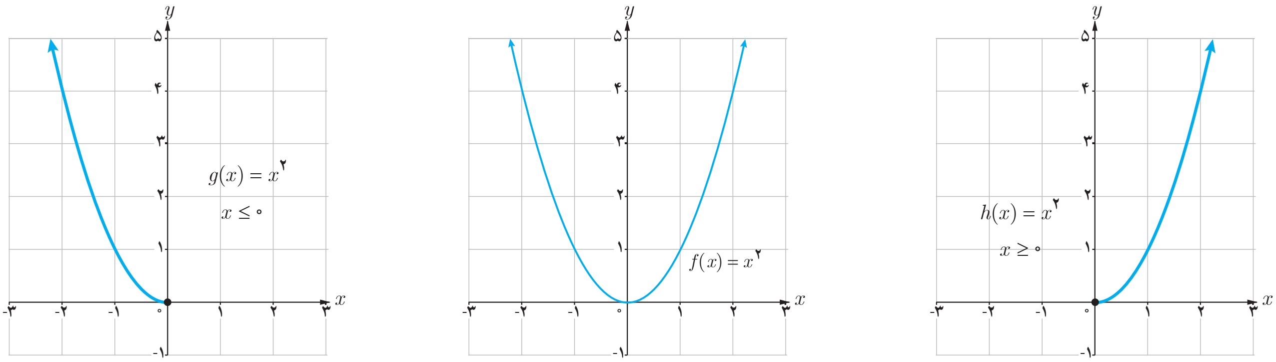
ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

الف) $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$

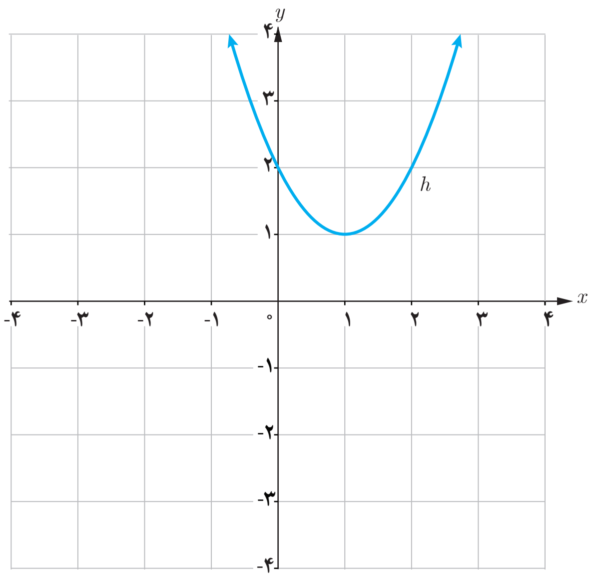
ب) $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$

پ) $h(x)=x^۲+۱$

از سال قبل می‌دانید که اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می‌توان تابعی یک‌به‌یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^۲$ یک‌به‌یک نیست ولی با محدود کردن دامنهٔ تابع به بازهٔ $[۰\,,+\infty)$ و یا $(-\infty\,,۰]$ تابعی یک‌به‌یک به‌دست می‌آید.



مثال: نمودار تابع $h(x)=x^۲-۲x+۲$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.



$$h(x)=x^۲-۲x+۲=(x-۱)^۲+۱$$

مثلاً دامنهٔ تابع f را به بازهٔ $[۱\,,+\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع h مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع k بازهٔ $[۱\,,+\infty)$ است.

در تابع k، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$k(x)=(x-۱)^۲+۱$$

$$y=(x-۱)^۲+۱$$

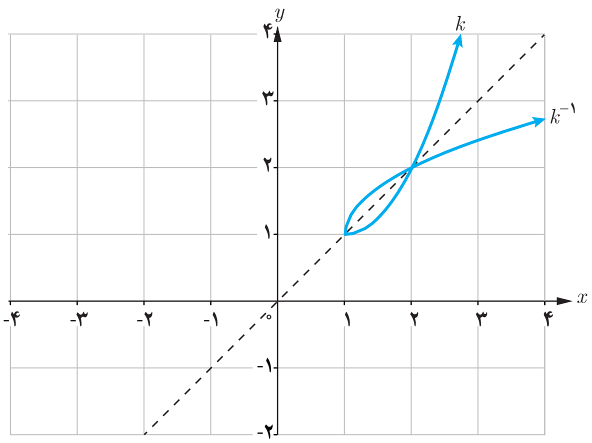
$$(x-۱)^۲=y-۱$$

$$x-۱=\pm\sqrt{y-۱}$$ جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟)

$$x=\sqrt{y-۱}+۱$$

$$k(x)=\sqrt{x-۱}+۱$$

نمودار k و $k^{-۱}$ به‌صورت زیر است :



مثال : اگر $f=\left\{(۰,-۱),(۲,\frac{۱}{۲}),(-۳,\sqrt{۲}),(۱,۵)\right\}$ و $g=\left\{(-۱,-۳),(۵,۲),(\frac{۱}{۲},۰),(۴,۶)\right\}$ توابع زیر را به‌دست آورید :

الف) $f^{-۱}=\left\{(-۱,۰),(\frac{۱}{۲},۲),(\sqrt{۲},-۳),(۵,۱)\right\}$

ب) $g^{-۱}=\left\{(-۳,-۱),(۲,۵),(۰,\frac{۱}{۲}),(۶,۴)\right\}$

پ) $(fog)^{-۱}$

$$fog:\begin{cases}(fog)(-۱)=f\left(g(-۱)\right)=f(-۳)=\sqrt{۲}\\(fog)(۵)=f\left(g(۵)\right)=f(۲)=\frac{۱}{۲}\\(fog)(\frac{۱}{۲})=f\left(g(\frac{۱}{۲})\right)=f(۰)=-۱\\(fog)(۴)=f\left(g(۴)\right)=f(۶)\quad \text{تعریف نشده}\end{cases}$$

$$fog=\left\{\left(-۱,\sqrt{۲}\right),\left(۵,\frac{۱}{۲}\right),\left(\frac{۱}{۲},-۱\right)\right\}$$

$$(fog)^{-۱}=\left\{\left(\sqrt{۲},-۱\right),\left(\frac{۱}{۲},۵\right),\left(-۱,\frac{۱}{۲}\right)\right\}$$

ت) $$g^{-۱}of^{-۱}:\begin{cases}(g^{-۱}of^{-۱})(-۱)=g^{-۱}\left(f^{-۱}(-۱)\right)=g^{-۱}(۰)=\frac{۱}{۲}\\(g^{-۱}of^{-۱})(\frac{۱}{۲})=g^{-۱}\left(f^{-۱}(\frac{۱}{۲})\right)=g^{-۱}(۲)=۵\\(g^{-۱}of^{-۱})(\sqrt{۲})=g^{-۱}\left(f^{-۱}(\sqrt{۲})\right)=g^{-۱}(-۳)=-۱\\(g^{-۱}of^{-۱})(۵)=g^{-۱}\left(f^{-۱}(۵)\right)=g^{-۱}(۱)\quad \text{تعریف نشده}\end{cases}$$

$$g^{-۱}of^{-۱}=\left\{(-۱,\frac{۱}{۲}),\ (\frac{۱}{۲},۵),\ (\sqrt{۲},-۱)\right\}$$

همان‌طور که می‌بینید دو تابع $(fog)^{-۱}$ و $g^{-۱}of^{-۱}$ مساوی‌اند.

کار در کلاس

اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۲x-۵$، ضابطه توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $g^{-۱}of^{-۱}$ ب) $f^{-۱}og^{-۱}$

پ) $(fog)^{-۱}$ ت) $(gof)^{-۱}$

کار در کلاس

درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید.

الف) اگر f یک‌به‌یک باشد آنگاه $f^{-۱}$ نیز یک‌به‌یک است.

ب) اگر f تابعی یک‌به‌یک و صعودی باشد، آنگاه $f^{-۱}$ نیز صعودی است.

پ) اگر g تابعی یک‌به‌یک و نزولی باشد، آنگاه $g^{-۱}$ نیز نزولی است.

تمرین

۱) ضابطهٔ تابع وارون توابع یک‌به‌یک زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{-۸x+۳}{۲}$

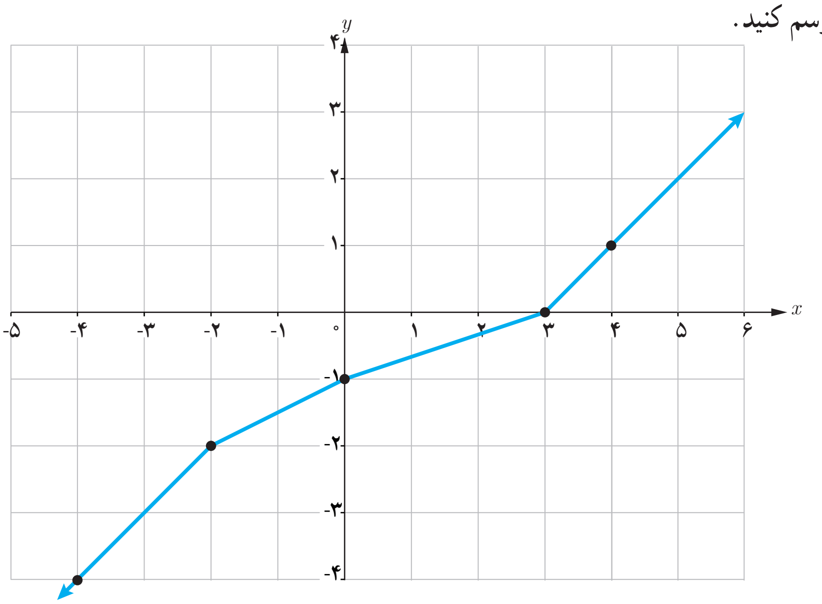
ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

۲) در مورد هر کدام از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\dfrac{-۷}{۲}x-۳$, $g(x)=-\dfrac{۲x+۶}{۷}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸}$, $g(x)=۸+x^{۲} \; x\leq ۰$

۳) وارون تابع زیر را رسم کنید.



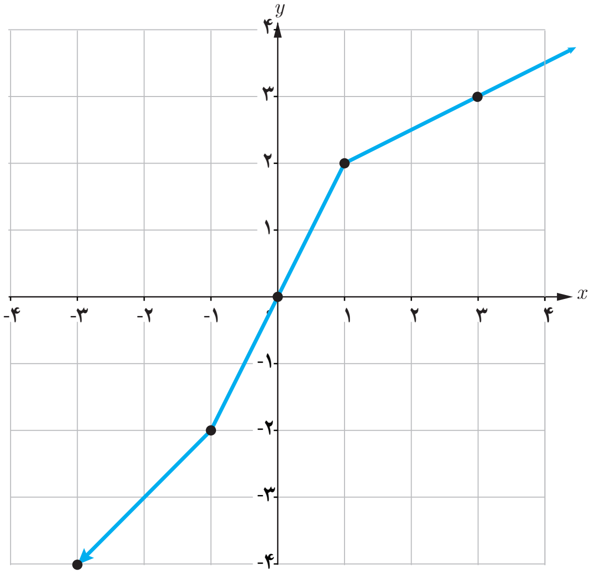
۴ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. حداقل به دو صورت از آنها تابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^۲$

پ) $h(x) = x^۲ + ۴x + ۳$

۵ از نمودار روبه‌رو برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	...	...	...	...

آیا با توجه به این جدول می‌توانید نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید؟

۶ اگر $f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳$ و $g(x) = x^۳$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(f^{-۱}og^{-۱})(۱)$

ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$

پ) $(fog)^{-۱}(۵)$

ت) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$