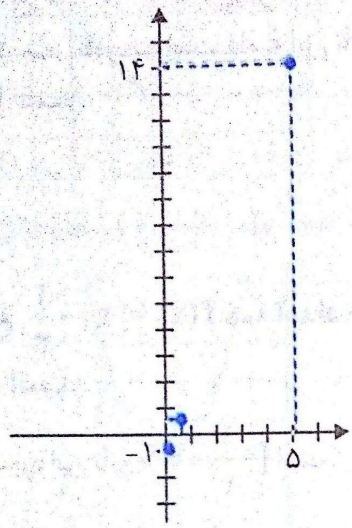
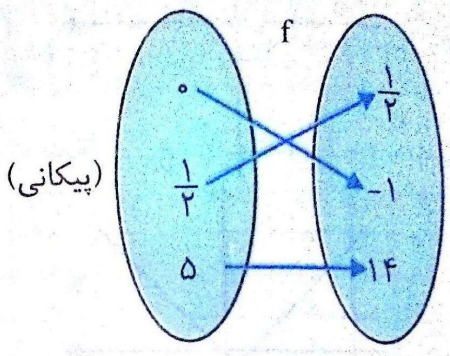
برد g = [-۱, +∞)

تمرین ۱۱۵

۱- تابع $f(x) = ۳x - ۱$ را که دامنهٔ آن مجموعه $\{\frac{۱}{۲}, ۰, ۵\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به‌دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید. اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟





(پیکانی)

مهدی وکس گالبو

برد f $= \{-۱, \frac{۱}{۲}, ۱۴\}$

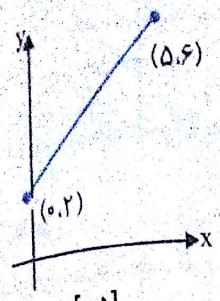
$f = \{(۰, -۱), (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}), (۵, ۱۴)\}$

اگر دامنه $\mathbb{R}$ باشد، برد f هم $\mathbb{R}$ خواهد بود و نمودار تابع f یک خط راست پیوسته خواهد بود.

Scanned by CamScanner

۲- در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به‌صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.

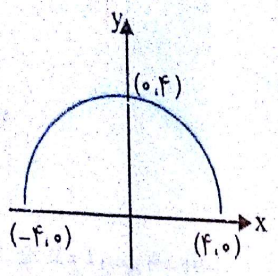
الف)



دامنه = [۰،۵]

برد = [۲،۶]

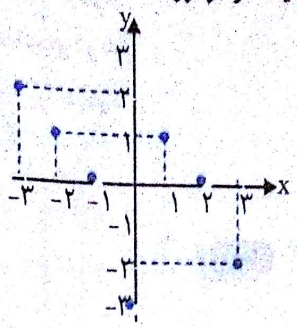
ب)



دامنه = [-۴،۴]

برد = [۰،۴]

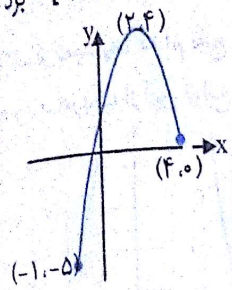
پ)



دامنه = {-۳،-۲،-۱،۰،۱،۲،۳}

برد = {-۳،-۲،۰،۱،۲}

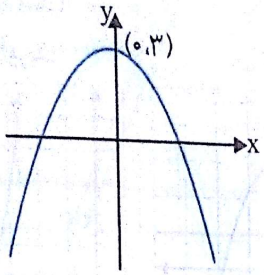
ت)



دامنه = [-۱،۴]

برد = [-۵،۴]

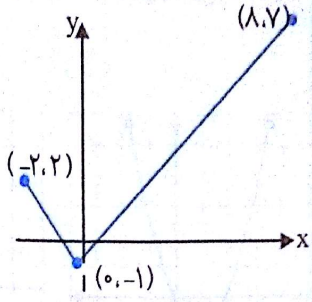
ث)



دامنه = $\mathbb{R}$

برد = (-∞،۳]

ج)



دامنه = [-۲،۸]

برد = [-۱،۷]

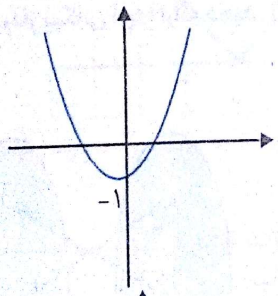
نمایش جبری (ضابطه) تابع قسمت (الف):

$$\begin{cases} \text{شیب خط} = \dfrac{۶-۲}{۵-۰} = \dfrac{۴}{۵} \\ \text{عرض از مبدأ} = ۲ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{۴}{۵}x + ۲$$

نمایش جبری (ضابطه) تابع قسمت (ج): $f(x) = \begin{cases} x - ۱ \ , & ۰ \le x \le ۸ \\ \dfrac{-۳}{۲}x - ۱ \ , & -۲ \le x < ۰ \end{cases}$

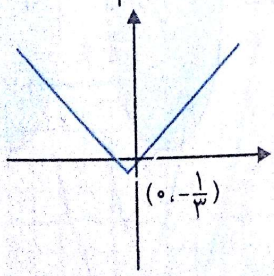
۳- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنهٔ تابع $f(x) = x^۲ - ۱$ برابر (۰،+∞) و بُرد آن نیز (۰،+∞) است. نادرست است. دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ و بُرد آن [-۱،+∞) است.



ب) دامنهٔ تابع $f(x) = |x| - \frac{۱}{۳}$ همهٔ اعداد حقیقی و بُرد آن (۲،+∞) است.

نادرست است. برد این تابع $[-\frac{۱}{۳}، +\infty)$ است.



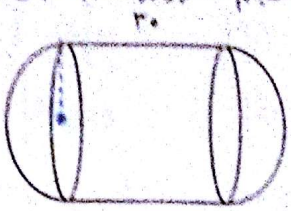
پ) دامنهٔ تابع ثابت $f(x) = ۲$ برابر (-∞،+∞) است. درست است.

ت) اگر $f(x) = ۲x + ۱$ آنگاه، $f(۱) = \frac{f(۲)}{۲}$. نادرست است. زیرا:

$$f(۱) = ۲ \times ۱ + ۱ = ۳ \ , \quad \frac{f(۲)}{۲} = \frac{۲ \times ۲ + ۱}{۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow f(۱) \neq \frac{f(۲)}{۲}$$

Scanned by CamScanner

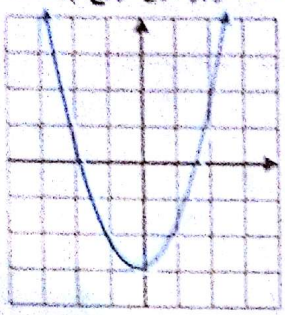
یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.



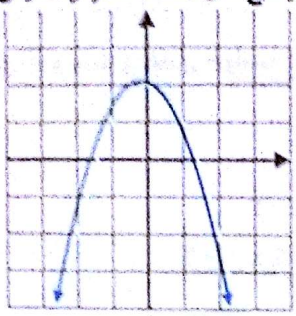
$V(r) = ۲ \times$ حجم نیم کره + حجم استوانه

$V(r) = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳}\pi r^۳ + \pi r^۲ \times ۳۰ = \frac{۲}{۳}\pi r^۳ + ۳۰\pi r^۲$

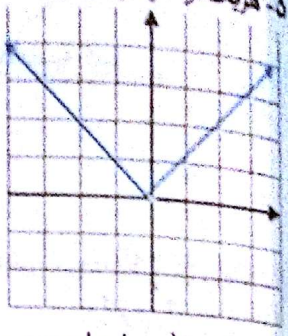
۵- هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع های (الف) تا (ر) را نمایش می دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



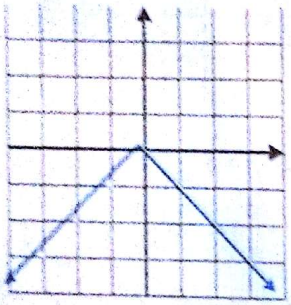
الف) $y = x^۲ - ۳ \xrightarrow{\text{برد}} [-۳, +\infty)$



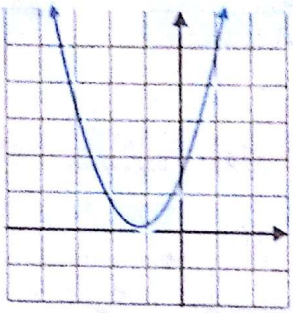
ب) $y = -x^۲ + ۲ \xrightarrow{\text{برد}} (-\infty, ۲]$



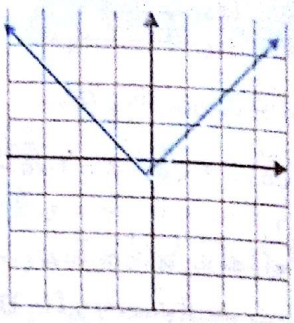
پ) $y = |x| \xrightarrow{\text{برد}} [۰, +\infty)$



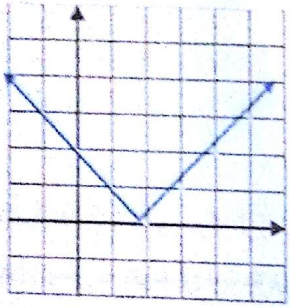
ت) $y = -|x| \xrightarrow{\text{برد}} (-\infty, ۰]$



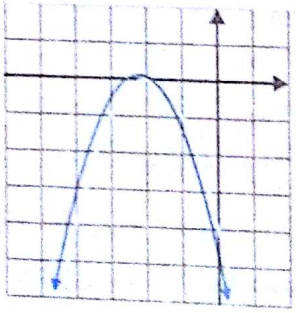
ث) $y = (x+۱)^۲ \xrightarrow{\text{برد}} [۰, +\infty)$



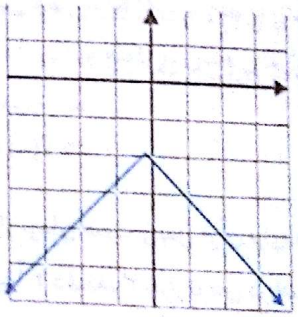
ج) $y = |x| - \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{برد}} [-\frac{۱}{۲}, +\infty)$



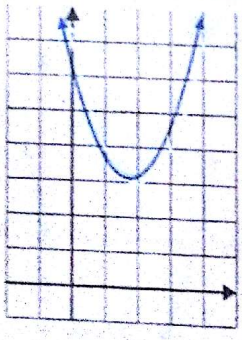
چ) $y = |x - ۲| \xrightarrow{\text{برد}} [۰, +\infty)$



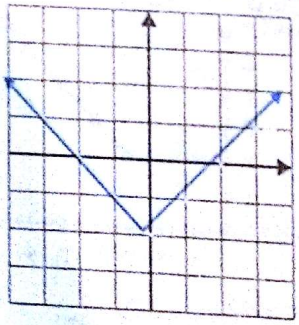
ح) $y = -(x+۲)^۲ \xrightarrow{\text{برد}} (-\infty, ۰]$



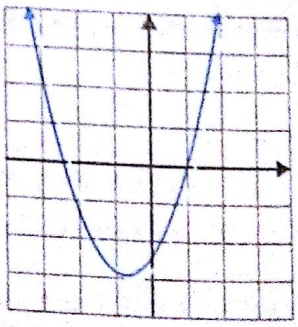
خ) $y = -|x| - ۲ \xrightarrow{\text{برد}} (-\infty, -۲]$



د) $y = (x-۲)^۲ + ۳ \xrightarrow{\text{برد}} [۳, +\infty)$



ذ) $y = |x| - ۲ \xrightarrow{\text{برد}} [-۲, +\infty)$



ر) $y = (x + \frac{۱}{۲})^۲ - ۳ \xrightarrow{\text{برد}} [-۳, +\infty)$

دامنهٔ همهٔ توابع داده شده در قسمت‌های (الف) تا (ر) برابر $\mathbb{R}$ است.

Scanned by CamScanner

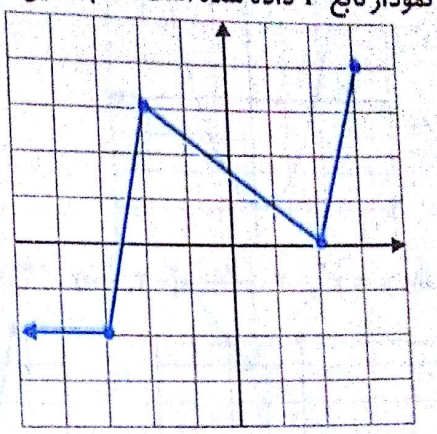
۶- فرض کنیم دامنهٔ هریک از توابع تمرین ۵ به بازهٔ $[-۲,۳]$ محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

الف) برد $= [-۳,۶]$ ب) برد $= [-۷,+۲]$ پ) برد $= [۰,۳]$ ت) برد $= [-۳,۰]$

ث) برد $= [۰,۱۶]$ ج) برد $= \left[\frac{-۱}{۲},\frac{۵}{۲}\right]$ چ) برد $= [۰,۴]$ ح) برد $= [-۲۵,۰]$

خ) برد $= [-۵,-۲]$ د) برد $= [۳,۱۹]$ ذ) برد $= [-۲,۱]$ ر) برد $= [-۳,۹/۲۵]$

۷- نمودار تابع f داده شده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید.



$$f(x)=\begin{cases}-۲ & x<-۳\\ ۵x+۱۳ & -۳\le x<-۲\\ -\frac{۳}{۴}x+\frac{۳}{۲} & -۲\le x<+۲\\ ۴x-۸ & ۲\le x\le ۳\end{cases}$$

$f(۳)=۴$ $\quad$ $f(۶)$: تعریف نشده $\quad$ $f(\sqrt{۵})=۴(\sqrt{۵})-۸=۴\sqrt{۵}-۸$

$f(-\frac{۵}{۲})=۵(-\frac{۵}{۲})+۱۳=\frac{۱}{۲}$ $\quad$ $f(۰)=\frac{۳}{۲}$ $\quad$ $f(\frac{۱}{۲})=\frac{-۳}{۴}(\frac{۱}{۲})+\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۸}$

۸- نمودار یک تابع خطی از نقاط $(۴,۳)$ و $(۰,۳)$ می‌گذرد. مطلوبست $f(-۴)$ و $f(-۱)$ را به‌دست آورید.

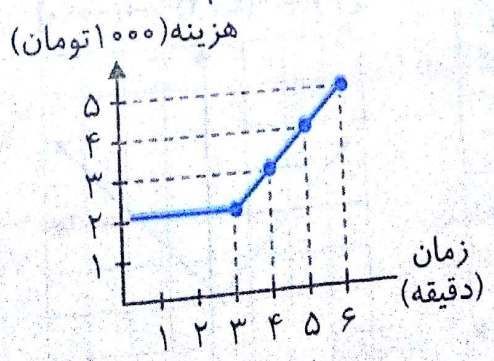
چون f خطی است پس $f(x)=ax+b$ و چون از نقاط $(۴,۳)$ و $(۰,۳)$ می‌گذرد، پس:

$$۳=a(۴)+b \xrightarrow{b=۳} ۴a+۳=۳ \Rightarrow a=۰$$

$$۳=a(۰)+b \Rightarrow b=۳$$

$$\Rightarrow f(x)=۳ \Rightarrow \begin{cases}f(-۱)=۳\\ f(-۴)=۳\end{cases}$$

۹- هزینهٔ مکالمهٔ تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینهٔ آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.



$$f(x)=\begin{cases}۲ & ۰\le x\le ۳\\ x-۱ & ۳<x\le ۶\end{cases}$$

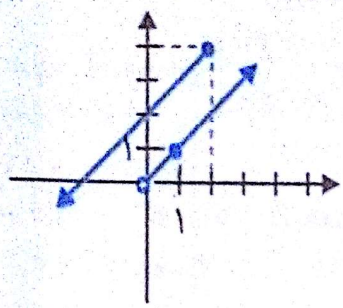
Scanned by CamScanner

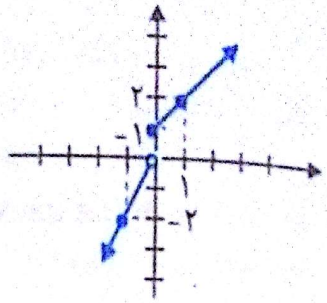
۱۰- کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ x+2 & x\le 2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2x & x<0 \\ x+1 & x\ge 0 \end{cases}$$

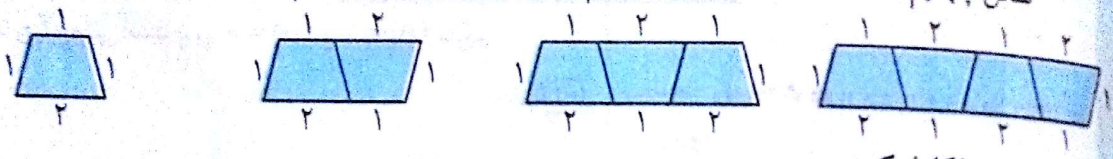
تابع نیست. زیرا مقدار $f(1)$ با ضابطه بالایی برابر ۱ است و با ضابطه پایینی برابر ۳ است.

تابع است.





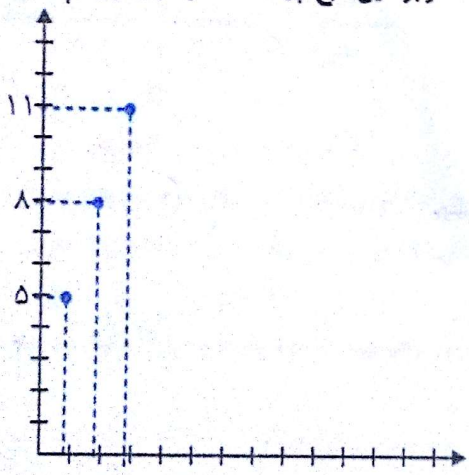
۱۱- الگوی زیر از تعدادی ذوزنقه تشکیل شده است.



الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد ذوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷	$3n+2$

ب) چرا رابطهٔ بین تعداد ذوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

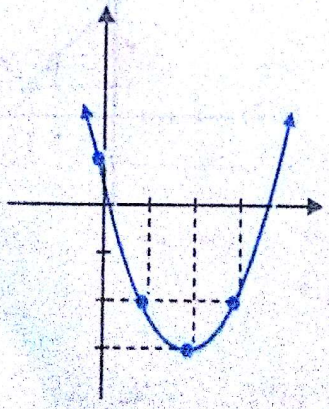


این رابطه یک تابع است زیرا به هر شکل (به هر تعداد ذوزنقه) یک عدد را به عنوان محیط نسبت می‌دهد. ضابطهٔ آن به شکل $f(n)=an+b$ است. به عبارت دیگر نسبت تفاضل عرض‌های دو نقطه از تابع به تفاضل طول‌های همان دو نقطه عددی ثابت برابر ۳ است.

دامنه تابع = $\{1,2,3,\dots\}=\mathbb{N}$ اعداد طبیعی

برد تابع = $\{5,8,11,14,\dots\}$

۱۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(1,-2)$ و $(2,-3)$ می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.



$f(x)=ax^2+bx+c$

$f(0)=1 \Rightarrow c=1$

$f(1)=-2 \Rightarrow a+b+1=-2 \Rightarrow a+b=-3$

$f(2)=-3 \Rightarrow 4a+2b+1=-3 \Rightarrow 4a+2b=-4$

$$\begin{cases} a+b=-3 \\ 4a+2b=-4 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=-4 \Rightarrow f(x)=x^2-4x+1$$

دامنه = $\mathbb{R}$

برد = $[-3,+\infty)$

Scanned by CamScanner